Εισήγηση
στο 27^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Χαλκίδα, Νοέμβρης 2010

(Πρακτικά 27ου Συνεδρίου ΕΜΕ-σελ.709-717).

ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΕΜΒΑΔΩΝ

ΝΤΡΙΑΝΚΟΣ ΣΩΚΡΑΤΗΣ, καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης,
sntriankos@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι γνωστό ότι θέματα σχετικά με διαίρεση, κλάσματα, αναλογίες, μεταβολές εμβαδών και όγκων όταν μεταβάλλονται οι γραμμικές διαστάσεις και γενικότερα ότι αφορά την εκτέλεση συλλογισμών με λόγους, δημιουργούν πολλά προβλήματα στους μαθητές των γυμνασίων και λυκείων (και όχι μόνο στα μαθηματικά).Είναι όμως θεμελιώδη για την ανάπτυξη της αντίληψης των μαθητών. Επίσης, δυσκολίες παρουσιάζονται στην περιφραστική ερμηνεία των αποτελεσμάτων, αλλά και στην αντιστροφή μιας πορείας συλλογισμών.

Εντάσσοντας την εργασία αυτή στις «καινοτόμες διδακτικές προτάσεις», έχουμε στόχο να ενθαρρύνουμε το μαθητή να διερευνά με τη βοήθεια υλικού και λογισμικού τις εικασίες του, να αναθεωρεί , αν χρειάζεται τις απόψεις του, να «αισθάνεται μέσα του» τις διαδικασίες, να μπορεί να δει το εσωτερικό υπόβαθρο των πραγμάτων που μαθαίνει, την πηγή της ανακάλυψης.

Πιστεύουμε, επίσης, ότι θα κεντρίσει και το ενδιαφέρον του συναδέλφου, που επιζητά την μαθηματική εμπειρία μέσα από μη τετριμμένα προβλήματα, τα οποία απαιτούν κάποιο ποσοστό ανεξάρτητης σκέψης, κρίσης, πρωτοτυπίας και δημιουργικότητας (Polya, 2001).

Εισήγηση
στο 27^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Χαλκίδα, Νοέμβρης 2010

(Πρακτικά 27ου Συνεδρίου ΕΜΕ-σελ.709-717).

Socrates Ntriankos, Secondary School teacher.

CHANGES OF AREAS

ABSTRACT

It is well known that issues concerning division, fractions, analogies, alterations of areas and volumes while linear measurements change, and in general any reasoning in regard with ratios cause difficulties to secondary school pupils in understanding and generating related cogitations. However these issues are fundamental for the development of pupils' comprehension. Besides, difficulties appear in verbal explanation of the outcomes as well as in reversing the reasoning process. This paper, proposed as an innovative teaching version, intends to encourage pupils to explore their suppositions, to revise their views, using given material and software, and to acquire an insight of the processes. We also expect that the paper will be interesting for the fellow mathematicians who look for teaching experiences that presuppose "free-lance and critical mind, ingenuity and creativity" (Polya, 2001).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΣΤΟΧΟΙ

Πολλοί μαθητές (αλλά και αρκετοί ενήλικες), δεν έχουν «εικόνα» του μεγέθους του μέτρου, του τετραγωνικού μέτρου και του κυβικού μέτρου, όπως επίσης και των υποδιαιρέσεων και των πολλαπλασίων αυτών των μονάδων. Βλέπουν μέτρα, τετράγωνα και κύβους σε βιβλία και στον υπολογιστή, αλλά δεν έχουν την ιδέα του «πραγματικού». Οι δραστηριότητες μπορούν να εισαχθούν και από το δημοτικό, προσαρμοσμένες στο διανοητικό επίπεδο των μαθητών και φυσικά να επαναλαμβάνονται και να εμπλουτίζονται με νέα στοιχεία σε μεγαλύτερες τάξεις. Οι γνωστικοί στόχοι της πρότασης μας είναι:

- Να έχουν οι μαθητές πραγματικές εικόνες για το μέτρο, το τετραγωνικό και κυβικό μέτρο, καθώς επίσης και για τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια των μονάδων μέτρησης.
- Να ξεκαθαρίσουν τις έννοιες: περίμετρος, εμβαδόν, όγκος.
- Να ασκηθούν στους συλλογισμούς με λόγους, στην περιφραστική ερμηνεία των λόγων όπως επίσης και στην αντιστροφή μιας διαδικασίας συλλογισμών.
- Να κατανοήσουν τις μεταβολές στα εμβαδά όταν αλλάζει η κλίμακα.

Για την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού, αλλά και της διαφοράς μεταξύ των εννοιών: περίμετρος-εμβαδόν-όγκος, προτείνουμε να αρχίσουν οι παραπάνω δραστηριότητες από την …πραγματικότητα. Σ΄αυτό το εισαγωγικό στάδιο οι μαθητές μπορούν να εργαστούν σε ομάδες. Τα προτεινόμενα υλικά είναι: Χαρτόνι , ξύλινο μέτρο(μήκος ΜΟΝΟ ΕΝΑ μέτρο) , μεζούρα, γραφική υλη φυσικά, όργανα σχεδίασης, ψαλίδι, κόλλα, μπογιές (οι μαθητές πάντα έχουν όρεξη για βάψιμο) και πολλά φύλλα τετραγωνισμένο (τετρ. εκ.) και χιλιοστομετρικό χαρτί. Τετραγωνικά μέτρα από μουσαμά ή χαρτόνι και πολλά τετραγωνικά δέκατα και τετραγωνικά εκατοστά. Δύο ορθογώνια 1μ επί 0,5μ, ένα τετράγωνο μισό επί μισό μέτρο (θα χρειαστούν για την κατασκευή τετραγώνου με πλευρά 1,5μ), δυο ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα με κάθετες πλευρές μισού μέτρου, και 4 ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα με κάθετες πλευρές ενός μέτρου (θα χρειαστούν για την κατασκευή τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.μ.).

Υλικά για την κατασκευή κυβικού μέτρου δηλ.12 πλαστικοί σωλήνες ενός μέτρου και 8 σύνδεσμοι και επίσης 12 πλαστικοί σωλήνες 2 μέτρων και 8 σύνδεσμοι, για την κατασκευή κύβου με ακμή 2μ, κύβοι με ακμή ½ μέτρου, στερεά ορθογώνια 1μ.Χ1μ.Χ1/2μ -1μ.Χ1/2μ.Χ1/2μ. (π.χ. από φελιζόλ, θα χρειαστούν για την κατασκευή κύβου με ακμή 1,5μ) πολλά κυβικά δέκατα (π.χ. από χαρτόνι) και κυβικά εκατοστά.

Οι μαθητές μετράνε το εμβαδόν και την περίμετρο του πατώματος της αίθουσας, του χώρου εκδηλώσεων του σχολείου, των γηπέδων μπάσκετ και βόλεϊ στην αυλή…και γενικά μετράνε μέχρι να βαρεθούν.

Πριν τις μετρήσεις, διατυπώνουν τις εικασίες τους και κατόπιν, με τη βοήθεια του υλικού διαπιστώνουν την ορθότητα των συλλογισμών τους και αναθεωρούν , αν είναι απαραίτητο.

Αν το αντικείμενο έχει κάποιο γνωστό «τύπο» μπορούν να μετρήσουν τις διαστάσεις και να υπολογίσουν το εμβαδόν με τη βοήθεια της αριθμομηχανής. Διαφορετικά, είναι αναγκαίο να τοποθετήσουν κατ επανάληψη το τετραγωνικό μέτρο και πιθανόν υποδιαιρέσεις και να μετρήσουν το πλήθος αυτών των μονάδων.

Μπορούν να επεκταθούν και στον όγκο. Πόσοι μοναδιαίοι κύβοι τοποθετούνται στο πάτωμα; Όσα τ.μ. είναι το εμβαδόν του πατώματος φυσικά. Συμπληρώνουν ένα φύλλο εργασίας με τα ονόματα των αντικειμένων που μέτρησαν και δίπλα, σε τρεις στήλες, την περίμετρο, το εμβαδόν, και τον όγκο (όπου υπάρχει ή όπου μπορούν να τον μετρήσουν) των αντικειμένων αυτών.

Οι αρχικές μετρήσεις μήκους είναι με το ξύλινο μέτρο (ενός μέτρου). Προσπαθούν επίσης να μετρήσουν το εμβαδόν ενός επίπεδου χωρίου που δεν περικλείεται από ευθ.τμήματα (ο δάσκαλος το έχει σχεδιάσει στο πάτωμα ή στο έδαφος), τοποθετώντας το τετραγωνικό μέτρο (και πιθανόν υποδιαιρέσεις) όσες φορές χρειάζεται …και κάνοντας εικασίες για το τι γίνεται στο σύνορο.

Τελικά, το εμβαδόν μιας επιφάνειας καθορίζεται από τον αριθμό των μοναδιαίων τετραγώνων (ή υποδιαιρέσεων) που «καλύπτουν» την επιφάνεια.

Ανάλογη εργασία για τον όγκο.

Κατασκευάζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 2τ.μ. και επίσης, με την βοήθεια των τεσσάρων ορθογωνίων και ισοσκελών τριγώνων με κάθετες πλευρές 1 μέτρου (έχουν στα υλικά τους), κατασκευάζουν τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.μ. και προσπαθούν να βρουν το ακριβές μήκος της πλευράς του, χρησιμοποιώντας και την αριθμομηχανή.

Πόσο ακριβώς είναι η πλευρά αυτού του τετραγώνου; Κατασκευάζουν ένα τετράγωνο 1,5 επί 1,5 με τη βοήθεια των υλικών (π.χ. 1 τ.μ. , τα 2 ορθογώνια 1 επί μισό μέτρο και το τετράγωνο μισό επί μισό…1,5*1,5=2,25…2 και ¼ τετρ.μ.**).**

Δημιουργούν σε κάθε ομάδα ένα φύλλο εργασίας για τη διερεύνηση της μεταβολής του εμβαδού τετραγώνου και ορθογωνίου παραλληλόγραμμου αν μεταβάλλουμε την μια ή και τις δυο διαστάσεις. Σε κάθε ομάδα προσπαθούν να βρουν τις διαστάσεις των ορθογωνίων παραλληλογράμμων με δεδομένο εμβαδόν. Αν ο αριθμός που εκφράζει το εμβαδόν είναι ακέραιος, και θέλουμε ακέραιες διαστάσεις, μπορεί να γίνει συσχετισμός της αναζήτησης με την εύρεση των συζυγών διαιρετών αυτού του αριθμού π.χ. για εμβαδόν 24τ.μ.: (1,24),(2,12),(3,8),(4,6), κάθε ζευγάρι βρίσκεται «εντός» του προηγουμένου. Φυσικά τονίζουμε τις, με περισσότερο μαθηματικό ενδιαφέρον, ρητές και άρρητες περιπτώσεις (π.χ. 0,5Χ48, 0,1Χ240, 0,01Χ2400, $\sqrt{10}\cdot\sqrt{57,6}$ κλπ. ανάλογα με την τάξη). Συμπληρώνουν φύλλο εργασίας με τις διάφορες δυνατές περιπτώσεις.

Αν γνωρίζουμε την περίμετρο τετραγώνου, μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του; Αν γνωρίζουμε την περίμετρο τυχαίου πολυγώνου μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του;

Αν αυξήσουμε την περίμετρο θα έχουμε μεγαλύτερο εμβαδόν; Αν διατηρήσουμε την περίμετρο, μπορούμε να επιτύχουμε μεγαλύτερο εμβαδόν αλλάζοντας το σχήμα του πολυγώνου; Εδώ, ως κίνητρο μάθησης, μπορεί ο δάσκαλος να χρησιμοποιήσει σχόλια για την πρόταση Ι.35 των Στοιχείων : Τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται μεταξύ παραλλήλων ευθειών και έχουν την ίδια βάση είναι ισεμβαδικά (Σταμάτης,1975). Αν διατηρήσουμε σταθερή την απόσταση στο ένα ζεύγος παραλλήλων και σταθερή τη «βάση» του παραλληλογράμμου πάνω σε μία από αυτές τις παράλληλες, τότε μεταβάλλοντας το άλλο ζεύγος των παραλλήλων, αυξάνουμε απεριόριστα την περίμετρο, διατηρώντας σταθερό το εμβαδόν. Ανάλογα με την τάξη, μπορούμε να δώσουμε και το παράδειγμα της «νιφάδας» Koch (η περίμετρος τείνει στο άπειρο, το εμβαδόν όμως διατηρείται σταθερό).

Αντίστροφα, ένα πολύ καλό παράδειγμα σταθερής περιμέτρου και μεταβολής του εμβαδού ανάλογα με το σχήμα, είναι και το κλασικό ισοπεριμετρικό πρόβλημα (Tikhomirov, 1999).

Εισήγηση
στο 27^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Χαλκίδα, Νοέμβρης 2010

(Πρακτικά 27ου Συνεδρίου ΕΜΕ-σελ.709-717).

Δραστηριότητες που προκαλούν περιέργεια ή έκπληξη, ένα μαθησιακό-γνωστικό παιχνίδι, μια σπαζοκεφαλιά, ένα μαθηματικό παράδοξο, αποτελούν ουσιαστικά κίνητρα των μαθητών για αυτενέργεια, για εσωτερική, ζωντανή, δική τους δημιουργία.

Στις δραστηριότητες ο δάσκαλος επεμβαίνει όσο το δυνατόν λιγότερο. «*Αν κοιτάξουμε τη λέξη παιδαγωγός, θα βρούμε μέσα της το ρήμα «άγω» που σημαίνει οδηγώ, καθοδηγώ. Αυτό ακριβώς σημαίνει ...να καθοδηγείς, να νοιώθεις ενθουσιασμό ο ίδιος, να καταλαβαίνεις τον εαυτό σου και να βάλεις αυτό το έδεσμα μπροστά στους άλλους λέγοντας: Κοίτα τι θαυμάσιο! Έλα να το απολαύσουμε μαζί» (Μπουσκάλια,1982:24)*

ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Θα μπορούσαμε να οργανώσουμε πολλές δραστηριότητες με τη βοήθεια κάποιου λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (π.χ.Sketchpad, Cabri, GeoGebra). Προβλήματα του παρελθόντος, ιδίως στην διδασκαλία της γεωμετρίας, όπως οι χρονοβόρες διαδικασίες κατασκευής σχήματος, η ανακρίβεια στα σχήματα, ο περιορισμός στον αριθμό των παραδειγμάτων, η στατικότητα των σχημάτων και η ανάγκη ο μαθητής να φαντάζεται μετασχηματισμούς, αντιμετωπίζονται πάρα πολύ εύκολα με το λογισμικό μέσα από τη χρήση του μεταβολέα.

Οι μαθητές, με την βοήθεια του λογισμικού, μπορούν να εκμεταλλευτούν την ευκαιρία να μαθαίνουν μέσα από τα λάθη τους. *«Η βιολογική εξέλιξη προχωρά μέσα από μια τεράστια, αδυσώπητη διεργασία δοκιμής και λάθους-έτσι κι αλλιώς χωρίς λάθη οι δοκιμές δεν θα επιτελούσαν τίποτε… Έτσι, οποιαδήποτε κι αν είναι η ερώτηση, αν δεν γνωρίζετε την απάντηση, ο μόνος τρόπος να την ανακαλύψετε είναι να κάνετε ένα άφοβο άλμα στο κενό και να ενημερωθείτε από το αποτέλεσμα. Φυσικά, μπορείτε να καθοδηγηθείτε από όσα ήδη γνωρίζετε και να μην ψάχνετε εντελώς στα τυφλά»* (Dennett, 1999).

Εδώ είναι απαραίτητο να τονίσουμε την διαφορά της εικασίας (στην οποία πιθανόν οδηγούμαστε από πολλά παραδείγματα) από την μαθηματική απόδειξη π.χ. η εικασία του Fermat (1630) για το ότι η εξίσωση $x^n+y^n = z^n$ δεν έχει ακέραιες λύσεις για $n \geq 3$, έγινε θεώρημα, αλλά η εικασία του για το ότι οι αριθμοί Fermat (έτσι λέγονται οι αριθμοί της μορφής $2^{2^\nu}+1$, π.χ. για ν=0,1,2,3,4,5, έχουμε τους αριθμούς: 3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297) είναι πρώτοι, δεν είχε την ίδια τύχη, αφού το 1732 ο Euler βρήκε ότι 4294967297=641*6700417. Και εδώ, ως κίνητρο μάθησης, μπορούμε να αναφέρουμε ιστορίες σχετικές με τις προσπάθειες απόδειξης της αλήθειας ή όχι αυτών των υποθέσεων.

Μπορούμε λοιπόν να οδηγήσουμε τους μαθητές σταδιακά σε γενικεύσεις ακολουθώντας π.χ. την εξής πορεία:

Αρχίζουμε με την μεταβολή μόνο σε μια διάσταση τετραγώνου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου, και προχωρούμε στη μεταβολή και των δύο διαστάσεων (πολλαπλασιαστές ακέραιοι, ρητοί και άρρητοι).

Αντίστροφα: το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου (το σκεφτόμαστε τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων) 20-πλασιάστηκε. Ποια είναι η μεταβολή στο μήκος και στο πλάτος; Αν το νέο ορθογώνιο έχει εμβαδόν ¼ του αρχικού, τότε ποιες είναι οι δυνατές μεταβολές σε μήκος και πλάτος;

Συνήθως, δεν παίρνουμε «άρρητες» απαντήσεις, αλλά μπορούμε να τις προκαλέσουμε: Πόσες περιπτώσεις μεταβολής υπάρχουν για τον διπλασιασμό του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου; Με τι θα πολλαπλασιάσουμε την πλευρά τετραγώνου ώστε να διπλασιαστεί το εμβαδόν του; Έχετε δύο τετράγωνα εμβαδού ενός τ.μ. το καθένα. Κατασκευάστε τετράγωνο με εμβαδόν 2 τετραγωνικά μέτρα.

Χρήση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος:

Δίνεται τετράγωνο με εμβαδόν Ε. Κατασκευάστε τετράγωνο με εμβαδόν Ε/2.Μπορείτε να κατασκευάσετε δύο ίσα τετράγωνα που έχουν άθροισμα εμβαδών Ε;

Κατασκευάστε δύο άνισα τετράγωνα που έχουν άθροισμα εμβαδών Ε. Πόσες διαφορετικές περιπτώσεις για άνισα τετράγωνα υπάρχουν;

Δίνονται τρία ίσα τετράγωνα. Κατασκευάστε ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριών τετραγώνων. Δίνεται τετράγωνο με εμβαδόν Ε. Κατασκευάστε τα τρία ίσα τετράγωνα από τα οποία δημιουργήθηκε. Ζητάμε από τους μαθητές την λεκτική περιγραφή των συλλογισμών τους και για την κατασκευή, αλλά και για την αποδόμηση σε τρία τετράγωνα, **την αντιστροφή** της πορείας.

Τετραγωνισμός πολυγώνου: προτάσεις Ι.44-Ι.45-ΙΙ.14 των Στοιχείων. Προτείνουμε να αρχίσει η παρουσίαση από την Ι.35 που προαναφέρθηκε και οι αποδείξεις στις Ι.44, Ι.45 να γίνουν για ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ι.44: Με δοθείσα γωνία ω, δοθείσα πλευρά α και δοθέν τρίγωνο εμβαδού Τ, να κατασκευάστε παραλληλόγραμμο γωνίας ω, πλευράς α και εμβαδού Τ. Ι.45: Με δοθείσα γωνία και πλευρά, να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα. ΙΙ.14: Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα (Σταμάτης, 1975).

Στη Β Λυκείου μπορούμε να προχωρήσουμε και στις αποδείξεις για τη μεταβολή του εμβαδού στο τρίγωνο (με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου και των συντεταγμένων), οπότε καλύπτουμε τις μεταβολές στα πολύγωνα και στα όρια πολυγώνων. Μια ενδεικτική πορεία θα μπορούσε να είναι η εξής:

Αν πολλαπλασιάσουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου επί c,τότε η απόστασή του από την αρχή πολλαπλασιάζεται επί $|c|$.

Έστω σημείο Α=(x,y).

Τότε $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Αν Κ= cA=(cx,cy) , τότε $\left|\overrightarrow{OK}\right| = \sqrt{c^2\left(x^2 + y^2\right)} = |c|\sqrt{x^2 + y^2}$.

Αν πολλαπλασιάσουμε τις συντεταγμένες δύο σημείων επί r>0, τότε η απόστασή τους πολλαπλασιάζεται επί r.

Έστω τα σημεία $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2)$. Τότε $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Για r>0 θεωρούμε τα σημεία $K(rx_1,ry_1)$, και $M(rx_2,ry_2)$, τότε $\left|\overrightarrow{KM}\right|=r\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=r\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Αν έχουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μια κορυφή στην αρχή των αξόνων, OKLM, $K=(0,a), L(b,a), M(b,0)$,a>0,b>0, **τότε** (OKLM) = ab.

Αν πολλαπλασιάσουμε τις τετμημένες επί r>0, $K'(0,a), L'(rb,a), M'(rb,0)$ **τότε** E΄= rab και **αν** πολλαπλασιάσουμε τις τετμημένες επί r και τις τεταγμένες επί t>0 , $K''(0,ta), L''(rb,ta), M''(rb,0)$ **τότε** E΄΄= rtab = rtE.

Αν έχουμε ορθογώνιο ή τυχαίο τρίγωνο τοποθετούμε την αρχή σε μια κορυφή και κατάλληλα τον άξονα τετμημένων, σημεία (0,0), (c,0), (0,b), ή (0,0), (c,0), (a,b), a>0, b>0, c>0, **τότε** $E=\frac{1}{2}bc$.

Αν πολλαπλασιάσουμε τις τετμημένες επί r και τις τεταγμένες επί t>0 , σημεία (0,0), (rc,0), (ra,tb), **τότε** E΄ = rtE.

Αν έχουμε τα σημεία Α,Β,Γ , θέτουμε $\vec{u}=\overrightarrow{AB}, \vec{v}=\overrightarrow{A\Gamma}$.Τότε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τα δυο αυτά διανύσματα είναι $E=\frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|$ (βλ. Αδαμόπουλος κ.ά.,1998:παράγραφος 2.3) .

Έτσι, αν $\vec{u}(x_1,y_1)$ και $\vec{v}(x_2,y_2)$ έχουμε $E=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-y_1x_2\right|$ και αν πολλαπλασιάσουμε τις τετμημένες επί r>0 και τις τεταγμένες επί t>0, τότε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τα διανύσματα (rx_1,ty_1) και (rx_2,ty_2) θα είναι $E'=\frac{1}{2}rt\left|x_1y_2-y_1x_2\right|=rtE$.

Εισήγηση
στο 27^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Χαλκίδα, Νοέμβρης 2010

(Πρακτικά 27ου Συνεδρίου ΕΜΕ-σελ.709-717).

Ας θεωρήσουμε τον μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$, με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Διπλασιάζουμε τις συντεταγμένες των σημείων του $(x,y)\mapsto(2x,2y)$. Αν θέσουμε u = 2x, v=2y, τότε τα σημεία (u,v) ικανοποιούν την εξίσωση : $\frac{u^2}{2^2}+\frac{v^2}{2^2}=1 \Leftrightarrow u^2+v^2=2^2$. Επομένως με τον μετασχηματισμό $(x,y)\mapsto(2x,2y)$ ο αρχικός κύκλος απεικονίζεται σε ομόκεντρο κύκλο με διπλάσια ακτίνα και τετραπλάσιο εμβαδόν (ο δεύτερος κύκλος περιέχει μόνο τις εικόνες των σημείων του πρώτου).

Αν τριπλασιάσουμε τις τετμημένες και διπλασιάσουμε τις τεταγμένες, τότε , θέτοντας u = 3x, v=2y , τα σημεία (u,v) ικανοποιούν την εξίσωση της έλλειψης: $\frac{u^2}{3^2}+\frac{v^2}{2^2}=1$. Και αντιστρόφως, αν $x=\frac{u}{3}, y=\frac{v}{2}$, οδηγούμαστε από την έλλειψη στον κύκλο. Αν u = αx, v=βy, α>0,β>0, τότε το εμβαδόν της έλλειψης $\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{v^2}{\beta^2}=1$, είναι παβ (Lang, 1988).

Όλα τα παραπάνω είναι ειδικές περιπτώσεις γραμμικού μετασχηματισμού σημείων: Έστω $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, τρία σημεία του επιπέδου και $A'(x_1',y_1'), B'(x_2',y_2'), C'(x_3',y_3')$, οι εικόνες αυτών των σημείων μέσω του (κανονικού) γραμμικού μετασχηματισμού: $x'=xa+yb,\ y'=xc+yd$.
Τότε το εμβαδόν Ε΄ του τριγώνου Α΄Β΄C΄ είναι $E'=\left\|\begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix}\right\| E$, όπου Ε=(ABC)

Επειδή το εμβαδόν που περικλείεται από κλειστές καμπύλες είναι άθροισμα ή όριο αθροισμάτων εμβαδών τριγώνων, ο τύπος ισχύει γενικά. Η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ είναι η καμπύλη στην οποία μετασχηματίζεται ο κύκλος $u^2+v^2=1$, αν θεωρήσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό x=ua, y=vb, δηλ. x=ua+0b, y=0a+vb, με ορίζουσα ab (Ανδρεαδάκη, 1975).

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Πρόκειται για ένα θέμα με πλούσιο μαθηματικό υπόβαθρο· αξίζει περαιτέρω διερεύνησης· είναι κατάλληλο για την κατανόηση της διαφοράς της εικασίας από την μαθηματική απόδειξη και επίσης παρέχει μεθόδους που είναι χρήσιμες όχι μόνο για τη συγκεκριμένη διερεύνηση αλλά και μελλοντικών (π.χ. με την βοήθεια του λογισμικού, μπορούμε να διατυπώσουμε την εικασία (και μετά την διερεύνση να αποδείξουμε), ότι απ' όλα τα ορθογώνια με την ίδια περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Στη συνέχεια μπορούμε να διερευνήσουμε με τη βοήθεια του λογισμικού και άλλα πολύγωνα, και μεσω των κανονικών πολυγώνων να οδηγηθούμε στο κλασσικό ισοπεριμετρικό πρόβλημα (εικασία: από όλα τα επίπεδα σχήματα με σταθερή περίμετρο ο κύκλος έχει το μέγιστο εμβαδόν. Η απόδειξη μπορεί να γίνει ή όχι, ανάλογα με το επίπεδο και την ηλικία).

Πιστεύουμε ότι για τον μαθητή έχει μεγαλύτερη σημασία το πώς έφτασε στη γνώση, το ξεπέρασμα του εμποδίου, παρά η τελική λύση του προβλήματος . «*Ο τρόπος με τον οποίο μεταδίδονται οι γνώσεις είναι πολύ πιο σημαντικός και από αυτές τις ίδιες. Σημασία δεν έχει το τι ξέρετε, αλλά το πώς φτάσατε να το ξέρετε*» (Shank, 2001). Το κυριότερο προτέρημά αυτής της μαθηματικής διερεύνησης (όπως και πολλών άλλων) είναι ότι θα προσφέρει στον συνάδελφο και τον μαθητή που θα ασχοληθεί με αυτό την μέγιστη αμοιβή: τη χαρά της εντατικής διανοητικής δραστηριότητας.

Αν κριθεί από κάποιον «δύσκολο», θα του υπενθυμίσουμε την γνωστή «ρήση» του Polya: «*αν και κανείς ποτέ δεν έφτασε στον Πολικό Αστέρα, πολλοί όμως βρήκαν τη σωστή πορεία κοιτώντας τον*» (Polya, 2001: 12).

Εισήγηση

στο 27ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Χαλκίδα, Νοέμβρης 2010

(Πρακτικά 27ου Συνεδρίου ΕΜΕ-σελ.709-717).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδρεαδάκη, Σ. (1975). *Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας*. Αθήνα: (χ.έ).

Αδαμόπουλος, Λ. κ.ά. (1998). *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου. Θετική Κατεύθυνση.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Dennett, D. (1999). Γιατί πρέπει να κάνουμε λάθη, *Quantum*, 6 (4): 2-4.

Lang, S. (1988). *Basic mathematics*. New York & Berlin: Springer.

Μπουσκάλια, Λ. (1982). *Να ζεις ν΄ αγαπάς και να μαθαίνεις*. Αθήνα: Γλάρος.

Polya, G. (2001). *Η μαθηματική ανακάλυψη*, τόμος Α΄. Αθήνα: Κάτοπτρο.

Schank, R. (2001). Τι και πώς να μαθαίνουμε. *Quantum*, 8 (4): 2-3.

Σταμάτη, Ε.(1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία: Στοιχεία,* τ. Α΄. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Tikhomirov, V. (1999). *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα*. Αθήνα: Κάτοπτρο.