Εισήγηση στο 28ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,
Αθήνα, Νοέμβριος 2011

Η ΚΑΤΣΙΚΑ ΚΑΙ Η ΣΤΑΝΗ: ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΧΕΛΩΝΟΚΟΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ντριάνκος Σωκράτης, Μπουμπουλίνας 33, 56430 Σταυρούπολη, Θεσσαλονίκη, sntriankos@sch.gr
Σταματόπουλος Κωνσταντίνος, Κακόβατος, 27054 Ζαχάρω, gus_stamos@yahoo.com

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια ενιαία και ολοκληρωμένη πρόταση δραστηριότητας, η οποία στοχεύει σε μια ενοποιητική γνωστική προσέγγιση της Γεωμετρίας, της Τριγωνομετρίας, της Άλγεβρας, και της Ανάλυσης, μέσα από τη χρήση του Λογισμικού «Χελωνόκοσμος». Μέσω του λογισμικού, πραγματοποιείται διερεύνηση ενός ενδιαφέροντος, ελκυστικού και, από μαθηματικής άποψης, πλούσιου προβλήματος. Το υπό διαπραγμάτευση πρόβλημα απαιτεί τον σχεδιασμό πολυγωνικών σχημάτων και τον υπολογισμό των εμβαδών τους, το σχεδιασμό μιας ακολουθίας κυκλικών τομέων με συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες και τον υπολογισμό των εμβαδών τους, θέματα μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης, θέματα δεκαδικής προσέγγισης αριθμών, καθώς επίσης και κατανόηση της έννοιας του ορίου και της σύγκλισης ακολουθιών. Με τη χρήση του λογισμικού μετασχηματίζονται οι μαθηματικές ιδέες σε γλώσσα προγραμματισμού περιβάλλοντος Logo, οπτικοποιείται και επιλύεται το πρόβλημα.

Η διερεύνηση του προβλήματος, που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία, δεν περιορίζεται σε μια περιοχή των μαθηματικών, αλλά κινείται ταυτόχρονα σε πολλούς μαθηματικούς κλάδους και σε διαφορετικές θεματικές ενότητες κάθε κλάδου. Αποτελεί στην ουσία μια ενοποιητική γνωστική προσέγγιση της Γεωμετρίας, της Τριγωνομετρίας, της Άλγεβρας, και της Ανάλυσης, μέσα από τη χρήση του Λογισμικού «Χελωνόκοσμος».

Μέσα από την ενασχόληση με το πρόβλημα ανακύπτει η ανάγκη να διερευνηθούν οι βασικές ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων, η κατασκευή τους, και ο υπολογισμός των εμβαδών τους με τη χρήση του Λογισμικού «Χελωνόκοσμος». Προκύπτει άμεσα και η ανάγκη διερεύνησης του κλασικού ισοπεριμετρικού προβλήματος (το πρόβλημα της Διδούς, 5ος αιώνας π.Χ.), ότι από όλα τα ισοπεριμετρικά σχήματα ο κύκλος έχει το μέγιστο εμβαδό.

Με τη βοήθεια του λογισμικού «Χελωνόκοσμος» κατασκευάζεται μια ακολουθία κυκλικών τομέων με συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες και υπολογίζεται το άθροισμα των εμβαδών τους. Η γενίκευση στην Άλγεβρα επιχειρείται με τον αλγεβρικό υπολογισμό του εμβαδού της ακολουθίας των κυκλικών τομέων. Η γενίκευση στην Ανάλυση προκύπτει ως ανάγκη εισαγωγής και εφαρμογής της έννοιας του ορίου (ως γεωμετρικό αντικείμενο αλλά και αριθμητικά). Στη διερεύνηση του προβλήματος εμπλέκονται και διάφορες άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως η στρογγυλοποίηση αριθμών, η προσέγγιση δεκαδικών αριθμών σε n δεκαδικά ψηφία, η ισότητα αριθμών μέσω ανισοτήτων[1]. Μέσα από την εφαρμογή και τη χρήση του λογισμικού αναδεικνύεται η δύναμη της επιμεριστικής ιδιότητας για τη συντόμευση, άρα και τη μείωση της πολυπλοκότητας και του χρόνου των υπολογισμών.

Η προτεινόμενη δραστηριότητα στοχεύει στην αποδέσμευση της γνώσης από το πλαίσιο μάθησης και στην καλλιέργεια της δεξιότητας για μεταφορά της γνώσης από ένα πλαίσιο μάθησης σε κάποιο άλλο.

Δεν είναι αρκετό να ξέρουμε απλώς πώς να λειτουργήσουμε σε μια ορισμένη κατάσταση, πρέπει να μάθουμε επίσης να γενικεύουμε τις γνώσεις που αποκτήσαμε, για να μπορούμε να τις εφαρμόσουμε και αλλού (Schank, 2001). Καλλιεργεί επίσης δεξιότητες ανάλυσης ενός προβλήματος σε καλά καθορισμένα υποπροβλήματα, τα οποία ελέγχονται ανεξάρτητα και «συνθέτουν» το κυρίως πρόβλημα˙ άσκηση στην συνεχή διόρθωση της πορείας λύσης˙ έλεγχο για την ορθότητα των διαδικασιών και αναδιατύπωσή τους, όπου είναι απαραίτητο˙ λεκτική διατύπωση της διαδικασίας λύσης οποιουδήποτε υποπροβλήματος και σταδιακή γενίκευση των συμπερασμάτων˙ επέκταση γνώσεων και μεθόδων διερεύνησης προβλημάτων.

Λογισμικό

Το βασικό τεχνολογικό εργαλείο, που προτείνεται για την υλοποίηση της δραστηριότητας, είναι το λογισμικό «Χελωνόκοσμος». Η επιλογή του λογισμικού βασίστηκε στην ευκολία και ευελιξία που παρέχει στη δυναμική απεικόνιση και επίλυση του προβλήματος, που προέκυψε έπειτα από αντίστοιχη προσπάθεια απεικόνισης και επίλυσης του προβλήματος με το λογισμικό Geometer's Sketchpad.

[1] Για αυτές τις έννοιες χρησιμοποιούμε την ανάλυση που γίνεται στο Χατζηδήμος (1977).

Το λογισμικό «Χελωνόκοσμος» επιτρέπει την έκφραση μαθηματικών ιδεών και τον πειραματισμό πάνω σε αυτές, τη χρήση συμβολικής γλώσσας για την επικοινωνία με τον υπολογιστή, τη διατύπωση και τον έλεγχο υποθέσεων, την άμεση ανατροφοδότηση μέσω των σχεδίων της χελώνας, και την τροποποίηση του κώδικα με βάση την ανατροφοδότηση που παρέχει το διακείμενο του λογισμικού (Κυνηγός, 2006). Ο προγραμματισμός στον Χελωνόκοσμο βασίζεται στη γλώσσα Logo, η οποία «έχει τυπικά σύμβολα και σύνταξη σχεδιασμένη, ώστε να πλησιάζει όσο γίνεται περισσότερο το μαθηματικό τυπικό φορμαλισμό» και συνδέει τον προγραμματισμό με την έννοια του «κάνω μαθηματικά» (Κυνηγός, 2006, σελ. 37).

Πλαίσιο εφαρμογής - Σε ποιους απευθύνεται

Η προτεινόμενη δραστηριότητα θα μπορούσε να εφαρμοστεί στην Α΄, Β΄, ή Γ΄ Λυκείου. Κάποιες αυτόνομες ενότητες του προβλήματος θα μπορούσαν ενδεχομένως να αποτελέσουν θέμα για μια ερευνητική εργασία της Α' Λυκείου σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό της πληροφορικής (ΥΠ.Π.Δ.Β.Μ&Θ, 2011). Για την υλοποίηση της δραστηριότητας στα πλαίσια της σχολικής τάξης θεωρείται απαραίτητη η αξιοποίηση του εργαστηρίου υπολογιστών, ώστε οι μαθητές να μπορούν να πειραματίζονται, χωρισμένοι σε μικρές ομάδες.

Μπορεί όμως και ο Πανεπιστημιακός δάσκαλος να βρει ενδιαφέροντα στοιχεία σ' αυτό (πολικές-καρτεσιανές συντεταγμένες, εύρεση της εξίσωσης της περιβάλλουσας ενός συστήματος καμπυλών, Αρχιμήδης - Περί Ελίκων, ολοκλήρωμα) για να αποδείξει ότι οι καθολικές μέθοδοι των ανώτερων μαθηματικών οδηγούν πολλές φορές σε δύσβατα μονοπάτια και ότι, μερικές φορές, τα «στοιχειώδη μαθηματικά» αντιμετωπίζουν ευκολώτερα τα προβλήματα και οδηγούν πιο γρήγορα και πιο απλα σε λύσεις (Δεργιαδές & Λάμπρου, 2004).

Το πρόβλημα

Ο Σωκράτης και η φίλη του Υπατία, και οι δύο μαθηματικοί, αγόρασαν ένα χωράφι στην εξοχή για να απασχολούν το σώμα τους (ίσως και το πνεύμα τους). Ήθελαν να φτιάξουν έναν κήπο και αμπέλι, αλλά οπωσδήποτε να έχουν και μια κατσίκα, για να έχει η Υπατία φρέσκο γάλα, όπως της συνέστησε για την οστεοπόρωση ο γιατρός της Ιπποκράτης.

Σκέφτηκαν ότι θα έπρεπε να περιφράξουν ένα μέρος του χωραφιού για τον κήπο και το αμπέλι και να αφήνουν την κατσίκα έξω από τον φράχτη, για να μην τους καταστρέφει τον κήπο. Αγόρασαν λοιπόν 120 (τρέχοντα) μέτρα συρματόπλεγμα και τους απαραίτητους πασσάλους για την περίφραξη (100 μέτρα ίσως ήταν αρκετά, αλλά το 120 έχει περισσότερους διαιρέτες, και αυτό μπορεί να χρειαστεί σε κάτι…μελλοντικά).

Η Υπατία παρέλαβε την κατσίκα από το κοπάδι του φίλου τους Μένωνα, αλλά αγόρασε και 60 μέτρα σχοινί για να την δένει (50 μέτρα ίσως να ήταν αρκετά, αλλά το 60 είναι το μισό του 120, και αυτό μπορεί να χρειαστεί σε κάτι…μελλοντικά).

Όταν γύρισε η Υπατία με την κατσίκα, ο Σωκράτης ήδη είχε φράξει μια ορθογώνια περιοχή, 40Χ20. Η Υπατία είχε αντιρρήσεις: θα προτιμούσε να έφραζε τετράγωνη έκταση γιατί νόμιζε ότι θα ήταν μεγαλύτερη. Η Υπατία ισχυριζόταν ότι με το ίδιο συρματόπλεγμα θα μπορούσαν να περιφράξουν έναν «πολυγωνικό» ή κυκλικό κήπο με πολύ μεγαλύτερη έκταση και, πάντα υπερβολική, έλεγε ότι ο κήπος της θα μετατραπεί σε…στάνη, ονομασία που έμεινε τελικά για τον κήπο της. Ο Σωκράτης υποσχέθηκε στην Υπατία ότι θα αλλάξει την περίφραξη και, αφού μελετήσει το θέμα, θα φράξει τη μέγιστη δυνατή έκταση με αυτό το συρματόπλεγμα.

Προσωρινά, έδεσε την κατσίκα από τον πάσσαλο μιας κορυφής του ορθογωνίου, έξω από τη στάνη για να μην μπορεί η κατσίκα να μπει μέσα και να τους καταστρέψει τον κήπο. Εκείνο το βράδυ δεν έκλεισαν μάτι. Μέχρι το επόμενο πρωί προσπαθούσαν να βγάλουν άκρη με τους ισχυρισμούς της Υπατίας για το εμβαδόν της στάνης και με τον υπολογισμό της έκτασης που θα είχε η κατσίκα για βοσκή[2].

Διερευνήστε αν ισχύει ο ισχυρισμός της Υπατίας για την τετράγωνη και την ορθογώνια στάνη με περίμετρο 120 μέτρα. Ο ισχυρισμός της Υπατίας ισχύει για οποιαδήποτε περίμετρο ορθογωνίων;

Υπολογίστε το εμβαδόν βοσκής της κατσίκας για τετράγωνη στάνη.

Διερευνήστε τους ισχυρισμούς της Υπατίας για πολυγωνικές στάνες (κανονικά πολύγωνα).

Υπολογίστε το εμβαδόν βοσκής της κατσίκας για τις πολυγωνικές στάνες;

[2] Το πρόβλημα αποτελεί σύνθεση διαφόρων προβλημάτων που αναφέρονται στα Tikhomirov (1999), Δεργιαδές & Λάμπρου (2004), Λάμπρου & Σπανουδάκης (2007).

Διερευνήστε τον ισχυρισμό της Υπατίας για κυκλική στάνη[3].

Το πρόβλημα, στο οποίο βασίζεται η δραστηριότητα, παρόλο που «προσφέρεται με ένα τρόπο λίγο χιουμοριστικό και λίγο παραδοξολογικό» (Polya,1963, σελ. 33), αποτελεί ένα πρόβλημα με πλούσιο μαθηματικό υπόβαθρο· δεν είναι πρόβλημα ρουτίνας· αξίζει περαιτέρω διερεύνησης· δίνει μια πρόγευση της δουλειάς του επιστήμονα· και επίσης παρέχει μεθόδους που είναι χρήσιμες όχι μόνο για τη λύση αυτού του προβλήματος, αλλά και για τη διερεύνηση μελλοντικών προβλημάτων (Polya, 2001). Είναι κατάλληλο για την κατανόηση της διαφοράς της εικασίας από την μαθηματική αποδειξη (π.χ. το ισοπεριμετρικό πρόβλημα θα παραμείνει εικασία).

<u>Εξοικείωση με το λογισμικό</u>

Αρχικά, χρειάζεται κάποια εξοικείωση με το διακείμενο του λογισμικού, τις λειτουργίες που επιτελούνται σε κάθε παράθυρο, τη γραμματική και το συντακτικό της γλώσσας, και τις βασικές αρχές για την κίνηση της χελώνας, δηλαδή τη θέση, τον προσανατολισμό και τις εντολές κίνησης και στροφής της χελώνας. Οι βασικές εντολές που είναι απαραίτητες για τη διερεύνηση του προβλήματος είναι: στυλοπανω, στυλοκατω, στηναρχη, θεσηχ, θεσηψ, θεσεχψ, θεσεκατευθυνση, θεσεχρωμαστυλο, make, τύπωσε, sentence, integer.

Πιο σημαντικά για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας είναι η διάθεση, το μεράκι, οι δημιουργικές ιδέες, η απελευθέρωση από την αδράνεια, και η απόδραση από τον ορίζοντα γεγονότων που επιβάλλουν το περιβάλλον, η καθημερινότητα, και η συνήθεια.

<u>Ανάλυση του προβλήματος</u>

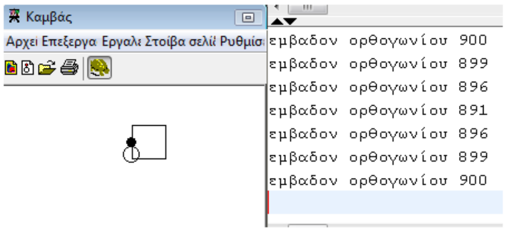
Το πρώτο επιμέρους πρόβλημα που προκύπτει είναι η σύγκριση του εμβαδού ισοπεριμετρικών ορθογωνίων καθώς και η διατύπωση και απόδειξη της εικασίας ότι από όλα τα ισοπεριμετρικά ορθογώνια το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

---

[3] Η δραστηριότητα είναι δομημένη σε φύλλα εργασίας για σταδιακή διερεύνηση, αλλά παρουσιάζεται συνοπτικά λόγω του περιορισμού στην έκταση της εργασίας.

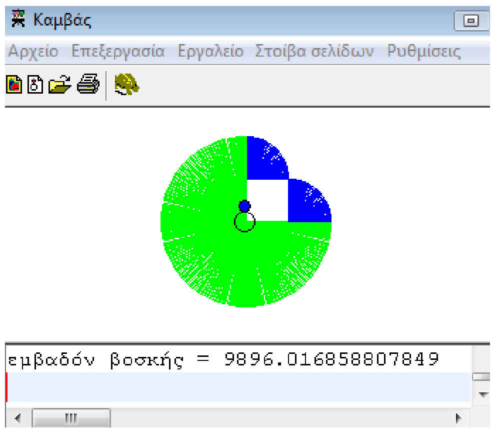
Μια διαδικασία σαν την παρακάτω παρέχει δυναμική απεικόνιση του προβλήματος και επαρκή στοιχεία για τη διατύπωση της εικασίας ότι από τα ισοπεριμετρικά ορθογώνια το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό. Η απόδειξη της εικασίας για συγκεκριμένη περίμετρο ή για τυχαία περίμετρο χρειάζεται να γίνει αλγεβρικά.

```
για ορθογώνιο :α
αν :α > 60 [σταμάτησε]
επανάλαβε 2 [ μ :α δ 90 μ 60-:α δ 90]
τύπωσε (sentence [εμβαδον ορθογωνίου] :α*(60-:α))
τέλος
```

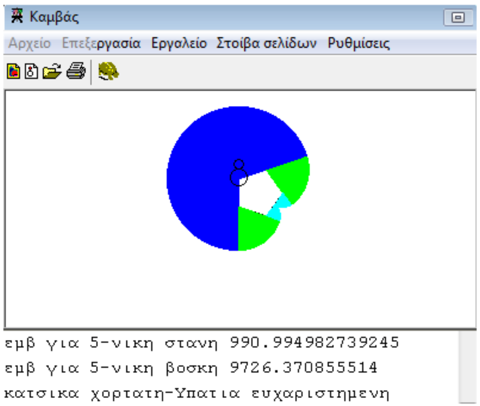


Στη συνέχεια, προκύπτει η ανάγκη σχεδίασης της περιοχής βοσκής της κατσίκας και ο υπολογισμός του εμβαδού της. Για αυτό το βήμα χρειάζεται να γίνει κατανοητό ότι το μήκος του σκοινιού μεταβάλλεται κατά την περιφορά της κατσίκας γύρω από τη στάνη και ότι με αυτό τον τρόπο ορίζονται κυκλικοί τομείς μεταβαλλόμενης ακτίνας. Βασικό δεδομένο που χρειάζεται να ληφθεί υπόψη είναι ότι το σκοινί της κατσίκας είναι ίσο με την ημιπερίμετρο της στάνης. Η προσέγγιση του προβλήματος μπορεί να γίνει τμηματικά, αρχικά για άρτιο πλήθος πλευρών (τετράγωνο, εξάγωνο, οκτάγωνο), και στη συνέχεια για περιττό πλήθος πλευρών.

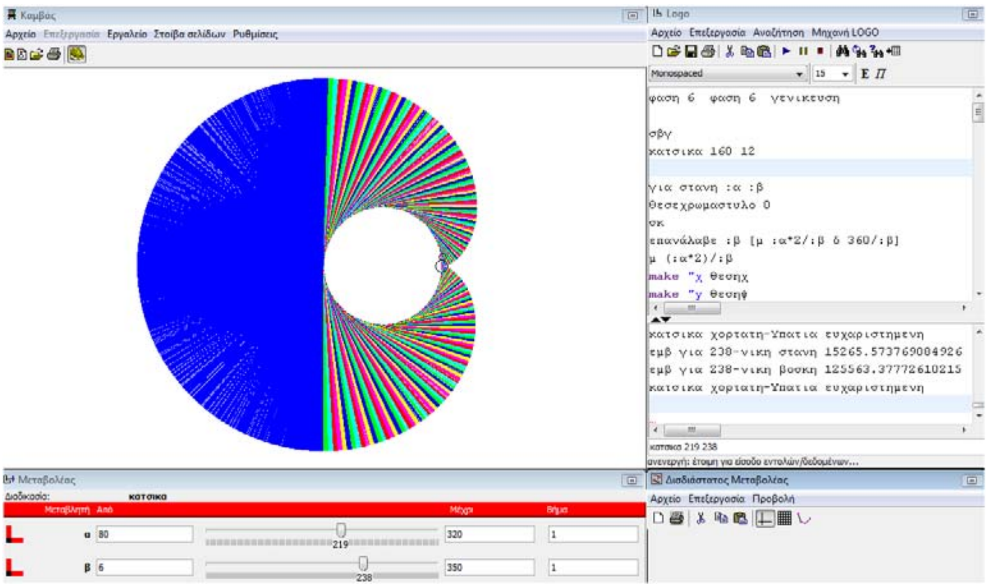
```
για τετραγωνηστάνη
επανάλαβε 4 [μ 120/4 δ 90]
τέλος
```



```
για τετραγωνηβοσκή
τετραγωνηστάνη
σπ μ 60 σκ
θέσεχρωμαστυλο 1
επανάλαβε 90 [π 30 δ 1 μ 30]
make "εμβαδο1 (pi*30*30)*(90/360)
σπ στηναρχη σκ
σπ μ 60 σκ
θεσεχρωμαστυλο 2
επαναλαβε 270 [π 60 α 1 μ 60]
make "εμβαδο2 (pi*60*60)*(270/360)
θέσεχρωμαστυλο 1
επανάλαβε 90 [π 30 α 1 μ 30]
τύπωσε (sentence [εμβαδόν βοσκής =]
((2*:εμβαδο1)+:εμβαδο2))
τέλος
```



Αν ενοποιηθούν οι διαδικασίες σχεδίασης της περιοχής βοσκής και υπολογισμού του εμβαδού για άρτιο και για περιττό πλήθος πλευρών, προκύπτει η δυναμική απεικόνιση και ο υπολογισμός του εμβαδού για οποιοδήποτε πλήθος πλευρών της πολυγωνικής στάνης.



Το πρόβλημα αυτό παρέχει τη δυνατότητα για επέκταση στην περιοχή της Άλγεβρας, και συγκεκριμένα στον υπολογισμό του τύπου του εμβαδού της βοσκής της κατσίκας για άρτιο αριθμό πλευρών πολυγωνικής στάνης. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο περιορισμός που τίθεται για άρτιο αριθμό πλευρών οφείλεται στην δυσκολία αντιμετώπισης του συγκεκριμένου προβλήματος από μαθητές Λυκείου όταν η πολυγωνική στάνη διαθέτει περιττό αριθμό πλευρών.

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία αναδρομικού υπολογισμού του εμβαδού, όπως με το λογισμικό, μπορούμε να κατασκευάσουμε πίνακα στον οποίο απεικονίζεται το εμβαδό για άρτιο πλήθος πλευρών (4, 6, 12), να ακολουθήσει η εικασία και η απόδειξη ότι ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού για άρτιο πλήθος πλευρών είναι:

$$\mathrm{E}_{2\nu} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu}\right)\pi\alpha^2 + \frac{1}{\nu^3}\pi\alpha^2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ...(\nu - 1)^2\right)$$

Σε αυτό το σημείο προκύπτει η ανάγκη να υπολογιστεί το άθροισμα τετραγώνων των ν πρώτων φυσικών αριθμών, το οποίο πραγματοποιείται με τη χρήση τηλεσκοπικών αθροισμάτων και της σχέσης $(\nu + 1)^3 - \nu^3 = 3\nu^2 + 3\nu + 1$, που μας οδηγεί στην ισότητα[4]:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 = \frac{\nu(\nu + 1)(2\nu + 1)}{6}$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο καταλήγουμε ότι το εμβαδό βοσκής για πολυγωνική στάνη με άρτιο αριθμό πλευρών υπολογίζεται από τον τύπο: $\mathrm{E}_{2\nu} = \dfrac{5\nu^2 + 1}{6\nu^2}\pi\alpha^2$

Ο ίδιος τύπος ισχύει και για περιττό αριθμό πλευρών αλλά στην περίπτωση αυτή χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση: $\sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa - 1)^2 = \dfrac{\nu(2\nu + 1)(2\nu - 1)}{3}$. Η απόδειξη βασίζεται στο προηγούμενο συμπέρασμα. Οι αλγεβρικοί χειρισμοί οδηγούν στον ίδιο τύπο για το $\mathrm{E}_{2\nu+1}$, όπου στη θέση του ν, δεξιά του =, έχουμε πλέον (2ν+1)/2.

[4] Αυτή η μέθοδος υπολογισμού του αθροίσματος αναφέρεται στο Polya (2001).

Διαπιστώνεται εύκολα ότι το εμβαδόν που υπολογίζεται με τις διαδικασίες του Χελωνόκοσμου και το εμβαδόν που προκύπτει με την εφαρμογή του τύπου είναι ίσα.

Η περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος απαιτεί να κατασκευαστούν πολυγωνικές στάνες με σταθερή περίμετρο 120, ο υπολογισμός του εμβαδού (στο σημείο αυτό μπορεί να γίνει επέκταση στη Γεωμετρία: υπολογισμός εμβαδού κανονικού ν-γώνου), η σύγκριση με το εμβαδό ισοπεριμετρικού κύκλου και τέλος η γενίκευση για οποιοδήποτε μήκος περιμέτρου. Προκύπτει δηλαδή το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, ότι από όλα τα επίπεδα σχήματα με σταθερή περίπτωση ο κύκλος έχει το μέγιστο εμβαδό.

Μια εκδοχή της διαδικασίας που συγκρίνει το εμβαδό ν-γώνων «τυχαίας» περιμέτρου με το εμβαδό ισοπεριμετρικού κύκλου είναι η παρακάτω.

```
για πολυγωνικηστανη :α :β
σκ
make "χρώμα 1
θεσεχρωμαστυλο :χρώμα
επανάλαβε :β [μ :α/:β δ 360/:β
make "χρώμα :χρώμα+1
αν :χρώμα=7 [make "χρώμα 1]
θεσεχρωμαστυλο :χρώμα]
make "εμβπολυγ (:α/2)*(:α/(2*:β))/tan(180/:β)
make "εμβκυκλ :α*:α /(4*pi)
make "διαφορά :εμβκυκλ - :εμβπολυγ
τυπωσε (sentence [εμβαδον πολυγστανης] :εμβπολυγ)
τυπωσε (sentence [εμβαδον ισοπεριμετρικου κυκλου] :εμβκυκλ)
τυπωσε (sentence [ διαφορα] :διαφορά)
τελος
```

Ο πειραματισμός με τον μεταβολέα μπορεί να οδηγήσει στη διαπίστωση ότι από όλα τα ισοπεριμετρικά κανονικά πολύγωνα ο κύκλος έχει το μέγιστο εμβαδόν. Στο σημείο αυτό τονίζεται ότι απλά διαπιστώθηκε η ισχύς του ισοπεριμετρικού προβλήματος στο εύρος των περιπτώσεων που διερευνήθηκαν, αλλά οπωσδήποτε αυτό δεν αποτελεί απόδειξη της πρότασης. Για τους μαθητές της Α΄ και της Β΄ Λυκείου, η διαπίστωση αυτή θα παραμείνει εικασία, γιατί δεν διαθέτουν τα απαιτούμενα μαθηματικά εργαλεία της Ανάλυσης για να την αποδείξουν.

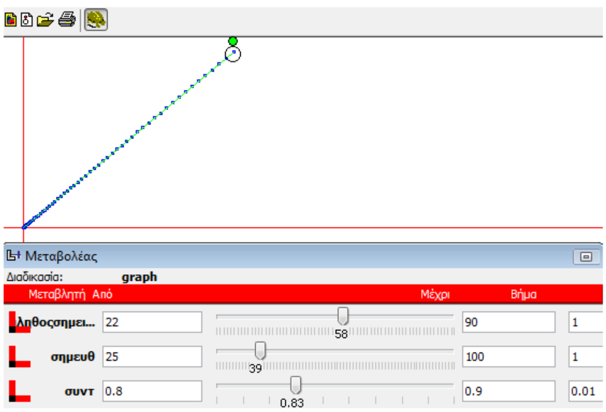
Αντίθετα, οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου μπορούν να αποδείξουν ότι το όριο των εμβαδών των κανονικών πολυγώνων, όταν οι πλευρές αυξάνονται απεριόριστα, είναι το εμβαδόν του ισοπεριμετρικού κύκλου.

Το πρόβλημα που πιθανόν να παρουσιασθεί εδώ είναι ότι οι μαθητές θα εφαρμόσουν τις γνώσεις τους για τα τριγωνομετρικά όρια και για γωνίες σε μοίρες, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι σε εγρήγορση, γιατί οι ανισότητες που οδηγούν στους «τύπους» έχουν αποδειχθεί για γωνίες σε ακτίνια, οπότε χρειάζεται μια κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής).

Στο σημείο αυτό αναδύεται η έννοια του ορίου: για συγκεκριμένη περίμετρο, όσο αυξάνεται το πλήθος των πλευρών του κανονικού πολυγώνου, παρατηρούμε ότι η διαφορά του εμβαδού του από το εμβαδόν του ισοπεριμετρικού κύκλου γίνεται «όσο θέλουμε» μικρή. Τί γίνεται όταν ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου αυξάνεται «απεριόριστα»; Είναι εκπληκτική η βοήθεια του μεταβολέα στην διερεύνηση αυτών των ερωτήσεων.

Η επέκταση στην Ανάλυση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

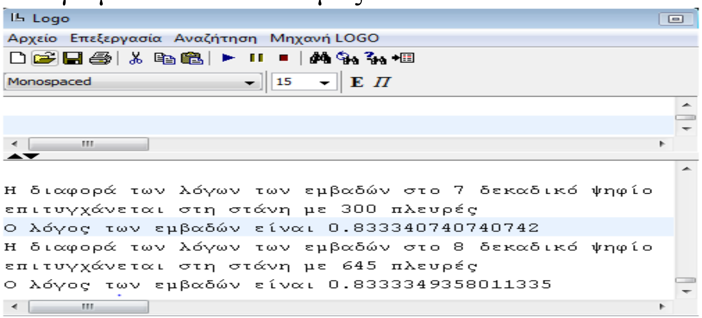
Η πρώτη επέκταση έχει ως στόχο την κατανόηση του ορισμού του ορίου και της έννοιας του ορίου μέσα από τις διαδικασίες που έχουν κατασκευαστεί στο λογισμικό, με την προϋπόθεση ότι έχει βρεθεί ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού. Αυτό επιτυγχάνεται βρίσκοντας συγκεκριμένο αριθμό πλευρών για την πολυγωνική στάνη ώστε η διαφορά του εμβαδού της από τα 5/6 του εμβαδού του κύκλου με ακτίνα όσο η ημιπερίμετρος της πολυγωνικής στάνης να είναι όσο μικρή θέλουμε. Μέσα από αυτή τη διαδικασία αναδύεται και η έννοια της δεκαδικής προσέγγισης νιοστής τάξης. Μπορεί επίσης να κατασκευαστεί μια διαδικασία στο Χελωνόκοσμο, η οποία θα προσεγγίζει με γραφικό τρόπο το όριο του εμβαδού της βοσκής.



Η δεύτερη επέκταση στην Ανάλυση ενδείκνυται αν δεν γίνει επέκταση στην Άλγεβρα. Για την υλοποίηση αυτής της πρότασης, χρειάζεται να τροποποιηθεί η διαδικασία που σχεδιάζει κάθε πολυγωνική στάνη, την περιοχή βοσκής και υπολογίζει το εμβαδόν βοσκής, ώστε να υπολογίζει και τον λόγο του εμβαδού βοσκής με το εμβαδό του κύκλου που έχει ημιπερίμετρο όσο και η πολυγωνική στάνη. Με αυτή τη διαδικασία διαπιστώνεται ότι όσο αυξάνεται το πλήθος των πλευρών της πολυγωνικής στάνης ο λόγος προσεγγίζει τον δεκαδικό αριθμό 0.8333…. Στη συνέχεια μπορεί να κατασκευαστεί μια διαδικασία, η οποία θα υπολογίζει τις διαφορές των λόγων της παραπάνω διαδικασίας και τον αριθμό των πλευρών που πρέπει να έχει η πολυγωνική στάνη ώστε η διαφορά να είναι όσο μικρή θέλουμε. Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται η έννοια της σύγκλισης των ακολουθιών Cauchy, αφού η ακολουθία των εμβαδών βοσκής αποτελεί μια ακολουθία Cauchy και αφού η ακολουθία είναι φθίνουσα και φραγμένη συγκλίνει. Αφού ο λόγος των εμβαδών προσεγγίζει τον δεκαδικό αριθμό 0.8333…., προκύπτει η εικασία ότι το εμβαδόν βοσκής προσεγγίζει το:

(0.8333…)x(Εμβαδόν κύκλου με ακτίνα ίση με την ημιπερίμετρο)

και με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η προσέγγιση του ορισμού του ορίου μέσα από το λογισμικό Χελωνόκοσμος.



Επίλογος

Θεωρούμε ότι η διερεύνηση της δραστηριότητας μέσω του λογισμικού Χελωνόκοσμος θα κεντρίσει το ενδιαφέρον του συναδέλφου, που επιζητά την μαθηματική εμπειρία μέσα από μη τετριμμένα προβλήματα, τα οποία απαιτούν κάποιο ποσοστό ανεξάρτητης σκέψης, κρίσης, πρωτοτυπίας και δημιουργικότητας (Polya, 2001). Αν κριθεί από κάποιον «δύσκολο», θα του υπενθυμίσουμε την γνωστή «ρήση» του Polya: «αν και κανείς ποτέ δεν έφτασε στον Πολικό Αστέρα, πολλοί όμως βρήκαν τη σωστή πορεία κοιτώντας τον» (σελ. 12).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δεργιαδές, Ν., Λάμπρου, Μ. (2004). Στοιχειώδη Εναντίον Ανωτέρων Μαθηματικών. *Απολλώνιος*, τεύχος 3, σελ.66-80.

Κυνηγός Χ. (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης: Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών, Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Λάμπρου, Μ., Σπανουδάκης, Ν. (2007). *Καγκουρό: Μαθηματικά για όλους.* Τόμος Ι. Εκδ: Καγκουρό Ελλάς.

Polya, G. (2001). *Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ*. Τόμος Ι. Αθήνα: Κάτοπτρο.

Polya, G. (1963). Η μάθηση, διδασκαλία και μάθηση του διδάσκειν. *Ευκλείδης Γ΄*, Τόμος 7, Τεύχος 26, Αθήνα: ΕΜΕ.

Schank, R (2001). Τι και πώς να μαθαίνουμε. *Quantum*, Τόμος 8, Τεύχος 4, σελ. 2-3

Tikhomirov, V. (1999). *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα.* Αθήνα: Κάτοπτρο.

ΥΠ.Π.Δ.Β.Μ&Θ (2011). Οδηγίες για τη διδασκαλία της Ερευνητικής Εργασίας της Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου για το σχ. έτος 2011-2012.

Χατζηδήμος, Α. (1978). *Αριθμητική Ανάλυση Ι.* Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Ο προγραμματισμός σε γλώσσα Logo βασίστηκε στα:

Harvey, B. (1997). *Computer Science Logo Style*. Vol. 1-3. Massachousetts: The MIT Press.

Κυνηγός, Χ.. *Εγχειρίδιο χρήσης του «Χελωνόκοσμου»*. Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΕΚΠΑ, Φιλοσοφική Σχολή, Τμήμα Φ.Π.Ψ., Τομέας Παιδαγωγικής.