

## ΟΙ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΕ ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑ ...ΜΙΑΣ.

Ντριάνκος Σωκράτης  
Μπουμπουλίνιας 33, 564 30 Σταυρούπολη, Θεσ/νίκη  
e-mail [sntriankos@sch.gr](mailto:sntriankos@sch.gr)

### Περίληψη

Δραστηριότητες που προκαλούν περιέργεια ή έκπληξη, ένα μαθησιακό-γνωστικό παιχνίδι, μια σπαζοκεφαλιά, ένα μαθηματικό παράδοξο, αποτελούν ουσιαστικά κίνητρα των μαθητών για αυτενέργεια, για ελεύθερη παραγωγή, για εσωτερική, ζωντανή, δικής τους δημιουργία.

Οι μαθητές θα έχουν ήδη παρατηρήσει ότι ο πολλαπλασιασμός είναι διαδοχικές προσθέσεις. Δεν θα δυσκολευτούν επίσης να κατανοήσουν ότι η διαίρεση είναι πράξη διαδοχικών αφαιρέσεων. Αλλά, ότι η αφαίρεση μπορεί να μετατραπεί σε πρόσθεση, σίγουρα ανήκει στις ιδιοτροπίες των μαθηματικών.

Στο πάγιο ερώτημα των μαθητών: «καί που χρειάζονται όλα αυτά;» μπορούμε να απαντήσουμε ότι οι βασικές (αριθμητικές) πράξεις που εκτελεί ένας Η.Υ. είναι δύο: υπολογισμός συμπληρώματος και πρόσθεση.

### Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή παρουσιάζω την «μέθοδο του συμπληρώματος» η οποία χρησιμοποιείται από τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές για την μετατροπή της αφαίρεσης σε πρόσθεση. Η ανάπτυξη είναι για το δεκαδικό σύστημα και μπορεί να παρουσιαστεί σε οποιαδήποτε τάξη του Γυμνασίου ή του Λυκείου. Οι ορισμοί μπορούν να δοθούν ή όχι, ανάλογα με την τάξη και το γνωστικό της επίπεδο. Ακόμη, η τεχνική και μόνο εντυπωσιάζει τους μαθητές και τους παρακινεί να παρακολουθήσουν με ενδιαφέρον την διαδικασία.

### Α.Πρόσθεση:

$$6+5+8 = 19, \quad 6+7+7+2+2+2 = 26, \quad 3+3+3+3+3 = 15, \\ 6+6+6+6+6+6+6 = 48$$

Παρατηρήστε τις δύο τελευταίες προσθέσεις. Σ' αυτές οι προσθετέοι αποτελούν επανάληψη του ίδιου αριθμού (του 3 και του 6 αντίστοιχα).

(Πρακτικά 21ου Συνεδρίου ΕΜΕ-σελ.104-107).

### **Β. Πολλαπλασιασμός:**

Για την τελευταία πρόσθεση μπορούμε να πούμε πιο σύντομα:  $6 \times 8 = 48$   
Μια τέτοια πρόσθεση του ίδιου αριθμού στον εαυτό του πολλές φορές  
( $6 \times 8 = 6+6+6+6+6+6+6$ ) πήρε το όνομα πολλαπλασιασμός.

Πολλαπλασιασμός λοιπόν είναι η πρόσθεση του πολλαπλασιαστέου (6)  
στον εαυτό του τόσες φορές, όσες δηλώνει ο πολλαπλασιαστής (8).

Αν πάλι πάρουμε τον 4 ως προσθετέο 6 φορές, το άθροισμα αυτό είναι  
ταυτόχρονα και ένας πολλαπλασιασμός:  $4+4+4+4+4+4 = 4 \times 6$ .

### **Γ. Διαίρεση:**

Στο τελευταίο παράδειγμα βρίσκουμε ως αποτέλεσμα 24,  
προσθέτοντας τον αριθμό 4 στον εαυτό του 6 φορές.  
Όπως προσθέσαμε τον 4 πολλές φορές, δεν γίνεται και να αφαιρέσουμε τον  
4 πολλές φορές; Πόσες φορές αφαιρείται ο 4 από τον 24;  
 $24 - 4 = 20$  [1 φορά],  $20 - 4 = 16$  [2 φορές],  $16 - 4 = 12$  [3 φορές],  
 $12 - 4 = 8$  [4 φορές],  $8 - 4 = 4$  [5 φορές],  $4 - 4 = 0$  [6 φορές].  
Τελικά, ο αριθμός 4 αφαιρείται 6 φορές από τον 24.  
Ο αριθμός 6, που είναι το πηλίκο της διαίρεσης  $24 : 4$ , φανερώνει πόσες  
φορές αφαιρείται ο 4 από τον 24.

Αν έχουμε την διαίρεση  $25 : 4$ , τότε  $25 - 4 = 21$  [1<sup>η</sup> αφαίρεση],  $21 - 4 = 17$  [2<sup>η</sup>],  
 $17 - 4 = 13$  [3<sup>η</sup>],  $13 - 4 = 9$  [4<sup>η</sup>],  $9 - 4 = 5$  [5<sup>η</sup>],  $5 - 4 = 1$  [6<sup>η</sup>  
αφαίρεση], διαπιστώνουμε και πάλι ότι ο 4 αφαιρείται 6 φορές από τον 25  
και ...περισσεύει 1. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι:  
Διαίρεση δυο ακεραίων ( διαιρετέου και διαιρέτη) σημαίνει να βρούμε  
πόσες φορές (πηλίκο) είναι δυνατό να αφαιρεθεί ο διαιρέτης από τον  
διαιρετέο και τέλος τί περισσεύει (υπόλοιπο).

### **Δ. Αφαίρεση:**

Η διαίρεση λοιπόν είναι μια σειρά από αφαιρέσεις που συνεχίζονται,  
ώσπου να βρεθεί υπόλοιπο μικρότερο από τον αριθμό που αφαιρείται  
(διαιρέτη).

Και με την αφαίρεση τί γίνεται;...Την μετατρέπουμε σε πρόσθεση.  
Παρακολουθήστε την διαδικασία μετατροπής συμπληρώνοντας τα κενά  
στους πίνακες που ακολουθούν.

#### **Πως η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση.**

Συμπλήρωμα:

- Συμπλήρωμα ψηφίου α είναι το ψηφίο 9-α

ψηφίο	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
συμπλήρωμα	9	8				4	3		1	0

(Πρακτικά 21ου Συνεδρίου ΕΜΕ-σελ.104-107).

- ο Συμπλήρωμα αριθμού  $\chi$  (με  $n$  ακέραια και  $k$  δεκαδικά ψηφία) ως προς 9 είναι ο αριθμός  $10^n - \chi - 10^{-k}$ .  
Π.χ. Συμπλήρωμα του 15 ως προς 9 είναι ο αριθμός :  
 $100 - 15 - 1 = 99 - 15 = 84$ .

Τελικά, για να βρούμε το συμπλήρωμα ενός αριθμού ως προς 9 γράφουμε τα συμπληρώματα κάθε ψηφίου του αριθμού.

αριθμός	15	156	1013	1821	2004
συμπλήρωμα ως προς 9	84	....	8986	.....	7995

- ❖ Συμπλήρωμα αριθμού  $\chi$  (με  $n$  ακέραια ψηφία) ως προς (βάση) 10 είναι ο αριθμός  $10^n - \chi$ .

Π.χ. Συμπλήρωμα του 15 ως προς 10 είναι ο αριθμός :  
 $100 - 15 = 85 [= 99 - 15 + 1]$

Για το συμπλήρωμα ενός αριθμού ως προς βάση 10, αρκεί στο συμπλήρωμα ως προς 9 (δηλ. στον αριθμό που σχηματίζεται από τα συμπληρώματα κάθε ψηφίου του) να προσθέσουμε μια μονάδα στο ψηφίο με τη μικρότερη σημαντικότητα. Μπορούμε επίσης να πούμε ότι για να βρούμε το συμπλήρωμα ενός αριθμού ως προς 10 αρκεί, ξεκινώντας από το αριστερό άκρο, να αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο του αριθμού από το 9, εκτός από το δεξιότερο ψηφίο που το αφαιρούμε από το 10.

αριθμός	συμπλήρωμα ως προς 9	συμπλήρωμα ως προς 10
523	476	477
1034	8965	...
89	...	11
8	1	2

- Συμπλήρωμα αφαιρετέου ως προς βάση 10.

Ας θεωρήσουμε την αφαίρεση  $\alpha - \beta$ , όπου ο μειωτέος  $\alpha$  έχει  $k$  ακέραια ψηφία. Συμπλήρωμα του αφαιρετέου  $\beta$  ως προς 10 είναι ο αριθμός  $10^k - \beta$ . Στην πράξη για να βρούμε το συμπλήρωμα του αφαιρετέου ακολουθούμε τα εξής δύο βήματα:

A Προσθέτουμε μηδενικά στην αρχή του αφαιρετέου, ώστε να έχει τον ίδιο αριθμό ψηφίων με τον μειωτέο.

B. Βρίσκουμε το συμπλήρωμα του αριθμού που προκύπτει ως προς βάση 10, με την τεχνική που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

(Πρακτικά 21ου Συνεδρίου ΕΜΕ-σελ.104-107).

αφαίρεση	μειωτέος	αφαιρετέος	...μηδενικά	συμπλήρωμα αφαιρετέου
386-13	386	13	013	987
2004-15	2004	...	0015	9985
2004-897	2004	897	...	...

Η μετατροπή της αφαίρεσης σε πρόσθεση:

Ας θεωρήσουμε την αφαίρεση:  $584 - 235 = 349$ .  
Την πράξη αυτή μπορούμε να την παραστήσουμε και ως εξής:  $584 - 235 = 584 + (1000 - 235) - 1000 = 584 + 765 - 1000 = 1349 - 1000$ . Η παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι το συμπλήρωμα του 235 ως προς 10. Η αφαίρεση  $584 - 235$  ανάγεται ουσιαστικά στην πρόσθεση:  $584 + 765 = 1349$ , γιατί η αφαίρεση του 1000 δεν είναι τίποτα άλλο παρά η αγνόηση του 1 στα αριστερά του αποτελέσματος. Τελικά προσθέτω στον μειωτέο το συμπλήρωμα του αφαιρετέου και διαγράφω το ψηφίο της πιο σημαντικής θέσης.

Ας δούμε και την αφαίρεση 386-13:

$$386-13 = 386+(1000-13)-1000=386+987-1000=1373-1000=373.$$

Μορφή που θα μπορούσε να έχει ένα φύλλο εργασίας.

αφαίρεση	ιδιος αριθμος ψηφίων αφαιρετέου	πρόσθεση του συμπληρώματος	αποτέλεσμα πρόσθεσης	διαγραφή του πιο σημαντικού ψηφίου
386-13	386-013	386+987	1373	373
2004-897	2004-0897	.....	11107	.....
755-499	.....	.....	.....	256

Με ελάχιστη λοιπόν "θεωρία" και με ένα πολύ απλό φύλλο εργασίας μπορούμε να κεντρίσουμε την περιέργεια των μαθητών και να τους οδηγήσουμε σε μια βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση των πράξεων.

#### Βιβλιογραφία:

- Δανιηλόπουλος, Στυλιανός (1980). Εισαγωγή στην Υπολογιστική. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.  
Κιουντούζης, Ευάγγελος (1977). Επιστήμη Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.  
Πολυδούρης, Βαγγέλης (1995). Η Αριθμητική των ακεραίων. Θεσ/νικη: Αφοι Κυριακίδη.