



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

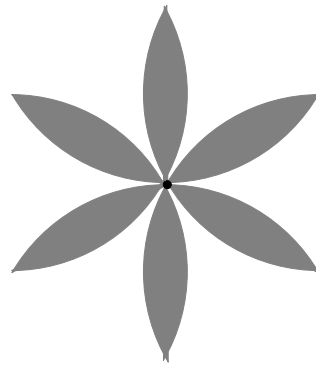


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών  
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Άρρητοι Αριθμοί και Συνεχή Κλάσματα:  
Παραστάσεις, Προσεγγίσεις, Εξισώσεις και Διδακτικές Εφαρμογές.**




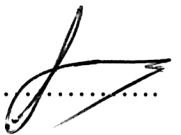
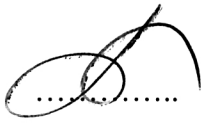
**Μεταπτυχιακός φοιτητής: ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΝΤΡΙΑΝΚΟΣ**  
**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΛΑΠΠΑΣ**

**ΑΘΗΝΑ**  
**ΙΟΥΝΙΟΣ 2011**



Η παρούσα Διπλωματική Εργασία  
εκπονήθηκε από τον **Σωκράτη Ντριάνκο του Βασιλείου (Α.Μ. Δ200802)**  
στα πλαίσια των σπουδών  
για την απόκτηση του  
**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**  
που απονέμει το  
**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**  
**«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την 23<sup>η</sup> Ιουνίου 2011 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) <b>Λάμπας Διονύσιος</b> (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	..... 
2) <b>Γιαννακούλιας Ευστάθιος</b>	Ομοτ. Καθηγητής	..... 
3) <b>Σύρου Παναγιώτης</b>	Επικ. Καθηγητής	..... 



*στη μνήμη του πατέρα μου Βασίλη*

*στη μητέρα μου Αρετή*



### **Ευχαριστώ :**

- Τον αναπληρωτή καθηγητή του ΕΚΠΑ κ. Διονύσιο Λάππα, για την πολύτιμη και πολύπλευρη βοήθειά του, για την υπομονή του, για τον εμπλουτισμό της βιβλιογραφίας μου με μερικά, άγνωστα σε μένα, μαθηματικά αριστουργήματα, αλλά κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.
- Τον ομότιμο καθηγητή κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια και τον επίκουρο καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου που με τίμησαν με την συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή.
- Τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος και ιδιαίτερα τον ομότιμο καθηγητή κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη, που με τις παροτρύνσεις αλλά και τις απαιτήσεις του μου πρόσφερε την μέγιστη ευχαρίστηση: τη χαρά της εντατικής διανοητικής δραστηριότητας. Η σπίθα υπάρχει μέσα σε κάθε άνθρωπο, άνεμος είναι ο δάσκαλος.
- Την Διονυσία Μπακογιάννη που με σπάνια ευγένεια και προθυμία, πάντα, φρόντιζε για την διεκπεραίωση των γραφειοκρατικών θεμάτων.
- Τον Κώστα Σταματόπουλο, όχι μόνο για την άψογη μαθηματική επικοινωνία και συνεργασία που είχαμε στα μεταπτυχιακά μαθήματα, αλλά κυρίως γιατί με τη συμπεριφορά του μου έδειξε κάτι πολύ απλό: αν θέλεις να βοηθήσεις κάποιον, τότε θα τον βοηθήσεις με τον τρόπο που εκείνος θέλει.
- Τον Μανώλη Περήφانو, τον Τριαντάφυλλο Τρανό και τον Γιώργο Ψαθάκη, για την διαρκή ψυχική, κοινωνική και ηλεκτρονική τους στήριξη.
- Τους μαθητές και συναδέλφους μου στο Γυμνάσιο, Γενικό και Τεχνικό Λύκειο Αμυνταίου, στο Γυμνάσιο Πέλλας, στο 3<sup>ο</sup> Λύκειο Πολίχνης Θεσ/νίκης και στο Σχολείο Δεύτερης Ευκαιρίας Νεάπολης, που με τις ερωτήσεις, τις παρατηρήσεις, τις κρίσεις, τις επικρίσεις και επιβραβεύσεις τους, με βοήθησαν να κατανοήσω την αξία της διδασκαλίας στη βαθύτερη διερεύνηση των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών.





## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η ανακάλυψη ότι τα κοινά (συνήθη) κλάσματα δεν είναι αρκετά για τις μετρήσεις έγινε πριν από 2500 περίπου χρόνια. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα γνωρίζουμε ότι η υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με μήκος καθέτων πλευρών ίσο με τη μονάδα μέτρησης, είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν δύο τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.). Η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.μ., ονομάζεται τετραγωνική ρίζα του 2 και το σύμβολο που επιλέχθηκε (μετά το 1525) για να εκφράσει την οντότητα που λέγεται «μήκος» της (γιατί θέλουμε να έχει κάποιο μήκος και το εκφράζουμε με την ιδιότητα της πληρότητας) είναι το  $\sqrt{2}$ . Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι η διαγώνιος και η πλευρά τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο, δηλαδή ο (σημερινός)  $\sqrt{2}$  δεν είναι ίσος με κάποιο λόγο φυσικών, δεν είναι ρητός.

Πρόκειται περί ενός ιδανικού αριθμού, που μπορούμε να τον πλησιάσουμε σε απειροελάχιστη απόσταση, αλλά είναι αδύνατον να τον συλλάβουμε ολόκληρο. Οι αρχαίοι Έλληνες, τον ονόμασαν «άρρητο» (και δεν ήθελαν να τον εντάξουν στους αριθμούς) σε αντιδιαστολή με τους ακεραίους και κλασματικούς, που τους έλεγαν «ρητούς». Ρητός λοιπόν θα πει εκφρασμένος αλλά και προσδιορισμένος (επεκράτησε ο όρος «rational», γιατί οι ρητοί είναι λόγοι, ratios, ακεραίων). Άρρητος σημαίνει μη εκφρασμένος (δεν διέπεται από τη λογική) και μη επαρκώς προσδιορισμένος (δεν εκφράζεται ως λόγος ακεραίων, «irrational»).

Στο πρώτο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι ο  $\sqrt{2}$  ήταν μόνο η αρχή. Πολλοί αριθμοί έμειναν πιστοί στο σώμα των ρητών, αλλά το ρεύμα της αρρητότητας ακολούθησαν σε μεγάλη έκταση ρίζες, λογάριθμοι και τριγωνομετρικοί αριθμοί. Οι άρρητοι λοιπόν επινοήθηκαν, νομιμοποιήθηκαν και, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, «κατέκλυσαν» την πραγματική ευθεία. Για τις αποδείξεις χρησιμοποιείται το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής και το θεώρημα ρητής ρίζας πολυωνυμικής εξίσωσης (που και αυτό είναι συνέπεια της αριθμητικής). *«Η αριθμητική, το πρώτο αντικείμενο μελέτης στη στοιχειώδη διδασκαλία, είναι από τους δυσκολότερους, αν όχι ο δυσκολότερος κλάδος των μαθηματικών, όταν προσπαθεί κανείς να διεισδύσει βαθύτερα σ' αυτήν»* (Hadamard, 1995:162). Με ελάχιστες προαπαιτούμενες γνώσεις εξάπτει την ανθρώπινη περιέργεια και απογειώνει τη δημιουργικότητα και τη φαντασία των νεαρών μαθητών. Ίσως γι αυτό, μαζί με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, είναι από τα μόνιμα αντικείμενα στους μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Στη σύγχρονη ορολογία, η αριθμητική μετονομάστηκε σε «θεωρία αριθμών» και το όνομα αριθμητική καθιερώθηκε για το αντικείμενο που οι αρχαίοι έλεγαν «λογιστική» (Eves, 1989: 127)

Η μεγάλη παιδευτική αξία της ενασχόλησης με τους αριθμούς τονίζεται και από τον Πλάτωνα: «...οὕτω δύναμιν ἔχει παιδείον μάθημα μεγάλην, ὡς ἢ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβὴ τὸ δε μέγιστον, ὅτι τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθὴ φύσει ἐγείρει καὶ εὐμαθὴ καὶ μνήμονα καὶ ἀγγίνουν ἀπεργάζεται, παρὰ τὴν αὐτοῦ φύσιν ἐπιδιδόντα θεία τέχνη» (Plato:Leges, 747b2-b6).

Το δεκαδικό σύστημα ἀρίθμησης ἔχει τα γνωστά πλεονεκτήματα, ἀλλὰ ἴσως επικεντρώνεται στα αποτελέσματα των μετρήσεων και επισκιάζει τις διαδικασίες μέτρησης που μας προσφέρουν τα κλάσματα.

*Η έννοια του συνεχούς κλάσματος προκύπτει φυσιολογικά όταν προσπαθούμε να μετρήσουμε έναν αριθμό  $A$  με τον  $B$  ή ένα μέγεθος  $A$  με το  $B$ .*

Τα κεφάλαια 2,3,4 περιλαμβάνουν την βασική θεωρία των συνεχών κλασμάτων.

Η προσπάθεια προσέγγισης των ἀρρήτων ἀπὸ τους ρητοὺς περιγράφεται στο πέμπτο κεφάλαιο: θεώρημα Dirichlet, ἐνδιάμεσα κλάσματα, δευτεροβάθμια ἀναγωγήματα, βέλτιστες και ἀριστες προσεγγίσεις. Δίνεται ἐπίσης μια ἀπόδειξη του θεωρήματος Hurwitz με τη βοήθεια των συνεχών κλασμάτων και σκιαγραφείται η πρωτότυπη ἀπόδειξη, που βασίσθηκε στις ιδιότητες των κλασμάτων που είναι ὄροι ἀκολουθιών Farey. Η τάξη της προσέγγισης οδήγησε τον Liouville στην κατασκευή ἀρρήτων που υπερέβαιναν τα σύνορα των μέχρι τότε γνωστών ἀριθμῶν. Οι νέοι ἀριθμοὶ ονομάστηκαν υπερβατικοὶ και διαχώρισαν την θέση τους ἀπὸ τους προηγούμενους ἀρρήτους, τους ἀλγεβρικούς ἀρρήτους. Με την βοήθεια των θεωρημάτων Lindemann και Gelfond ἀποδεικνύεται ὅτι οι υπερβατικοὶ υπήρχαν πολύ πριν τους παράξενους ἀριθμοὺς του Liouville και ὅτι στη συνέχεια πολλαπλασιάστηκαν ἀνεξέλεγκτα.

Το προνόμιο της περιοδικότητας του ἀναπτύγματος σε συνεχές κλάσμα το ἔχουν μόνο οι ἀρρητοι που είναι ρίζες δευτεροβάθμιων πολυωνύμων με ἀκέραιους συντελεστές, οι ονομαζόμενοι τετραγωνικοὶ ἀρρητοι. Το γεγονός αυτό ἀποδεικνύεται στο ἕκτο κεφάλαιο.

Πολλές ἀπὸ τις ιδιότητες του ἀναπτύγματος σε συνεχές κλάσμα της τετραγωνικῆς ρίζας φυσικοῦ ἀριθμοῦ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο περιγράφονται στο ἕβδομο κεφάλαιο, ὅπως ἐπίσης και ἐφαρμογές των ιδιοτήτων του ἀναπτύγματος στην λύση της «ἐξίσωσης Pell», στη γραφή ὀρισμένων φυσικῶν ὡς ἀθροισμα τετραγώνων και στα ὀρθογώνια τρίγωνα.

Στο ὄγδοο κεφάλαιο ἀποδεικνύεται η κυριαρχία των υπερβατικῶν με την βοήθεια των ἰδεῶν του Cantor και της σύγχρονης θεωρίας μέτρου: «σχεδόν ὅλοι» οι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ είναι υπερβατικοὶ. Το κεφάλαιο αυτό είναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ την θεωρία των συνεχῶν κλασμάτων.

Στο ένατο κεφάλαιο εκτίθενται οι απόψεις που έχω διαμορφώσει για την διδασκαλία κατά την εικοσαετή υπηρεσία μου στα σχολεία. Και το κεφάλαιο αυτό μπορεί επίσης να διαβαστεί ανεξάρτητα από τα συνεχή κλάσματα.

Στο παράρτημα υπάρχουν μερικά από τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν σε έκταση στην εργασία αυτή.

Αν και τα βιβλία του Hardy με βοήθησαν πολύ, δεν μπορώ να πω ότι ενθουσιάστηκα με τη δήλωσή του: *«Κανείς μαθηματικός δεν πρέπει να επιτρέψει στον εαυτό του να ξεχάσει ότι τα Μαθηματικά περισσότερο απ' οποιαδήποτε άλλη τέχνη ή επιστήμη, είναι παιγνίδι για νεαρή ηλικία»* (Hardy, 1993: 53). Όσο μου ήταν δυνατόν, πρόσεξα και το ζήτημα της γλώσσας, ώστε να μην προδώσει την ηλικία μου (οι μακροχρόνιες συνήθειες δύσκολα αλλάζουν).

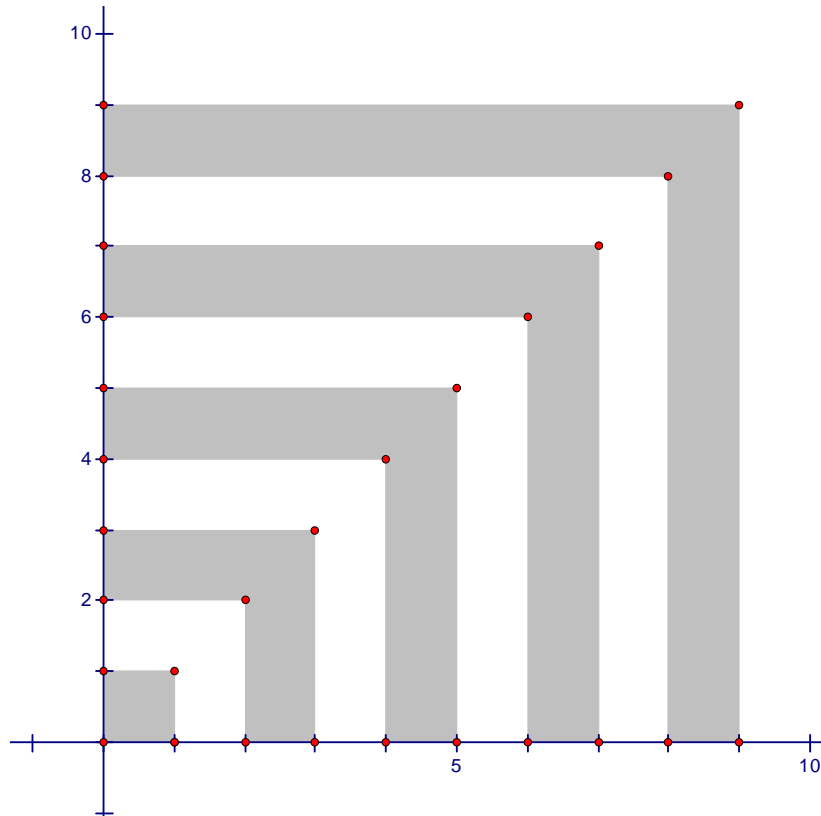
Οι αναγνώστες μαθηματικών βιβλίων καταφεύγουν συχνά στο μολύβι και το χαρτί, καθώς διαβάζουν, για να λύσουν εξισώσεις ή για να φτιάξουν τα δικά τους σχήματα. Για την κατανόηση πολλές φορές απαιτείται πολλή πνευματική και αρκετή γραφική εργασία. Ωστόσο αυτή η προσπάθεια δεν μένει χωρίς επιβράβευση. Λίγες εμπειρίες προσφέρουν τόσο έντονη χαρά όσο η διαπίστωση «το βρήκα!» που έρχεται σαν λάμψη μόλις λύσει κανείς κάποιο περίπλοκο πρόβλημα ή μόλις κατανοήσει μια δυσνόητη ιδέα.

Ο δρόμος προς την ολοκλήρωση μιας εργασίας, περνά από μια συνεχή διόρθωση των λαθών. Οι χωρίς λάθη εργασίες μου είναι μόνο οι αδημοσίευτες. *Falsum veris indicit*, το λάθος δείχνει την αλήθεια. Είμαι αποκλειστικά υπεύθυνος όχι μόνο για τα γλωσσικά λάθη, που πιστεύω να είναι τα περισσότερα, αλλά και για τις μαθηματικές ατέλειες.

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2011

Σωκράτης Ντριάνκος

$$\sqrt{81} = 9$$



$$1+3+5+7+9+11+13+15+17=81, \quad 9 \text{ περιττοί γινόμενες}$$

## ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Οι απλούστεροι αριθμοί είναι οι  $1, 2, 3, \dots$ . Είναι οι αριθμοί που χρησιμοποιούν τα παιδιά (και οι μεγάλοι) για τη μέτρηση. Ονομάζονται φυσικοί αριθμοί και το σύμβολο για το σύνολο των φυσικών είναι το  $\mathbb{N}$ . Μετά τη συνολοθεωρητική εποχή, φυσικός είναι και ο τεχνητός αριθμός  $0$ , που μετρά το πλήθος των στοιχείων του κενού συνόλου, και έτσι τώρα αρχίζουμε να μετράμε από το  $0$ . Το κενό σύνολο και το  $0$  είναι διαφορετικές οντότητες. Η μία είναι σύνολο, η άλλη είναι αριθμός, είναι η «πληθικότητα» του κενού συνόλου. Στην εργασία αυτή, με τον όρο «**φυσικός αριθμός**», θα εννοούμε κάποιον από το σύνολο  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ . Αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το σύνολο των φυσικών περιέχει και το  $0$ , θα γράφουμε  $\mathbb{N}_0$ , δηλ.  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Μετά από πολλές προσπάθειες οι αρνητικοί πέτυχαν να ονομαστούν αριθμοί και έτσι δημιουργήθηκε το σύνολο των ακεραίων, το  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Θετικοί ακέραιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί, τα στοιχεία του συνόλου  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ .

Ο όρος «κλάσμα» χρησιμοποιείται για οποιαδήποτε αλγεβρική έκφραση με αριθμητή και παρονομαστή, π.χ.  $\frac{17}{x}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

Στην εργασία αυτή είναι αρκετό να θεωρήσουμε ότι **ρητός αριθμός ή ρητό κλάσμα είναι ο αριθμός που μπορεί να τεθεί** στη μορφή  $\frac{a}{b}$ , με  $a, b \in \mathbb{Z}$  και  $b \neq 0$ . Το αρνητικό πρόσημο του παρονομαστή, αν υπάρχει, αφομοιώνεται συνήθως από τον αριθμητή και πολλές φορές θα θεωρούμε τον ρητό με  $\beta \in \mathbb{N}$ . Οι ακέραιοι (και το  $0$ ) είναι ρητοί, γιατί παριστάνονται ως λόγοι ακεραίων με παρονομαστή τη μονάδα.

Δεν θα επεκταθούμε στην ανάπτυξη της θεωρίας των ρητών αριθμών, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητές τους και θα θεωρήσουμε γνωστή τη σύνδεσή τους με τα δεκαδικά κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Αρκετές φορές εργαζόμαστε με το μοναδικό ανάγωγο κλάσμα (παράρτημα Α.11) που αντιπροσωπεύει την κλάση ισοδυναμίας. Δεν θα ασχοληθούμε επίσης με την κατασκευή των πραγματικών, με τους υπερπεπερασμένους αριθμούς και με τα κριτήρια αρρητότητας που μας προσφέρουν οι άπειρες σειρές. Θα θεωρήσουμε δεδομένη την ύπαρξη των διαφόρων ειδών αριθμών (ριζών, τριγωνομετρικών, λογαρίθμων κλπ) και γνωστές τις ιδιότητές τους. Με την βοήθεια των μαθηματικών εργαλείων που διαθέτουμε θα αποδείξουμε την κυριαρχία των αρρήτων και ιδιαίτερα των περισσότερο δυσνόητων από αυτούς, των υπερβατικών (K5, K8).

Για τα σύνολα των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών, χρησιμοποιούμε τα καθιερωμένα σύμβολα:  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Αν ο παρονομαστής ενός ρητού κλάσματος είναι  $10, 100, 1000, \dots, 10^v$ , όπου  $v$  θετικός ακέραιος, τότε έχουμε «δεκαδικό κλάσμα», π.χ.  $\frac{38}{10}, \frac{213}{1000}$  κλπ. Στα δεκαδικά κλάσματα

συνήθως παραλείπουμε τον παρονομαστή και για να δηλώσουμε πού τελειώνουν οι ολόκληρες μονάδες και αρχίζουν οι κλασματικές χρησιμοποιούμε το κόμμα « , » ή την τελεία « . » μεταξύ των ψηφίων του αριθμητή, π.χ. τα προηγούμενα δύο δεκαδικά κλάσματα γράφονται : 3,8 , 0,213. Για την αποφυγή σύγχυσης επιλέγουμε να **χρησιμοποιούμε την τελεία για να χωρίσουμε τα δεκαδικά ψηφία και όχι το κόμμα**. Ο αριθμός π.χ. που αποτελείται από 2 δεκάδες, 4 μονάδες, 5 δέκατα και 6 εκατοστά, γράφεται «24.56». Οι αριθμοί 2456, 3, 5, 8, 4.57, είναι οι : δυο χιλιάδες τετρακόσια πενήντα έξι, τρία, πέντε, οκτώ και ο δεκαδικός αριθμός τέσσερα κόμμα πενήντα επτά. Για αριθμό που έχει πολλά ψηφία και δεν ολοκληρώνεται σε μια γραμμή, το σύμβολο « \ » θα δείχνει ότι συνεχίζεται στις επόμενες, ενώ οι τρεις τελείες «...» θα δείχνουν ότι δεν είναι γραμμένα όλα τα ψηφία του,

π.χ.  $\frac{1}{1861} = 0.00053734551316496507254164427727028479312197743148844707 \backslash$

14669532509403546480386888769478774852229983879634605051047823750671681891 \\  
4562063406770553465878559914024717893605588393336915636754433100483610962...

Οι μαθηματικοί συμφώνησαν να χρησιμοποιούν την τελεία «•» για σύμβολο του πολλαπλασιασμού, ώστε να μην συγχέεται το « × » που δηλώνει την πράξη, με το « x » που δηλώνει τη μεταβλητή. Μπορεί όμως και πάλι να προκληθεί ασάφεια, από την τελεία του πολ/μου, «•», και την « . » που χωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος ενός αριθμού. Την εποχή της συμφωνίας δεν υπήρχε και η πληθώρα των σημερινών γραμματοσειρών. Μερικές φορές λοιπόν θα χρησιμοποιούμε το « × », και μερικές το « \* », για τον πολ/σμό αριθμών.

Τα σύμβολα  $\in, \notin, \emptyset, \pm, \forall, 5.\overline{432}$  κλπ. έχουν τις συνήθεις ερμηνείες.

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο της ισοδυναμίας,  $\Leftrightarrow$ , αλλά, εκτός μιας εξαίρεσης (4.2.2), προτιμήσαμε την έκφραση «αν..., τότε», αντί του συμβόλου της συνεπαγωγής «  $\Rightarrow$  ».


Η λέξη «διαίρει» χρησιμοποιείται με την έννοια του «διαίρει ακριβώς» και εκφράζει λεκτικά το σύμβολο: « / », π.χ.  $9931 / 98982277, 11111111 / 12345678987654321$ .

Μερικές φορές το κλάσμα  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{\mu}{\nu}$ , θα γράφεται με τη μορφή 2/5, μ/ν. Τότε θα φαίνεται από τα συμφραζόμενα ότι η μορφή 2/5 δεν έχει το νόημα της προηγούμενης παραγράφου.

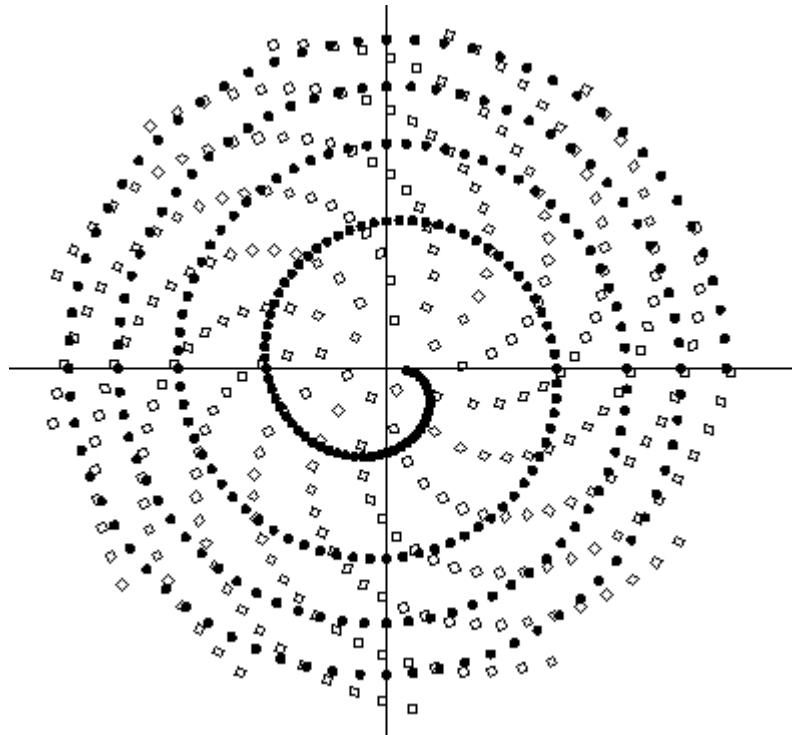
Οι Πυθαγόρειοι πιθανόν να χρησιμοποίησαν γεωμετρικό συλλογισμό για να αποδείξουν ότι ο  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος. Σήμερα γνωρίζουμε πολλές μη γεωμετρικές αποδείξεις της αρρητότητας του  $\sqrt{2}$ , όλες με την «εις άτοπον απαγωγή». Η ιδέα πίσω από την ευφυή αυτή μέθοδο είναι ότι αποδεικνύουμε μια πρόταση δείχνοντας την αναλήθεια της αντίθετης. Ένα θεώρημα ή μια πρόταση είτε είναι αληθινή είτε είναι λανθασμένη: π.χ. «αυτή τη στιγμή είτε διαβάζετε αυτή τη σελίδα είτε δεν τη διαβάζετε» (Livio, 2005: 62). Οι Μαθηματικοί δεν δέχονται ότι τη «μισοδιαβάζετε» (αν και υπάρχει και η «ασαφής λογική» με ποσοστά διαβάσματος). «Όταν έχεις εξαλείψει το αδύνατο, οτιδήποτε μένει, όσο απίθανο κι αν φαίνεται, πρέπει να είναι η αλήθεια» (Humphrey, 1997). Η «εις άτοπον απαγωγή» είναι η αποδεικτική μέθοδος που κυριαρχεί στην εργασία αυτή.

Η ομορφιά του επαγωγικού συλλογισμού αναδεικνύεται στην επεξεργασία απλών αλλά και πολύπλοκων μαθηματικών αντικειμένων. Η μέθοδος υποβάλλεται από τον ίδιο τον ορισμό των φυσικών αριθμών: κάθε αριθμός ακολουθείται από κάποιον «επόμενο» του φυσικό αριθμό. Είναι εντυπωσιακό το πόσο μεγάλο πλήθος από αποδείξεις μπορεί να βασιστεί σ' αυτή την απλή και στοιχειώδη αρχή, που χρησιμοποιούμε σε πολλές αποδείξεις.

Η αρίθμηση των κεφαλαίων, ενοτήτων, υποενοτήτων, θεωρημάτων και ορισμών ή παρατηρήσεων ακολουθεί την μορφή «α.β.γ.», π.χ. με την τριάδα 7.4.6. έχουμε αριθμήσει το Θεώρημα 6, ή τον ορισμό 6, ή τις παρατηρήσεις 6, γενικά την υποενοότητα 6, της ενότητας 4 του έβδομου κεφαλαίου, του Κ7.

Αν κάποιος ολοκληρώσει τη μελέτη ενός κεφαλαίου, τότε αμείβεται με το άρωμα του λουλουδιού:  Σύμφωνα με την προτροπή του κ. Χατζηλουκά που ανέλαβε την εκτύπωση, οι ζυγές σελίδες δεν είναι κατάλληλες για να αρχίζει το επόμενο κεφάλαιο. Θα έπρεπε να μείνουν λευκές. Δεν είναι όμως απογοητευτικό; Προσπαθήσαμε λοιπόν να ακολουθήσουμε την συμβουλή του ζωγράφου Αλέξη Ακριθάκη (1939-1994): «κάθε τι που γράφεται θέλει τη διακόσμησή του».

## Οι τετραγωνικές ρίζες των φυσικών από 1 έως 288



Δύο τρόποι:

οι μύρες τελείες είναι ανά  $5^\circ$ , τα τετραγωνάκια ανά  $55^\circ$



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b> .....	1
<b>ABSTRACT</b> .....	3
<b>K1: Ρητοί και άρρητοι αριθμοί</b>	
1.1. Η τετραγωνική ρίζα του 2 .....	5
1.2. Η μεγάλη διένεξη των ρητών και η βαθειά τομή.....	7
1.3. Ρίζες.....	15
1.4. Λογάριθμοι.....	19
1.5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί.....	21
1.6. Ρητός ή άρρητος;.....	30
<b>K2: Εισαγωγή στα συνεχή κλάσματα</b>	
2.1. Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος.....	33
2.2. Ορισμοί.....	34
2.3. Από άλλη σκοπιά.....	37
2.4. Λύση δευτεροβάθμιας.....	41
2.5. Αναγωγήματα.....	44
2.6. Ο αλγόριθμος των αναγωγημάτων.....	45
2.7. Η θεμελιώδης ιδιότητα των αναγωγημάτων.....	49
2.8. Ιστορικά σχόλια.....	52
<b>K3: Ρητοί και πεπερασμένα απλά συνεχή κλάσματα</b>	
3.1. Ανάπτυγμα ρητού σε συνεχές κλάσμα.....	57
3.2. Η μοναδικότητα της ανάπτυξης.....	65
3.3. Η σχέση μερικών και πλήρων πηλίκων.....	67
3.4. Η Διοφαντική εξίσωση $ax+by = \gamma$ .....	68
3.5. Η διαφορά μεταξύ του ρητού και των αναγωγημάτων του.....	72
3.6. Γεωμετρική ερμηνεία.....	75
3.7. Σύγκριση συνεχών κλασμάτων.....	79
3.8. Προσεγγίσεις.....	81
<b>K4: Άρρητοι και άπειρα συνεχή κλάσματα</b>	
4.1. Σύμβολα και τεχνικές.....	83

4.2. Η σύγκλιση της ακολουθίας των αναγωγημάτων. ....	87
4.3. Η μοναδική τιμή ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος. ....	90
4.4. Το άπειρο συνεχές κλάσμα ενός αρρήτου. ....	92
4.5. Η διαφορά μεταξύ του αρρήτου και των αναγωγημάτων του.....	98
4.6. Γεωμετρική ερμηνεία .....	106
4.7. Σύγκριση. ....	108
4.8. Σειρές.....	110
4.9. Ισοδύναμοι αριθμοί. ....	116

### **K5: Η προσέγγιση των αρρήτων**

5.1. Η προσπάθεια των ρητών να γνωριστούν με τους αρρήτους.....	123
5.2. Ενδιάμεσα κλάσματα και δευτεροβάθμια αναγωγήματα.....	133
5.3. Βέλτιστες προσεγγίσεις .....	142
5.4. Άριστες προσεγγίσεις.....	151
5.5. Το Θεώρημα Hurwitz.....	155
5.6. Η Τάξη της προσέγγισης.....	167
5.7. Αλγεβρικοί αριθμοί. ....	173
5.4. Το Θεώρημα του Liouville.....	176
5.9. Υπερβατικοί αριθμοί. ....	180

### **K6: Δευτεροβάθμια ριζικά ή τετραγωνικοί άρρητοι**

6.1. Ορισμός .....	187
6.2. Παραδείγματα .....	187
6.3. Συζυγείς.....	189
6.4. Προετοιμασία για εισαγωγή στον αλγόριθμο. ....	190
6.5. Ο Αλγόριθμος της ανάπτυξης σε συνεχές κλάσμα .....	193
6.6. Η περιοδικότητα του αναπτύγματος είναι προνόμιο των τετραγωνικών αρρήτων.....	198
6.7. Ανηγμένα δευτεροβάθμια ριζικά και απλή περίοδος.....	204
6.8. Μια εικόνα για την περιοδικότητα των αναπτυγμάτων. ....	211
6.9. Γνωστά και άγνωστα.....	213

### **K7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της $\sqrt{d}$**

7.1. Περιοδικότητα και συμμετρία του αναπτύγματος της $\sqrt{d}$ .....	218
--	-----

7.2. Ο αλγόριθμος της ανάπτυξης σε συνεχές κλάσμα και τα αναγωγήματα της $\sqrt{d}$ .....	222
7.3. Το μήκος της περιόδου του αναπτύγματος της $\sqrt{d}$ .....	226
7.4. Η εξίσωση $x^2 - dy^2 = 1$ .....	231
7.5. Η εξίσωση $x^2 - dy^2 = -1$ .....	250
7.6. Άθροισμα δύο τετραγώνων .....	252
7.7. Ορθογώνια τρίγωνα.....	257

### **K8: Το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών**

8.1. Ισοδύναμα Σύνολα .....	261
8.2. Αριθμήσιμα σύνολα .....	266
8.3. Ρητοί και Αλγεβρικοί .....	271
8.4. Υπερβατικοί και Πραγματικοί .....	274
8.5. Κάλυψη Συνόλου .....	276
8.6. Μέτρο .....	280
8.7. Σύνολα μηδενικού μέτρου.....	282
8.8. Η κυριαρχία των υπερβατικών.....	284

### **K9: Διδακτική.**

\*Η αναλυτικότερη παρουσίαση των περιεχομένων της διδακτικής πρότασης είναι για την  
διευκόλυνση του διδάσκοντα.

9.1. Τα Μαθηματικά.....	287
9.2. Οι δυνατότητες των παιδιών και οι αδυναμίες των μεγάλων.....	288
9.3. Η διαδικασία μάθησης. ....	292
9.4. Άοκνος προετοιμασία της διδασκαλίας. ....	297
9.5. Γυμνάσιο. ....	300
9.5.1. Γνώμονες.....	301
9.5.2. Τετράγωνοι αριθμοί. ....	303
9.5.3. Τετραγωνική ρίζα θετικού ρητού, ακριβής και κατά προσέγγιση.....	306
9.5.4. Ο αλγόριθμος πριν τις αριθμομηχανές.....	307
9.5.5. Η τετραγωνική ρίζα του 2.....	316
9.5.6. Η «εις άτοπον απαγωγή».....	319
9.5.7. Κυβική ρίζα- Στερεοί γνώμονες.....	322

9.5.8. Κυβική ρίζα του 2. ....	324
9.6. Καθοδηγούμενη... ανακάλυψη .....	327
9.7. Η βοήθεια των υπολογιστών. ....	328
9.8. Λύκειο .....	336
9.8.1. Η πολιορκία της τετραγωνικής ρίζας του 2.....	337
9.8.2. Ακολουθίες και Υπακολουθίες .....	344
9.8.3. Η αντιστροφή της πορείας. ....	346
9.8.4. Κάποιες ιστορικές προσεγγίσεις. ....	349
9.8.5. Διαφορετικές προσεγγίσεις. ....	353
9.8.6. Η σύγχρονη μέθοδος. ....	355
9.8.7. Κλάσματα και δεκαδικοί. ....	357
9.8.8. Συνεχή κλάσματα. ....	361
9.9. Επίμετρο. ....	362

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A. Θεωρία αριθμών.....	365
B. Πολυωνυμικές εξισώσεις.....	370
Γ. Ανάλυση.....	371
Δ. Διώνυμα της μορφής $a + b\sqrt{d}$ .....	373
E. Το Λουλούδι στο τέλος των κεφαλαίων .....	373

## Προσπάθεια υλοποίησης της προτροπής του Αλέξη Ακριθάκη

Τα κλασματικά μέρη των αρρήτων ηξ κατανέμονται ομοιόμορφα στο (0,1).....	186
Παραλληλισμοί (Ανθυφαίρεση-Συνεχή κλάσματα).....	216
Euler και Ramanujan.....	286
Κατασκευή ριζών – Γνώμονες (Logo) .....	364
Ρητοί εναντίον αρρήτων.....	374

<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	375
---------------------------	-----

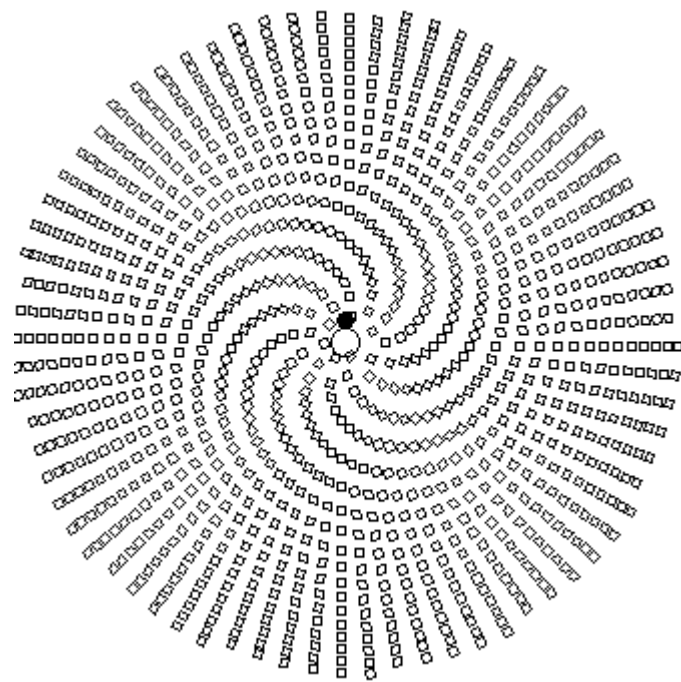
<b>ΕΠΙΛΟΓΟΣ</b> .....	383
-----------------------	-----

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αναπτύσσεται πρώτα η βασική θεωρία των συνεχών κλασμάτων. Η έννοια του συνεχούς κλάσματος προκύπτει φυσιολογικά όταν προσπαθούμε να μετρήσουμε έναν αριθμό  $A$  με τον  $B$  ή ένα μέγεθος  $A$  με το  $B$ . Το προνόμιο της περιοδικότητας του αναπτύγματος σε συνεχές κλάσμα το έχουν μόνο οι τετραγωνικοί άρρητοι. Οι ιδιότητες του αναπτύγματος σε συνεχές κλάσμα της τετραγωνικής ρίζας φυσικού αριθμού που δεν είναι τέλειο τετράγωνο εφαρμόζονται στην λύση της «εξίσωσης Pell», στη γραφή ορισμένων φυσικών ως άθροισμα τετραγώνων και στα ορθογώνια τρίγωνα. Περιγράφεται η προσπάθεια προσέγγισης των αρρήτων από τους ρητούς και αποδεικνύεται ότι οι βέλτιστες προσεγγίσεις των αρρήτων δίνονται από τα αναγωγήματα ή τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα του αναπτύγματος. Με τη βοήθεια των συνεχών κλασμάτων αποδεικνύεται και το θεώρημα Hurwitz που αφορά την αξιολόγηση της διαφοράς του αρρήτου από τα αναγωγήματά του. Η τάξη της προσέγγισης οδήγησε τον Liouville στην κατασκευή των υπερβατικών, των αρρήτων που υπερέβαιναν τα σύνορα των μέχρι τότε γνωστών αλγεβρικών αριθμών. Τα θεωρήματα Lindemann και Gelfond αποδεικνύουν ότι οι υπερβατικοί υπήρχαν πολύ πριν τους παράξενους αριθμούς του Liouville και ότι στη συνέχεια πολλαπλασιάστηκαν ανεξέλεγκτα. Η κυριαρχία των υπερβατικών αποδεικνύεται με την βοήθεια των ιδεών του Cantor και της σύγχρονης θεωρίας μέτρου: «σχεδόν όλοι» οι πραγματικοί αριθμοί είναι υπερβατικοί. Η εργασία συμπληρώνεται με μια ολοκληρωμένη διδακτική πρόταση για την παρουσίαση της τετραγωνικής και κυβικής ρίζας ρητού (χρησιμοποιώντας γνώμονες) στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

### Λέξεις κλειδιά

Άρρητοι αριθμοί, υπερβατικοί αριθμοί, συνεχή κλάσματα, αναγωγήματα, διδακτική μαθηματικών-γνώμονες.

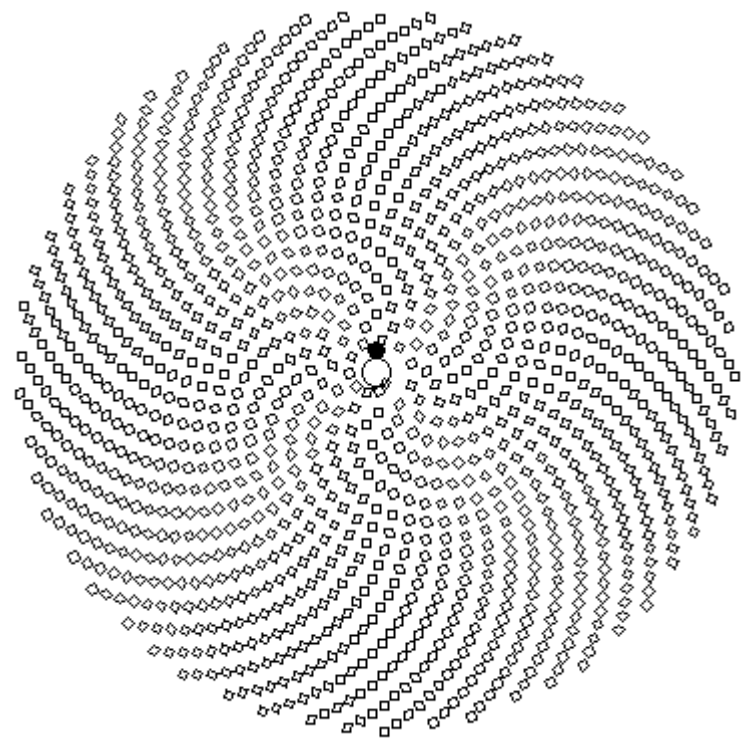


## **ABSTRACT**

Firstly, we describe the basic theory about continued fractions. Continued fraction concept derives naturally during the process of measuring a number  $A$  using another number  $B$  or a magnitude  $A$  using a magnitude  $B$ . Quadratic irrational numbers are the only numbers that are privileged with a periodic continued fraction expansion. The properties of the continued fraction expansion that corresponds to the square root of a natural number that is not a perfect square apply to the solution of Pell's equation, to the representation of some natural numbers as a sum of perfect squares, and to right triangles. We describe the rational approximation of irrational numbers and we prove that the best rational approximations are provided by the convergents or the secondary convergents of the continued fraction expansion. We prove Hurwitz's theorem, which refers to the evaluation of the difference between an irrational number and its convergents, using continued fractions. The notion of the order of approximation led Liouville to construct transcendental numbers, irrational numbers that transcended the limits of by that time known algebraic numbers. Lindemann's and Gelfond's theorems prove that transcendental numbers existed before Liouville's weird numbers and that they subsequently increased uncontrollably. Cantor's ideas and modern measure theory prove the dominance of transcendental numbers: "almost all" real numbers are transcendental. The study concludes with a detailed proposal concerning the instruction of the square and cubic root of a rational number (using gnomons) in the Greek secondary education (students' age 13 to 18 years old).

### **Key words**

Irrational numbers, transcendental numbers, continued fractions, convergents,  
didactics of mathematics - mathematics education-gnomons





## Κ1: Ρητοί και άρρητοι αριθμοί

### 1.1. Η τετραγωνική ρίζα του 2

Από τις πολλές αποδείξεις της αρρητότητας της τετραγωνικής ρίζας του 2 θα παρουσιάσουμε στα τμήματα 1.1.1. και 1.1.2. μία, ίσως όχι και τόσο συνηθισμένη, η οποία στηρίζεται στην αρχή της καθόδου και τις, ενδιαφέρουσες κατά τους Hardy και Apostol, παραλλαγές της. Η απόδειξη στο τμήμα 1.1.2. είναι η 1.1.1. με σχήμα.

#### 1.1.1. Η τετραγωνική ρίζα του 2, η $\sqrt{2}$ , δεν είναι ρητός.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν **φυσικοί** αριθμοί  $p, q$  για τους οποίους ισχύει:  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ .

Για την  $\sqrt{2}$  έχουμε  $1 < \sqrt{2} < 2$  και αντικαθιστώντας:  $1 < \frac{p}{q} < 2$ . Ο  $q$  είναι φυσικός,

πολλαπλασιάζουμε:  $q < p < 2q$  [1], και αφαιρούμε τον  $q$ :  $0 < p - q < q$  [2]. Από την [1] παίρνουμε και τις ανισότητες:  $2q - p > 0$ ,  $2q - p < p$  και  $2q < p + q \Leftrightarrow q > 2q - p$ .

Επομένως οι αριθμοί  $p - q$ ,  $2q - p$  είναι **φυσικοί** και αντίστοιχα **μικρότεροι** από τους  $q$ ,  $p$  [3].

Αν  $p^2 = 2q^2$ , τότε  $p^2 - pq = 2q^2 - pq$  και  $p(p - q) = q(2q - p)$ . Η ισότητα γινομένων δίνει την αναλογία:  $\frac{p}{q} = \frac{2q - p}{p - q}$ . Θα έχουμε λοιπόν  $\frac{p}{q} = \sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q}$  [4] και  $2q - p > p - q$ .

Αν έχουμε τους φυσικούς  $p$ ,  $q$  ώστε το  $\frac{p}{q}$  να είναι ίσο με  $\sqrt{2}$ , τότε μπορούμε να βρούμε ρητό κλάσμα με μικρότερο αριθμητή, και μικρότερο παρονομαστή, από αυτούς του  $\frac{p}{q}$  που είναι ίσο και πάλι με τον  $\sqrt{2}$ . Οι όροι του νέου κλάσματος, από την [3], είναι φυσικοί

αριθμοί. Ονομάζουμε  $\frac{p}{q}$  την τρέχουσα τιμή της  $\sqrt{2}$ . Η διαδικασία  $\frac{p}{q} \rightarrow \frac{2q - p}{p - q}$  παράγει

συνεχώς νέα τέτοιου είδους ρητά κλάσματα. Η υπόθεση ότι υπάρχουν **φυσικοί** αριθμοί  $p, q$  ώστε:  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , έχει για συνέπεια την δημιουργία μιας **άπειρης καθόδου φυσικών**

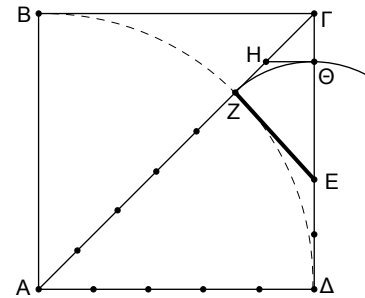
(παράρτημα Α),  $p > q > 2q - p > p - q > \dots$ , άρα πρέπει να απορριφθεί.

Μπορούμε να παρακάμψουμε την αρχή της καθόδου και να ολοκληρώσουμε την απόδειξη με την [4], αν υποθέσουμε ότι το  $\frac{p}{q}$  είναι ανάγωγο. Τότε η [4] δεν είναι δυνατόν

να ισχύει γιατί το  $\frac{2q - p}{p - q}$  έχει μικρότερους όρους από το  $\frac{p}{q}$  (Hardy, 1987:18).

### 1.1.2. Η διαγώνιος και η πλευρά τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο.

**Απόδειξη:** Για το τετράγωνο ΑΒΓΔ, υποθέτουμε ότι πλευρά και διαγώνιος έχουν κοινό μέτρο δ, δηλαδή ότι υπάρχουν φυσικοί p,q και ευθύγραμμο τμήμα δ ώστε  $ΑΓ=δp$ ,  $ΑΔ=δq$ . Θεωρούμε p-1 ισαπέχοντα σημεία στην διαγώνιο ΑΓ, q-1 ισαπέχοντα σημεία στην πλευρά ΑΔ και γράφουμε τον κύκλο (Α, ΑΔ). Το σημείο τομής Ζ του κύκλου με την ΑΓ θα είναι ένα από τα p-1 σημεία, γιατί οι ΑΔ, ΑΓ έχουν κοινό μέτρο.



Φέρνουμε την εφαπτομένη ΖΕ. Από τις  $ΓΖ=ΖΕ=ΕΔ$ , συμπεραίνουμε ότι  $ΓΖ=(p-q)δ$  και  $ΓΕ=qδ-(p-q)δ=(2q-p)δ$ . Θα είναι επομένως και το Ε ένα από τα q-1 ισαπέχοντα σημεία με τα οποία «τεμαχίζεται» η ΓΔ σε τμήματα μήκους δ. Τα ΓΖ και ΓΕ έχουν κοινό μέτρο το δ, αλλά τώρα  $2q-p < p$  και  $p-q < q$ . Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές όπως και το ΑΔΓ

και από την ομοιότητα έχουμε  $\frac{p}{q} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΓΕ}{ΓΖ} = \frac{2q-p}{p-q}$ . Μπορούμε να εφαρμόσουμε ξανά την

ίδια διαδικασία, γράφοντας τον κύκλο (Ε, ΕΖ), οπότε βρίσκουμε το ΗΘΓ με ακόμα μικρότερες πλευρές. Τα Η, Θ θα είναι και πάλι διαιρετικά σημεία και  $\frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΓΕ}{ΓΖ} = \frac{ΓΗ}{ΓΘ}$ .

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Το πλήθος των διαιρετικών σημείων είναι όμως πεπερασμένο, ενώ το πλήθος των τριγώνων άπειρο (η διαγώνιος είναι μεγαλύτερη από την πλευρά του τετραγώνου). Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει ότι δεν μπορεί να υπάρχει κοινό μέτρο πλευράς και διαγωνίου στο τυχαίο τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Ο Tom Apostol (Sinclair, 2006: 28) θεωρεί το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, ΑΔΓ, με τις μικρότερες ακέραιες πλευρές, οπότε «τελειώνει» την απόδειξη με τον κύκλο (Α,ΑΔ), γιατί το ΓΖΕ έχει και πάλι ακέραιες πλευρές, αλλά μικρότερες από του μικρότερου.

Στην αρχαία ελληνική ορολογία, η οποία είναι γεωμετρική, η φράση «άρρητος» αντικαθίσταται με την «ασύμμετρος προς τη μονάδα», τα δύο μεγέθη δεν έχουν κοινό μέτρο. Μετά την διαπίστωση της ύπαρξης ασύμμετρων μεγεθών και με την βοήθεια της θεωρίας λόγων του Ευδόξου (408-355 π.Χ.) οι μαθηματικοί μπορούσαν να αποδεικνύουν αυστηρά και τις ενοχλητικές ασύμμετρες περιπτώσεις σε θεωρήματα μετρικών σχέσεων (π.χ. Θεώρημα Θαλή), αφού ο ευφυής ορισμός της αναλογίας από τον Εύδοξο καθιστούσε περιττή κάθε αναφορά σε σύμμετρα ή ασύμμετρα μεγέθη (Γιαννακούλιας, 2007: κεφάλαιο ΙΙ).

Υπάρχει επίσης η μαρτυρία (Διαμαντής, 1993) ότι οι Πυθαγόρειοι υποστήριζαν την ύπαρξη ενός «απειροελάχιστου» ορθογωνίου τριγώνου με πλευρά και υποτεινούσα ίσες με 1.

Η διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως οδηγεί σ' ένα τέτοιο τρίγωνο, οπότε το κοινό μέτρο που κάθε ζεύγος μεγεθών πρέπει να έχει (κατά την άποψη των Πυθαγορείων), μπορεί να είναι και απειροελάχιστο. Από ένα τέτοιο απειροελάχιστο τρίγωνο, με πλευρά και υποτείνουσα ίσες με 1, προκύπτει και η μέθοδος των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών (Θέων Σμυρναίος, 130 μ.Χ., βλ. και 9.8.4) για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της  $\sqrt{2}$ : Αν π.χ. στο προηγούμενο σχήμα:  $HZ=H\Theta=\Gamma\Theta=HG=1$ , τότε  $\Gamma Z=\Gamma H+\Gamma\Theta=2$ ,  $\Gamma E = E\Theta+\Gamma\Theta = \Gamma H+2*\Gamma\Theta=3$  ( $E\Theta=EZ=\Gamma Z$ ),  $A\Delta=5$ ,  $A\Gamma=7$  κλπ, αναστρέφουμε την πορεία (Διαμαντής, 1993).

## 1.2. Η μεγάλη διένεξη των ρητών και η βαθειά τομή

### 1.2.1. Η διένεξη.

Δεν υπάρχει ρητός με τετράγωνο 2, τετράγωνο όμως με εμβαδόν 2 κατασκευάζεται πολύ εύκολα με την βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και η πλευρά του τοποθετείται επίσης εύκολα στην ευθεία που οι ρητοί πίστευαν ότι ήταν κτήμα τους.

Μια ιδιότητα που διακρίνει τους ρητούς από τους ακεραίους είναι ότι οι ρητοί αποτελούν «πυκνό» σύνολο αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ρητών όσο κοντά κι αν βρίσκονται, μπορούμε να «στριμώξουμε» έναν επιπλέον, ακόμα και άπειρους άλλους ρητούς (παράρτημα), π.χ. οι αριθμοί  $1/1000000$  και  $1/1000001$  βρίσκονται σίγουρα πολύ κοντά, αφού η διαφορά τους είναι περίπου ένα τρισεκατομμυριοστό. Μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε κλάσματα που βρίσκονται ανάμεσά τους, π.χ. το ενδιάμεσο κλάσμα (ενότητα 5.2)  $2/2000001$ .

Υπάρχουν άπειρα ρητά σημεία σε οποιοδήποτε τμήμα πάνω στην ευθεία, δηλαδή άπειρα σημεία των οποίων οι αποστάσεις από την αρχή δίνονται με ρητούς αριθμούς. Είναι λοιπόν φυσικό να συμπεράνει κανείς ότι ολόκληρη η ευθεία απαρτίζεται από ρητά σημεία. Στα μαθηματικά όμως, αυτό που φαίνεται να αποτελεί «φυσικό συμπέρασμα» συχνά αποδεικνύεται λανθασμένο. Ένα από τα σημαντικότερα γεγονότα στην ιστορία των μαθηματικών υπήρξε η ανακάλυψη ότι οι ρητοί αριθμοί, παρά την πυκνότητά τους, αφήνουν «κενά» πάνω στην ευθεία, δηλαδή σημεία τα οποία δεν αντιστοιχούν σε ρητούς.

Το κακό έγινε λοιπόν στη χώρα των ρητών αριθμών. Οι ρητοί χωρίστηκαν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στη μία την «ανώτερη», ας τη συμβολίσουμε με A, συγκεντρώθηκαν οι θετικοί ρητοί με τετράγωνο μεγαλύτερο του 2 και στην άλλη, την «κατώτερη», σύμβολο K, συμάχησαν οι αρνητικοί, το 0 και από τους θετικούς εκείνοι που έχουν τετράγωνο μικρότερο του 2. Ουδετερότητα δεν υπήρξε, οι ρητοί είχαν φροντίσει να εφοδιαστούν με την κατάλληλη σχέση διάταξης, ώστε οποιοιδήποτε δύο ρητοί να είναι «συγκρίσιμοι», δηλαδή είχαν φροντίσει το «σώμα» τους να είναι διατεταγμένο.

Κ1: Ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

Κάθε ρητός, ανάλογα με το τετράγωνό του κατατάχθηκε σε μία και μόνο από τις κατηγορίες  $A$  και  $K$ , π.χ. ο «-1000» στην  $K$ , ο «+1000» στην  $A$ . Είναι ξεκάθαρο, ότι ρητός μικρότερος από κάποιον της κατώτερης κατηγορίας, θα ανήκει στην  $K$ , π.χ. [αν  $\rho_1 < \rho_2$  και  $\rho_2 < 0$ , τότε και  $\rho_1 < 0$ ] και [αν  $\rho_1 < \rho_2$  θετικοί με  $\rho_2^2 < 2$ , τότε και  $\rho_1^2 < \rho_2^2 < 2$ ] και ομοίως, μεγαλύτερος από κάποιον της μεγαλύτερης κατηγορίας θα ανήκει στην  $A$ . Για ρητούς  $\kappa$ ,  $\alpha$  των κατηγοριών  $K, A$  θα ισχύει επίσης:  $\kappa < \alpha$ .

Οι ρητοί διαπίστωσαν ότι παρά την διαφορετική τοποθέτησή τους στις κατηγορίες  $A$  και  $K$  θα μπορούσαν, μέσω αντιπροσώπων τους, να βρουν μια μέση λύση, να ελαχιστοποιήσουν τις διαφορές τους. Έστω  $\alpha$  ρητός της κατηγορίας  $A$  και  $\kappa$  ρητός της  $K$ , θετικός. Τότε ο μέσος όρος τους θα ανήκει σε μοναδική από τις κατηγορίες  $A$  και  $K$ , έστω στην  $K$ . Τότε  $\alpha - \frac{\alpha + \kappa}{2} = \frac{\alpha - \kappa}{2}$ . Ο μέσος όρος των  $\alpha, \frac{\alpha + \kappa}{2}$  είναι ο  $\frac{3\alpha + \kappa}{4}$  και σε όποια κατηγορία και να ανήκει, η διαφορά του από τους  $\alpha, \frac{\alpha + \kappa}{2}$  είναι  $\frac{\alpha - \kappa}{4} = \frac{\alpha - \kappa}{2^2}$ . Οι ρητοί διαπίστωσαν ότι αν συνεχίσουν την διαδικασία προσέγγισης των κατηγοριών  $A$  και  $K$  η «απόστασή» τους μπορεί να γίνει μακροπρόθεσμα (τελικά) όσο μικρή θέλουν:  $\frac{\alpha - \kappa}{2^n}, n \in \mathbb{N}$ .

Κάποιοι ρητοί θεώρησαν ότι αντί να πάρουν τον μέσο όρο δυο θετικών ρητών  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  των κατηγοριών  $K$  και  $A$ , με  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , θα ήταν καλύτερα να πάρουν το «ενδιάμεσο» κλάσμα τους  $\frac{a+c}{b+d}$  (πρβλ. ενότητα 5.2.3.), αφού και γι αυτό, ισχύει:  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$  (όπως και για τον μέσο όρο:  $\frac{a}{b} < \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) < \frac{c}{d}$ ). Μετά από διαπραγματεύσεις, συμφώνησαν να ακολουθήσουν την μέθοδο του μέσου όρου, αφού για ομώνυμα κλάσματα η τιμή του ενδιάμεσου κλάσματος είναι ίση με του μέσου όρου και ο (αριθμητικός) μέσος έχει το πλεονέκτημα να βρίσκεται πάντα σε ίση απόσταση από τα άκρα, οπότε διευκολύνονται οι υπολογισμοί (ενώ το ενδιάμεσο βρίσκεται πιο κοντά στο κλάσμα που έχει μεγαλύτερο παρονομαστή).

Για το πλήθος δεν υπήρξε πρόβλημα, γιατί όπως παίρνουμε αριθμητικούς μέσους, μπορούμε να παίρνουμε ενδιάμεσα κλάσματα, ενδιάμεσων κλασμάτων π.χ. από την  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , παίρνουμε τις :

$$\frac{a}{b} < \frac{na + (n-1)c}{nb + (n-1)d} < \dots < \frac{2a + c}{2b + d} < \frac{a + c}{b + d}, \quad \frac{a + c}{b + d} < \frac{a + 2c}{b + 2d} < \dots < \frac{(n-1)a + nc}{(n-1)b + nd} < \frac{c}{d}, n \in \mathbb{N}$$

Η επόμενη ιδέα ήρθε φυσιολογικά: η μικρότερη απόσταση των κατηγοριών  $K$  και  $A$ , θα βρίσκεται από την διαφορά του μεγαλύτερου ρητού της  $K$ , από τον μικρότερο ρητό της  $A$ . Οι ρητοί γνώριζαν ότι στο «σώμα» τους, κάθε μη κενό υποσύνολο του ελάχιστου επαγωγικού συνόλου  $\mathbb{N}$  έχει ελάχιστο στοιχείο και έτσι, σκεφτόμενοι «αναλογικά» και εμπιστευόμενοι τη διαίσθησή τους, αναζήτησαν τον ελάχιστο της «ανώτερης» κατηγορίας, της  $A$ . Στο αντίπαλο στρατόπεδο, στην κατώτερη κατηγορία  $K$ , παρόμοιες σκέψεις οδήγησαν στην αναζήτηση του μεγαλύτερου θετικού, που έχει τετράγωνο πλησιέστερα στον 2. Πίστεψαν ότι με αυτή τη μέθοδο δεν θα χρειαστεί να περιμένουν την προσεγγιστική διαδικασία των αριθμητικών μέσων.

Αλλά παρουσιάστηκαν και πάλι προβλήματα.

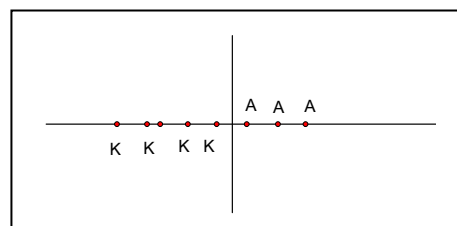
Στην κατώτερη κατηγορία διαπιστώθηκε ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος ρητός:

Έστω  $x$  θετικός ρητός της κατώτερης κατηγορίας μεγαλύτερος από όλους αυτής της κατηγορίας, τότε  $x^2 < 2$ . Αλλά μπορούμε να βρούμε ρητούς  $\rho$  μεγαλύτερους του  $x$ , με  $x^2 < \rho^2 < 2$ . Π.χ. αν  $x=1.41$ , τότε μπορούμε να πάρουμε  $\rho=1.414$ . Γενικότερα βρίσκουμε αυτόν τον  $\rho$  ως εξής (μέθοδος Baire, εφαρμόζεται για κάθε ρητό μη τέλει τετράγωνο στη θέση του 2): αρκεί να βεβαιώσουμε ότι υπάρχει  $h > 0$ :  $(x+h)^2 < 2$ . Τότε ο  $x+h$  θα είναι μεγαλύτερος του  $x$  με τετράγωνο μικρότερο του 2, άρα ανήκει στην κατώτερη κατηγορία. Πρέπει να λύσουμε την  $x^2 + 2xh + h^2 < 2$ , ή  $h(2x+h) < 2 - x^2$ , οπότε αρκεί να πάρουμε  $h < 1$  και τέτοιο ώστε  $h(2x+1) < 2 - x^2$ , δηλαδή  $h$  που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις:  $h < 1$  και  $h < \frac{2-x^2}{2x+1}$

Ο  $\rho$  είναι ο  $x+h$ , π.χ. για  $x=1.41$ , η μέθοδος δίνει  $h=0.003115183$ , οπότε  $x+h=1.413115183$ , ενώ για  $x = 0.3$ , η παράσταση  $\frac{2-x^2}{2x+1}$  γίνεται ίση με 1.19375 και παίρνουμε π.χ.  $h = 0.9$ .

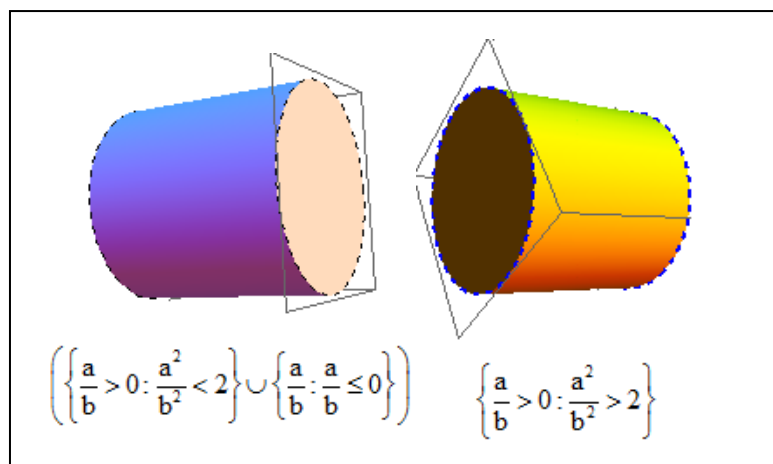
Ανάλογα στην ανώτερη κατηγορία διαπιστώθηκε ότι δεν υπάρχει ελάχιστος ρητός: αν  $x$  ανήκει στην ανώτερη κατηγορία, μπορούμε να βρούμε  $h > 0$ , ώστε ο  $x-h$  να ανήκει ακόμα στην  $A$ : αρκεί  $(x-h)^2 > 2$ , ή  $2hx - h^2 < x^2 - 2$ , αρκεί  $2hx < x^2 - 2$ , δηλ.  $h < \frac{x^2 - 2}{2x}$ .

Κάθε ρητός της ανώτερης κατηγορίας  $A$  είναι μεγαλύτερος από όλους τους ρητούς της  $K$ , είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου  $K$ , αλλά δεν υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα για το  $K$ . Ομοίως κάθε ρητός της κατώτερης κατηγορίας  $K$  είναι κάτω φράγμα για το σύνολο  $A$ , αλλά δεν υπάρχει μέγιστο κάτω φράγμα του  $A$ .



Οι ρητοί των κατηγοριών  $K$  και  $A$  μειώνουν συνεχώς, μέσω νέων αντιπροσώπων τους, την μεταξύ τους απόσταση, την εκμηδενίζουν, αλλά στην «διαχωριστική γραμμή» δεν μπορεί να βρισκεται κάποιος από αυτούς (όπως συχνά συμβαίνει και εκτός των μαθηματικών ιδεών). Οι ρητοί θεώρησαν παράλογο για την πραγματικότητά τους αυτό το γεγονός. Ήθελαν όμως η υπαρκτή διαγώνιος του τετραγώνου να έχει κάποιο μήκος, να αντιστοιχεί σε κάποιον αριθμό που να υπακούει στους καθιερωμένους αλγεβρικούς κανόνες.

Την αμηχανία και των δύο στρατοπέδων των ρητών έλυσε ο Dedekind (1831-1916) κάνοντας μια βαθειά τομή στο σύνολό τους. «Ο Dedekind φαντάστηκε την ευθεία των αριθμών σαν ένα στερεό σωλήνα απείρου μήκους γεμάτο με διατεταγμένους ρητούς αριθμούς. Κάθε τομή του σωλήνα δίνει δύο τμήματα  $K, A$  και μας αποκαλύπτει δύο διατομές, τα άκρα των συνόλων  $K$  και  $A$ . Κοιτάζοντας τις εκτεθειμένες αυτές πλευρές μπορεί κανείς να διαβάσει τους αριθμούς που μας δείχνουν» (Γιαννακούλιας, 2007: 383).



Ο  $\sqrt{2}$  του Dedekind:  $\left[ \left( \left\{ \frac{a}{b} > 0 : \frac{a^2}{b^2} < 2 \right\} \cup \left\{ \frac{a}{b} : \frac{a}{b} \leq 0 \right\} \right), \left\{ \frac{a}{b} > 0 : \frac{a^2}{b^2} > 2 \right\} \right]$

Επειδή όλοι οι ρητοί συμμετείχαν στην προσπάθεια καθορισμού ενός «αριθμού» για την διαγώνιο του τετραγώνου, ο Dedekind τους χρησιμοποίησε όλους για τον ορισμό κάθε πραγματικού αριθμού.

### 1.2.2. Η τομή.

Στο σύνολο των ρητών λέμε ότι εκτελούμε **τομή**, όταν σχηματίζουμε δυο κατηγορίες ρητών  $K, A$  με τις εξής ιδιότητες : (i) κάθε ρητός μικρότερος ρητού της  $K$  κατηγορίας, ανήκει στην  $K$  κατηγορία, την οποία ονομάζουμε «κατώτερη» κατηγορία (ii) κάθε ρητός μεγαλύτερος ρητού της  $A$  κατηγορίας, ανήκει στην  $A$  κατηγορία, την «ανώτερη» κατηγορία και (iii) η «απόσταση» των δυο κατηγοριών είναι 0, δηλ. υπάρχει αριθμός  $\kappa$  της κατώτερης και  $\alpha$  της ανώτερης κατηγορίας, ώστε η διαφορά  $\alpha - \kappa$  να είναι όσο θέλουμε μικρή.

Οι δυο πρώτες ιδιότητες δηλώνουν ότι κάθε ρητός της κατώτερης κατηγορίας είναι μικρότερος κάθε ρητού της ανώτερης, διαφορετικά, αν ήταν μεγαλύτερος από κάποιον ρητό της ανώτερης, θα ανήκε στην ανώτερη κατηγορία. Επίσης κάθε ρητός της ανώτερης είναι μεγαλύτερος κάθε ρητού της κατώτερης, διαφορετικά θα ανήκε στην κατώτερη.

Η τρίτη ιδιότητα δηλώνει ότι στην διάταξη των ρητών, το πολύ ένας ρητός είναι δυνατόν να μη διαταχθεί. Διότι: αν είναι δυο οι μη διαταχθέντες, π.χ.  $\gamma, \delta$  με  $\gamma < \delta$  τότε: ο  $\gamma$  (όπως και ο  $\delta$ ) ως μη διαταχθείς είναι μεγαλύτερος κάθε αριθμού της κατώτερης κατηγορίας, διαφορετικά αν ήταν μικρότερος ή ίσος με κάποιο στοιχείο αυτής θα ανήκε σ αυτήν. Ομοίως είναι μικρότερος κάθε αριθμού της ανώτερης κατηγορίας. Θεωρούμε τους  $\eta, \zeta$  να ανήκουν στην κατώτερη ο  $\eta$  και στην ανώτερη ο  $\zeta$ . Η τρίτη ιδιότητα λέει ότι θα έχουμε  $\eta < \gamma < \delta < \zeta$ , δηλ.  $\zeta - \eta > \delta - \gamma =$  σταθερός, άτοπο γιατί η διαφορά  $\zeta - \eta$  γίνεται όσο θέλουμε μικρή.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις έχουμε τις εξής 4 περιπτώσεις:

1. Υπαρχει ένας ρητός  $\rho$  (περισσότεροι δεν είναι δυνατόν) μη διαταχθείς. Τότε κάθε ρητός της κατώτερης κατηγορίας είναι μικρότερος του  $\rho$ , της ανώτερης μεγαλύτερος και η τομή ορίζει τον ρητό  $\rho$ .

2. Όλοι οι ρητοί έχουν διαταχθεί και υπάρχει ρητός  $\rho$  στην κατώτερη κατηγορία που είναι μεγαλύτερος όλων των ρητών αυτής της κατηγορίας. Ο  $\rho$  είναι μικρότερος όλων των ρητών της ανώτερης, διαφορετικά θα ανήκε στην ανώτερη. Πάλι ο ρητός ορίζει τομή, και η τομή ορίζει τον ρητό  $\rho$ .

3. Όλοι οι ρητοί έχουν διαταχθεί και υπάρχει ρητός  $\rho$  στην ανώτερη κατηγορία που είναι μικρότερος όλων των ρητών αυτής της κατηγορίας. Ο  $\rho$  είναι μεγαλύτερος όλων των ρητών της κατώτερης, διαφορετικά θα ανήκε σ αυτήν. Πάλι ο ρητός ορίζει τομή, και η τομή ορίζει τον ρητό  $\rho$ .

4. Όλοι οι ρητοί έχουν διαταχθεί, στην κατώτερη δεν υπάρχει ρητός μεγαλύτερος από όλους τους ρητούς αυτής της κατηγορίας, στην ανώτερη δεν υπάρχει ρητός μικρότερος από όλους τους ρητούς αυτής της κατηγορίας. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται ο ασύμμετρος ή άρρητος αριθμός  $\alpha$ .

Στην ενότητα 1.2.1. αποδείξαμε ότι η 4<sup>η</sup> περίπτωση υπάρχει: Έστω ο ρητός 2. Εκτελούμε τομή και θέτουμε στην κατώτερη κατηγορία τους ρητούς αρνητικούς, τον 0 και εκείνους από τους θετικούς που έχουν τετράγωνο μικρότερο του 2. Στην ανώτερη κατηγορία θέτουμε τους θετικούς ρητούς που έχουν τετράγωνο μεγαλύτερο του 2. Τότε δεν βρισκόμαστε σε κάποια από τις περιπτώσεις 1,2,3 διότι: Περίπτωση 1<sup>η</sup>: κάθε ρητός έχει τετράγωνο είτε μικρότερο, είτε μεγαλύτερο του 2, άρα όλοι οι ρητοί έχουν διαταχθεί.

Περίπτωση 2<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup>: έχουν αποκλεισθεί στην 1.2.1. Βρισκόμαστε στην 4<sup>η</sup> περίπτωση.

K1: Ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

Ωστε οι ασύμμετροι υπάρχουν και καθορίζονται όπως και οι ρητοί δια τομής. **Κάθε ρητός «παράγει» μια τομή, αλλά κάθε τομή δεν ορίζει απαραίτητα ρητό**, όπως π.χ. η τομή του πιο πάνω παραδείγματος, όπου ορίζεται ο άρρητος  $\sqrt{2}$ .

Ο Dedekind τελικά όρισε τους πραγματικούς με την βοήθεια άπειρων συνόλων. Κατά την αντίληψη του, ένας πραγματικός είναι μια τομή  $[K,A]$  ρητών, ένα ζεύγος  $[K,A]$  άπειρων συνόλων. Π.χ. η τετραγωνική ρίζα του 2, το απλούστερο παράδειγμα αρρήτου, αναπαρίσταται από την τομή:

$$\left[ \left( \left\{ \frac{a}{b} > 0 : \frac{a^2}{b^2} < 2 \right\} \cup \left\{ \frac{a}{b} : \frac{a}{b} \leq 0 \right\} \right), \left\{ \frac{a}{b} > 0 : \frac{a^2}{b^2} > 2 \right\} \right], \text{ όπου } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Ο ρητός 2 μπορεί να οριστεί από την τομή  $[K,A]$ , όπου  $K = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$  και  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 2\}$ . Επίσης από την  $[K,A]$ , όπου  $K = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 2\}$  και  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 2\}$ , ή την  $[K,A]$ , με  $K = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$  και  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 2\}$ .

Οι άρρητοι απέκτησαν μοναδική αντίστοιχη τομή, αλλά με τους ρητούς παρουσιάστηκε και πάλι πρόβλημα. Ποια από τις παραπάνω 3 τομές θα αντιπροσωπεύει τον αριθμό 2; Παρατηρήθηκε ότι, ο οποιοσδήποτε ρητός είναι δυνατόν να τοποθετηθεί σε μια, μοναδική, από τις δυο κατηγορίες  $K$ , ή  $A$  και υποχρεώθηκαν οι ρητοί να επιλέξουν κατηγορία. Έτσι ο 1 δεν είχε τη δυνατότητα να διαλέξει για σύμβολό του την τομή  $[K,A]$ , με  $K = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$  και  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 1\}$ .

Για τους ρητούς λοιπόν ή «η  $K$  έχει μέγιστο και η  $A$  δεν έχει ελάχιστο» ή «η  $K$  δεν έχει μέγιστο, αλλά η  $A$  έχει ελάχιστο». Για την μοναδικότητα επελέγησαν τομές ώστε η κατώτερη κατηγορία  $K$  να στερείται μεγίστου. Π.χ. ο ρητός 1 οδηγείται πλέον υποχρεωτικά στην μοναδική τομή:  $[K,A]$ , με  $K = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$  και  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$ .

Κάποιοι ρητοί σκέφτηκαν ότι θα μπορούσαν να ορίσουν και τα σύμβολα  $\pm\infty$ , αν συγκεντρωθούν όλοι στην κατώτερη ή στην ανώτερη κατηγορία, αλλά δεν θα ασχοληθούμε με αυτό το θέμα σ' αυτή την εργασία.

### 1.2.3. Ορισμός:

**Πραγματικός αριθμός** ή απλούστερα αριθμός είναι μια τομή  $[K,A]$  στο σύνολο των ρητών ώστε και οι δύο κατηγορίες  $K,A$ , υπάρχουν (είναι μη κενά σύνολα) και η κατώτερη κατηγορία,  $K$ , δεν έχει μέγιστο αριθμό. Αν η ανώτερη κατηγορία έχει ελάχιστο αριθμό, η τομή παριστάνει αυτόν τον ρητό. Αν η ανώτερη δεν έχει ελάχιστο, τότε η τομή ονομάζεται άρρητος αριθμός.



Π.χ. ο πραγματικός αριθμός μηδέν παριστάνεται με την τομή  $[L, M]$ , με  $L = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$  και  $M = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$ . Ο πραγματικός αριθμός «-1» ορίζεται από την τομή  $[H, G]$  με  $H = \{x \in \mathbb{Q} : x < -1\}$  και  $G = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq -1\}$ . Η τετραγωνική ρίζα του 3 αντιστοιχεί στην τομή  $\left[ x \in \mathbb{Q} : \left( \{x > 0 : x^2 < 3\} \cup \{x : x \leq 0\} \right), \{x > 0 : x^2 > 3\} \right]$ . Η τομή  $[P, Q]$  με  $P = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 < -2\}$  και  $Q = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 > -2\}$  παριστάνει έναν αρνητικό άρρητο αριθμό.

Προχωρώντας ένα βήμα ακόμα έχουμε το «**αξίωμα συνεχείας του Dedekind**»: αν όλοι οι **πραγματικοί αριθμοί** χωριστούν σε δύο μη κενές κλάσεις, ώστε (i) κάθε αριθμός να ανήκει σε μοναδική κλάση και (ii) κάθε αριθμός της πρώτης κλάσης να είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της δεύτερης, **τότε** ή υπάρχει στην πρώτη κλάση ένας αριθμός μεγαλύτερος όλων των άλλων αριθμών της πρώτης κλάσης ή υπάρχει στη δεύτερη κλάση ένας αριθμός μικρότερος όλων των υπολοίπων αριθμών της δεύτερης κλάσης (Κανέλλος, 1975:71). Ο αριθμός αυτός είναι η **τομή** των πραγματικών κατά Dedekind. Π.χ. Η τομή  $[K, A]$  με  $K = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$  και  $A = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ , όπου  $a$  θετικός πραγματικός με  $a^2 = 2$ , είναι ο άρρητος  $\sqrt{2}$ . Η τομή  $[K, A]$  με  $K = \{x \in \mathbb{R} : x < 7\}$  και  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 7\}$ , ορίζει τον ρητό 7.

Για τον Dedekind θεμελιώδες είναι τα ολοκληρωμένα άπειρα σύνολα της τομής. Το σύνολο των πραγματικών είναι πλέον το σύνολο όλων των τομών. Δεν έχει καμιά σημασία αν έχει κανείς μια μέθοδο για να κατασκευάσει το μήκος που ορίζει το σημείο που αντιστοιχεί στο χάσμα της τομής. «Όλα τα ολοκληρωμένα άπειρα σύνολα-τομές υπάρχουν στον κόσμο των ιδεών, όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι ήδη εκεί, ανεξάρτητα από το αν μπορούν να οριστούν ή να κατασκευαστούν με πεπερασμένο τρόπο. Η ουσία είναι ότι ο μόνος τρόπος να αποκτήσουμε μια σταθερή μαθηματική αναπαράσταση της έννοιας «τυχαίος πραγματικός» είναι να παραστήσουμε τους πραγματικούς με σύνολα που είναι άπειρα. Δεν υπάρχει άλλος τρόπος να θεμελιώσουμε το σύστημα των πραγματικών αριθμών μέσω διακριτών μαθηματικών αντικειμένων» (Rucker, 2004: 67). Ο Dedekind απέδειξε και την πρόταση ότι: κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών είναι συγκλίνουσα (Γιαννακούλιας, 2007: 385). Τελικά, το αξίωμα του ελαχίστου άνω φράγματος (παράρτημα) με την βοήθεια του οποίου αποδεικνύεται η ύπαρξη τετραγωνικών ριζών (και όχι μόνο) των μη αρνητικών πραγματικών (Apostol, I, 1962: 24) και το οποίο δεν ισχύει στο σύνολο των ρητών, είναι ισοδύναμο με τις τομές Dedekind (Νεγρεπόντης I, 1999: 36).

**1.2.4.** Η μη γεωμετρική κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών επιτεύχθηκε τη δεκαετία του 1870, από τους Dedekind, Cantor, Weierstrass και Meray. Το κοινό χαρακτηριστικό των διαφορετικών αυτών κατασκευών είναι ο ορισμός του πραγματικού αριθμού μέσω ενός απείρου συνόλου ρητών (αναλυτικά στο: Γιαννακούλιας, 2007, ή στο Σταΐκος I, 1971, ή στο Spivak, 1991 ή στο Hardy, 1987 ).

Καλό είναι να θυμόμαστε, πως ότι καλύτερο υπάρχει, είναι πάντοτε αρκετά κρυμμένο και ότι σε κάθε θέμα της επιστήμης, αλλά και της ζωής, οι ενδιαφέρουσες απαντήσεις αλλά και οι εκπλήξεις, βρίσκονται στα επόμενα βήματα. *«Μόλις αντιληφθούμε ότι οι άρρητοι αριθμοί είναι θεμελιωδώς άπειροι, ότι δηλαδή είναι δυνατόν να θεμελιωθούν πλήρως μόνο μέσω μιας θεωρίας άπειρων συνόλων, είναι φυσικό να αρχίσουμε να εξετάζουμε απείρως μεγάλους, υπερπεπερασμένους αριθμούς»* (Rucker, 2004: 68).

Μπορούμε να προσεγγίσουμε έναν άρρητο με όση ακρίβεια θέλουμε με μια σειρά ρητών, που βρίσκονται συνεχώς «πιο κοντά» σ' αυτόν, να τον πλησιάσουμε «όσο θέλουμε». Η ανακρίβεια ή η αβεβαιότητα δεν έχουν σβηστεί, δεν έχουν εξαφανιστεί, είναι απλά πέρα από αυτό που μπορούμε να προσεγγίσουμε. Για τις ανάγκες της μέτρησης, δεν χρειαζόμαστε τους άρρητους αριθμούς. Το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης μπορεί να εκφραστεί αποκλειστικά μέσω των ρητών. Αλλά και τα όργανα μέτρησης, υπόκεινται σε περιορισμούς που μας αφήνουν κάτω από ένα επίπεδο ακρίβειας. Η θεωρητική πλευρά των αρρήτων τους καθιστά τόσο σημαντικούς για τα μαθηματικά: είναι αναγκαίοι για να καλύψουν τα κενά που αφήνουν στην ευθεία των αριθμών τα μη ρητά σημεία. Καθιστούν έτσι το σύνολο των πραγματικών ένα πλήρες σύστημα, ένα αριθμητικό συνεχές.

Ο Dedekind *«εγενίκευσε και ετελειοποίησε την ιδέα του Bertrand εισαγωγών την έννοια της τομής»* (Βαρόπουλος, 1949: 8). Ο γάλλος μαθηματικός J. Bertrand (1822-1900) σκέφτηκε να ορίσει έναν άρρητο αριθμό (ασύμμετρο προς την μονάδα) προσδιορίζοντας όλους τους ρητούς αριθμούς που είναι μικρότεροι και όλους τους ρητούς που είναι μεγαλύτεροι από αυτόν. Ο Dedekind τονίζει ότι η ιδέα είναι πολύ παλιά (**Θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου**, Στοιχεία: βιβλίο V) και *«βρίσκεται στο νου του καθενός που θέλει να υπολογίσει προσεγγιστικά την άρρητη ρίζα μιας εξίσωσης. Και αν κανείς θεωρήσει, καθώς κάνει αποκλειστικά ο Bertrand, τον άρρητο αριθμό ως λόγο δυο μετρήσιμων ποσοτήτων, τότε αυτός ο τρόπος ορισμού είναι ήδη διατυπωμένος με τον σαφέστερο δυνατό τρόπο στον φημισμένο ορισμό της ισότητας δύο λόγων που έδωσε ο Ευκλείδης(Στοιχεία, ν.5). Αυτή η ίδια πανάρχαια πεποίθηση αποτέλεσε την πηγή και της δικής μου θεωρίας, του Bertrand καθώς και άλλων πληρέστερων ή ατελέστερων προσπαθειών θεμελίωσης των άρρητων αριθμών»* (Dedekind, 1988).

### 1.3. Ρίζες

Τα θεωρούμενα ρητά κλάσματα έχουν ακέραιους όρους και φυσικά μη μηδενικό παρονομαστή. Μερικές φορές αποδεικνύεται η αρρητότητα του **ίδιου** αριθμού και με διαφορετική τεχνική, αλλά όπως και στις 1.1.1, 1.1.2, στην καρδιά όλων των αποδείξεων βρίσκεται η ίδια μέθοδος, η «εις άτοπον απαγωγή».

#### 1.3.1. Αποδείξεις χωρίς το θεμελιώδες θεώρημα.

**A.** Ο  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος.

Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  φυσικοί με  $0 < \beta < \gamma$  και  $\beta/\gamma$  είναι το κλάσμα με τον ελάχιστο αριθμητή για το οποίο ισχύει:  $\sqrt{2} = 1 + \frac{\beta}{\gamma}$ . Τότε  $2\gamma^2 = (\gamma + \beta)^2 = \gamma^2 + 2\beta\gamma + \beta^2$ , άρα  $\gamma/\beta^2$ , άρα  $\beta^2 = \gamma\delta$  και επομένως  $\sqrt{2} = 1 + \frac{\beta}{\gamma} = 1 + \frac{\delta}{\beta}$ , γιατί από την  $\beta^2 = \gamma\delta$ , παίρνουμε  $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\beta}$ . Όμως  $\beta < \gamma$ , άρα θα είναι και  $\delta < \beta$ , αλλά έχουμε υποθέσει τον  $\beta$  ελάχιστο αριθμητή, άτοπον.

**B.** Αυτή η μέθοδος γενικεύεται για την  $\sqrt{\mu}$ ,  $\mu$  φυσικός:

Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  φυσικοί με  $0 < \beta < \gamma$  και  $\beta/\gamma$  είναι το κλάσμα με τον ελάχιστο αριθμητή για το οποίο ισχύει:  $\sqrt{\mu} = \alpha + \frac{\beta}{\gamma}$ . Τότε  $\mu\gamma^2 = (\alpha\gamma + \beta)^2 = \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma + \beta^2$ , άρα  $\gamma/\beta^2$ , άρα  $\beta^2 = \gamma\delta$  και επομένως  $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\beta}$ . Όπως και προηγουμένως, αφού  $\beta < \gamma$ , θα είναι και  $\delta < \beta$ , άτοπον, γιατί  $\beta$  είναι ο ελάχιστος αριθμητής (Hardy-Wright, 2008:48).

#### 1.3.2. Αποδείξεις με την βοήθεια της πρωτογενούς ανάλυσης.

**1.** Η  $\sqrt{3}$  είναι άρρητος.

Έστω  $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$  με  $\text{MK}\Delta(a,b)=1$ . Τότε  $a^2 = 3b^2$ . Ο πρώτος 3 είναι παράγοντας του  $a^2$ , άρα και του  $a$  (παράρτημα Α), επομένως  $a=3c$ . Με τις ίδιες σκέψεις, από τις  $a^2 = 3b^2$  και  $a^2 = 9c^2$  καταλήγουμε στην  $b^2 = 3c^2$ , άρα και στην  $b = 3c$ .

Ήδη οι  $a, b$  έχουν κοινό παράγοντα τον 3, άτοπον.

**2.** Η  $\sqrt{6}$  είναι άρρητος

Έστω  $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$  με  $\text{MK}\Delta(a,b)=1$ . Τότε έχουμε διαδοχικά:  $a^2 = 6b^2$ ,  $a = 2c$ ,  $4c^2 = 6b^2$ ,  $2c^2 = 3b^2$ ,  $b = 2d$ . Οι  $a, b$  έχουν κοινό παράγοντα τον 2, άτοπον.

Κ1: Ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

3. Ο αριθμός  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  είναι άρρητος.

Έστω  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ , ρητός. Τότε  $2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2$  και  $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$ . Το σύνολο των ρητών είναι σώμα, ο  $\sqrt{6}$  έχει αποδειχθεί στην [2] ότι είναι άρρητος, άρα η τελευταία ισότητα είναι αδύνατη.

4. Με την ίδια μέθοδο, αν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός  $\sqrt{ab}$  είναι άρρητος, τότε συμπεραίνουμε ότι και ο  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  είναι άρρητος.

5. Η  $\sqrt[5]{120}$  είναι άρρητος.

Έστω  $\sqrt[5]{120} = \frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu, \nu$  φυσικοί με  $\text{ΜΚΔ}(\mu, \nu) = 1$ , τότε  $\mu^5 = \nu^5 120$ . Αν  $p$  πρώτος παράγοντας του  $\mu$ , τότε ο  $\mu^5$  θα έχει στην πρωτογενή του ανάλυση 5 παράγοντες ίσους με  $p$  (και πιθανόν και άλλους πρώτους παράγοντες). Επειδή  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ , ο  $p$  θα είναι παράγοντας του  $\nu$  (ο 120 δεν περιέχει κάποιον παράγοντα που να είναι  $5^n$  δύναμη πρώτου). Αλλά αυτό δεν είναι δυνατόν, γιατί υποθέσαμε ότι οι  $\mu, \nu$  δεν έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες.

6. Αν ο φυσικός  $\nu$  δεν είναι τετράγωνο φυσικού, τότε ο  $\sqrt{\nu}$  δεν είναι ρητός.

Ας υποθέσουμε ότι ο  $\nu$  είναι τετράγωνο ρητού  $\alpha/\beta$  με  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$ . Τότε  $\alpha^2 = \nu\beta^2$ . Αλλά ο  $\nu$  δεν είναι τετράγωνο φυσικού, άρα  $\beta > 1$ . Ο δεύτερος διαιρέτης (παράρτημα Α) του  $\beta$  είναι πρώτος,  $p$ . Θα έχουμε λοιπόν ότι  $p/\alpha^2$ , δηλ.  $p/\alpha \cdot \alpha$ , άρα  $p/\alpha$ . Βρήκαμε λοιπόν πρώτο  $p$  με  $p/\beta$  και  $p/\alpha$ , άτοπο, γιατί από την υποθέσαμε τους  $\alpha, \beta$  σχετικά πρώτους.

7. Αν  $a$  φυσικός, τότε ο αριθμός  $\sqrt[n]{a}$  είναι είτε ακέραιος, είτε άρρητος.

Έστω ότι υπάρχει ρητός,  $\kappa/\lambda$ , με  $\text{ΜΚΔ}(\kappa, \lambda) = 1$ , τέτοιος ώστε:  $\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^n = a \Leftrightarrow \kappa^n = a\lambda^n$ .

Και πάλι, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, κάθε πρώτος παράγοντας του  $a$  πρέπει να είναι και παράγοντας του  $\kappa$ , δηλαδή εμφανίζεται  $n$  φορές στο αριστερό μέλος. Επειδή  $\text{ΜΚΔ}(\kappa, \lambda) = 1$  οι  $\kappa$  και  $\lambda$  δεν έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες, άρα και στο δεξιό μέλος κάθε πρώτος παράγοντας του  $a$  εμφανίζεται  $n$  φορές, άρα ο  $a$  είναι νιοστή δύναμη ακεραίου, δηλ. η  $\sqrt[n]{a}$  είναι ακέραιος. Αν λοιπόν η  $\sqrt[n]{a}$  είναι ρητός, τότε είναι ακέραιος, οπότε αν δεν είναι ακέραιος, θα είναι άρρητος.

### 1.3.3. Ρητές και άρρητες ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων.

Μπορούμε να διερευνούμε την αρρητότητα και με την βοήθεια των θεωρημάτων ακεραίων και ρητών ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων (παράρτημα Β).

#### Παραδείγματα:

1. Οι υποψήφιες ρητές ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης  $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$  είναι οι  $\frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 1}{\pm 2}, \frac{\pm 3}{\pm 1}, \frac{\pm 3}{\pm 2}$ , συνολικά 16. Από τις 16 υποψηφιότητες, οι διαφορετικές είναι 8: 1, -1,  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ . Από τις «εξετάσεις» των 8, αναδεικνύονται τελικά ρίζες της πολυωνυμικής  $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$  μόνον οι 1,  $\frac{1}{2}$  και 3.

2. Η  $x^2 - 2 = 0$  δεν επαληθεύεται από τις υποψήφιες ακέραιες ρίζες  $\pm 1, \pm 2$ . Η  $x^2 - 2 = 0$  δεν έχει λοιπόν ρητές ρίζες. Ο αριθμός  $\sqrt{2}$  που την επαληθεύει είναι άρρητος. Ο  $\sqrt{3}$  είναι άρρητος, γιατί η  $x^2 - 3 = 0$ , δεν επαληθεύεται από τις υποψήφιες ακέραιες ρίζες  $\pm 1, \pm 3$  (επειδή  $1 < \sqrt{3} < 2$ , ο  $\sqrt{3}$  δεν είναι ακέραιος, οπότε δεν είναι ρητή ρίζα της εξίσωσης  $x^2 - 3 = 0$ ).

3. Ο  $\sqrt{7}$  είναι άρρητος, γιατί είναι ρίζα της  $x^2 - 7 = 0$ .

Οι ρητές ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι ακέραιοι γιατί ο συντελεστής του  $x^2$  είναι μονάδα. Αλλά  $4 < 7 < 9$ , επομένως  $2 < \sqrt{7} < 3$  και δεν υπάρχει ακέραιος μεταξύ 2 και 3.

Ο αριθμός  $\sqrt[3]{5}$  είναι άρρητος, γιατί η  $x^3 - 5 = 0$  δεν έχει ακέραιες ρίζες (οι  $\pm 1, \pm 5$  δεν την επαληθεύουν).

4. Αν  $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ , τότε  $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$ ,  $(x - \sqrt{2})^2 = 3$  και μετά τις πράξεις και έναν ακόμα τετραγωνισμό, καταλήγουμε στο ότι ο  $x$  είναι ρίζα της  $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ .

Οι υποψήφιες ακέραιες ρίζες  $\pm 1$  δεν επαληθεύουν την εξίσωση. Ο  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  είναι άρρητος (μπορούμε να αποφύγουμε τις δοκιμές γιατί  $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 1$ ).

5. Η  $\sqrt[3]{5} - \sqrt{2}$  είναι άρρητος:

Θέτουμε  $z = \sqrt[3]{5} - \sqrt{2}$ , οπότε  $z + \sqrt{2} = \sqrt[3]{5}$ . Υψώνουμε στην 3<sup>η</sup>, απομονώνουμε το ριζικό, βρίσκουμε  $x^3 + 6x - 5 = -\sqrt{2}(3x^2 + 2)$ , υψώνουμε στο τετράγωνο και βρίσκουμε τελικά ότι ο αριθμός z είναι ρίζα της  $x^6 - 6x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 60x + 17 = 0$ . Οι υποψήφιες ρητές ρίζες αυτής είναι οι ακέραιοι  $\pm 1, \pm 17$ . Μπορούμε να δοκιμάσουμε αν πράγματι είναι ρίζες, καλύτερα μόνο τις θετικές, γιατί  $\sqrt[3]{5} > \sqrt{2}$  ( $25 > 8$ ), ή και καμία δοκιμή, αφού  $\sqrt[3]{5} < 1 + \sqrt{2}$  ( $5 < 7 + 6\sqrt{2}$ ) και επομένως  $0 < \sqrt[3]{5} - \sqrt{2} < 1$ , άρα ο z δεν είναι δυνατόν να είναι κάποιος από τους  $\pm 1, \pm 17$ .

6. Η  $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$  είναι άρρητος:

Θέτουμε,  $w = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$  οπότε  $w + \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}$ . Υψώνουμε στην 3<sup>η</sup>, απομονώνουμε την  $\sqrt{3}$ , βρίσκουμε  $x^3 + 9x - 2 = -3\sqrt{3}(x^2 + 1)$ . Με έναν ακόμα τετραγωνισμό και τις βασανιστικές πράξεις βρίσκουμε ότι ο αριθμός w είναι ρίζα της  $x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23 = 0$ . Οι υποψήφιες ακέραιες ρίζες είναι οι  $\pm 1, \pm 23$ . Μπορούμε να διαπιστώσουμε με δοκιμές ότι οι αριθμοί αυτοί δεν είναι ρίζες, ή και να μην δοκιμάσουμε, αν σκεφτούμε ότι  $-1 < w < 0$  ( $1.2 < \sqrt[3]{2} < 1.3, 1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ ).

7. Αν n, m θετικοί ακέραιοι, τότε η  $\sqrt[n]{m}$  είναι ρίζα της  $x^n - m = 0$ . Η  $x^n - m = 0$  έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου 1. Άρα η  $\sqrt[n]{m}$  είναι είτε άρρητος, είτε ακέραιος. Αν είναι ακέραιος, π.χ. k, τότε ο m είναι n-οστή δύναμη ακεραίου:  $m = k^n$

**1.3.4.** Το σύμβολο «  $\sqrt{\quad}$  » δεν είναι έμβλημα των αρρήτων, π.χ.  $\sqrt{121} = 11$ ,  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ ,  $\sqrt[3]{8} = 2$ ,  $\sqrt{1.96} = 1.4$ ,  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$ ,  $\sqrt{0} = 0$ ,  $\sqrt{0.0001} = 0.01$ ,  $\sqrt{0.9} = 1$ ,  $\sqrt[3]{0.296} = 0.\bar{6}$  ( $0.\bar{296} = \frac{8}{27}$ ),  $\sqrt[3]{0.9} = 0.\bar{9}$ ,  $\sqrt{0.4} = 0.\bar{6}$ ,  $\sqrt[3]{1.331} = 1.1$ .

Δεν είναι επίσης απαραίτητο για να χαρακτηρίσει την υποψηφιότητα της αρρητότητας κάποιου αριθμού, π.χ. ενότητες 1.4, 1.5, 1.6.5.

### 1.4. Λογάριθμοι

Οι αποδείξεις βασίζονται στο θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής : η πρωτογενής παράσταση κάθε φυσικού είναι μοναδική. Για λογαρίθμους με βάση 10 πολλές φορές γράφουμε  $\log r$ , αντί του  $\log_{10} r$ .

#### 1.4.1. Παραδείγματα:

1. Ο  $\log_{10} 2 = \log 2$  είναι άρρητος: Αν  $\log 2 = \frac{a}{b}$  (a,b θετικοί ακέραιοι), τότε  $2 = 10^{\frac{a}{b}}$ , οπότε  $2^b = 10^a = 2^a 5^a$ , άτοπον, γιατί ο  $2^b$  είναι ένα γινόμενο b πρώτων παραγόντων ίσων με 2, δεν περιέχει τον πρώτο 5, ενώ ο 5 είναι στην πρωτογενή παράσταση του  $10^a$ .

2. Ο  $\log 21$  είναι άρρητος: αν  $\log 21 = \frac{a}{b}$  ( a,b θετικοί ακέραιοι ) τότε οδηγούμαστε στην αδύνατη (σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα) ισότητα:  $3^b 7^b = 21^b = 10^a = 2^a 5^a$ . (Ο 3 δεν βρίσκεται στην πρωτογενή μορφή του  $10^a$ ).

3. Ο  $(\log 3 + \log 5)$  είναι άρρητος, γιατί  $\log 3 + \log 5 = \log 15$  και αν  $\log 15 = \frac{a}{b}$  ( a,b θετικοί ακέραιοι ) τότε οδηγούμαστε στην αδύνατη ισότητα:  $3^b 5^b = 15^b = 10^a = 2^a 5^a$ .

4. Ο  $\log \frac{3}{5}$  είναι άρρητος, γιατί , αν  $\log \frac{3}{5} = \frac{-m}{n}$ , m, n θετικοί ακέραιοι, τότε  $5^n = 10^m \cdot 3^n$ . Αυτή η ισότητα όμως δεν είναι δυνατόν να ισχύει γιατί ο  $5^n$  δεν έχει στην πρωτογενή του ανάλυση τον πρώτο 3.

5. Ο  $\log_6 9$  είναι άρρητος: Αν υποθέσουμε ότι είναι ρητός,  $\log_6 9 = \frac{m}{n}$ , (m,n φυσικοί), τότε  $6^{\frac{m}{n}} = 9$ ,  $6^m = 9^n$ , δηλ. οι αριθμοί  $6^m, 9^n$  έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες, άτοπον, γιατί ο  $9^n$  δεν έχει τον παράγοντα 2 που είναι στην πρωτογενή μορφή του  $6^m$ .

6. Ο  $\log 18$  είναι άρρητος: Έστω  $\log 18 = \frac{\kappa}{\lambda}$  όπου κ,λ φυσικοί με  $\kappa > \lambda$ , αφού  $10 < 18 < 100$

Τότε  $10^\kappa = 18^\lambda$ . Ο 5 είναι πρώτος παράγοντας του 10, αλλά όχι του 18.

### 1.3.6. Θεώρημα:

Αν  $r$  είναι θετικός ρητός, τότε ο  $\log r$  είναι άρρητος, εκτός αν  $r = 10^n$  για κάποιον ακέραιο  $n$ .

**Απόδειξη:** Αν ο  $\log r$  είναι ρητός, τότε ρητός είναι και ο  $\log r^{-1}$ , επομένως θεωρούμε  $r > 1$ .

Έστω  $r = \frac{a}{b}$  όπου  $a, b$  θετικοί ακέραιοι με  $\text{ΜΚΔ}(a, b) = 1$ .

Υποθέτουμε ότι  $\log r = \frac{c}{d}$ , όπου  $c, d$  θετικοί ακέραιοι με  $\text{ΜΚΔ}(c, d) = 1$ , τότε  $10^c b^d = a^d$ . Αν  $b > 1$ , τότε ένας **πρώτος** διαιρέτης του  $b$ , σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, θα πρέπει να διαιρεί τον  $a^d$ , άρα και τον  $a$ . Αλλά  $\text{ΜΚΔ}(a, b) = 1$ , οπότε και  $\text{ΜΚΔ}(a^d, b^d) = 1$ . Έπεται ότι  $b^d = 1$ , δηλ.  $b = 1$ . Άρα  $a^d = 10^c = (2 \cdot 5)^c = 2^c \cdot 5^c$  και ο  $a$  θα πρέπει να έχει πρώτους παράγοντες τους 2 και 5, έστω  $a = 2^u \cdot 5^v$ , όπου  $u, v$  θετικοί ακέραιοι. Από την μοναδικότητα της ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων συμπεραίνουμε ότι  $ud = c$ .

Αλλά  $\text{ΜΚΔ}(c, d) = 1$ , επομένως  $d = 1$ . Τελικά  $b = 1, d = 1$ , άρα  $r = \frac{a}{b} = a = a^d = 10^c$ .

### Παρατηρήσεις:

1. Με το ίδιο επιχείρημα μπορούμε να αποδείξουμε ότι :αν  $r, b \neq 1$ , θετικοί ρητοί, τότε ο  $\log_b r$  είναι άρρητος, εκτός αν υπάρχουν ακέραιοι  $m, n$  ώστε  $r^n = b^m$ .

2. Το σύμβολο  $\log$  δεν χαρακτηρίζει αρρήτους, π.χ.:  $\log_{10} 100 = 2, \log_{10} 0.01 = -2, \log_2 1024 = 10, \log_{17} 1 = 0$ .

3. Ο  $\log_{10} r$  όπου  $r$  οποιοσδήποτε θετικός ρητός, εκτός από τους  $r = 10^k, k \in \mathbb{Z}$  είναι λοιπόν άρρητος. Στην ενότητα 5.9.6, με τη βοήθεια του Θ.Gelfond, ο  $\log_{10} r$  για  $r \neq 10^k, k \in \mathbb{Z}$ , οδηγείται τελικά στην υπερβατικότητα.



### 1.5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Στο τμήμα αυτό θα αποδείξουμε ότι για γωνίες που το μέτρο τους σε μοίρες είναι ρητοί αριθμοί, δηλαδή για γωνίες  $\phi = r \cdot \pi$ , ρητά πολλαπλάσια του  $\pi$ , οι τριγωνομετρικοί αριθμοί  $\eta\mu\phi$ ,  $\sigma\upsilon\nu\phi$ ,  $\epsilon\phi\phi$  (όπου ορίζεται), είναι, εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων, άρρητοι. Ακριβέστερα θα αποδείξουμε την αλγεβρική φύση αυτών των αριθμών (η υπερβατικότητα των τριγωνομετρικών διερευνάται στην ενότητα 5.9.).

Από τις βασικές ταυτότητες:  $\eta\mu^2\phi + \sigma\upsilon\nu^2\phi = 1$ ,  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ ,  $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ , για  $\alpha = \beta = \phi$ , παίρνουμε:  $\sigma\upsilon\nu 2\phi = \sigma\upsilon\nu^2\phi - \eta\mu^2\phi = 2\sigma\upsilon\nu^2\phi - 1$  και  $\eta\mu 2\phi = 2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi$ .

Από τις ίδιες ταυτότητες, για  $\alpha = 2\phi$ ,  $\beta = \phi$ , έχουμε διαδοχικά :  
 $\sigma\upsilon\nu 3\phi = \sigma\upsilon\nu 2\phi\sigma\upsilon\nu\phi - \eta\mu 2\phi\eta\mu\phi = (2\sigma\upsilon\nu^2\phi - 1)\sigma\upsilon\nu\phi - 2\eta\mu^2\phi\sigma\upsilon\nu\phi = 4\sigma\upsilon\nu^3\phi - 3\sigma\upsilon\nu\phi$  και  
 $\eta\mu 3\phi = \eta\mu 2\phi\sigma\upsilon\nu\phi + \sigma\upsilon\nu 2\phi\eta\mu\phi = 2\eta\mu\phi(1 - \eta\mu^2\phi) + (1 - 2\eta\mu^2\phi)\eta\mu\phi = 3\eta\mu\phi - 4\eta\mu^3\phi$ .

Γνωρίζουμε επίσης ότι  $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ$ ,  
 $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  κλπ.

#### 1.5.1. Οι αριθμοί $\sigma\upsilon\nu 20^\circ$ , $\sigma\upsilon\nu 10^\circ$ , είναι άρρητοι.

Αν  $\phi = 20^\circ$ , τότε,  $\sigma\upsilon\nu 3\phi = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$  και από την  $\sigma\upsilon\nu 3\phi = 4\sigma\upsilon\nu^3\phi - 3\sigma\upsilon\nu\phi$ , συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός  $\chi = \sigma\upsilon\nu 20^\circ$ , ικανοποιεί την πολυωνμική εξίσωση:  
 $\frac{1}{2} = 4\chi^3 - 3\chi \Leftrightarrow 8\chi^3 - 6\chi - 1 = 0$ . Οι πιθανές ρητές ρίζες, αν υπάρχουν, είναι:  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ .  
 Με τη βοήθεια του σχήματος Horner για λιγότερες πράξεις, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι υποψηφιότητες  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$  δεν ικανοποιούν την  $8\chi^3 - 6\chi - 1 = 0$ , άρα η συγκεκριμένη εξίσωση δεν έχει ρητές ρίζες. Επομένως, ο αριθμός  $\chi = \sigma\upsilon\nu 20^\circ$ , που είναι ρίζα της, δεν είναι ρητός.

Αν θέλουμε να συντομεύσουμε τη διαδικασία, παρατηρούμε ότι οι αριθμοί  $\sigma\upsilon\nu 3\phi$  και  $2\sigma\upsilon\nu 3\phi$  είναι ταυτόχρονα ρητοί ή άρρητοι.

Για τον  $2\sigma\upsilon\nu 3\phi$  ισχύει  $2\sigma\upsilon\nu 3\phi = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^3 - 3(2\sigma\upsilon\nu\phi)$ , επομένως ο  $\psi = 2\sigma\upsilon\nu 20^\circ$  είναι ρίζα της  $\psi^3 - 3\psi - 1 = 0$ , την οποία ελέγχουμε για τις υποψήφιες ακέραιες ρίζες  $\pm 1$ .

Κ1: Ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

Μπορούμε όμως να σκεφτούμε και ως εξής: Η συνάρτηση  $\sin x$  είναι γνήσια φθίνουσα στο  $(0, 30^\circ)$ , επομένως  $\sin 0^\circ > \sin 20^\circ > \sin 30^\circ$ , και γνωρίζουμε ότι:  $\sin 0^\circ = 1$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Από τις  $1 < 3 < 4$ ,  $1 < \sqrt{3} < 2$ ,  $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$  συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός  $\sin 20^\circ$  βρίσκεται στο διάστημα  $(0.5, 1)$  ή καλύτερα στο  $(0.8, 1)$ . Από τις υποψήφιες ρίζες  $(\pm 1, \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.125)$  δεν βρίσκεται κάποια στο  $(0.8, 1)$ . Άρα ο  $\sin 20^\circ$  δεν είναι ρητός.

Αν ο  $\sin 10^\circ$  είναι ρητός, από την ισότητα:  $\sin 20^\circ = 2\sin^2 10^\circ - 1$ , ( $\sin 2\varphi = 2\sin^2 \varphi - 1$ ) συμπεραίνουμε ότι θα έπρεπε να είναι ρητός και ο  $2\sin^2 10^\circ - 1$ , αλλά ήδη αποδείξαμε ότι ο  $\sin 20^\circ$  είναι άρρητος. Άρα και ο  $\sin 10^\circ$  είναι άρρητος.

### 1.5.2. Οι αριθμοί $\eta\mu 10^\circ$ , $\epsilon\varphi 10^\circ$ είναι άρρητοι.

Αν  $\varphi = 10^\circ$ , τότε από την  $\eta\mu 3\varphi = 3\eta\mu\varphi - 4\eta\mu^3\varphi$ , έπεται ότι ο αριθμός  $\chi = \eta\mu 10^\circ$ , ικανοποιεί την πολυωνυμική εξίσωση:  $\frac{1}{2} = \eta\mu 30^\circ = 3\eta\mu 10^\circ - 4\eta\mu^3 10^\circ$ , ή

$\frac{1}{2} = 3\chi - 4\chi^3 \Leftrightarrow 8\chi^3 - 6\chi + 1 = 0$ . Διαπιστώνουμε και πάλι (δοκιμάζοντας) ότι κάποια από τις

υποψήφιες ρητές ρίζες,  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$  δεν κατορθώνει να είναι ρίζα, οπότε ο αριθμός

$\eta\mu 10^\circ$  δεν είναι ρητός. Μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των δοκιμών αν παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση  $\eta\mu x$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $(0, 30^\circ)$ , επομένως  $\eta\mu 0^\circ < \eta\mu 10^\circ < \eta\mu 30^\circ$ , και

$\eta\mu 0^\circ = 0, \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$ , άρα  $0 < \eta\mu 10^\circ < 0.5$ . Οι  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  βρίσκονται στο συγκεκριμένο διάστημα,

άρα δοκιμάζουμε μόνο αυτούς τους δύο αριθμούς.

Και εδώ, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε τη δυνατότητα να «κατευθύνουμε» την διαδικασία στον έλεγχο των ακεραίων ριζών της  $\psi^3 - 3\psi + 1 = 0$ ,  $\psi = 2\eta\mu\varphi$ , γιατί από την  $\eta\mu 3\varphi = 3\eta\mu\varphi - 4\eta\mu^3\varphi$  παίρνουμε:  $(2\eta\mu 3\varphi) = 3(2\eta\mu\varphi) - (2\eta\mu\varphi)^3$ .

Θα μπορούσαμε όμως να χρησιμοποιήσουμε και το προηγούμενο αποτέλεσμα, ότι ο  $\sin 20^\circ$  δεν είναι ρητός, και την ισότητα  $\sin 20^\circ = 1 - 2\eta\mu^2 10^\circ$ . Αν ο αριθμός  $\eta\mu 10^\circ$  είναι ρητός, τότε θα είναι και το τετράγωνό του, άρα και ο  $\sin 20^\circ$ , άτοπον.

Από την ταυτότητα  $1 + \epsilon\varphi^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ , συμπεραίνουμε ότι η  $\epsilon\varphi 10^\circ$  είναι άρρητος

(αν είναι ρητός, τότε θα είναι ρητός και ο αριθμός  $\sin^2 10^\circ$ , άρα και ο  $\sin 20^\circ = 2\sin^2 10^\circ - 1$ , ενώ δεν είναι).

**1.5.3. Οι αριθμοί  $\sin 40^\circ$ ,  $\eta\mu 20^\circ$ ,  $\eta\mu 50^\circ$  είναι άρρητοι.**

Ο αριθμός  $\chi = \sin 40^\circ$ , ικανοποιεί την πολυωνυμική εξίσωση:

$$(\sin 3\varphi = 4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi, \sin 120^\circ = -1/2) \quad -\frac{1}{2} = 4\chi^3 - 3\chi \Leftrightarrow 8\chi^3 - 6\chi + 1 = 0 \text{ και}$$

συνεχίζουμε όπως προηγουμένως. Αν υποθέσουμε ότι ο  $\eta\mu 20^\circ$  είναι ρητός, από την  $\sin 40^\circ = 1 - 2\eta\mu^2 20^\circ$  καταλήγουμε σε άτοπο.

Για το  $\eta\mu 50^\circ$ , χρησιμοποιούμε την:  $\eta\mu 3\varphi = 3\eta\mu\varphi - 4\eta\mu^3\varphi$  ( $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ = 0.5$ )

**1.5.4.**

Η βασική παρατήρηση ,που προκύπτει από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin 2\theta = 2\sin^2\theta - 1, \quad \sin 2\theta = 1 - 2\eta\mu^2\theta, \quad 1 + \epsilon\phi^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta},$$

είναι ότι αν ο αριθμός  $\sin 2\theta$  είναι άρρητος, τότε οι αριθμοί:  $\sin\theta$ ,  $\eta\mu\theta$ ,  $\epsilon\phi\theta$  είναι επίσης άρρητοι . Επίσης, αν οι  $\eta\mu\varphi$ ,  $\sin\varphi$  είναι ρητοί, από τις  $\eta\mu 3\varphi = 3\eta\mu\varphi - 4\eta\mu^3\varphi$ ,  $\sin 3\varphi = 4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi$ , έχουμε ότι και οι  $\eta\mu 3\varphi$ ,  $\sin 3\varphi$  είναι ρητοί και οι αντιθετοαντίστροφες αυτών μας οδηγούν στο συμπέρασμα: αν οι  $\sin 3\varphi$ ,  $\eta\mu 3\varphi$  είναι άρρητοι, τότε είναι άρρητοι και οι  $\sin\varphi$ ,  $\eta\mu\varphi$ . Π.χ. από τα προηγούμενα

αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί  $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin 15^\circ$ ,  $\eta\mu 15^\circ$ ,  $\epsilon\phi 15^\circ$ ,

$\sin 7^\circ 30''$ ,  $\eta\mu 7^\circ 30''$ ,  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin 22^\circ 30'$ ,  $\eta\mu 22^\circ 30'$ ,  $\epsilon\phi 22^\circ 30'$ ,  $\epsilon\phi 7^\circ 30''$ ,  $\sin 5^\circ$ ,

$\sin 2^\circ 30'$ ,  $\eta\mu 5^\circ$ , είναι άρρητοι.

Επίσης, από την  $\sin 2 \cdot 35^\circ = \sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \eta\mu 20^\circ$ , προκύπτουν οι αρρητότητες των αριθμών  $\sin 35^\circ$ ,  $\eta\mu 35^\circ$ .

**1.5.5. Ο αριθμός  $\sin 12^\circ$  είναι άρρητος**

Από την:  $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ ,  $\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\cos\beta + \sin\alpha\eta\mu\beta$ , για  $\alpha = 3\varphi$ ,  $\beta = 2\varphi$ , παίρνουμε:  $\sin 5\varphi = \sin 3\varphi\cos 2\varphi - \eta\mu 3\varphi\eta\mu 2\varphi = (4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi)(\sin^2\varphi - \eta\mu^2\varphi) - (3\eta\mu\varphi - 4\eta\mu^3\varphi)(2\eta\mu\varphi\cos\varphi) = 4\sin^5\varphi - 4\sin^3\varphi\eta\mu^2\varphi - 3\sin^3\varphi + 3\sin\varphi\eta\mu^2\varphi - 6\eta\mu^2\varphi\cos\varphi + 8\eta\mu^4\varphi\cos\varphi$ . Μετά τις απαραίτητες αντικαταστάσεις καταλήγουμε στην ταυτότητα

$$\sin 5\varphi = 16\sin^5\varphi - 20\sin^3\varphi + 5\sin\varphi.$$

K1: Ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

Για τον αριθμό  $2\text{συν}5\varphi$  θα έχουμε  $2\text{συν}5\varphi = (2\text{συν}\varphi)^5 - 5(2\text{συν}\varphi)^3 + 5(2\text{συν}\varphi)$ . Ο  $2\text{συν}12^\circ$  θα είναι αριθμός μεταξύ 0.5 και 1, αφού  $0 < 12^\circ < 60^\circ$  και η συνάρτηση  $\text{συν}x$  είναι γνήσια φθίνουσα στο  $[0, 60]$ . Οι υποψήφιες ρητές (ακέραιες) ρίζες της  $\omega^5 - 5\omega^3 + 5\omega - 1 = 0$ , οι  $\pm 1$ , δεν βρίσκονται στο διάστημα  $(0.5, 1)$ , άρα ο  $2\text{συν}12^\circ$  είναι άρρητος, επομένως και ο  $\text{συν}12^\circ$ .

Αν δούμε και τα προηγούμενα παραδείγματα, συμπεραίνουμε ότι είναι άρρητοι και οι αριθμοί  $\text{συν}6^\circ$ ,  $\text{συν}3^\circ$ ,  $\text{συν}1^\circ 30'$ ,  $\text{συν}1^\circ$ ,  $\text{συν}0^\circ 30'$ ,  $\eta\mu 1^\circ$  κλπ.

### 1.5.6. Ο $\text{συν}1^\circ$ είναι άρρητος.

Για την απόδειξη της αρρητότητας του  $\text{συν}1^\circ$  θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα De Moivre:  $\text{συν}45^\circ + i\eta\mu 45^\circ = (\text{συν}1^\circ + i\eta\mu 1^\circ)^{45}$ . Ο αριθμός  $\text{συν}45^\circ$  εκφράζεται σαν πολυώνυμο του  $\text{συν}1^\circ$  με ακέραιους συντελεστές. Αν ο αριθμός  $\text{συν}1^\circ$  είναι ρητός, τότε ρητός θα έπρεπε να είναι και ο  $\text{συν}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , αλλά δεν είναι.

### 1.5.7. Επαγωγή.

A. Για να συνεχίσουμε τις αποδείξεις με αυτή τη μέθοδο, χρειάζεται να βρούμε έναν εύκολο τρόπο για να υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς των πολλαπλασίων μιας γωνίας. Επίσης, από τα παραδείγματα γίνεται φανερό, ότι αντί να ελέγχουμε τον  $\text{συν}\varphi$ , είναι πιο εύκολος ο έλεγχος για τον αριθμό  $2\text{συν}\varphi$ , αφού, τουλάχιστον στα συγκεκριμένα παραδείγματα, ο συντελεστής του  $\text{συν}^k\varphi$  στο πολυώνυμο που κατασκευάζεται έτσι ώστε να έχει ρίζα τον  $\text{συν}\varphi$ , «έτυχε» να είναι ο  $2^{k-1}$ , οπότε για τον  $2\text{συν}k\varphi$  θα έχουμε  $2 * 2^{k-1} \text{συν}^k\varphi$ , δηλαδή συντελεστή του  $(2\text{συν}\varphi)^k$  τη μονάδα. Σε όλα τα παραδείγματα, χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς ή κατάλληλο πολλαπλάσιο της γωνίας  $\varphi$  ώστε να προκύψει γνωστός. Για να ενοποιήσουμε τις περιπτώσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκείνο το πολλαπλάσιο της  $\varphi = \gamma \cdot \pi$ , ώστε να προκύπτει γωνία που είναι (ακέραιο) πολλαπλάσιο του  $\pi$ . Παίρνουμε λοιπόν το  $k\varphi$  ώστε ο  $k\gamma$  να είναι ακέραιος, οπότε  $\text{συν}k\varphi = \pm 1$  και  $2\text{συν}k\varphi = \pm 2$  (π.χ αν  $\gamma = \frac{15}{7}$ , τότε ο  $k$  μπορεί να είναι ο 7).

B. Από το θεώρημα De Moivre,  $(\text{συν}\varphi + i\eta\mu\varphi)^k = \text{συν}(k\varphi) + i\eta\mu(k\varphi)$ , και το διωνυμικό ανάπτυγμα,  $(\alpha + \beta)^k = \sum_{\lambda=0}^k \binom{k}{\lambda} \alpha^{k-\lambda} \beta^\lambda$ , μπορούμε να υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των πολλαπλασίων μιας γωνίας  $\varphi$  από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\varphi$ .

**Για κ=2**, έχουμε:  $(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^2 = \sigma\upsilon\nu(2\phi) + i\eta\mu(2\phi)$  και

$$\begin{aligned}(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^2 &= \sigma\upsilon\nu^2\phi + 2\sigma\upsilon\nu\phi(i\eta\mu\phi) + (i\eta\mu\phi)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\phi - \eta\mu^2\phi + 2i\sigma\upsilon\nu\phi\eta\mu\phi \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\phi - 1 + 2i\sigma\upsilon\nu\phi\eta\mu\phi\end{aligned}$$

Από αυτή την ισότητα παίρνουμε τους γνωστούς τύπους του διπλασίου τόξου:

$\sigma\upsilon\nu 2\phi = 2\sigma\upsilon\nu^2\phi - 1$  και  $\eta\mu 2\phi = 2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi$ . Η πρώτη ισότητα μετασχηματίζεται στην περισσότερο ενδιαφέρουσα (έχει συντελεστή του  $(2\sigma\upsilon\nu\phi)^2$  την μονάδα):

$$2\sigma\upsilon\nu 2\phi = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^2 - 2 \quad [1]$$

**Για κ=3**, θα έχουμε:  $(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^3 = \sigma\upsilon\nu(3\phi) + i\eta\mu(3\phi)$  και

$$\begin{aligned}(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^3 &= \sum_0^3 \binom{3}{\lambda} (\sigma\upsilon\nu\phi)^{3-\lambda} (i\eta\mu\phi)^\lambda \\ &= \sigma\upsilon\nu^3\phi + \binom{3}{1} \sigma\upsilon\nu^2\phi(i\eta\mu\phi) + \binom{3}{2} \sigma\upsilon\nu\phi(i\eta\mu\phi)^2 + (i\eta\mu\phi)^3 \\ &= \sigma\upsilon\nu^3\phi + \binom{3}{1} \sigma\upsilon\nu^2\phi(i\eta\mu\phi) - \binom{3}{2} \sigma\upsilon\nu\phi(1 - \sigma\upsilon\nu^2\phi) - i\eta\mu^3\phi \\ &= \sigma\upsilon\nu^3\phi + 3(1 - \eta\mu^2\phi)(i\eta\mu\phi) - 3\sigma\upsilon\nu\phi + 3\sigma\upsilon\nu^3\phi - i\eta\mu^3\phi \\ &= 4\sigma\upsilon\nu^3\phi - 3\sigma\upsilon\nu\phi + i(3\eta\mu\phi - 4\eta\mu^3\phi)\end{aligned}$$

Τελικά:  $\sigma\upsilon\nu 3\phi = 4\sigma\upsilon\nu^3\phi - 3\sigma\upsilon\nu\phi$  και  $\eta\mu 3\phi = 3\eta\mu\phi - 4\eta\mu^3\phi$ .

Και πάλι θα μετασχηματίσουμε την πρώτη ισότητα στην  $2\sigma\upsilon\nu 3\phi = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^3 - 3(2\sigma\upsilon\nu\phi)$  [2]

**Για κ=4**, θα έχουμε:  $(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^4 = \sigma\upsilon\nu(4\phi) + i\eta\mu(4\phi)$  και

$$\begin{aligned}(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^4 &= \sum_0^4 \binom{4}{\lambda} (\sigma\upsilon\nu\phi)^{4-\lambda} (i\eta\mu\phi)^\lambda = \\ &= \sigma\upsilon\nu^4\phi + \binom{4}{1} \sigma\upsilon\nu^3\phi(i\eta\mu\phi) + \binom{4}{2} \sigma\upsilon\nu^2\phi(i\eta\mu\phi)^2 + \binom{4}{3} \sigma\upsilon\nu\phi(i\eta\mu\phi)^3 + (i\eta\mu\phi)^4\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε γράφοντας μόνο τις ισότητες για το συνημίτονο:

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^4 &= \sigma\upsilon\nu^4\phi + \binom{4}{2}\sigma\upsilon\nu^2\phi(\sigma\upsilon\nu^2\phi - 1) + (\sigma\upsilon\nu^2\phi - 1)^2 + i(\eta\mu\acute{\iota}\tau\omicron\nu\alpha) = \\ &= \left(\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4}\right)\sigma\upsilon\nu^4\phi - \left(\binom{4}{2} + 2\right)\sigma\upsilon\nu^2\phi + 1 + \dots \end{aligned}$$

οπότε :  $\sigma\upsilon\nu 4\phi = 2^3 \sigma\upsilon\nu^4\phi - 8\sigma\upsilon\nu^2\phi + 1$  και , κάνοντας τον συνηθισμένο μετασχηματισμό:

$$2\sigma\upsilon\nu 4\phi = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^4 - 4(2\sigma\upsilon\nu\phi)^2 + 2 \text{ [3]}.$$

\*Από το διωνυμικό θεώρημα :  $0 = (1 + (-1))^4 = \binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$ ,

οπότε  $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = \binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 2^3$ , γιατί  $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = (1+1)^4 = 2^4$ .

**Για κ=5**, θα έχουμε:  $(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^5 = \sigma\upsilon\nu(5\phi) + i\eta\mu(5\phi)$  και

$$(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^5 = \sum_0^5 \binom{5}{\lambda} (\sigma\upsilon\nu\phi)^{5-\lambda} (i\eta\mu\phi)^\lambda. \text{ Γράφουμε και πάλι μόνο ότι αφορά συνημίτονα:}$$

$$\sigma\upsilon\nu^5\phi + \binom{5}{1}\sigma\upsilon\nu^4\phi(i\eta\mu\phi) + \binom{5}{2}\sigma\upsilon\nu^3\phi(i\eta\mu\phi)^2 + \binom{5}{3}\sigma\upsilon\nu^2\phi(i\eta\mu\phi)^3 + \binom{5}{4}\sigma\upsilon\nu\phi(i\eta\mu\phi)^4 + \binom{5}{5}(i\eta\mu\phi)^5$$

$$= \sigma\upsilon\nu^5\phi + \binom{5}{2}\sigma\upsilon\nu^3\phi(\sigma\upsilon\nu^2\phi - 1) + \binom{5}{4}\sigma\upsilon\nu\phi(\sigma\upsilon\nu^2\phi - 1)^2 + i(\eta\mu\acute{\iota}\tau\omicron\nu\alpha)$$

$$= \left(\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4}\right)\sigma\upsilon\nu^5\phi - \left(\binom{5}{2} - 2\binom{5}{4}\right)\sigma\upsilon\nu^3\phi + 5\sigma\upsilon\nu\phi + \dots$$

$$= 2^4 \sigma\upsilon\nu^5\phi - 20\sigma\upsilon\nu^3\phi + 5\sigma\upsilon\nu\phi + \dots, \text{ οπότε για το } 2\sigma\upsilon\nu 5\phi \text{ θα έχουμε:}$$

$$2\sigma\upsilon\nu 5\phi = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^5 - 5(2\sigma\upsilon\nu\phi)^3 + 5(2\sigma\upsilon\nu\phi) \text{ [4]}$$

\* από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε:  $0 = (1 + (-1))^5 = \binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5}$ ,

$\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5} = 2^4$ , γιατί  $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = (1+1)^5 = 2^5$ .

Συνοψίζουμε:  $2\sigma\upsilon\nu 2\phi = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^2 - 2$ ,  $2\sigma\upsilon\nu 3\phi = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^3 - 3(2\sigma\upsilon\nu\phi)$ ,

$$2\sigma\upsilon\nu(4\phi) = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^4 - 4(2\sigma\upsilon\nu\phi)^2 + 2, \quad 2\sigma\upsilon\nu5\phi = (2\sigma\upsilon\nu\phi)^5 - 5(2\sigma\upsilon\nu\phi)^3 + 5(2\sigma\upsilon\nu\phi)$$

Από την  $(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^{\kappa} = \sigma\upsilon\nu(\kappa\phi) + i\eta\mu(\kappa\phi)$  και την

$$(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)^{\kappa} = \sum_0^{\kappa} \binom{\kappa}{\lambda} (\sigma\upsilon\nu\phi)^{\kappa-\lambda} (i\eta\mu\phi)^{\lambda}, \text{ για το } \sigma\upsilon\nu\kappa\phi, \text{ θα έχουμε:}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\kappa\phi) = \sigma\upsilon\nu^{\kappa}\phi - \binom{\kappa}{2} \sigma\upsilon\nu^{\kappa-2}\phi\eta\mu^2\phi + \binom{\kappa}{4} \sigma\upsilon\nu^{\kappa-4}\phi\eta\mu^4\phi - \dots \quad [5].$$

Στην [5] τα ημίτονα είναι σε άρτιες δυνάμεις, άρα είναι μια ισότητα που περιέχει μόνο συνημίτονα ( $\eta\mu^2\phi = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\phi$ ).

$$\text{Ο συντελεστής του } \sigma\upsilon\nu^{\kappa}\phi \text{ είναι το άθροισμα } \binom{\kappa}{0} + \binom{\kappa}{2} + \binom{\kappa}{4} + \dots = 2^{\kappa-1}.$$

Το γεγονός αυτό προκύπτει από το διωνυμικό ανάπτυγμα  $(\alpha + \beta)^{\kappa} = \sum_{\lambda=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{\lambda} \alpha^{\kappa-\lambda} \beta^{\lambda}$  για

$$\alpha = 1, \beta = -1: 0 = \sum_{\lambda=0}^{\kappa} (-1)^{\lambda} \binom{\kappa}{\lambda} \text{ οπότε παίρνουμε}$$

$$\binom{\kappa}{1} + \binom{\kappa}{3} + \binom{\kappa}{5} + \dots = \binom{\kappa}{0} + \binom{\kappa}{2} + \binom{\kappa}{4} + \dots = 2^{\kappa-1}, \text{ γιατί } 2^{\kappa} = (1+1)^{\kappa} = \sum_{\lambda=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{\lambda}.$$

**Αν επιλέξουμε πολλαπλάσιο του κ ώστε ο κφ να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π, τότε έχουμε βρει ένα πολυώνυμο, [5], με ακέραιους συντελεστές που έχει για ρίζα τον αριθμό σινφ. Οι διωνυμικοί συντελεστές είναι ακέραιοι αφού κ, λ φυσικοί και λ ≤ κ. Αν πολλαπλασιάσουμε επί 2, τα δύο μέλη της [5], εκφράζουμε το 2σινκφ σαν πολυώνυμο του 2σινφ με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα γιατί 2\*2<sup>κ-1</sup>=2<sup>κ</sup> και ο πρώτος όρος του 2σινκφ γίνεται (2σινφ)<sup>κ</sup>.**

**Γ. Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε θετικό ακέραιο κ, υπάρχει πολυώνυμο  $f_{\kappa}(x) = x^{\kappa} + a_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \dots + a_1x + a_0$  με  $a_{\kappa}$  ακέραιους, και  $2\sigma\upsilon\nu\kappa\phi = f_{\kappa}(2\sigma\upsilon\nu\phi)$**

Μερικές ειδικές περιπτώσεις έχουμε δει στο τμήμα **B**:

$$\text{Για } \kappa=2, f_2(x) = x^2 - 2 \text{ από την [1].}$$

$$\text{Για } \kappa=3, f_3(x) = x^3 - 3x, \text{ από την [2].}$$

Για να μπορέσουμε να πετύχουμε την μετάβαση από τον φυσικό κ στον επόμενο του, τον κ+1, θα πρέπει να εκφράσουμε το πολυώνυμο  $f_3(x)$  με την βοήθεια του  $f_2(x)$ .

Κ1: Ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

$$\text{Γράφουμε: } f_3(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x^2 - 2) - x = xf_2(x) - x \text{ [6]}$$

$$\text{Για } \kappa = 4, f_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \text{ από την [3].}$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι: } f_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2 = x(x^3 - 3x) - (x^2 - 2) = xf_3(x) - f_2(x).$$

$$\text{Για } \kappa = 5, f_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x, \text{ από την [4].}$$

$$\text{Και εδώ έχουμε: } f_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x = x(x^4 - 4x^2 + 2) - (x^3 - 3x) = xf_4(x) - f_3(x).$$

$$\text{Αν θέσουμε και } f_1(x) = x, \text{ θα έχουμε } f_1(2\text{συν}\varphi) = 2\text{συν}\varphi \text{ και η [6] γίνεται: } f_3(x) = xf_2(x) - f_1(x).$$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για τους θετικούς ακέραιους  $\kappa, \kappa-1, \kappa \geq 4$ , δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχουν πολυώνυμα  $f_\kappa(x), f_{\kappa-1}(x)$  με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα, ακέραιους τους υπόλοιπους συντελεστές και τέτοια ώστε:  $2\text{συν}\kappa\varphi = f_\kappa(2\text{συν}\varphi)$  και  $2\text{συν}(\kappa-1)\varphi = f_{\kappa-1}(2\text{συν}\varphi)$ .

Τότε:  $2\text{συν}(\kappa+1)\varphi = (2\text{συν}\varphi)(2\text{συν}\kappa\varphi) - 2\text{συν}(\kappa-1)\varphi = (2\text{συν}\varphi)f_\kappa(2\text{συν}\varphi) - f_{\kappa-1}(2\text{συν}\varphi)$  και το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το  $f_{\kappa+1}(x) = xf_\kappa(x) - f_{\kappa-1}(x)$ , βαθμού  $\kappa+1$  (γιατί το  $f_\kappa(x)$  είναι βαθμού  $\kappa$ ), με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου αυτόν του  $f_\kappa(x)$ , δηλαδή 1 και τους υπόλοιπους συντελεστές ακεραίους, γιατί είναι προσθαιρέσεις ακεραίων.

Η  $\text{συν}(\kappa+1)\varphi = 2(\text{συν}\varphi)(\text{συν}\kappa\varphi) - \text{συν}(\kappa-1)\varphi$  είναι συνέπεια της πρόσθεσης των  $\text{συν}(\kappa\varphi + \varphi) = \text{συν}\kappa\varphi\text{συν}\varphi - \eta\mu\kappa\varphi\eta\mu\varphi$  και  $\text{συν}(\kappa\varphi - \varphi) = \text{συν}\kappa\varphi\text{συν}\varphi + \eta\mu\kappa\varphi\eta\mu\varphi$ .

*\*«Η επαγωγή είναι η διαδικασία της ανακάλυψης γενικών νόμων μέσω της παρατήρησης και του συνδυασμού ειδικών περιπτώσεων -παραδειγμάτων» (Polya, 1991:151). Η επαγωγή ψάχνει να βρει κανονικότητα και συνοχή πίσω από τις παρατηρήσεις που έγιναν στο τμήμα Β. Κάθε παράδειγμα παρουσιάζει μια ευκαιρία για τη διατύπωση κάποιου γενικού ισχυρισμού. «Τα μαθηματικά, όταν παρουσιάζονται με αυστηρότητα είναι μια συστηματική, απαγωγική επιστήμη, όμως τα μαθηματικά «εν τω γεννάσθαι» είναι μια πειραματική επαγωγική επιστήμη» (Polya, 1991: 154). Η απόδειξη με μαθηματική επαγωγή που έγινε στο τμήμα Γ είναι το μαθηματικό συμπλήρωμα της επαγωγής, είναι το –υψηλότερου κύρους από την παρατήρηση-μέσον (κατά τον Polya και πάλι) που υπάρχει στα μαθηματικά και τα διαφοροποιεί από τις παρατηρησιακές επιστήμες (βλ. και 9.5.6).*



**1.5.7. Θεώρημα:** Αν  $\varphi$  είναι ένα ρητό πολλαπλάσιο του  $\pi$ ,  $\varphi = r \cdot \pi$ , τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί  $\sin\varphi$ ,  $\eta\mu\varphi$ ,  $\epsilon\varphi\varphi$  είναι άρρητοι (η εφαπτομένη φυσικά όπου ορίζεται), εκτός από τους :  $\sin\varphi = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ ,  $\eta\mu\varphi = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ ,  $\epsilon\varphi\varphi = 0, \pm 1$ .

### Απόδειξη

**A.** Υπάρχει φυσικός  $k$ , ώστε  $k\varphi$  να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\pi$  και πολυώνυμο  $f_k(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$  με  $a_k$  ακέραιους και  $2\sin k\varphi = f_k(2\sin\varphi)$ .

Τότε  $f_k(2\sin\varphi) = \pm 2$  και ο  $2\sin\varphi$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $f_k(2\sin\varphi) - (\pm 2) = 0$ , το οποίο έχει ακέραιους συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα. Άρα, ο  $2\sin\varphi$  είναι ακέραιος ή άρρητος. Όμως  $-1 \leq \sin\varphi \leq 1$ , άρα οι δυνατές ακέραιες τιμές για τον αριθμό  $2\sin\varphi$  είναι  $0, \pm 1, \pm 2$  και για τον  $\sin\varphi$  είναι  $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ .

Αν  $\varphi$  ρητό πολλαπλάσιο του  $\pi$  τότε θα είναι ρητό πολλαπλάσιο του  $\frac{\pi}{2}$  και ο  $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ .

**B.** Γνωρίζουμε ότι:  $\eta\mu\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ , οπότε, από το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε ότι οι δυνατές ρητές τιμές για το  $\eta\mu\varphi$  είναι  $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ .

**Γ.** Από την  $\sin 2\varphi = \sin^2\varphi - \eta\mu^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi - \eta\mu^2\varphi}{\sin^2\varphi + \eta\mu^2\varphi} = \frac{1 - \epsilon\varphi^2\varphi}{1 + \epsilon\varphi^2\varphi}$  συμπεραίνουμε ότι αν η  $\epsilon\varphi\varphi$  είναι ρητός, τότε θα είναι ρητός και ο αριθμός  $\sin 2\varphi$ . Από το τμήμα **A** της απόδειξης, για τον  $\sin 2\varphi$  χρειάζεται να εξετάσουμε τις δυνατότητες  $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ .

ο Αν  $\sin 2\varphi = 0$ , τότε  $\epsilon\varphi\varphi = \pm 1$

ο Αν  $\sin 2\varphi = +1$ , τότε  $\epsilon\varphi\varphi = 0$

ο Αν  $\sin 2\varphi = -1$ , τότε η  $\epsilon\varphi\varphi$  δεν Αν  $\sin\varphi = \pm\frac{1}{2}$ , τότε  $\epsilon\varphi\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$  ή

$\epsilon\varphi\varphi = \pm\sqrt{3}$  που είναι άρρητοι

Με τις υποθέσεις του θεωρήματος, οι μόνες δυνατές ρητές τιμές για την  $\epsilon\varphi\varphi$  είναι οι  $0, \pm 1$ .

## 1.6. Ρητός ή άρρητος;

### 1.6.1. Πράξεις μεταξύ ρητών και αρρήτων.

Γνωρίζουμε ότι οι πράξεις μεταξύ ρητών δίνουν ρητό, το  $\mathbb{Q}$  είναι σώμα. Μπορούμε να αποδείξουμε με «εις άτοπον απαγωγή», ότι αν  $a$  άρρητος, τότε οι  $-a$ ,  $a^{-1}$  είναι άρρητοι. Επίσης αν  $a$  άρρητος και  $p$  ρητός, τότε  $a+p$ ,  $a-p$ ,  $a \cdot p$ ,  $a/p$ ,  $p/a$ , είναι άρρητοι. Αν λοιπόν έχουμε έναν άρρητο, π.χ. τον  $\sqrt{3}$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλούς, π.χ.  $2 + \sqrt{3}$ ,  $2 - \sqrt{3}$ ,  $2\sqrt{3}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $-10\sqrt{3}$  κλπ. Μπορούμε με πρόσθεση (ή κάποια άλλη πράξη) οποιουδήποτε ρητού σε καθέναν από αυτούς να κατασκευάσουμε νέους αρρήτους.

Οι πράξεις όμως μεταξύ αρρήτων δίνουν είτε ρητό είτε άρρητο, το σύνολο των αρρήτων δεν είναι κλειστό ως προς τις τέσσερις βασικές πράξεις π.χ.:  $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ , ρητός,  $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$  άρρητος,  $(3 + \sqrt{2}) + (5 - \sqrt{2}) = 8$ , ρητός,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$ , ρητός,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{14}$ , άρρητος,  $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$  ρητός,  $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , άρρητος,  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{20} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{20} \right] = 6765$ , ρητός (βλ. και 5.5.6, αριθμοί Fibonacci).

### 1.6.2. Ο $e$ είναι άρρητος.

Είναι γνωστό ότι  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$ , δηλ.  $e = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!}$

Έστω ότι  $e = \frac{p}{q}$ ,  $p, q$  φυσικοί. Θέτουμε  $S_q = \sum_0^q \frac{1}{n!}$ ,  $R_q = \sum_{q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . Τότε  $q!e = q!S_q + q!R_q$ .

Ο  $q!S_q$  είναι θετικός ακέραιος, όλα τα κλάσματα  $\frac{q!}{n!}$  με  $n \leq q$  είναι θετικοί ακέραιοι, γιατί ο πολλαπλασιασμός επί  $q!$  «εξαφανίζει» τους παρονομαστές. Αν ο  $q!e$  είναι ακέραιος, τότε θα είναι και ο  $q!R_q$ . Όμως ο  $q!R_q$  δεν είναι ακέραιος, γιατί  $0 < q!R_q < 1$ :

$$q!R_q = q! \sum_{q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

### 1.6.3. Η σταθερά του Euler.

Η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , άρα παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα  $[n, n+1]$ , με  $n$  θετικό ακέραιο. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει σημείο  $\xi$  του  $(n, n+1)$  ώστε :  $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$ . Από την  $0 < n < \xi < n+1$ ,

συμπεραίνουμε ότι:  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$ , οπότε  $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$  [1].

Θεωρούμε την ακολουθία:  $a_1 = 1, a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x}, a_5 = \frac{1}{3}, a_6 = \int_3^4 \frac{dx}{x}, \dots$  δηλ. την

$a_{2n-1} = \frac{1}{n}, a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}, n=1,2,3,\dots$ . Με την βοήθεια της [1] και της παρατήρησης 4.2.2.

(σύνθεση ακολουθιών) διαπιστώνουμε ότι η ακολουθία  $a_n$  είναι γνήσια φθίνουσα και  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (αφού οι υπακολουθίες αρτίων και περιττών δεικτών συγκλίνουν στο 0).

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα του Leibniz (βλ.4.8.2) η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  συγκλίνει. Το

(2n-1) τάξης μερικό άθροισμά της είναι:  $s_{2n-1} = 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n}$  ή

$s_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ . Αν το άθροισμα της σειράς είναι  $S$ , θα

έχουμε επίσης  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = S$ , δηλ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = S$ . Το όριο αυτό συμβολίζεται

συχνά με το γράμμα  $\gamma$ , λέγεται **σταθερά του Euler** και, όπως και οι «π» και  $e$ , παρουσιάζεται σε πολλούς τύπους της Ανάλυσης. Μία κατά προσέγγιση δέκα δεκαδικών ψηφίων τιμή του είναι:  $\gamma = 0.5772156649\dots$ . Δεν γνωρίζουμε αν ο αριθμός  $\gamma$  είναι ρητός ή άρρητος, αλλά αυτό δεν τον εμποδίζει να συμμετέχει ενεργά στα μαθηματικά δρώμενα, π.χ.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + 0 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln 2n -$$

$-\left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \ln 2$ . Θα έχουμε λοιπόν:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$ .

**1.6.4.** Για την σειρά  $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$  έχει αποδειχθεί ότι συγκλίνει σε άρρητο, αλλά δεν έχει βρεθεί η ακριβής τιμή του ορίου (Maor, 2008: 132).

**1.6.5.** Ενώ η αρρητότητα του  $e$  αποδείχθηκε εύκολα, για την αρρητότητα του « $\pi$ » (Srivac, 1991: Κεφ.16 ή Niven, 1956: Κεφ.2) απαιτήθηκε σκέψη περίπου 2000 ετών. Τελικά αποδείχθηκε η υπερβατικότητα των  $e$  και  $\pi$  (K5). Για την σταθερά του Euler (1.6.3) οι Μαθηματικοί έχουν αποφασίσει ότι είναι αριθμός, αλλά αποτελεί ανοιχτό πρόβλημα αν αυτός ο αριθμός είναι ρητός ή άρρητος (Apostol I, 1962: 525).

Ένας δοσμένος ρητός έχει άπειρους τρόπους για να γραφεί και δεν θα θέλαμε ο ορισμός «ρητός» να εξαρτάται από τον εκάστοτε επιλεγμένο τρόπο, π.χ. μερικοί από τους

τρόπους που μπορούμε να γράψουμε τον ρητό  $\frac{2}{3}$  είναι οι  $\frac{4}{6}, \frac{2\pi}{3\pi}, \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}, \frac{-10}{-15}$  κλπ. Τα

σύμβολα είναι κάπως πολύπλοκα και αρκετές φορές χρειάζεται να σκεφτούμε λίγο, για κάποιον αριθμό, πριν απαντήσουμε στην ερώτηση: είναι ρητός ή όχι; Π.χ. ο  $\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8} - \sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$  είναι ο ρητός 1 ( $x^3 = 16 - 3x\sqrt{(3\sqrt{21}+8)(3\sqrt{21}-8)} = 16 - 15x$  κλπ).

Σε κάποιες περιπτώσεις αποφασίζουμε για το είδος του αριθμού χωρίς να γνωρίζουμε κάποιο σύμβολο, γιατί, ενώ αποδεικνύουμε την ύπαρξή του, δεν είναι δυνατόν να τον περιγράψουμε με τα μέχρι τώρα γνωστά σύμβολα. Π.χ. οι αλγεβρικές εξισώσεις μέχρι και 4<sup>ου</sup> βαθμού είναι επιλύσιμες, αλλά, αν και ειδικές περιπτώσεις επιλύονται π.χ. η  $x^n - a = 0$ , οι εξισώσεις βαθμού  $n \geq 5$  είναι γνωστό ότι, γενικά, δεν είναι επιλύσιμες με τη βοήθεια ριζικών. Το γεγονός αυτό αποδείχθηκε από τους Abel (1802-1829) και E. Galois (1811-1832). Π.χ. η  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$  [A] έχει μοναδική πραγματική ρίζα  $\rho$ . Αν είχε και άλλη,  $\rho'$ , τότε η τεταρτοβάθμια  $5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$  θα είχε μεταξύ των  $\rho$  και  $\rho'$  μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα (Θ.Rolle). Αλλά αυτή έχει 4 μιγαδικές. Η ρίζα  $\rho$  της [A] δεν είναι ρητή, γιατί οι υποψήφιοι  $\pm 1$  δεν την επαληθεύουν, και η άρρητη πλέον ρίζα της δεν εκφράζεται με τη χρήση επάλληλων ριζικών (Μαρκόπουλος, 1986). Για την  $x^8 - 4x^4 + 2 = 0$  όμως, μπορούμε να βρούμε τις εξής 8 λύσεις:  $\sqrt[4]{2 \pm \sqrt{2}}, -\sqrt[4]{2 \pm \sqrt{2}}, i\sqrt[4]{2 \pm \sqrt{2}}, -i\sqrt[4]{2 \pm \sqrt{2}}$  (Λεξικό Μαθηματικών, 1997: 32). Συνηθίζουμε να συνδέουμε το σύμβολο της νιοστής ρίζας με τους αλγεβρικούς αριθμούς (5.7), όμως όχι μόνο υπάρχουν αλγεβρικοί που δεν έχουν ριζικά στη μορφή τους, αλλά συνιστούν και αριθμήσιμο υποσύνολο του συνόλου των αλγεβρικών (Μαρκόπουλος, 1986).



## Κ2: Εισαγωγή στα συνεχή κλάσματα

### 2.1. Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών 69 και 20. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο του ΜΚΔ (παράρτημα Α13) για τους αριθμούς 69,20 έχουμε:  $\text{ΜΚΔ}(69,20)=\text{ΜΚΔ}(20,9)=\text{ΜΚΔ}(9,2)=\text{ΜΚΔ}(2,1)=1$ .

Ευκλείδειος αλγόριθμος	επομένως
$69=20 \cdot 3+9$ $\frac{69}{20}$ πλήρες πηλίκο, 3 μερικό πηλίκο	$\frac{69}{20} = 3 + \frac{9}{20} = 3 + \frac{1}{\frac{20}{9}}$
$20=9 \cdot 2+2$ $\frac{20}{9}$ πλήρες πηλίκο, 2 μερικό πηλίκο	$\frac{20}{9} = 2 + \frac{2}{9} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{2}}$
$9=2 \cdot 4+1$ $\frac{9}{2}$ πλήρες πηλίκο, 4 μερικό πηλίκο	$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{1}$
$2=1 \cdot 2+0$ 2 πλήρες πηλίκο, 2 μερικό πηλίκο	$\frac{2}{1} = 2 + \frac{0}{1} = 2$
$\text{ΜΚΔ}(69,20) = 1$	$\frac{69}{20} = 3 + \frac{9}{20} = 3 + \frac{1}{\frac{20}{9}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{9}{2}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$

Όπως είναι γνωστό, στην ισότητα  $69=20 \cdot 3+9$ , ο 3 ονομάζεται μερικό πηλίκο, ή απλά πηλίκο και ο αριθμός 9 υπόλοιπο της διαίρεσης του 69 δια του 20. Ο αριθμός  $3 \cdot 20$  είναι το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 20 που δεν υπερβαίνει τον 69 (ο 3 είναι το ακέραιο μέρος του  $69/20$ ,  $3 \cdot 20 \leq 69 < 4 \cdot 20 \Leftrightarrow 3 \leq \frac{69}{20} = 3 + \frac{9}{20} < 4$ ). Αυτό θα διαφέρει από τον 69 κατά ποσότητα μικρότερη του 20 και για το υπόλοιπο  $9(69-3 \cdot 20)$ , θα ισχύει  $0 \leq 9 < 20$ . Το κλάσμα  $69/20$  (θα το συμβολίζουμε με  $z_0$ ) ονομάζεται **πλήρες πηλίκο** που αντιστοιχεί στο **μερικό πηλίκο** 3 (σύμβολο:  $a_0$ ). Δηλ. το μερικό πηλίκο είναι το ακέραιο μέρος του αντίστοιχου πλήρους πηλίκου, είναι ο αριθμός που δηλώνει πόσα «ολόκληρα» 20 περιέχονται στον 69 και προκύπτει από την προσπάθεια μέτρησης του 69 με τον 20.

Το υπόλοιπο 9 είναι ο αριθμός  $\left(\frac{69}{20} - \left[\frac{69}{20}\right]\right) \cdot 20$

$v$	9	2	1	0	
69	20	9	2	1	ΜΚΔ(69,20)=1
$\pi$	3	2	4	2	

Ομοίως, ο αριθμός  $2 \cdot 9$  είναι το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 9 που δεν υπερβαίνει τον 20.

Αυτό το πολλαπλάσιο θα διαφέρει από τον 20 κατά ποσότητα μικρότερη του 9 και για το υπόλοιπο ( $20 - 2 \cdot 9 = v$ ) θα ισχύει:  $0 \leq v < 9$ . Ο 2 προκύπτει από την προσπάθεια μέτρησης του 20 με τον 9. Το κλάσμα  $\frac{20}{9} (z_1)$  είναι το πλήρες πηλίκο που αντιστοιχεί στο μερικό πηλίκο 2 ( $a_1$ ) κλπ.

Το τελικό σχήμα  $3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$  ονομάζεται **πεπερασμένο** (το πλήθος των μερικών

πηλίκων είναι πεπερασμένο) **απλό** (τα μερικά πηλίκια είναι ακέραιοι και εκτός ίσως από το πρώτο, θετικοί ακέραιοι) **συνεχές κλάσμα** και οι αριθμοί 3,2,4,2 μερικά πηλίκια ή όροι του συνεχούς κλάσματος (είναι τα διαδοχικά πηλίκια που προκύπτουν κατά την αναζήτηση του ΜΚΔ του αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος, τα διαδοχικά πηλίκια που προκύπτουν από τον ευκλείδειο αλγόριθμο).

## 2.2. Ορισμοί

Εκφράσεις που έχουν τη μορφή του διπλανού σχήματος, όπου ο αριθμός  $a_0$  είναι **ακέραιος** και οι  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_N$  **θετικοί ακέραιοι**, ονομάζονται **πεπερασμένα απλά συνεχή κλάσματα**. Οι αριθμοί  $a_n$  ονομάζονται **μερικά πηλίκια** n-τάξης ή **όροι** του συνεχούς κλάσματος. Ο πολυώροφος αυτός συμβολισμός είναι ιδιαίτερα άβολος, και έτσι για το διπλανό **πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα** θα χρησιμοποιήσουμε, τον επόμενο, περισσότερο «συμπαγή» συμβολισμό  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$ .

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}}}}}$$

Ακριβέστερα έχουμε το N τάξης συνεχές κλάσμα. Έτσι το N τάξης (πεπερασμένο απλό) συνεχές κλάσμα έχει N+1 όρους. Για τον  $\frac{69}{20}$  π.χ. γράφουμε:  $\frac{69}{20} = [3, 2, 4, 2]$ .

Με υπολογισμούς βρίσκουμε:  $[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}$ ,  $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$ ,

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2]} = [a_0, [a_1, a_2]] = a_0 + \frac{1}{\frac{a_2 a_1 + 1}{a_2}} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}$$

ή  $[a_0, a_1, a_2] = \left[ a_0, a_1 + \frac{1}{a_2} \right] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_2 a_1 + 1}{a_2}} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}$  κλπ.

Μπορούμε λοιπόν, για  $1 \leq n \leq N$ , να ορίσουμε επαγωγικά το συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, \dots, a_N]$

ως εξής:  $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$  και  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right]$

ή  $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$  και  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \left[ a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]} \right] = [a_0, [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]]$ .

Πιο γενικά  $[a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, [a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}, a_n]]$ ,  $1 \leq m < n$

$\leq N$ . Από τις εκφράσεις:  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right]$ ,

$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0, [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]]$  θα χρησιμοποιούμε κάθε φορά την καταλληλότερη.

Οι αριθμοί  $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$  για  $0 \leq n \leq N$ , ονομάζονται **αναγωγήματα**  $n$  τάξης του  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$ . Δηλ. το αναγώγημα  $n$  τάξης σχηματίζεται αν από το συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$  αποκόψουμε τα μερικά πηλίκα που έχουν τάξη μεγαλύτερη του  $n$ .

Τα **πλήρη πηλίκα  $n$  τάξης** του συνεχούς κλάσματος είναι τα  $z_n = [a_n, a_{n+1}, \dots, a_N]$ ,  $n=0,1,2,\dots,N$ . Παρατηρούμε ότι  $z_0 = [a_0, a_1, \dots, a_N]$ ,  $z_N = [a_N]$ .

Γενικότερα, **συνεχές κλάσμα** είναι μια έκφραση που έχει την μορφή του διπλανού σχήματος. Οι αριθμοί  $a_k, b_k$  μπορεί να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί και ο αριθμός των όρων πεπερασμένος ή άπειρος.

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \frac{b_4}{a_5 + \dots}}}}}$$

Ιδιαίτερα θα ασχοληθούμε με τα **απλά συνεχή κλάσματα** τα οποία είναι της διπλανής μορφής, όπου όλα τα  $b_k$  είναι ίσα με 1, ο αριθμός  $a_0$  είναι ακέραιος και οι  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$  θετικοί ακέραιοι.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

Αν το πλήθος των αριθμών  $a_i, i=0,1,2,3,\dots$  δεν είναι πεπερασμένο, έχουμε τα **άπειρα απλά συνεχή κλάσματα**. Όπως και για τα πεπερασμένα, θα χρησιμοποιήσουμε για το άπειρο απλό συνεχές κλάσμα το σύμβολο  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ . Οι αριθμοί  $a_n$  ονομάζονται και εδώ **μερικά πηλικά** (n-τάξης) ή **όροι** του συνεχούς κλάσματος (μπορούμε να σκεφτούμε ότι οι ακέραιοι  $a_n$  σχηματίζουν μια ακολουθία και τα μερικά πηλικά είναι οι όροι της ακολουθίας). Στο εξής θα παραλείπουμε την λέξη «απλό», αφού εξετάζουμε μόνο απλά συνεχή κλάσματα και επίσης τις λέξεις πεπερασμένο ή άπειρο, όπου αυτό θα είναι προφανές από τα συμφραζόμενα.

Γνωρίζουμε ότι το σύμβολο  $[a]$ , όταν περιέχει έναν μόνο πραγματικό αριθμό  $a$ , χρησιμοποιείται για το ακέραιο μέρος του πραγματικού  $a$  και έτσι θα χρησιμοποιηθεί και στην εργασία αυτή. Για τον ακέραιο  $m$ , δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, αν βλέπουμε το σύμβολο  $[m]$  είτε σαν το ακέραιο μέρος του  $m$ , είτε σαν «πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα» με έναν όρο, τον  $m$ . Το σύμβολο  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$  με τα  $a_n$  ακεραίους, χρησιμοποιείται και για το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) αυτών των (ακέραιων) αριθμών. Πάλι δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, γιατί σε όλη την εργασία θα το χρησιμοποιήσουμε **μόνο** για το συνεχές κλάσμα. Όπου χρειαστεί το ΕΚΠ, θα το δηλώνουμε με τα αρχικά του.

Αν για τα μερικά πηλικά χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό  $a_0, a_1, \dots$  και για τα πλήρη πηλικά τον  $z_0, z_1, \dots$ , τότε στο προηγούμενο παράδειγμα (της «ανάπτυξης» του  $\frac{69}{20}$  σε συνεχές κλάσμα) θα έχουμε  $a_0=3, a_1=2, a_2=4, a_3=2$  και αντίστοιχα  $z_0 = \frac{69}{20} = [3, 2, 4, 2]$ ,  $z_1 = \frac{20}{9} = [2, 4, 2]$ ,  $z_2 = \frac{9}{2} = [4, 2]$ ,  $z_3 = 2 = [2] = a_3$ .

Επίσης, με τα επιλεγμένα σύμβολα, θα έχουμε:

$$z_0 = a_0 + (z_0 - a_0) = 3 + \frac{9}{20} = a_0 + \frac{1}{\frac{20}{9}} = \frac{1}{\frac{9}{20}} = a_0 + \frac{1}{z_1}, z_1 = \frac{1}{\frac{9}{20}} = 2 + \frac{2}{9} = a_1 + \frac{1}{\frac{9}{2}} = a_1 + \frac{1}{z_2}$$

και τελικά:



$$z_0 = \frac{69}{20} = a_0 + \frac{1}{z_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{z_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{z_3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}, \text{ με } [z_3] = a_3 = 2$$

Φυσικά, αν εκτελέσουμε τις πράξεις αρχίζοντας από τον τελευταίο παρονομαστή,  $4 + \frac{1}{2}$  (κινούμενοι αντίστροφα) θα οδηγηθούμε στο αρχικό κλάσμα  $\frac{69}{20}$ .

$$\left(4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}, \quad 2 + \frac{1}{\frac{9}{2}} = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}, \quad 3 + \frac{1}{\frac{20}{9}} = 3 + \frac{9}{20} = \frac{69}{20}$$

Οι αριθμοί 3,  $7/2$ ,  $31/9$ ,  $69/20$  που προκύπτουν από την παρακάτω διαδικασία:

$$c_0 = [3] = 3 = a_0, \quad c_1 = [3, 2] = [a_0, a_1] = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, \quad c_2 = [3, 2, 4] = [a_0, a_1, a_2] = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{31}{9},$$

$c_3 = [3, 2, 4, 2] = [a_0, a_1, a_2, a_3] = \frac{69}{20}$ , είναι τα **αναγωγήματα** του  $[3, 2, 4, 2]$  τάξης 0, 1, 2, 3 αντίστοιχα. Το τελευταίο αναγώγημα είναι ο δοσμένος ρητός, ο  $69/20$ . Το σχήμα  $[3, 2, 4, 2]$  είναι το **ανάπτυγμα** σε συνεχές κλάσμα του  $69/20$ .

Τα **αναγωγήματα** του  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  είναι οι αριθμοί  $c_0 = [a_0]$ ,  $c_1 = [a_0, a_1]$ ,  $c_2 = [a_0, a_1, a_2]$  κλπ. Οι αριθμοί αυτοί είναι ρητοί αφού  $a_0$  ακέραιος και για  $k \geq 1$  οι  $a_k$  είναι θετικοί ακέραιοι. Τα **πλήρη πηλίκια** ενός άπειρου απλού συνεχούς κλάσματος καθορίζονται από τα σύμβολα  $z_0 = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ ,  $z_1 = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ ,  $z_2 = [a_2, a_3, \dots]$  κλπ. Πως όμως προκύπτει και ποιά είναι το νόημα ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ ; Ποιά είναι το νόημα των αναγωγημάτων και των πλήρων πηλίκων;

### 2.3. Από άλλη σκοπιά

Ας δούμε ξανά το παράδειγμα της εφαρμογής του αλγορίθμου του ΜΚΔ στους 69, 20. Το πρώτο μερικό πηλίκιο, 3, που προκύπτει από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο, είναι το ακέραιο μέρος του ρητού  $69/20$ , δηλ. ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει τον συγκεκριμένο ρητό, τον  $69/20$ . Τα επόμενα μερικά πηλίκια προκύπτουν και ως εξής:

$$\text{Αφαιρούμε } \frac{69}{20} - 3 \text{ και η διαφορά } \frac{9}{20} \text{ είναι μικρότερη της μονάδος.}$$

Αντιστρέφουμε,  $\frac{20}{9}$ , και το δεύτερο μερικό πηλίκο είναι το ακέραιο μέρος του  $\frac{20}{9}$ , το 2. Αφαιρούμε  $\frac{20}{9} - 2 = \frac{2}{9}$ , αντιστρέφουμε, και το τρίτο μερικό πηλίκο είναι το ακέραιο μέρος του  $\frac{9}{2}$ , το 4. Αφαιρούμε  $\frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$ , αντιστρέφουμε  $\frac{2}{1}$ , βρίσκουμε τον ακέραιο 2 και η διαδικασία τερματίζεται. Δηλαδή βρίσκουμε το ακέραιο μέρος, αφαιρούμε, αντιστρέφουμε και βρίσκουμε το ακέραιο μέρος του αντίστροφου, μέχρις ότου αυτός ο αντίστροφος είναι ακέραιος μέχρις ότου από αυτές τις αντιστροφές καταλήξουμε σε ακέραιο. Τα βήματα είναι πεπερασμένα, τα μερικά πηλίκια προκύπτουν από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο. Μπορούμε να σκεφτούμε ότι η διαδικασία τερματίζεται, όταν από τις αφαιρέσεις βρούμε αποτέλεσμα μηδέν, γιατί τότε η προηγούμενη αντιστροφή έδωσε ακέραιο.

Αυτή η διαδικασία εκτελείται πολύ εύκολα με μια αριθμομηχανή (ή και προγραμματίζεται σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή):  $69:20=3.45$ , 3 είναι το πρώτο μερικό πηλίκιο, αφαιρούμε το 3 (ο 3.45 είναι ήδη στην οθόνη, πληκτρολογούμε «-,3,=» αποτέλεσμα: 0.45, αντιστρέφουμε πατώντας το πλήκτρο  $1/x$ : 2.22222..., 2 είναι το δεύτερο μερικό πηλίκιο, αφαιρούμε το 2, «-,2,=» αποτέλεσμα: 0.22222..., αντιστρέφουμε: 4.5, 4 είναι το τρίτο μερικό πηλίκιο, αφαιρούμε το 4 βρίσκουμε 0.5, αντιστρέφουμε : 2, είναι το τελευταίο μερικό πηλίκιο.

Δηλ. στην αριθμομηχανή πληκτρολογούμε:  $69/20 = - 3 = 1/x - 2 = 1/x - 4 = 1/x$ , και κρατάμε τα

μερικά πηλίκια που εμφανίζονται στην οθόνη. Η διαδικασία «παραγωγής» μερικών πηλίκων σταματά όταν κάποιο πλήρες πηλίκιο είναι ακέραιος, δηλ. όταν από την «αντιστροφή και αφαίρεση του ακέραιου μέρους» έχουμε αποτέλεσμα 0. Αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα  $a_k$  για τα μερικά πηλίκια, τότε μπορούμε να γράψουμε τον αλγόριθμο 2.3. Αν γνωρίζουμε και κάποια γλώσσα, μπορούμε να γράψουμε και το πρόγραμμα, πρόγραμμα λέγεται ένας αλγόριθμος που είναι γραμμένος σε μια γλώσσα προγραμματισμού, π.χ. ο παραπάνω αλγόριθμος 2.3. είναι πρόγραμμα της Ελληνικής Αλγοριθμικής Γλώσσας (Δανιηλόπουλος, 1980). Αν ο  $x$  είναι ρητός, ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Διάβασε το  $x$

$k=0$

$a_0 \leftarrow [x]$

τύπωσε το  $a_0$

Εφόσον  $x - a_k \neq 0$ , επανάλαβε:

$$x \leftarrow \frac{1}{x - a_k}$$

$k=k+1$

$a_k \leftarrow [x]$

Τύπωσε το  $a_k$

τέλος

**αλγόριθμος 2.3.**

Ας εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία στους  $\sqrt{5}$  και 1, δηλ. ας προσπαθήσουμε να μετρήσουμε τον  $\sqrt{5}$  με την μονάδα. Αρχίζουμε με το ακέραιο μέρος του  $\sqrt{5}$ , το 2 (ο  $2 \cdot 1$  είναι το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 1 που δεν υπερβαίνει τον  $\sqrt{5}$ ). Στο πρώτο βήμα αφαιρούμε,  $\sqrt{5}-2$  και φυσικά προκύπτει αριθμός μικρότερος της μονάδας. Τον αντιστρέφουμε,  $\frac{1}{\sqrt{5}-2} > 1$ , και βρίσκουμε το ακέραιο μέρος του  $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ , το 4. Ο 4 προκύπτει από την προσπάθεια μέτρησης του 1 με τον  $\sqrt{5}-2$ , όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η μέτρηση του 20 με τον 9, έδωσε το μερικό πηλίκο 2. Βρίσκουμε δηλ. το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του  $\sqrt{5}-2$  που δεν υπερβαίνει τον αριθμό 1.

$v$	$\sqrt{5}-2$	$9-4\sqrt{5}$	$17\sqrt{5}-38$	...
$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{5}-2$	$9-4\sqrt{5}$	
$\pi$	2	4	4	

Παρατηρούμε ότι  $1-(\sqrt{5}-2)=3-\sqrt{5} > \sqrt{5}-2$ ,  $1-2(\sqrt{5}-2)=5-2\sqrt{5} > \sqrt{5}-2$ ,  $1-3(\sqrt{5}-2)=7-3\sqrt{5} > \sqrt{5}-2$ ,  $1-4(\sqrt{5}-2)=9-4\sqrt{5} < \sqrt{5}-2$  και προκύπτει ο 4. [ $5(\sqrt{5}-2) > 1 \Leftrightarrow 125 > 121$ ]. Το υπόλοιπο αυτής της «διαίρεσης» είναι ο αριθμός  $1-4(\sqrt{5}-2)$ , δηλ. ο  $9-4\sqrt{5}$  (είναι θετικός, γιατί  $81 > 80$ ). Συνεχίζουμε προσπαθώντας να μετρήσουμε τον  $\sqrt{5}-2$  με τον  $9-4\sqrt{5}$  προτιμώντας την τεχνική των αντιστροφών. Οι τεχνικές έχουν το πλεονέκτημα ότι οδηγούν εύκολα και γρήγορα σε αποτελέσματα. Έχουν και μειονεκτήματα: μας αποξενώνουν, ίσως, από την κατανόηση και δεσμεύουν την φαντασία που είναι απαραίτητη για να φεύγουμε προς νέες κατευθύνσεις (βλ. και ενότητα 9.7).

Αν για τα μερικά και πλήρη πηλικά χρησιμοποιήσουμε, όπως και πριν, τα σύμβολα  $a_k$ ,  $z_k$  έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{5} = [\sqrt{5}] + (\sqrt{5} - 2) = a_0 + (z_0 - a_0) = 2 + (\sqrt{5} - 2), \quad 0 < \sqrt{5} - 2 < 1$$

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}} = a_0 + \frac{1}{z_0 - a_0} = a_0 + \frac{1}{z_1}, \quad \frac{1}{\sqrt{5} - 2} > 1$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{1}{z_0 - a_0} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2 = 4 + (\sqrt{5} - 2)$$

Αφαιρούμε τον ακέραιο 4 από τον  $z_1$  και βρίσκουμε τον μικρότερο της μονάδας θετικό:  $z_1 - 4 = \sqrt{5} - 2$

$$\text{Οπότε: } \sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}} = 2 + \frac{1}{4 + (\sqrt{5} - 2)} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{z_2}}$$

Τώρα θα πρέπει να βρούμε το ακέραιο μέρος του  $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ , αλλά το έχουμε ήδη υπολογίσει, οπότε

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + (\sqrt{5} - 2)}}$$

Αντιστρέφουμε τον  $\sqrt{5} - 2$  κλπ και τερματίζουμε την διαδικασία όταν από τις αντιστροφές προκύψει ακέραιος. Είναι όμως αυτό δυνατόν; Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν θα βρούμε ακέραιο σε κάποιο βήμα, γιατί τα αποτελέσματα των πράξεων του  $\sqrt{5}$  με ακεραίους είναι φυσικά άρρητοι και θα θέλαμε να γράψουμε  $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}$ , δηλ.

$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \dots]$ . Αν δεχθούμε αυτή την ισότητα τότε, το μερικό πηλίκο 4 που επαναλαμβάνεται ονομάζεται **περίοδος** του συνεχούς κλάσματος και γράφουμε  $\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$  (όπως και για τους περιοδικούς δεκαδικούς).

Και εδώ μπορούμε να εκτελέσουμε τη διαδικασία με μια αριθμομηχανή, πληκτρολογούμε: 5,  $\sqrt{\phantom{x}}$ , -2, =, 1/x, -4, =, 1/x, -4, =, 1/x... , και κρατάμε τα μερικά πηλίκια που εμφανίζονται στην οθόνη. Αν χρησιμοποιήσουμε τον προηγούμενο αλγόριθμο 2.3., θα πρέπει να **αποφασίσουμε** πότε θα σταματήσουμε τη διαδικασία (αλγόριθμος είναι μια πεπερασμένη αλληλουχία δράσεων που εφαρμόζεται σε ένα σύνολο αρχικών δεδομένων).

Αν ο  $x$  είναι άρρητος, τότε θα πρέπει να βάλλουμε έναν «**μετρητή**», π.χ.  $m$ , για το πλήθος των μερικών πηλίκων που μας ικανοποιεί (και την εντολή «αν  $m > \dots$ , τότε σταμάτησε»). Αν δεν βάλλουμε μετρητή, ο υπολογιστής σταματά την διαδικασία όταν συμπληρωθεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων για τον οποίο είναι προγραμματισμένος από τους μηχανικούς, οπότε βλέπουμε και ανάλογα μηνύματα στην οθόνη.

Αν αντιστρέψουμε την διαδικασία στο  $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$ , είτε στο

$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\sqrt{5}-2}}}}$ , θα οδηγηθούμε στον  $\sqrt{5}$ , αλλά πώς θα αντιστρέψουμε το  $[2, 4, 4, \dots]$ ;

Ποιο νόημα θα δώσουμε στις τρεις τελείες; Θα μπορούμε να θεωρούμε το σχήμα  $[2, 4, 4, 4, \dots]$  σαν σύμβολο κάποιου αριθμού και ιδιαίτερα σύμβολο για τον αριθμό  $\sqrt{5}$ ;

**Οι τρεις τελείες μας οδηγούν στο άπειρο,  
το οποίο είναι στενά συνδεδεμένο με τους άρρητους αριθμούς  
και αυτοί άμεσα συνδεδεμένοι με την θεμελιώδη έννοια του ορίου.**

### 2.4. Λύση δευτεροβάθμιας

Ας δούμε και ένα ακόμα παράδειγμα άλλης μορφής: Θέλουμε να λύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση  $\chi^2 - 3\chi - 1 = 0$ . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν λύσεις, γιατί  $\Delta > 0$ , και επίσης ότι αυτές οι λύσεις δεν είναι ρητοί, αφού οι υποψηφιότητες  $\pm 1$ , δεν επαληθεύουν την εξίσωση. Μπορούμε φυσικά και να τις βρούμε, με τη γνωστή διαδικασία,  $(3 \pm \sqrt{13})/2$ .

Ας ακολουθήσουμε όμως την εξής πορεία:

Αναζητούμε  $\chi$  που ικανοποιούν αυτή την εξίσωση. Το 0 δεν είναι λύση.

Γράφουμε λοιπόν την εξίσωση στη μορφή:  $\chi^2 = 3\chi + 1 \Leftrightarrow \chi = 3 + \frac{1}{\chi}$ , και συνεχίζουμε

αντικαθιστώντας το  $\chi$  με το ίσον του,  $3 + 1/\chi$ , αρκετές φορές, οπότε παίρνουμε την έκφραση:

$$\chi = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\chi}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\chi}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\chi}}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\chi}}}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\chi}}}}}$$

Έχουμε λοιπόν:  $\chi = [3, \chi]$ , ή  $\chi = [3, 3, \chi]$ , ή  $\chi = [3, 3, 3, 3, \chi]$ , ή  $\chi = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \chi]$ , ή ακόμα  $\chi = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots?]$ , αλλά πού(?) θα σταματήσουμε; Με πόσα «3» θα είμαστε ικανοποιημένοι; Το πρακτικό πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι ότι δεν θα βρισκόμαστε στη Γη για πάντα, οπότε είναι αδύνατον να γράψουμε μια άπειρη ακολουθία ψηφίων. Και με την εξίσωση τι γίνεται; Τη «λύσαμε»;

Ας δούμε μερικά αναγωγήματα του  $[3,3,3,3,3,3,3,3,\dots]$  (ακόμα δεν έχουμε καθορίσει το νόημα του σχήματος αυτού, αλλά, τα αναγωγήματα μπορούν να υπολογιστούν)

$$[3] = 3, \quad [3,3] = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} = 3.3333\dots, \quad [3,3,3] = [3,[3,3]] = 3 + \frac{1}{[3,3]} = 3 + \frac{3}{10} = \frac{33}{10} = 3.3,$$

$$[3,3,3,3] = 3 + \frac{10}{33} = \frac{109}{33} = 3.30303\dots, \quad [3,3,3,3,3] = [3,[3,3,3,3]] = 3 + \frac{33}{109} = \frac{360}{109} = 3.302752294\dots$$

(ακριβέστερα:  $\frac{360}{109} = 3.3027522935779816513761467889908256880733944954128440366972\backslash$

47706422018348623853211009174311926605504587155963..... η περίοδος αυτού του δεκαδικού αποτελείται από 108 ψηφία, βλ. τμήμα 9.8.7).

$$[3,3,3,3,3,3] = [3,[3,3,3,3,3]] = 3 + \frac{109}{360} = \frac{1189}{360} = 3.3027777777\dots \text{ (περίοδος 7),}$$

$$[3,3,3,3,3,3,3] = [3,[3,3,3,3,3,3]] = 3 + \frac{360}{1189} = \frac{3927}{1189} = 3.30277544\dots$$

Φυσικά, το αναγώγημα οποιασδήποτε τάξης θα είναι ένας ρητός αριθμός.

### Ποιο είναι το νόημα αυτών των αναγωγημάτων;

Με ελάχιστη άλγεβρα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι ρητοί που υπολογίζονται από τα αναγωγήματα είναι εναλλάξ μικρότεροι και μεγαλύτεροι της θετικής ρίζας,

$$(3 + \sqrt{13})/2, \text{ π.χ. } 3 < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow 9 < 13, \quad \frac{10}{3} > \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow 121 > 117, \text{ κλπ.}$$

Αν υπολογίσουμε τις διαφορές των διαδοχικών αναγωγημάτων έχουμε:  $|c_0 - c_1| = \frac{1}{3} = 0.333\dots,$

$$|c_2 - c_1| = \left| \frac{10}{3} - \frac{33}{10} \right| = \frac{1}{30} = 0.0333\dots, \quad |c_2 - c_3| = \left| \frac{109}{33} - \frac{33}{10} \right| = \frac{1}{330} = 0.0030303\dots,$$

$$|c_4 - c_3| = \left| \frac{109}{33} - \frac{360}{109} \right| = \frac{1}{3597} = 0.000278\dots \leq .5 * 10^{-3},$$

$$|c_4 - c_5| = \left| \frac{1189}{360} - \frac{360}{109} \right| = \frac{1}{39240} = 0.0000278\dots \leq .5 * 10^{-4}$$

$$|c_6 - c_5| = \left| \frac{1189}{360} - \frac{3927}{1189} \right| = \frac{1}{428040} = 0.000002336\dots \leq .5 * 10^{-5}$$

Παρατηρούμε ότι οι απόλυτες τιμές των διαφορών μειώνονται. Αν τα αναγωγήματα προσεγγίζουν κάποιον αριθμό, ήδη τον έχουμε βρει με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, είναι ο 3.3028 (1189/360), και με ακρίβεια 5 δ.ψ. είναι ο 3.30278 (3927/1189).

Η θετική ρίζα της εξίσωσης είναι η  $(3 + \sqrt{13})/2$ , δηλ. 3.302775638..., και αν στρογγυλοποιήσουμε σε 5 δεκαδικά ψηφία: 3.30278.

**Υπάρχει κάποια σχέση των αναγωγμάτων με τις ρίζες της δοσμένης εξίσωσης;**

Αν συνεχίσουμε να υπολογίζουμε αναγωγήματα, παίρνοντας συνεχώς περισσότερα «3» από το σχήμα  $[3,3,3,3,3,3,3,3,\dots]$ , δεν πρόκειται να βρούμε την άρρητη θετική ρίζα της εξίσωσης, αφού τα αναγωγήματα είναι ρητοί. Βρίσκουμε όμως «καλύτερες» προσεγγίσεις αυτής της θετικής ρίζας.

Τι μπορεί να παριστάνει το άπειρο (απλό) συνεχές κλάσμα:  $[3,3,3,3,3,3,3,3,\dots]$ ;

Αν υπολογίσουμε το N-τάξης αναγωγήμα του  $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{N-1} + \frac{1}{a_N}}}}}$

με τις προϋποθέσεις που έχουν τεθεί για τα μερικά πηλικά,  $a_0$  ακέραιος και για  $n \geq 1$  τα  $a_n$  θετικοί ακέραιοι, δηλ. αν υπολογίσουμε την τιμή του  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$  είναι φανερό ότι θα οδηγηθούμε σε έναν ρητό αριθμό. Αλλά το σχήμα  $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$ , όταν τα μερικά πηλικά

είναι άπειρα, παριστάνει κάποιον αριθμό;

Τι είδους αριθμός είναι αυτός, αν τελικά είναι αριθμός;

**Και ποιά μέσον μας παρέχει αυτή η έκφραση για να προσδιορίσουμε αυτόν τον αριθμό;**

Σ' αυτό το κεφάλαιο και στα K3 και K4, θα ασχοληθούμε με την διερεύνηση αυτών των ερωτημάτων.

## 2.5. Αναγωγήματα

Θα χρειαστούμε έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού των αναγωγημάτων (που είναι ρητοί αριθμοί), είτε ενός πεπερασμένου, είτε ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος. Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με συγκεκριμένα παραδείγματα. Για να προοδεύσουμε στη μελέτη μας και για γενικότερη διερεύνηση, είναι καιρός να εργαστούμε με σύμβολα, να ελευθερώσουμε τη σκέψη μας από τους συγκεκριμένους αριθμούς.

Ας υπολογίσουμε λοιπόν μερικά αναγωγήματα του  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_N]$  για  $n \leq N$ , είτε του  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots]$  για κάθε  $n$ .

Το  $n$ -τάξης αναγωγήμα και των δύο είναι το  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$

Για τα αναγωγήματα τάξης 0,1,2,3 έχουμε διαδοχικά:

$$c_0 = [a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}, \quad c_1 = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$$

$$c_2 = [a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2]} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_2 a_1 + 1}{a_2}} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}$$

$$c_3 = [a_0, a_1, a_2, a_3] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}. \text{ Παρατηρούμε το } c_3. \text{ Ο παρονομαστής } a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} \text{ είναι}$$

το αναγωγήμα 2<sup>ης</sup> τάξης του  $[a_1, a_2, a_3]$ , οπότε, μπορούμε να γράψουμε  $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1}{a_3 a_2 + 1}$ , σύμφωνα με το προηγούμενο  $c_2$  αυξάνοντας κατά 1 τους

δείκτες, αφού τώρα αρχίζουμε από το  $a_1$  και όχι από το  $a_0$ . Τελικά παίρνουμε

$$c_3 = [a_0, a_1, a_2, a_3] = a_0 + \frac{a_3 a_2 + 1}{a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1} = \frac{a_3 a_2 a_1 a_0 + a_3 a_2 + a_3 a_0 + a_1 a_0 + 1}{a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1}.$$

Και για να μην μας αποξενώσουν τα σύμβολα από τον στόχο μας, π.χ. για το  $[3, 2, 4, 2]$  του πρώτου παραδείγματος, έχουμε:  $c_3 = [3, 2, 4, 2] = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 + 2} = \frac{69}{20}$ .



Χρησιμοποιούμε τώρα τον εξής συμβολισμό:

$$c_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}, \text{ όπου } p_0 = a_0, q_0 = 1,$$

$$c_1 = [a_0, a_1] = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{a_1 p_0 + 1}{a_1 q_0} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{p_1}{q_1}, \text{ με } p_{-1} = 1, q_{-1} = 0 \text{ και}$$

$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1}, \quad q_1 = a_1 q_0 + q_{-1}$$

Για το αναγώγημα 2<sup>ης</sup> τάξης θα έχουμε :

$$c_2 = [a_0, a_1, a_2] = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2 (a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}, \text{ όπου}$$

$$p_2 = a_2 p_1 + p_0, \quad q_2 = a_2 q_1 + q_0.$$

$$c_3 = [a_0, a_1, a_2, a_3] = \frac{a_3 a_2 a_1 a_0 + a_3 a_2 + a_3 a_0 + a_1 a_0 + 1}{a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1} =$$

Για το αναγώγημα 3<sup>ης</sup> τάξης:

$$= \frac{a_3 (a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0) + a_1 a_0 + 1}{a_3 (a_2 a_1 + 1) + a_1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3}$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί  $p_3, q_3$  εξαρτώνται από τους προηγούμενους  $p_k, q_k$  (οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από τα προηγούμενα μερικά πηλικά  $a_0, a_1, a_2$ ) και το μερικό πηλίκο  $a_3$ . Οι  $(p_0, q_0)$ ,  $(p_1, q_1)$ ,  $(p_2, q_2)$  είναι ανεξάρτητοι από το  $a_3$ , είναι οι ίδιοι για οποιοδήποτε συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  έχει τους ακεραίους  $a_0, a_1, a_2$  στα πρώτα τρία μερικά πηλικά. Αν μετά το  $a_2$  έχουμε το μερικό πηλίκο  $a_3$ , οδηγούμαστε στο αναγώγημα  $c_3$ , αν έχουμε κάποιον άλλο θετικό αριθμό, έστω  $x$ , παίρνουμε τον αριθμό  $\frac{x p_2 + p_1}{x q_2 + q_1}$ .

## 2.6. Ο αλγόριθμος των αναγωγημάτων

**2.6.1. Θεώρημα.** Υποθέτουμε ότι  $a_0, a_1, a_2, \dots$  είναι μια ακολουθία με τον αριθμό  $a_0$  ακέραιο και τους  $a_n$  (για  $n \geq 1$ ) θετικούς ακεραίους. Ορίζουμε τις ακολουθίες  $(p_n), (q_n)$  ως εξής:  $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ ,  $p_0 = a_0, q_0 = 1$ , και για  $n \geq 1$ :  $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ ,  $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ .

Τότε για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό  $x$  και για  $n \geq 1$  ισχύει:  $\frac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x]$ .

$$\text{Ιδιαίτερα } [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

**Απόδειξη:**

$$\text{Για } n=1, \quad \frac{xp_0 + p_{-1}}{xq_0 + q_{-1}} = \frac{xa_0 + 1}{x \cdot 1 + 0} = a_0 + \frac{1}{x} = [a_0, x].$$

$$\text{Για } n=2: [a_0, a_1, x] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x}} = a_0 + \frac{x}{a_1x + 1} = \frac{a_1a_0x + x + a_0}{a_1x + 1} = \frac{x(a_1a_0 + 1) + p_0}{x(a_1 + 0) + 1} = \frac{xp_1 + p_0}{xq_1 + q_0}$$

$$\text{Υποθέτουμε ότι } \frac{xp_{n-1} + p_{n-2}}{xq_{n-1} + q_{n-2}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x].$$

$$\text{Τότε } [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, x] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, [a_n, x]] = \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x} \right]$$

$$\text{και σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση: } \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x} \right] = \frac{\left( a_n + \frac{1}{x} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left( a_n + \frac{1}{x} \right) q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Συνεχίζουμε με τις απαραίτητες πράξεις:

$$\frac{\left( a_n + \frac{1}{x} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left( a_n + \frac{1}{x} \right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{x(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}.$$

$$\text{Τελικά } [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, x] = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}} \text{ και το θεώρημα ισχύει για κάθε } n \geq 1.$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα με τον θετικό ακέραιο  $a_n$  στη θέση του θετικού πραγματικού  $x$ , παίρνουμε τον «αλγόριθμο» των αναγωγημάτων:

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = c_n, n \geq 0.$$

\*Για την γενικότητα των τύπων συμφωνούμε:  $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1$ ,

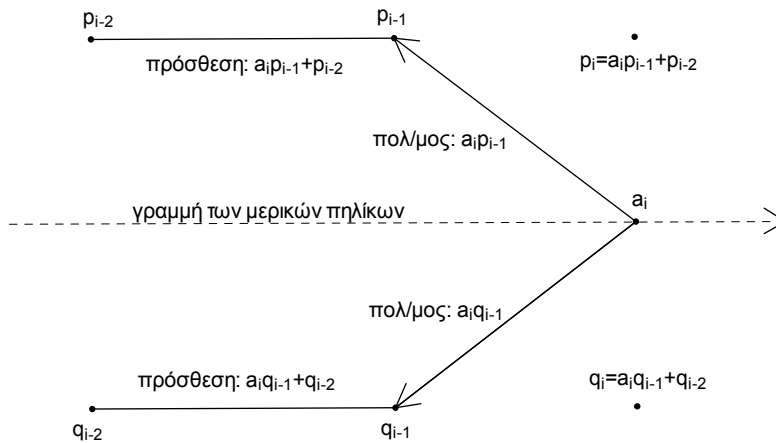
οπότε ο αλγόριθμος εφαρμόζεται και για τον δείκτη 0.

Αν έχουμε το πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_N]$ , τότε  $n \leq N$ .

**Οι υπολογισμοί γίνονται στον πίνακα:**

δείκτης	-2	-1	0	1	2	3	...		...
Αριθμητές: $p_i, i=0,1,2,3,\dots$	0	1	$p_0=a_0$	$p_1$	...			$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$	
Μερικά πηλίκια: $a_i, i=0,1,2,3,\dots$			$a_0$	$a_1$	$a_2$			$a_i$	
Παρονομαστές: $q_i, i=0,1,2,3,\dots$	1	0	$1=q_0$	$q_1$	...			$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$	
Αναγωγήματα: $c_i, i=0,1,2,3,\dots$			$\frac{p_0}{q_0}$	$\frac{p_1}{q_1}$				$\frac{p_i}{q_i}$	

κατά το σχήμα:



Για τον δείκτη χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τα συνήθη σύμβολα:  $i, k, n, m$  κλπ.

Πολλές φορές οι Μαθηματικοί εργάζονται «συναισθηματικά» και δεν ενδιαφέρονται για την λεκτική περιγραφή των αποτελεσμάτων τους (βλ. και τμήμα 6.9). Είναι γνωστό ότι «ένα καλά περιγεγραμμένο συναίσθημα είναι ένα ακρωτηριασμένο συναίσθημα» (Βαλερύ, 1996: 23). Θα επιχειρήσουμε όμως μια λογοτεχνική περιγραφή του παραπάνω σχήματος: Το αναγωγήμα  $n$  – τάξης, σ' ένα συνεχές κλάσμα, έχει αριθμητή που βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε το μερικό πηλίκιο  $n$ -τάξης, το  $a_n$ , επί τον αριθμητή του προηγούμενου αναγωγίματος, του αναγωγίματος  $(n-1)$ -τάξης, και προσθέσουμε στο αποτέλεσμα τον αριθμητή του προ-προηγούμενου αναγωγίματος.

Για τον παρονομαστή του αναγωγίματος  $n$ -τάξης στη θέση του «αριθμητή» της προηγούμενης πρότασης βάζουμε την λέξη «παρονομαστή».

### 2.6.2. Παρατηρήσεις:

#### 1. Για την ακολουθία $(q_k)$ ισχύουν :

- $0 < 1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_k < q_{k+1} < \dots$
- $q_0 = 1$ ,  $q_1 \geq 1$ ,  $q_2 \geq 2$  και για  $k > 3$ :  $q_k > k$
- αν  $k \geq 2$ , τότε  $q_k \geq 2^{\frac{k}{2}}$
- Η ακολουθία  $(q_k)$  είναι αύξουσα με  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \infty$
- Η ακολουθία  $\left(\frac{1}{q_k}\right)$  είναι φθίνουσα με  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q_k}\right) = 0$

#### Απόδειξη:

Έχουμε:  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = a_1 q_0 + q_{-1} = a_1 \geq 1 = q_0$ ,  $q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq q_1 + 1 > q_1$ ,  $q_3 = a_3 q_2 + q_1 \geq q_2 + q_1 \geq q_2 + 1 > q_2$ ,  $q_4 = a_4 q_3 + q_2 \geq q_3 + q_2 \geq q_3 + 1 > q_3$ , και γενικά, για  $k > 4$ :  $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} \geq q_k + q_{k-1} \geq q_k + 1 > q_k$ .

Επίσης:  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = a_1 \geq 1$ ,  $q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq q_1 + 1 \geq 2$ ,  $q_3 = a_3 q_2 + q_1 \geq q_2 + q_1 \geq 2 + 1 = 3$ ,  $q_4 = a_4 q_3 + q_2 \geq q_3 + q_2 \geq 3 + 2 > 3 + 1 = 4$ , και για  $k \geq 4$ :  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} > q_{k-1} + 1 \geq k$ .  
Άρα για  $k > 3$ :  $q_k > k$

Για την τρίτη ιδιότητα, που δείχνει την ταχύτατη αύξηση των όρων της ακολουθίας  $(q_k)$ , έχουμε: Για  $k = 2$ :  $q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq q_1 + q_0 \geq 1 + 1 = 2 = 2^{\frac{2}{2}}$ .

Για  $k = 3$ :  $q_3 = a_3 q_2 + q_1 \geq q_2 + q_1 \geq 2 + 1 = 3 > 2^{\frac{3}{2}}$ .

Για  $k = 4$ :  $q_4 = a_4 q_3 + q_2 \geq q_3 + q_2 \geq 3 + 2 = 5 > 2^{\frac{4}{2}}$ .

Για  $k = 5$ :  $q_5 = a_5 q_4 + q_3 \geq q_4 + q_3 > 4 + 3 = 7 > 2^{\frac{5}{2}}$ .

Υποθέτουμε ότι για  $k = n$ , ισχύει:  $q_n \geq 2^{\frac{n}{2}}$ . Τότε για  $k = n+2$ , έχουμε:

$$q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n \geq q_{n+1} + q_n > 2q_n > 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n+2}{2}} \quad (q_{n+1} > q_n, \text{ για } n \geq 1).$$

Οι επόμενες δύο ιδιότητες είναι απλές συνέπειες των προηγούμενων.

**2. Για την ακολουθία ( p<sub>k</sub> ) παρατηρούμε ότι:**

- αν **a<sub>0</sub> > 0**, τότε: p<sub>0</sub>=a<sub>0</sub>, p<sub>1</sub>=a<sub>1</sub>p<sub>0</sub>+p<sub>-1</sub>≥p<sub>0</sub>+1>p<sub>0</sub>, γιατί a<sub>1</sub>≥1 και p<sub>-1</sub>=1, p<sub>2</sub>=a<sub>2</sub>p<sub>1</sub>+p<sub>0</sub>>p<sub>1</sub>, κλπ, δηλ. (p<sub>k</sub>) γνήσια αύξουσα, p<sub>0</sub><p<sub>1</sub><p<sub>2</sub><... .
- αν **a<sub>0</sub> = 0**, τότε: p<sub>0</sub>=a<sub>0</sub>=0, p<sub>1</sub>=a<sub>1</sub>p<sub>0</sub>+p<sub>-1</sub>=p<sub>-1</sub>=1, p<sub>2</sub>=a<sub>2</sub>p<sub>1</sub>+p<sub>0</sub>=a<sub>2</sub>≥1=p<sub>1</sub>, p<sub>3</sub>=a<sub>3</sub>p<sub>2</sub>+p<sub>1</sub>≥p<sub>2</sub>+1>p<sub>2</sub>, p<sub>4</sub>=a<sub>4</sub>p<sub>3</sub>+p<sub>2</sub>≥p<sub>3</sub>+1>p<sub>3</sub>, (p<sub>k</sub>) αύξουσα, p<sub>0</sub>=0<p<sub>1</sub>=1≤p<sub>2</sub><p<sub>3</sub><p<sub>4</sub><... .
- αν **a<sub>0</sub> = -1**, τότε
  - αν a<sub>1</sub>=1, τότε p<sub>0</sub>=-1, p<sub>1</sub>=0, p<sub>2</sub>=-1, p<sub>3</sub>=-a<sub>3</sub> και για k>3 : p<sub>k+1</sub><p<sub>k</sub>
  - αν a<sub>1</sub>=2, τότε p<sub>0</sub>=-1, p<sub>1</sub>=-1, p<sub>2</sub>=a<sub>2</sub>p<sub>1</sub>+p<sub>0</sub>≤p<sub>1</sub>+p<sub>0</sub><p<sub>1</sub> και για k≥1 : p<sub>k+1</sub><p<sub>k</sub>
  - αν a<sub>1</sub>>2, τότε για k≥0 : p<sub>k+1</sub><p<sub>k</sub>
- αν **a<sub>0</sub> < -1**, τότε: p<sub>0</sub>=a<sub>0</sub> < -1, p<sub>1</sub>=a<sub>1</sub>p<sub>0</sub>+p<sub>-1</sub>= a<sub>1</sub>p<sub>0</sub>+1, οπότε
  - αν a<sub>1</sub>>1, τότε p<sub>1</sub><p<sub>0</sub>, και για το p<sub>2</sub> θα έχουμε: p<sub>2</sub>=a<sub>2</sub>p<sub>1</sub>+p<sub>0</sub><p<sub>1</sub>, αφού a<sub>2</sub>≥1 και p<sub>1</sub>≤0, p<sub>0</sub><0, δηλ. p<sub>0</sub>> p<sub>1</sub>> p<sub>2</sub>> p<sub>3</sub>> p<sub>4</sub>> p<sub>5</sub>>... , η (p<sub>k</sub>) γνήσια **φθίνουσα**.
  - αν a<sub>1</sub>=1, τότε p<sub>1</sub>=a<sub>1</sub>p<sub>0</sub>+p<sub>-1</sub>= a<sub>0</sub>+1>p<sub>0</sub>=a<sub>0</sub>, δηλ. 0> p<sub>1</sub>>p<sub>0</sub> και για k>1 : p<sub>k+1</sub><p<sub>k</sub>

**2.7. Η θεμελιώδης ιδιότητα των αναγωγημάτων**

**2.7.1. Θεώρημα:** Οι αριθμητές p<sub>k</sub> και οι παρονομαστές q<sub>k</sub> των αναγωγημάτων των συνεχών κλασμάτων ικανοποιούν την ισότητα:

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k, \text{ για κάθε } k \geq 0.$$

**Απόδειξη:**

Από τους ορισμούς των (p<sub>k</sub>), (q<sub>k</sub>) έχουμε: p<sub>k</sub> = a<sub>k</sub>p<sub>k-1</sub> + p<sub>k-2</sub>, q<sub>k</sub> = a<sub>k</sub>q<sub>k-1</sub> + q<sub>k-2</sub>.

Πολ/ζουμε την q<sub>k</sub> = a<sub>k</sub>q<sub>k-1</sub> + q<sub>k-2</sub> επί p<sub>k-1</sub>, την p<sub>k</sub> = a<sub>k</sub>p<sub>k-1</sub> + p<sub>k-2</sub> επί q<sub>k-1</sub>, και αφαιρούμε την

δεύτερη από την πρώτη:

$$p_{k-1}q_k = a_k p_{k-1} q_{k-1} + p_{k-1} q_{k-2}, \quad q_{k-1} p_k = a_k q_{k-1} p_{k-1} + q_{k-1} p_{k-2}$$

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = p_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} p_{k-2} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2})$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά αυτό το αποτέλεσμα παίρνουμε:

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = p_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} p_{k-2} =$$

$$= -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = \dots = (-1)^k (q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1}) = (-1)^k (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (-1)^k.$$

### 2.7.2. Συνέπειες της θεμελιώδους ιδιότητας.

#### 1. Τα αναγωγήματα είναι κλάσματα ανάγωγα.

##### Απόδειξη:

Από την  $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$  συμπεραίνουμε ότι ένας κοινός διαιρέτης των  $p_k, q_k$  οφείλει να διαιρεί τον  $(-1)^k$ , άρα οι μόνοι κοινοί διαιρέτες των  $p_k, q_k$  είναι οι  $\pm 1$ , άρα  $\text{MKΔ}(p_k, q_k) = 1$ , για κάθε  $k \geq 0$ .

#### 2. Οι αριθμητές $p_k$ και οι παρονομαστές $q_k$ των αναγωγήματων των συνεχών κλασμάτων ικανοποιούν την ισότητα: $q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k$ , για $k \geq 0$ .

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει  $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1, p_{-1} = 1, q_{-1} = 0, p_0 = a_0, q_0 = 1,$   
 $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$

##### Απόδειξη:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = a_k (-1)^{k-1}$$

#### 3. Για δύο διαδοχικά αναγωγήματα ισχύει: $c_{k-1} - c_k = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}, \quad \forall k \geq 1$

##### Απόδειξη:

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1}}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$$

Επειδή τα  $q_k$  είναι θετικοί, συμπεραίνουμε ότι  $c_0 - c_1 < 0, c_1 - c_2 > 0, c_2 - c_3 < 0$  κλπ.

#### 4. Για αναγωγήματα με διαδοχικούς άρτιους ή περιττούς δείκτες ισχύει:

$$c_{k-2} - c_k = \frac{a_k (-1)^{k-1}}{q_k q_{k-2}}, \quad \forall k \geq 2$$

##### Απόδειξη:

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2}}{q_k q_{k-2}} = \frac{a_k (-1)^{k-1}}{q_k q_{k-2}}$$

Επειδή τα  $q_k$  είναι θετικοί, και τα  $a_k$  για  $k \geq 1$  θετικοί, συμπεραίνουμε ότι  $c_0 - c_2 < 0, c_1 - c_3 > 0, c_2 - c_4 < 0$  κλπ.

**5. Η ακολουθία των αναγωγμάτων με άρτιους δείκτες (άρτια αναγωγήματα) είναι γνήσια αύξουσα. Η ακολουθία των αναγωγμάτων με περιττούς δείκτες (περιττά αναγωγήματα) είναι γνήσια φθίνουσα. Κάθε περιττό αναγώγημα είναι μεγαλύτερο από κάθε άρτιο αναγώγημα.**

**Απόδειξη:**

Αν συνδυάσουμε τα δυο τελευταία αποτελέσματα (3 και 4) παίρνουμε  $c_0 < c_2 < c_4 < c_3 < c_1$ . Γενικότερα, από τις συνέπειες 3 και 4, έχουμε:

- Για τα αναγωγήματα άρτιας τάξης ισχύει:  $c_{2m-2} < c_{2m}$ , αφού η διαφορά τους,  $c_{2m-2} - c_{2m}$ , έχει το πρόσημο του  $(-1)^{2m-1}$  ( $q_k$  θετικοί και για  $1 \leq k$ ,  $a_k$  επίσης θετικοί), δηλ.  $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$
- Για τα αναγωγήματα περιττής τάξης ισχύει:  $c_{2m-1} > c_{2m+1}$ , αφού η διαφορά τους,  $c_{2m-1} - c_{2m+1}$ , έχει το πρόσημο του  $(-1)^{2m}$ , δηλ.  $\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \dots > \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} > \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$
- Για τη διαφορά άρτιου από περιττό αναγώγημα, αν είναι διαδοχικά,  $c_{2m-1} \dots c_{2m}$  (ή  $c_{2m} \dots c_{2m+1}$ ) **από την 3**, συμπεραίνουμε ότι  $c_{2m-1} > c_{2m}$  (ή  $c_{2m} < c_{2m+1}$ ), επειδή, όταν αφαιρούμε το επόμενο από το προηγούμενο, το  $(-1)$  έχει εκθέτη τον δείκτη του αναγωγήματος που αφαιρείται. Αν δεν είναι διαδοχικά, π.χ. αν έχουμε αναγωγήματα με δείκτες  $2m$  και  $2n+1$ , τότε και πάλι το περιττό αναγώγημα θα είναι μεγαλύτερο από το άρτιο, γιατί  $c_{2m} < c_{2m+2n} < c_{2m+2n+1} < c_{2n+1}$ .

**Συμπέρασμα:**

**Για  $n \geq 2$ , κάθε αναγώγημα  $c_n = \frac{p_n}{q_n}$  περιέχεται μεταξύ των δύο προηγούμενων του.**

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \dots < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

**6. Ισχύει η ανισοτική σχέση:**  $\left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{2} \frac{1}{q_{k-1} q_k} = \frac{1}{2} \left| \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \right|$ , για  $k \geq 2$ .

**Απόδειξη:**

$$\text{Από τις } \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1}}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}, \quad \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1}}{q_k q_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k+1}}$$

$$\text{και } q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} \geq q_k + q_{k-1} > 2q_{k-1}, (k \geq 2),$$

$$\text{έχουμε: } \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{2} \frac{1}{q_{k-1} q_k} = \frac{1}{2} \left| \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \right|$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν άξονα και τοποθετούμε τα σημεία  $A_n$ , τετμημένης  $\frac{p_n}{q_n}$ . Τότε το  $A_1$  θα είναι δεξιά του  $A_0$ , το  $A_2$  μεταξύ  $A_0$  και  $A_1$ , το  $A_3$  μεταξύ  $A_1$  και  $A_2$  κλπ, το  $A_{n+1}$  μεταξύ των  $A_{n-1}$ ,  $A_n$ . Η τελευταία ανισοτική σχέση δείχνει ότι το  $A_{n+1}$  είναι πιο κοντά στο  $A_n$ , από ότι το  $A_n$  στο  $A_{n-1}$ . Επειδή το  $A_{n+1}$  βρίσκεται **ανάμεσα** στα  $A_n$ ,  $A_{n-1}$  θα είναι τελικά πιο κοντά στο  $A_n$  απ' ότι στο  $A_{n-1}$ .

Φυσικά, αν το συνεχές κλάσμα είναι πεπερασμένο, οι ιδιότητες ισχύουν για όσα αναγωγήματα υπάρχουν.

## 2.8. Ιστορικά σχόλια

Η έννοια του συνεχούς κλάσματος εισάγεται αυτόματα όταν πρόκειται να μετρήσουμε έναν αριθμό  $A$  με τον  $B$  ή ένα μέγεθος  $A$  με το  $B$ . Θέλουμε να βρούμε πόσες φορές το  $B$  περιέχεται στο μέγεθος  $A$ . Το πρόβλημα είναι ανάλογο με την εύρεση του ΜΚΔ δύο ακεραίων. Έστω  $A > B$  και  $a_0 * B$  το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του  $B$ , που δεν υπερβαίνει το

$$A. \text{ Τότε } A = a_0 * B + v_1, \text{ με } v_1 < B, \text{ οπότε } \frac{A}{B} = a_0 + \frac{v_1}{B}, \text{ με } \frac{v_1}{B} < 1, \text{ άρα } a_0 = \left[ \frac{A}{B} \right].$$

Συνεχίζουμε μετρώντας το  $B$  με το  $v_1$  και έστω  $a_1$  το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του  $v_1$  που δεν υπερβαίνει το  $B$ , δηλ.  $B = a_1 * v_1 + v_2$ , με  $v_2 < v_1$ , οπότε  $\frac{B}{v_1} = a_1 + \frac{v_2}{v_1}$ , με  $\frac{v_2}{v_1} < 1$ , άρα

$$a_1 = \left[ \frac{B}{v_1} \right], \text{ οπότε } \frac{A}{B} = a_0 + \frac{v_1}{B} = a_0 + \frac{1}{\frac{B}{v_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{v_2}{v_1}}, \text{ κλπ.}$$

Αν  $A/B$  ρητός, η διαδικασία τερματίζεται, οι αριθμοί  $a_k$  είναι τα διαδοχικά πηλίκα που προκύπτουν κατά την αναζήτηση του ΜΚΔ( $A, B$ ).



Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη (περίπου 300 π.Χ.) για την εύρεση του ΜΚΔ δύο αριθμών είναι ουσιαστικά η μέθοδος που μετατρέπει ένα κλάσμα σε συνεχές κλάσμα και είναι το πρώτο σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της έννοιας του συνεχούς κλάσματος. Ο Ευκλείδης ονομάζει την μέθοδο για την εύρεση του μεγίστου κοινού διαιρέτη δυο αριθμών, κοινού μέτρου κατά τους αρχαίους Έλληνες, «Ανθυφαίρεση» (η αρχαιότερη ονομασία της είναι αντανάιρεση). Επειδή, κατά την φιλοσοφική αντίληψη των Πυθαγορείων, η μονάδα δεν είναι αριθμός (αριθμός είναι πλήθος μονάδων, η μονάδα είναι μια οντότητα από την οποία παράγονται οι αριθμοί), διατυπώνει και αποδεικνύει ξεχωριστά τις προτάσεις VII.1, VII.2 που αφορούν το μέγιστο κοινό μέτρο δυο αριθμών (και είναι το βασικό εργαλείο για το έβδομο βιβλίο, το οποίο είναι καθοριστικό για την ανάπτυξη της θεωρίας αριθμών). Οι προτάσεις αυτές είναι:

[VII.1] Δύο αριθμών άνισων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δε ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρήῃ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῆ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

[VII.2] Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρῶτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.

Αν λοιπόν έχουμε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  με  $\alpha > \beta$  και η ανθυφαίρεση του  $\beta$  από τον  $\alpha$ , καταλήξει σε μονάδα τότε οι αριθμοί αυτοί είναι πρώτοι μεταξύ τους,  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$ . Διαφορετικά ο (Ευκλείδειος) αλγόριθμος της ανθυφαίρεσης καταλήγει στην εύρεση του, (μεγαλύτερου της μονάδος πλέον) ΜΚΔ των  $\alpha$  και  $\beta$ .

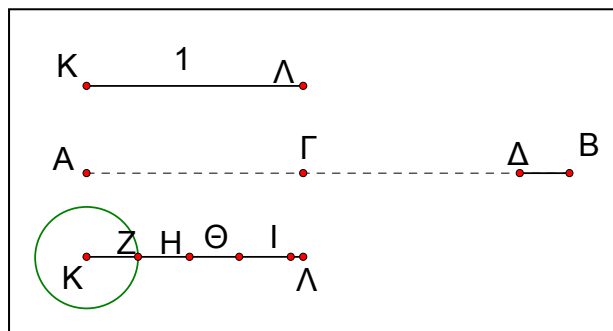
Ο Ευκλείδης επανέρχεται στην ανθυφαίρεση στο βιβλίο X, με την πρόταση X.2, όπου από ανθυφαίρεση δύο άνισων αριθμών, πηγαίνει σε ανθυφαίρεση δυο άνισων μεγεθών (μεγέθη είναι ευθ. τμήματα, επιφάνειες ή όγκοι). Όμως, ενώ στους φυσικούς αριθμούς η διαδικασία τερματίζεται (δυο αριθμοί μετρώνται οπωσδήποτε από την μονάδα, αλλά, πιθανόν να έχουν και άλλο κοινό μέτρο, π.χ. ο 5 μετρά τους 15 και 35 με αποτελέσματα μετρήσεων 3 και 7), για τα μεγέθη υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- αν η διαδικασία τερματίζεται, τότε έχουμε βρει κοινό μέτρο των μεγεθών, τα μεγέθη αυτά είναι σύμμετρα, ενώ,
- αν δεν τερματίζεται, αν είναι άπειρη, δηλ. αν ανθυφαιρείται πάντα το μικρότερο από το μεγαλύτερο μέγεθος και το υπόλοιπο που κάθε φορά απομένει δεν μετρά το προηγούμενο του, τότε τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα. Η άπειρη ανθυφαίρεση, αποτελεί ένα **κριτήριο ασυμμετρίας**.

Η πρόταση X2 είναι η εξής:

[X.2] Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῆ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Για το παράδειγμα της μέτρησης του ευθ. τμήματος AB με μήκος  $\sqrt{5}$  με το ευθ.τμήμα ΚΛ μοναδιαίου μήκους (τμήμα 2.3), θα έχουμε:  $AB=2*ΚΛ+\Delta B$ . Η ανθυφαίρεση θα συνεχιστεί με την προσπάθεια μέτρησης του ΚΛ με το υπόλοιπο της πρώτης μέτρησης, δηλ. το



$\Delta B$ . Έχουμε  $ΚΛ=4*\Delta B+ΙΛ$ . Στη συνέχεια θα μετρήσουμε το  $\Delta B$  με το  $ΙΛ$  κλπ.

Φυσικά δεν θα βρούμε κάποιο υπόλοιπο να μετρά (ακριβώς)το προηγούμενό του, γιατί τότε , κινούμενοι αντίστροφα στον αλγόριθμο, θα προέκυπτε κοινό μέτρο των AB, ΚΛ, και ο  $\sqrt{5}$  θα ήταν ρητός.

Αναφορές σε συνεχή κλάσματα βρίσκονται στις εργασίες του ινδού μαθηματικού Aryabhata (περίπου 475-550 μ.Χ.), που χρησιμοποίησε συνεχή κλάσματα τις προσπάθειές του για την γενική λύση μιας γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης. Θέματα σχετικά με συνεχή κλάσματα βρίσκονται περιστασιακά σε Άραβες και Έλληνες συγγραφείς.

Οι περισσότεροι ιστορικοί συμφωνούν ότι η σύγχρονη θεωρία των συνεχών κλασμάτων άρχισε με τις εργασίες του Rafael Bombelli (Bologna), τον τελευταίο από του μεγάλους αλγεβριστές της αναγεννησιακής Ιταλίας (Burton, 1997: 307). Στην εργασία του L'Algebra Opera (1572), ο Bombelli αποδεικνύει ότι  $\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \dots}}$ . Ίσως είναι

ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι ο Bombelli είχε την πρόθεση να μεταφράσει τα Αριθμητικά του Διόφαντου (περίπου 200-284μ.Χ., έζησε στην περίφημη Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου) από ένα χειρόγραφο της βιβλιοθήκης του Βατικανού, αλλά δεν ολοκλήρωσε την προσπάθεια αυτή. Ενσωμάτωσε όμως στην δική του Άλγεβρα, μεταξύ των δικών του, όλα τα προβλήματα των τεσσάρων πρώτων βιβλίων του Διόφαντου (σώθηκαν 6 από τα 13 βιβλία του). Ο Bombelli αν και δεν έγραψε χωριστά τα προβλήματα του Διόφαντου παραδέχθηκε ότι είχε δανειστεί «ελεύθερα» από τα Αριθμητικά.

Ο επόμενος που θεώρησε συνεχή κλάσματα ήταν ο Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), από την Bologna και πάλι. Σε μια εργασία του στην θεωρία των ριζών (1613), εκφράζει την  $\sqrt{18}$  στην μορφή  $\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \dots$ .

Αυτό είναι ουσιαστικά το σύγχρονο σχήμα  $\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \dots}}}$ , που χρησιμοποιείται για την πιο κομψή παρουσίαση του  $\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{\dots}}}$ .

Ο τρίτος συγγραφέας που αξίζει να μνημονευτεί (Olds, 1963: 29) είναι ο Daniel Schwenter (1585-1636), που ήταν καθηγητής «ανατολικών» γλωσσών και μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Aldorf (Γερμανία). Στο βιβλίο του *Geometrica Practica* (1618) με τους υπολογισμούς που έκανε για να βρει τον ΜΚΔ(177,233), προσδιόρισε τα αναγωγήματα  $\frac{79}{104}, \frac{19}{25}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}$  του συνεχούς κλάσματος στο οποίο αναπτύσσεται ο  $\frac{177}{233}$  ([0,1,3,6,4,2]).

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε τον λόρδο W.Brouncker (1620-1684). Αυτός μετασχημάτισε το ενδιαφέρον άπειρο γινόμενο  $\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dots}$  που ανακαλύφθηκε από τον Άγγλο μαθηματικό John Wallis (1655), στο συνεχές κλάσμα:  $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}$ .

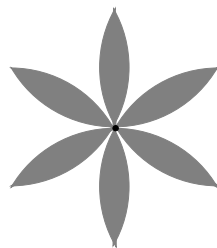
Στη συζήτηση για το συνεχές κλάσμα του Brouncker, στο βιβλίο *Arithmetica Infinitorum* (1658) ο Wallis καθόρισε τις στοιχειώδεις ιδιότητες των αναγωγμάτων ενός συνεχούς κλάσματος και χρησιμοποίησε για **πρώτη φορά** το όνομα «**συνεχές κλάσμα**» (Olds, 1963: 30). Ο Wallis αφιέρωσε επίσης τα κεφάλαια 10 και 11 του βιβλίου του *Treatise of Algebra* στο πρόβλημα της προσέγγισης ενός κλάσματος ή ενός δεκαδικού αριθμού, με κλάσμα που έχει παρονομαστή που δεν υπερβαίνει κάποιον δοθέντα αριθμό, π.χ. τον 999.

Ο μεγάλος Γερμανός μαθηματικός, φυσικός, μηχανικός και αστρονόμος, Christian Huygens (1629-1695) χρησιμοποίησε συνεχή κλάσματα για τον ακριβή σχεδιασμό των οδοντωτών τροχών ενός πλανηταρίου. Η εργασία του με τίτλο *Descriptio Automati Planetarii* γράφτηκε μεταξύ 1680 και 1687, αλλά, δημοσιεύθηκε το 1703, μετά το θάνατό του.

Από δω και πέρα αναλαμβάνουν οι Euler (1707-1783), Lampert (1728-1777), Lagrange (1736-1813) και πολλοί άλλοι που ανέπτυξαν την θεωρία όπως την γνωρίζουμε σήμερα. Ιδιαίτερα, σημαντική ώθηση σε αυτή την ανάπτυξη, έδωσε η εργασία του Euler : De Fractionibus Continuis (1737).

Είναι σημαντικός ο ρόλος των συνεχών κλασμάτων στα σύγχρονα μαθηματικά. Συνιστούν ένα βασικό εργαλείο για νέες ανακαλύψεις στη θεωρία αριθμών (π.χ. ο εξέχων Ρώσος μαθηματικός Andrei A.Markov (1856-1922) παρουσίασε το 1879 στην διατριβή του: «Διαδικές τετραγωνικές μορφές με θετικές ορίζουσες» τις λύσεις εξαιρετικά δύσκολων προβλημάτων της θεωρίας αριθμών, χρησιμοποιώντας συνεχή κλάσματα). Μια σημαντική γενίκευση των συνεχών κλασμάτων που ονομάζεται αναλυτική θεωρία των συνεχών κλασμάτων είναι μια εκτεταμένη περιοχή για τωρινές και μελλοντικές έρευνες.

Στο πεδίο των υπολογιστών, τα συνεχή κλάσματα χρησιμοποιούνται για να δώσουν γρήγορες και βέλτιστες προσεγγίσεις σε ποικίλες και πολύπλοκες λειτουργίες. Για παράδειγμα, οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται από τις «επιστημονικές» αριθμομηχανές για να προσεγγίσουν συναρτήσεις όπως οι  $e^x$  και  $\sin x$  βασίζονται στα συνεχή κλάσματα (Adler, 1994: 271). Το πρόγραμμα του μετασχηματισμού των δεκαδικών κατά προσέγγιση σε κλάσματα, επικαλείται τα συνεχή κλάσματα. Επίσης στη γλώσσα Logo π.χ. (και όχι μόνο), ένα πρόβλημα είναι να επιστρέφουμε στο σημείο εκκίνησης από δυο ευθύγραμμες διαδρομές για να κλείσουμε ένα πολύγωνο. Μια θεμελιώδης ιδέα είναι ότι αρκεί να φτάσουμε σε ένα σημείο αρκετά κοντά στο σημείο εκκίνησης, έτσι ώστε το όργανο που χρησιμοποιούμε (η οθόνη δηλαδή) να μας τελειοποιήσει το αποτέλεσμα που ζητάμε. Το αντίστοιχο θα μπορούσαμε να έχουμε για την κατασκευή ενός κύκλου. Η γωνία κατά την οποία θα στρέψουμε το βέλος (χελώνα) και η απόσταση που πρέπει να διανυθεί, βρίσκεται με τη βοήθεια της ανάπτυξης σε συνεχή κλάσματα.



### K3: Ρητοί και πεπερασμένα απλά συνεχή κλάσματα

#### 3.1. Ανάπτυγμα ρητού σε συνεχές κλάσμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τυχαίο ρητό κλάσμα  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q > 0$  (για το τυχαίο

ρητό κλάσμα, υποθέτουμε θετικό παρονομαστή, αν υπάρχει αρνητικό πρόσημο στον παρονομαστή, «αφομοιώνεται» από τον αριθμητή). Εφαρμόζουμε τον ευκλείδειο αλγόριθμο στους  $p, q$  και έχουμε:

Ευκλ.αλγόρ.	επομένως	Πλήρη πηλίκια: $z_{n+1} = \frac{1}{z_n - a_n}$
$p = a_0q + r_0$ , με $0 < r_0 < q$ (Γενικά: $0 \leq r_0 < q$ , αν $r_0 = 0$ , τότε ο αλγόριθμος τερματίζεται: $\frac{p}{q} = [a_0] = a_0$ )	$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}}$ , $\frac{r_0}{q} < 1, \frac{q}{r_0} > 1$  $z_0 = p/q$ : πλήρες πηλίκιο,  $a_0$ : μερικό πηλίκιο,  είναι το ακ.μέρος του $z_0$	$z_0 = [z_0] + (z_0 - [z_0]) = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{z_0 - a_0}} =$  $= a_0 + \frac{1}{z_1}, z_1 > 1$  $z_0 - a_0 < 1$ , αντιστρέφω,  $z_1 = \frac{1}{z_0 - a_0} > 1$
$q = a_1r_0 + r_1$ , με $0 < r_1 < r_0$ ( $0 \leq r_1 < r_0$ , αν $r_1 = 0$ , τότε $\frac{p}{q} = [a_0, a_1]$ )	$z_1 = \frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}$  $\frac{q}{r_0}$ είναι μεγαλύτερος του 1, άρα ο $a_1$ είναι θετικός ακέραιος.	$z_1 = a_1 + \frac{r_1}{r_0} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}} = a_1 + \frac{1}{\frac{1}{z_1 - a_1}} = a_1 + \frac{1}{z_2}$  $z_0 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{z_0 - a_0}} = a_0 + \frac{1}{z_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{z_2}}$
$r_0 = a_2r_1 + r_2$ , με $0 < r_2 < r_1$	$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$	$z_2 = a_2 + \frac{1}{\frac{1}{z_2 - a_2}} = a_2 + \frac{1}{z_3}, z_3 = \frac{1}{z_2 - a_2}$
... Η διαδικασία τερματίζεται όταν βρούμε υπόλοιπο 0...		
$r_{n-2} = a_n r_{n-1} + r_n$ , με $r_n = 0$ , ΜΚΔ(p,q): $r_{n-1}$	$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n$	$z_n = a_n$

Πίνακας 1

Ο (ακέραιος)  $a_0$  μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός ή 0, αλλά ο  $\frac{q}{r_0}$  είναι ρητός μεγαλύτερος του 1, άρα ο  $a_1$  είναι θετικός ακέραιος, όπως και οι  $a_n$ , για  $n \geq 1$ .

Η διαδικασία τερματίζεται γιατί  $q > r_0 > r_1 > r_2 > \dots$ , οι  $q, r_0, r_1, \dots$  αποτελούν κάθοδο (γνήσια φθίνουσα ακολουθία φυσικών) και κάθε κάθοδος τερματίζεται (αν δεν τερματίζεται, με την μέθοδο του Πίνακα 1, καταλήγουμε για κάθε  $n$  σε ένα  $r_n > 0$ , και τότε μεταξύ των  $q$  και  $0$  θα είχαμε μια απειρία άνισων φυσικών  $q, r_0, r_1, \dots$  στο σύνολο των οποίων δεν θα υπήρχε ελάχιστος, άτοπον).

Με εφαρμογή λοιπόν του ευκλείδειου αλγορίθμου μπορούμε να βρούμε ένα **ανάπτυγμα** σε πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα οποιουδήποτε ρητού.

**Παραδείγματα:**  $\frac{-69}{20} = [-4, 1, 1, 4, 2]$ ,  $\frac{20}{69} = [0, 3, 2, 4, 2]$ ,  $\frac{138}{40} = [3, 2, 4, 2]$ ,  $\frac{158}{49} = [3, 4, 2, 5]$

ΜΚΔ(-69, 20)=1

υ	11	9	2	1	0	
-69	20	11	9	2	1	
π	-4	1	1	4	2	

ΜΚΔ(20, 69)=1

υ	20	9	2	1	0	
20	69	20	9	2	1	
π	0	3	2	4	2	

ΜΚΔ(138, 40)=2

υ	18	4	2	0	
138	40	18	4	2	
π	3	2	4	2	

### Παρατηρήσεις:

**3.1.1.** Για το πρώτο παράδειγμα ο αριθμός  $(-4)*20$  είναι το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 20 που δεν υπερβαίνει τον -69, είναι το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 20 που όταν αφαιρεθεί από τον -69 δίνει το μικρότερο μη αρνητικό υπόλοιπο, 11. Αυτό θα διαφέρει από τον -69 κατά ποσότητα μικρότερη του 20 και για το υπόλοιπο, δηλ. το 11,  $(-69 - (-4)*20)$ ,  $\left(-\frac{69}{20} - \left[-\frac{69}{20}\right]\right)20 = \left(-\frac{69}{20} + 4\right)20 = 11$ , θα ισχύει  $0 \leq 11 < 20$ . Γενικότερα, από τον αλγόριθμο της διαίρεσης έχουμε ότι το πρώτο (μερικό) πηλίκο είναι ακέραιος, εδώ -4 (στο δεύτερο παράδειγμα είναι 0), τα υπόλοιπα μερικά πηλίκια είναι φυσικοί.

**3.1.2.** Επειδή  $2=1+1$ , μπορούμε να γράψουμε  $[-4, 1, 1, 4, 2] = [-4, 1, 1, 4, 1, 1]$ . Για το τελευταίο παράδειγμα μπορούμε επίσης να γράψουμε  $[3, 4, 2, 5] = [3, 4, 2, 4, 1]$ , αφού  $\frac{1}{5} = \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}$ .

Αλλά και αντίστροφα, αν έχουμε το  $[3, 4, 2, 4, 1]$  μπορούμε να γράψουμε  $[3, 4, 2, 4, 1] = [3, 4, 2, 5]$ .

Εδώ έχουμε να παρατηρήσουμε ότι δεν είναι δυνατόν το τελευταίο πηλίκο στον ευκλείδειο αλγόριθμο να είναι 1, γιατί τότε το προτελευταίο υπόλοιπο θα πρέπει να είναι ίσο με τον προτελευταίο διαιρέτη, οπότε αυξάνουμε κατά μια μονάδα το προτελευταίο πηλίκο, δηλ., αν έχουμε το  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  με τα μερικά πηλίκια από τον ευκλείδειο αλγόριθμο, τότε  $a_n \geq 2$  (για  $n \geq 1$ , αν  $p=q$ , τότε  $\frac{q}{q} = 1 = a_0$ ). Από τον αλγόριθμο της διαίρεσης γνωρίζουμε ότι για τους ακεραίους  $\alpha, \beta$  υπάρχει μοναδικό ζεύγος ακεραίων  $\pi, \nu$  (πηλίκιο -υπόλοιπο) ώστε να ισχύει  $\alpha = \beta\pi + \nu$  και  $0 \leq \nu < |\beta|$ . Η ακολουθία των πηλίκων που παράγεται από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο είναι λοιπόν μοναδική.

Μπορούμε όμως πάντα να επιλέγουμε άρτιο ή περιττό αριθμό μερικών πηλίκων, γιατί αν  $a_n \geq 2$ , τότε  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1 + 1} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$ , και  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$ .

Επίσης, αν  $a_n = 1$ , τότε  $\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1} + 1}$ , δηλ. αν έχουμε το συνεχές κλάσμα

$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, 1]$ , τότε  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, 1] = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1} + 1]$ .

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι αυτός είναι και ο μόνος τρόπος για να έχουμε, για τον ίδιο ρητό, δύο διαφορετικά αναπτύγματα.

### 3.1.3.

Για το κλάσμα  $138/40$  βρήκαμε ότι έχει το ανάπτυγμα :  $[3, 2, 4, 2]$ . Όμως, αν υπολογίσουμε το τελευταίο αναγωγή του  $[3, 2, 4, 2]$ , τότε, δεν θα βρούμε το αρχικό κλάσμα  $138/40$ , αλλά το  $69/20$ , αναμενόμενο, αφού τα αναγωγίματα είναι κλάσματα ανάγωγα (τμήμα 2.7.2). Τα μερικά πηλίκια είναι ίδια, γιατί όταν πολ/ζουμε διαιρετέο και διαιρέτη επί τον ίδιο αριθμό, το πηλίκιο δεν μεταβάλλεται. Το υπόλοιπο όμως πολ/ζεται επί τον ίδιο αριθμό, και επειδή ο ΜΚΔ είναι υπόλοιπο, βρίσκουμε  $\text{ΜΚΔ}(138, 40) = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \text{ΜΚΔ}(69, 20)$ .

Το συνεχές κλάσμα  $[3, 2, 4, 2]$  παριστάνει όλα τα κλάσματα που είναι ίσα (ισοδύναμα) με το ανάγωγο  $69/20$ , δηλαδή παριστάνει τον ρητό αριθμό  $69/20$ .

**3.1.4.** Για το δεύτερο παράδειγμα, από το πρώτο βήμα, επειδή  $\frac{69}{20} = [3, 2, 4, 2]$ , όπως

έχουμε δει στην ενότητα 2.1, μπορούμε να γράψουμε άμεσα ένα «ανάπτυγμα»

δείκτης	-2	-1	0	1	2	3	4
Αριθμητές: $p_i, i=0,1,2,3,\dots$	0	1	0	1	2	9	20
Μερικά πηλίκα: $a_i, i=0,1,2,3,\dots$			0	3	2	4	2
Παρονομαστές: $q_i, i=0,1,2,3,\dots$	1	0	1	3	7	31	69
Αναγωγήματα $:c_i, i=0,1,2,3,\dots$			0	1/3	2/7	9/31	20/69

του  $\frac{20}{69}$  σε συνεχές κλάσμα:  $\frac{20}{69} = \frac{1}{\frac{69}{20}} = \frac{1}{[3, 2, 4, 2]} = [0, 3, 2, 4, 2]$ . Επίσης, αν υπολογίσουμε

το  $[0, 3, 2, 4, 2]$ , σύμφωνα με τον αλγόριθμο των αναγωγημάτων, βρίσκουμε το  $20/69$ .

Αλλά και αντίστροφα, αν  $\frac{20}{69} = [0, 3, 2, 4, 2] = 0 + \frac{1}{[3, 2, 4, 2]} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$ ,

$$\text{τότε } \frac{69}{20} = \frac{1}{\frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} = [3, 2, 4, 2]$$

Γενικότερα για το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα ενός θετικού ρητού και του αντιστρόφου του ισχύει: Αν  $p > q > 0$  και  $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ , τότε  $\frac{q}{p} = [0, a_0, a_1, \dots, a_n]$

Αν  $p > q > 0$  και  $\frac{q}{p} = [0, b_1, b_2, \dots, b_n]$ , τότε  $\frac{p}{q} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$

**Απόδειξη:**

Αν  $p > q > 0$ , τότε  $\frac{p}{q} > 1$  και  $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$ , όπου ο  $a_0$  είναι θετικός

ακέραιος. Για τον  $\frac{q}{p}$  θα έχουμε  $\frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} = 0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$



Αν  $p > q > 0$ , τότε  $\frac{q}{p} < 1$  και το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα του  $\frac{q}{p}$  θα έχει το

$$\text{σχήμα: } \frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_n}}}} = [0, b_1, b_2, \dots, b_n] = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_n}}}}$$

Για τον αντίστροφο θα έχουμε:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_n}}}}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_n}}} = [b_1, b_2, \dots, b_n].$$

**3.1.5.** Στην προηγούμενη παρατήρηση είδαμε ότι (για θετικούς ρητούς) ο αντίστροφος του ρητού που έχει ανάπτυγμα  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  ( $a_0 > 0$ ) είναι ο ρητός που παριστάνει το συνεχές κλάσμα  $[0, a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Πιθανόν να περιμέναμε ότι το συνεχές του αντίστροφου θα προέκυπτε με αναστροφή των μερικών πηλίκων, αλλά ποιός βρίσκει ενδιαφέρον σε αναμενόμενα αποτελέσματα; Και το  $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$  ( $a_n$  θετικός ακέραιος) ποιόν ρητό παριστάνει; Ας χρησιμοποιήσουμε για παραδείγματα τα :  $\frac{158}{49} = [3, 4, 2, 5]$ ,  $\frac{138}{40} = [3, 2, 4, 2]$ ,  $\frac{2065}{902} = [2, 3, 2, 5, 5, 1, 3]$ :

Ρητός	Συνεχές κλάσμα	Αναγωγήματα	Αναστροφή των Μερικών πηλίκ.	Αναγωγήματα
$\frac{158}{49}$	$[3, 4, 2, 5]$	$\frac{3}{1}, \frac{13}{4}, \frac{29}{9}, \frac{158}{49}$	$[5, 2, 4, 3]$	$\frac{5}{1}, \frac{11}{2}, \frac{49}{9}, \frac{158}{29}$
$\frac{138}{40}$	$[3, 2, 4, 2]$	$\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{31}{9}, \frac{69}{20} = \frac{138}{40}$	$[2, 4, 2, 3]$	$\frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{20}{9}, \frac{69}{31}$
$\frac{2065}{902}$	$[2, 3, 2, 5, 5, 1, 3]$	$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{16}{7}, \frac{87}{38}, \frac{451}{197}, \frac{538}{235}, \frac{2065}{902}$	$[3, 1, 5, 5, 2, 3, 2]$	$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{23}{6}, \frac{119}{31}, \frac{261}{68}, \frac{902}{235}, \frac{2065}{538}$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο αναγώγημα του ανεστραμμένου συνεχούς κλάσματος, έχει όρους τους αριθμητές και το προτελευταίο τους παρονομαστές των δυο τελευταίων αναγωγημάτων του δοσμένου. Γενικά ισχύει το παρακάτω **θεώρημα**:

$$\text{Αν } \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \text{ με } a_0 \geq 1,$$

$$\text{τότε } \frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0], \quad \frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1].$$

**Απόδειξη:** Από τον αλγόριθμο των αναγωγημάτων έχουμε:

$$\text{i. } p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \text{ άρα } \frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} \text{ και } p_{n-1} = a_{n-1} p_{n-2} + p_{n-3}, \text{ άρα, } \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}$$

Από την παρατήρηση 2 του Θ.2.6, επειδή  $a_0 \geq 1$ , η  $(p_k)$  είναι γνήσια αύξουσα, άρα  $\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} < 1$  και επομένως  $\left[ \frac{p_n}{p_{n-1}} \right] = a_n$ ,  $\left[ \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \right] = a_{n-1}$ , κλπ. Συνεχίζουμε: ...

$$\dots p_3 = a_3 p_2 + p_1, \quad \frac{p_3}{p_2} = a_3 + \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}}, \quad p_2 = a_2 p_1 + p_0, \quad \frac{p_2}{p_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{p_1}{p_0}}, \quad \frac{p_1}{p_0} = a_1 + \frac{1}{a_0}$$

Με διαδοχικές αντικαταστάσεις βρίσκουμε:  $\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$

$$\text{ii. } q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \text{ άρα } \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}}, \quad q_{n-1} = a_{n-1} q_{n-2} + q_{n-3}, \text{ άρα } \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{q_{n-2}}{q_{n-3}}}$$

Από την παρατήρηση 1 του Θ.2.6 και πάλι, η  $(q_k)$  είναι γνήσια αύξουσα, άρα  $\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} < 1$  και

$$\left[ \frac{q_n}{q_{n-1}} \right] = a_n, \text{ κλπ. Συνεχίζουμε: } \dots, \quad q_3 = a_3 q_2 + q_1, \quad \frac{q_3}{q_2} = a_3 + \frac{1}{\frac{q_2}{q_1}}, \quad \frac{q_2}{q_1} = a_2 + \frac{q_0}{q_1} = a_2 + \frac{1}{a_1}$$

(ο  $a_1$  είναι ακέραιος, η διαδικασία τερματίζεται).

Οπότε και πάλι με διαδοχικές αντικαταστάσεις βρίσκουμε:  $\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1]$ .

**3.1.6.**

Είναι γνωστό ότι η έκφραση του  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)$  ως γραμμικού συνδυασμού των  $\alpha, \beta$  δεν είναι μοναδική, π.χ.  $\text{MK}\Delta(190, 72) = 2, 2 = 11 \cdot 190 + (-29) \cdot 72, 2 = 83 \cdot 190 + 219 \cdot (-72)$ . Μια τέτοια έκφραση του  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)$  μπορεί να προκύψει αν κινηθούμε «προς τα πίσω» στον Ευκλείδειο αλγόριθμο. Π.χ. για να βρούμε τον  $\text{MK}\Delta$  των 158 και 49 έχουμε διαδοχικά:  $158 = 3 \cdot 49 + 11, 49 = 4 \cdot 11 + 5, 11 = 2 \cdot 5 + 1, 5 = 5 \cdot 1$  και  $\text{MK}\Delta(158, 49) = 1$ .

Αντιστρέφοντας τη διαδικασία έχουμε:

$1 = 1 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 2 \cdot (49 - 4 \cdot 11) = 9 \cdot 11 - 2 \cdot 49 = 9 \cdot (158 - 3 \cdot 49) - 2 \cdot 49 = 9 \cdot 158 + (-29) \cdot 49$ . Μια παράσταση λοιπόν του  $\text{MK}\Delta$  γίνεται με την βοήθεια των αριθμών 9 και -29. Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος δεν αποδεικνύει μόνο την ύπαρξη αριθμών  $\chi, \psi$  ώστε  $\alpha\chi + \beta\psi = \text{MK}\Delta(\alpha, \beta)$ , αλλά, κατά την προσφιλή μέθοδο του δημιουργού του, δίνει και την διαδικασία υπολογισμού (κατασκευής) των.

Ο αλγόριθμος των αναγωγμάτων του 158/49 είναι στον διπλανό πίνακα:

δεικτης	-2	-1	0	1	2	3
p	0	1	3	13	29	158
a			3	4	2	5
q	1	0	1	4	9	49

Η θεμελιώδης ιδιότητα των αναγωγμάτων δίνει και εδώ την ίδια παράσταση του  $\text{MK}\Delta$  :

$49 \cdot 29 - 9 \cdot 158 = (-1)^3 = -1$ , άρα  $9 \cdot 158 + (-29) \cdot 49 = 1$ . Τυχαίο; Μάλλον όχι.

Οι δύο ισότητες:  $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$  μπορούν να παρασταθούν με

τον πολλαπλασιασμό:  $\begin{bmatrix} p_{k-2} & p_{k-1} \\ q_{k-2} & q_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k p_{k-1} + p_{k-2} & p_{k-1} \\ a_k q_{k-1} + q_{k-2} & q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix}$ .

Για να προχωρήσουμε στους όρους  $p_{k+1}, q_{k+1}$ , του επόμενου αναγωγίματος θα πρέπει να εναλλάξουμε τις στήλες στον δεξιότερο πίνακα και να πολ/σουμε(από δεξιά) επί τον

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{k+1} & 1 \end{bmatrix}$ . Η εναλλαγή των στηλών στον  $\begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix}$  γίνεται με πολ/σμό από δεξιά επί τον

πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Τελικά πολ/ζουμε από δεξιά τον  $\begin{bmatrix} p_{k-2} & p_{k-1} \\ q_{k-2} & q_{k-1} \end{bmatrix}$  επί τον

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_k \end{bmatrix}$ , το αποτέλεσμα και πάλι από δεξιά επί τον

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{k+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{k+1} \end{bmatrix}$  και συνεχίζουμε έως ότου εξαντληθούν τα μερικά πηλικά.

Επειδή  $\begin{bmatrix} p_{-2} & p_{-1} \\ q_{-2} & q_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , αν έχουμε το συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ , για να

φτάσουμε στο τελευταίο αναγώγημα εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{bmatrix}$  (\*) αρχίζοντας από το γινόμενο  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix}$ , από

αριστερά προς τα δεξιά. Η τιμή της αντίστοιχης ορίζουσας κάθε πίνακα που προκύπτει από τους διαδοχικούς πολ/μούς είναι  $(-1)^k$  όπου  $k$  είναι ο δείκτης του μερικού πηλίκου που

βρίσκεται στην θέση  $2-2(2^n \text{ γραμμή}-2^n \text{ στήλη})$  του δεξιότερου πίνακα, γιατί ο  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , αλλά

και όλοι οι επόμενοι  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_k \end{bmatrix}$  έχουν ορίζουσα  $-1$ . Κάθε πίνακας έχει στήλες τους αριθμητές

και παρονομαστές των διαδοχικών αναγωγημάτων. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 29 \\ 4 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 29 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 158 \\ 9 & 49 \end{bmatrix}, \text{ δηλ. } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 158 \\ 9 & 49 \end{bmatrix}.$$

Αν στην (\*) αρχίσουμε τον πολ/σμό κινούμενοι αντίστροφα, από τον  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{bmatrix}$ , από δεξιά προς τα αριστερά, φροντίζοντας να μην αλλάξουμε τη σειρά

των πινάκων, βρίσκουμε, για το παραπάνω παράδειγμα, διαδοχικά:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$ ,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 9 & 49 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 9 & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 49 \\ 29 & 158 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 49 \\ 29 & 158 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 158 \\ 9 & 49 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι οι αριθμοί  $(1,2)$ ,  $(2,9)$ ,  $(9,29)$  των πρώτων στηλών κάθε πολ/σμού, είναι αυτοί που προκύπτουν και κατά την διαδικασία αντιστροφής του Ευκλείδειου αλγορίθμου (ας μην ξεχνάμε ότι το πρόσημο των ορίζουσών, των πινάκων που προκύπτουν, είναι εναλλάξ  $\pm 1$ ).

Είτε όμως εκτελέσουμε τον πολ/σμό  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{bmatrix}$  από αριστερά

προς τα δεξιά, είτε από δεξιά προς τα αριστερά (φυσικά χωρίς να αλλάξουμε τη σειρά των πινάκων), καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, αφού ο πολ/σμός πινάκων είναι προσεταιριστικός. Η αντιστροφή λοιπόν του ευκλείδειου αλγορίθμου για να εκφράσουμε τον ΜΚΔ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) σαν γραμμικό συνδυασμό των  $\alpha$ ,  $\beta$  μπορεί να γίνει με την βοήθεια του αλγορίθμου των αναγωγημάτων και ο αλγόριθμος των αναγωγημάτων δίνει τους ίδιους συντελεστές των  $\alpha$ ,  $\beta$  (καλό θα είναι να μην ξεχνάμε και την λεπτομέρεια του προσήμου).

Τα αναγωγήματα είναι κλάσματα ανάγωγα, αλλά αυτό δεν επηρεάζει του συντελεστές, π.χ.  $\text{ΜΚΔ}(267, 207) = 3$ ,  $\frac{267}{207} = [1, 3, 2, 4, 2]$ , αναγωγήματα  $\left\{ \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{40}{31}, \frac{89}{69} \right\}$  και  $69 \cdot 40 - 31 \cdot 89 = (-1)^4 = 1$ , άρα  $(-31) \cdot (3 \cdot 89) + 40 \cdot (3 \cdot 69) = 3$ , δηλ. οι συντελεστές είναι και πάλι  $-31, 40$ .

### 3.2. Η μοναδικότητα της ανάπτυξης

Ο ευκλείδειος αλγόριθμος μας παρέχει ένα ανάπτυγμα οποιουδήποτε ρητού σε (πεπερασμένο απλό) συνεχές κλάσμα. Αλλά και ένα πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα παριστάνει ρητό αριθμό, αφού αυτός είναι το τελευταίο αναγωγήμα και τα αναγωγήματα είναι ρητοί (πράξεις μεταξύ ακεραίων). Για την μοναδικότητα της ανάπτυξης, ισχύουν τα επόμενα δύο θεωρήματα.

#### 3.2.1. Θεώρημα:

Αν τα πεπερασμένα απλά συνεχή κλάσματα  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  και  $[b_0, b_1, b_2, \dots, b_k]$  είναι αναπτύγματα του ίδιου ρητού αριθμού  $r$  ( $a_0, b_0$  ακέραιοι και για  $i \geq 1, j \geq 1$  οι  $a_i, b_j$  φυσικοί) και  $a_n > 1$  και  $b_k > 1$ , τότε  $n = k$  και  $a_j = b_j$ , για κάθε  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

#### Απόδειξη:

Αν  $r$  είναι ακέραιος, τότε  $n=0$ , διαφορετικά,

$$a_0 < r = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} < a_0 + 1 \text{ και γίνεται ο } r \text{ ακέραιος, μεταξύ δύο}$$

διαδοχικών ακεραίων, που είναι αδύνατον ( $a_n > 1, b_k > 1$ , από την υπόθεση). Ομοίως,  $k=0$ .

$$\text{Άρα: } a_0 = r = b_0$$

Αν  $r$  δεν είναι ακέραιος, τότε  $n \geq 1, k \geq 1$  και

$$r = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]} = b_0 + \frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k]}, \text{ με}$$

$$\frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]} > 0, \quad \frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k]} > 0$$

Επειδή,  $a_n > 1$  θα έχουμε  $a_1 > 1$  ή  $n \geq 2$  και ομοίως  $b_1 > 1$  ή  $k \geq 2$ . Σε κάθε περίπτωση:

$$0 < \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]} < 1, \quad 0 < \frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k]} < 1$$

Έπεται ότι  $a_0 < r < a_0 + 1, b_0 < r < b_0 + 1$ , και επομένως  $a_0 = [r] = b_0$ .

$$\text{Τότε: } \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]} = \frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k]}, \quad \text{δηλ. } [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = [b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k].$$

Υποθέτουμε ότι  $n \geq k$ . Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα επανειλημμένα καταλήγουμε στις ισότητες  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$  και  $[a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] = [b_k] = b_k$ . Επειδή ο  $b_k$  είναι ακέραιος, από το πρώτο τμήμα της απόδειξης συμπεραίνουμε ότι:  $n = k, a_k = b_k$ .

**3.2.2. Θεώρημα:** Οποιοσδήποτε ρητός αριθμός,  $r$ , μπορεί να αναπτυχθεί σε πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα κατά δύο ακριβώς τρόπους:

- Αν είναι ακέραιος, τότε τα αναπτύγματα είναι  $[r]$  και  $[r-1, 1]$ .
- Αν δεν είναι ακέραιος και  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  είναι το συνεχές κλάσμα που προκύπτει από τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο, τότε  $a_n > 1$  και τα αναπτύγματα είναι  $r = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$ .

#### Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι ο  $r$  είναι ακέραιος. Είναι προφανές ότι  $1 = [1] = [0, 1]$ . Στο προηγούμενο θεώρημα αποδείξαμε ότι ένας ρητός έχει μοναδικό ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα, αν το τελευταίο μερικό πηλίκο είναι μεγαλύτερο του 1. Έπεται ότι αν  $r \neq 1$ , τότε ο ρητός  $r$  έχει μοναδικό ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα με τελευταίο μερικό πηλίκο ίσο με 1 (Αλλιώς, επειδή  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$ , αν  $a_n > 1$ , θα είχαμε δύο διαφορετικά αναπτύγματα με τελευταίο μερικό πηλίκο μεγαλύτερο του 1). Αν λοιπόν ο  $r$  είναι ακέραιος διαφορετικός από τον 1, τα αναπτύγματα είναι  $[r], [r-1, 1]$ .

Υποθέτουμε τώρα ότι ο  $r$  δεν είναι ακέραιος, έστω  $r = p/q$ ,  $p$  ακέραιος,  $q$  θετικός ακέραιος. Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος, δίνει διαδοχικά:  $p = a_1q + r_1$ , με  $0 < r_1 < q$  (ο  $r$  δεν είναι ακέραιος, άρα  $r_1 > 0$  και  $n \geq 1$ ),  $q = a_2r_1 + r_2$ , με  $0 < r_2 < r_1$ ,  $r_1 = a_3r_2 + r_3$ , με  $0 < r_3 < r_2$ , και  $r_{n-2} = a_n r_{n-1} + r_n$ , με  $0 < r_n < r_{n-1}$ ,  $r_{n-1} = a_{n+1} r_n$ . Από τον Αλγόριθμο δημιουργείται η κάθοδος  $r_1 > r_2 > \dots > r_{n-1} > r_n > 0$  (Υποθέτουμε ότι το μηδενικό υπόλοιπο είναι το  $r_{n+1}$ ).

Ο αριθμός  $a_{n+1}$  είναι θετικός ακέραιος. Δεν μπορεί να είναι ο 1, γιατί τότε  $r_n = r_{n-1}$ , αντίθετο με την προηγούμενη ανισότητα  $r_{n-1} > r_n$ . Άρα  $a_{n+1} \geq 2$  και ο  $p/q$  θα έχει το μοναδικό (με τελευταίο όρο μεγαλύτερο του 1) ανάπτυγμα  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}]$ . Αφού λοιπόν  $a_{n+1} \geq 2$ , θα έχουμε  $a_{n+1} = (a_{n+1}-1) + 1/1$  και ο  $a_{n+1}-1$  είναι θετικός ακέραιος, οπότε ο  $p/q$  θα έχει και το ανάπτυγμα  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}-1, 1]$ .

### 3.3. Η σχέση μερικών και πλήρων πηλίκων

**3.3.1. Θεώρημα :** Αν έχουμε το συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_N]$ , τότε κάθε μερικό πηλίκο είναι το ακέραιο μέρος του αντίστοιχου πλήρους πηλίκου, εκτός αν  $a_{N-1} = [z_{N-1}] - 1$ , όταν  $a_N = 1$ .

#### Απόδειξη:

Αν  $N=0$ , τότε  $z_0 = a_0 = [z_0]$ . Αν  $N > 0$ , τότε  $z_n = [a_n, a_{n+1}, \dots, a_N] = a_n + \frac{1}{z_{n+1}}$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ .

Για το πλήρες πηλίκο  $n+1$  τάξης θα έχουμε:  $z_{n+1} > 1$ , αφού  $z_{n+1} = [a_{n+1}, \dots, a_N]$  και τα  $a_k$  είναι θετικοί ακέραιοι, εκτός αν  $n = N-1$  και  $a_N = 1$ , οπότε  $z_{n+1} = 1 = z_N$ .

Άρα  $a_n < z_n < a_n + 1$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  και  $a_n = [z_n]$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ .

Αν  $n = N-1$  και  $a_N = 1$ , τότε  $z_{N-1} = [a_{N-1}, 1] = a_{N-1} + \frac{1}{1} = a_{N-1} + 1$ , οπότε  $a_{N-1} = [z_{N-1}] - 1$ .

Για το  $a_N$  σε κάθε περίπτωση θα έχουμε:  $a_N = z_N = [z_N]$ .

### 3.4. Η Διοφαντική εξίσωση $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$

Γνωρίζουμε ότι η διοφαντική εξίσωση  $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ , έχει ακέραιες λύσεις μόνον όταν ο  $\delta = \text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$  διαιρεί τον  $\gamma$ . Στην περίπτωση που υπάρχουν, αν βρούμε μία ακέραια (την ονομάζουμε μερική) λύση  $(\chi_0, \psi_0)$  τότε υπάρχουν άπειρες ακέραιες λύσεις, που δίνονται από τις  $\chi = \chi_0 + \frac{\beta}{\delta}\tau$ ,  $\psi = \psi_0 - \frac{\alpha}{\delta}\tau$ , για κάθε ακέραια τιμή του  $\tau$ . Αν λοιπόν η διοφαντική έχει ακέραιες λύσεις, αρκεί να προσδιορίσουμε μία.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συντελεστές  $\alpha, \beta$  των  $\chi, \psi$  είναι πρώτοι μεταξύ τους, αν δεν είναι διαιρούμε με τον  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$  και γίνονται. Επίσης, μπορούμε πάντοτε να πολ/ζουμε κατάλληλα ώστε να έχουμε θετικό τον  $\alpha$  ή τον  $\beta$ .

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε την  $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ , με  $\beta > 0$  και  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)=1$ . Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος μας δίνει τα μερικά πηλίκια του αναπτύγματος σε συνεχές κλάσμα του  $\alpha/\beta$ , έστω  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  και ο  $\alpha/\beta$  είναι ίσος με το τελευταίο αναγώγημα,  $p_n / q_n$ .

Επειδή  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)=1$ ,  $\text{ΜΚΔ}(p_n, q_n)=1$  και  $\beta > 0$ ,  $q_n > 0$ , θα έχουμε:  $\alpha = p_n$  και  $\beta = q_n$  (παράρτημα Α.11). Από την θεμελιώδη ιδιότητα των αναγωγημάτων:  $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ , παίρνουμε:  $\beta p_{n-1} - \alpha q_{n-1} = (-1)^n$ , ή καλύτερα  $\alpha q_{n-1} + \beta(-p_{n-1}) = (-1)^{n+1}$ .

- Αν  $n$  περιττός παίρνουμε την ακέραια λύση  $(\chi, \psi) = (\gamma q_{n-1}, -\gamma p_{n-1})$
- αν  $n$  άρτιος, την  $(\chi, \psi) = (-\gamma q_{n-1}, \gamma p_{n-1})$ .

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε την  $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ , με  $\alpha > 0$  και  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)=1$ . Τότε ο  $\beta/\alpha$  είναι ίσος με το τελευταίο αναγώγημα,  $p_n / q_n$ , και επειδή  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)=1$ ,  $\text{ΜΚΔ}(p_n, q_n)=1$  και  $\alpha > 0$ ,  $q_n > 0$ , θα έχουμε  $\alpha = q_n$  και  $\beta = p_n$ .

Από την θεμελιώδη ιδιότητα των αναγωγημάτων έχουμε  $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ , δηλ.  $\alpha p_{n-1} - \beta q_{n-1} = (-1)^n$ , ή καλύτερα  $\alpha p_{n-1} + \beta(-q_{n-1}) = (-1)^n$ , οπότε

- αν  $n$  περιττός έχουμε την ακέραια λύση  $(\chi, \psi) = (-\gamma p_{n-1}, \gamma q_{n-1})$ ,
- αν  $n$  άρτιος, την  $(\chi, \psi) = (\gamma p_{n-1}, -\gamma q_{n-1})$ .

Η εύρεση της μερικής λύσης στηρίζεται τελικά στην θεμελιώδη ιδιότητα των αναγωγημάτων(2.7):  $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ . Χρειαζόμαστε τα δύο τελευταία αναγώγημα του αναπτύγματος σε συνεχές κλάσμα του  $\alpha/\beta$  ή του  $\beta/\alpha$ .



Το τελευταίο αναγώγημα είναι το ρητό κλάσμα που επιλέξαμε να αναπτύξουμε σε συνεχές, είναι το  $p_n/q_n$ . Δεν χρειάζεται να απομνημονεύσουμε κάποιο «τύπο», είναι απαραίτητο όμως να γνωρίζουμε την θεμελιώδη ιδιότητα των αναγωγημάτων. Στη συνέχεια με έναν κατάλληλο πολ/σμο βρίσκουμε μια ακέραια λύση της  $ax + by = \gamma$ , τη μερική λύση  $(\chi_0, \psi_0)$ , και επομένως και τη γενική  $(\chi, \psi) = (\chi_0 + \tau\beta, \psi_0 - \tau\alpha)$ ,  $\tau$  ακέραιος,  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)=1$ .

Υποθέσαμε ότι  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)=1$  αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο, αρκεί φυσικά ο  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)$  να διαιρεί τον  $\gamma$  (για να έχει λύσεις η  $ax + by = \gamma$ ). Αν λοιπόν ο  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = \delta$ , τότε θα πρέπει να μην αγνοήσουμε ότι το τελευταίο αναγώγημα είναι κλάσμα ανάγωγο, ισοδύναμο με αυτό που αναπτύξαμε σε συνεχές.

Αν αναπτύξαμε το  $a/\beta$  και  $\delta$  είναι ο  $\text{MK}\Delta$  των  $\alpha, \beta$ , τότε  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{\alpha}{\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)}}{\frac{\beta}{\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)}}$  και θα έχουμε

$\delta q_n p_{n-1} - \delta p_n q_{n-1} = \delta(-1)^n$ , οπότε αν  $(\chi_0, \psi_0)$  η μερική, τότε η γενική λύση

$$\text{θα είναι } \chi = \chi_0 + \frac{\beta}{\delta} \tau, \psi = \psi_0 - \frac{\alpha}{\delta} \tau.$$

### Παραδείγματα:

**3.4.1.** Θα βρούμε μια μερική λύση της  $30x - 37y = 7$  (Η διοφαντική έχει άπειρες λύσεις αφού  $\text{MK}\Delta(30, 37)=1$ ).

Βρίσκουμε το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα του  $-37/30$ ,  $[-2, 1, 3, 3, 2]$ .

δείκτης		-2	-1	0	1	2	3	4
p		0	1	-2	-1	-5	-16	-37
a				-2	1	3	3	2
q		1	0	1	1	4	13	30

Από την θεμελιώδη ιδιότητα των αναγωγημάτων έχουμε:

$$(-16)30 - (-37)*13 = (-1)^4 = 1, \text{ άρα, πολ/ζοντας επί 7 παίρνουμε:}$$

$$30*(-7*16) - 37*(-7*13) = 7, \text{ δηλ. μερική λύση: } (-112, -91).$$

Αν είχαμε την  $60x - 74y = 14$ , τότε το ανάπτυγμα του  $-74/60$  είναι πάλι  $[-2, 1, 3, 3, 2]$ .

Από την θεμελιώδη ιδιότητα  $(-16)*30 - (-37)*13 = (-1)^4 = 1$  παίρνουμε

$$(-16)*(2*30) - (-37*2)*13 = 2(-1)^4 = 2 \text{ και συνεχίζουμε πολ/ζοντας επί 7 :}$$

$$60*(-7*16) - 74*(-7*13) = 14, \text{ οπότε βρίσκουμε την } (-112, -91).$$

### 3.4.2.

Θα βρούμε (αν υπάρχουν) τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της  $5\chi + 7\psi = 512$  (ακέραιες λύσεις υπάρχουν γιατί  $\text{ΜΚΔ}(5,7)=1$ ).

Το ανάπτυγμα του  $\frac{5}{7}$  σε συνεχές κλάσμα είναι :  $[0,1,2,2]$ .

δείκτης	-2	-1	0	1	2	3	
$p_i$	0	1	0	1	2	5	$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$
$a_i$			0	1	2	2	$a_i$
$q_i$	1	0	1	1	3	7	$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$
$c_i$			$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	αναγωγήματα

Από την θεμελιώδη ιδιότητα έχουμε:  $7 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = (-1)^3$ . Πολλζουμε επί  $-512$ :  $7 \cdot (-1024) + 5 \cdot 1536 = 512$  ή  $5 \cdot 1536 + 7 \cdot (-1024) = 512$ , οπότε έχουμε την μερική λύση  $(1536, -1024)$  και την γενική λύση  $(\chi, \psi) = (1536 + 7\tau, -1024 - 5\tau)$   $\tau$  ακέραιος.

Για τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχουμε: οι  $1536 + 7\tau \geq 0$  και  $-1024 - 5\tau \geq 0$ , συναληθεύουν για  $\tau = -205, -206, \dots, -219$ , δηλ είναι οι  $(101, 1), (94, 6), (87, 11), \dots$ , (τα  $\chi$  μειώνονται ανά 7 μονάδες, 7 είναι ο συντελεστής του  $\tau$  στα  $\chi$ , τα  $\psi$  αυξάνονται ανά 5 μονάδες, έχουμε 15 θετικές λύσεις)  $\dots, (10, 76), (3, 71)$ .

Δεν είναι απαραίτητο η διοφαντική να έχει θετικές λύσεις, π.χ. η  $91\chi + 221\psi = 1053$  με γενική λύση την  $(\chi, \psi) = (14 + 17\tau, -1 - 7\tau)$  δεν έχει θετικές λύσεις, αφού για να είναι ο  $\psi$  θετικός, θα πρέπει ο  $\tau$  να είναι αρνητικός, αλλά τότε γίνεται ο  $\chi$  αρνητικός. Αν υπάρχουν θετικές ακέραιες λύσεις, τότε δεν είναι απαραίτητο να είναι άπειρες, π.χ. η  $15\chi + 7\psi = 210$  έχει μόνο μια θετική λύση, την  $(7, 15)$ , στο παράδειγμα, επίσης, βρήκαμε ότι η  $5\chi + 7\psi = 512$  έχει 15.

### 3.4.3.

**Ναύτες, καρύδες και πίθηκοι** (Το πρόβλημα που ακολουθεί έχει αρκετά μεγάλη ηλικία, αλλά εμφανίζεται τακτικά σε διάφορες μορφές).

Πέντε ναύτες, έφτασαν σ' ένα νησί και όλοι μαζί πριν σκοτεινιάσει μάζεψαν μια ποσότητα καρύδες. Αποφάσισαν να αναβάλουν το μοίρασμά τους για το επόμενο πρωί. Ένας από τους ναύτες ξύπνησε κατά τη διάρκεια της νύχτας, μέτρησε τις καρύδες, έδωσε μια στον πίθηκο που είχαν μαζί τους και κράτησε για τον εαυτό του ακριβώς το  $\frac{1}{5}$  από τις υπόλοιπες. Έπειτα πήγε ξανά για ύπνο. Λίγο αργότερα, ένας ακόμη ναύτης ξύπνησε, έδωσε μια καρύδα στον πίθηκο, κράτησε για τον εαυτό του το  $\frac{1}{5}$  από τις υπόλοιπες και πήγε ξανά για ύπνο. Στη συνέχεια και με τη σειρά έκαναν το ίδιο και οι υπόλοιποι τρεις.

Το πρωί οι ναύτες μοίρασαν τις καρύδες σε 5 ίσα μερίδια, αλλά αυτή τη φορά ο πίθηκος δεν πήρε καμία. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός από καρύδες που μάζεψαν οι ναύτες πριν πέσουν για ύπνο;

**Λύση:** Έστω ότι μάζεψαν  $x$  καρύδες.

Ο πρώτος ναύτης όταν ξύπνησε τη νύχτα πήρε το  $\frac{1}{5}(x-1)$  και άφησε τα  $\frac{4}{5}(x-1)$ .

Ο δεύτερος πήρε  $\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}(x-1)-1\right) = \frac{4x-9}{25}$  και άφησε τα  $\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}(x-1)-1\right) = \frac{16x-36}{25}$

Ο τρίτος άφησε τα  $\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}(x-1)-1\right)-1\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{16x-36}{25}-1\right) = \frac{64x-244}{125}$

Ο τέταρτος  $\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}(x-1)-1\right)-1\right)-1\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{64x-244}{125}-1\right) = \frac{256x-1476}{625}$  και

Ο πέμπτος  $\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}(x-1)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{256x-1476}{625}-1\right) = \frac{1024x-8404}{3125}$

Το πρωί οι καρύδες μοιράστηκαν χωρίς να περισσέψει καμία για τον πίθηκο, άρα η διοφαντική εξίσωση που έχουμε να λύσουμε είναι η  $\frac{1024x-8404}{3125} = 5\psi$ , ( $\psi$  ο αριθμός από

καρύδες που πήρε κάθε ναύτης στην πρωινή διανομή) ή  $1024x - 15625\psi = 8404$ . (Έχουμε δηλ. την  $\alpha x + \beta \psi = \gamma$ , με  $\alpha = 1024$ ,  $\beta = -15625$ ,  $\gamma = 8404$ ). Επειδή  $1024 = 2^{10}$ ,  $15625 = 5^6$  συμπεραίνουμε ότι  $(1024, 15625) = 1$  και επομένως η διοφαντική έχει άπειρες (ακέραιες)

λύσεις. Σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο, αναπτύσσουμε το  $\frac{-15625}{1024}$  σε συνεχές κλάσμα

και από την θεμελιώδη ιδιότητα βρίσκουμε μια ακέραια λύση.

Εφαρμόζουμε τον ευκλείδειο αλγόριθμο στους  $-15625, 1024$ :

υπόλοιπα	759	265	229	36	13	10	3	1	0
-15625	1024	759	265	229	36	13	10	3	1
πηλίκια	-16	1	2	1	6	2	1	3	3

Οπότε

$$\frac{-15625}{1024} = [-16, 1, 2, 1, 6, 2, 1, 3, 3].$$

Ο αλγόριθμος των αναγωγμάτων στο  $[-16, 1, 2, 1, 6, 2, 1, 3, 3]$  δίνει:

δείκτης	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_i$	0	1	-16	-15	-46	-61	-412	-885	-1297	-4776	-15625
$a_i$			-16	1	2	1	6	2	1	3	3
$q_i$	1	0	1	1	3	4	27	58	85	313	1024
$c_i$			$\frac{-16}{1}$	$\frac{-15}{1}$	$\frac{-46}{3}$	$\frac{-61}{4}$	$\frac{-412}{27}$	$\frac{-885}{58}$	$\frac{-1297}{85}$	$\frac{-4776}{313}$	$\frac{-15625}{1024}$

Μια ακέραια λύση είναι η  $(\chi, \psi) = (\gamma p_{n-1}, -\gamma q_{n-1})$ , που στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται:  $(\chi_0, \psi_0) = (8404 * (-4776), -8404 * 313) = (-40137504, -2630452)$ .

Η γενική λύση είναι  $(\chi, \psi) = (\chi_0 + \tau\beta, \psi_0 - \tau\alpha) = (-40137504 - 15625*\tau, -2630452 - 1024*\tau)$ ,  $\tau$  ακέραιος. Θέλουμε θετικές λύσεις,  $\tau < -2568,800256$  και  $\tau < -2568,80078125\dots$

Για  $\tau = -2569$  παίρνουμε τη λύση:

$$(\chi, \psi) = (-40137504 - 15625*(-2569), -2630452 - 1024*(-2569)) = (3121, 204)$$

Άρα η μικρότερη θετική τιμή για καρύδες είναι 3121. Οι καρύδες που πήρε ο κάθε ναύτης στην πρωινή διανομή είναι 204. Για  $\tau = -2570$  παίρνουμε τη λύση  $(\chi, \psi) = (-40137504 - 15625*(-2570), -2630452 - 1024*(-2570)) = (18746, 1228)$  που είναι φυσικά «μεγαλύτερη» της προηγούμενης.

### 3.5. Η διαφορά μεταξύ του ρητού και των αναγωγμάτων του

Στον διπλανό πίνακα είναι ο αλγόριθμος των αναγωγμάτων για το  $[3,2,4,2]=69/20$ .

Για τα αναγωγήματα άρτιας τάξης έχουμε:  $\frac{3}{1} < \frac{31}{9}$ . Για

δείκτης	-2	-1	0	1	2	3	
$p_i$	0	1	3	7	31	69	$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$
$a_i$			3	2	4	2	$a_i$ , μερικά πηλίκια
$q_i$	1	0	1	2	9	20	$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$
$c_i$			$\frac{3}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{31}{9}$	$\frac{69}{20}$	αναγωγήματα

τα αναγωγήματα περιττής τάξης:  $\frac{7}{2} > \frac{69}{20}$ . Η διάταξη των αναγωγμάτων είναι  $\frac{3}{1} < \frac{31}{9} < \frac{69}{20} < \frac{7}{2}$ .

Οι διαφορές του ρητού  $69/20$  από τα αναγωγήματά του είναι  $\frac{69}{20} - 3 = \frac{9}{20}$ ,  $\frac{69}{20} - \frac{7}{2} = \frac{-1}{20}$ ,  $\frac{69}{20} - \frac{31}{9} = \frac{1}{180}$ ,  $\frac{69}{20} - \frac{69}{20} = 0$ . Για τις απόλυτες τιμές των διαφορών

ισχύει:  $\frac{9}{20} > \frac{1}{20} > \frac{1}{180} > 0$ . Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς του ρητού κλάσματος από τα αναγωγίματά του συνεχώς μειώνεται. Θα αποδείξουμε ότι το συμπέρασμα αυτό ισχύει γενικά.

Αν έχουμε το συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_N]$ , τότε ο ρητός που παριστάνει, δηλ το τελευταίο αναγώγημα, το  $\frac{p_N}{q_N}$ , είναι το μεγαλύτερο από τα άρτιας τάξης ή το μικρότερο από τα περιττής τάξης αναγωγίματα (βλ. και ενότητα 2.7).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το  $r = z_0 = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_N]$  και ας αγνοήσουμε προς το παρόν την περίπτωση  $z_{N-1} = a_{N-1} + 1$ , όταν  $a_N = 1$ .

Αν  $n = 0$ , τότε:  $r = [a_0, z_1] = \frac{z_1 p_0 + p_{-1}}{z_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{z_1 a_0 + 1}{z_1} = a_0 + \frac{1}{z_1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{z_1}$  (από το Θ.2.6.1. και τα εκεί «συμφωνημένα», δηλ.  $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1, p_{-1} = 1, q_{-1} = 0, p_0 = a_0, q_0 = 1$ ).

Οπότε  $r - \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{z_1}$  [1] και  $|q_0 r - p_0| = \frac{1}{z_1}$  [2].

Αν  $n = 1$  έχουμε:  $r = [a_0, a_1, z_2] = \frac{z_2 p_1 + p_0}{z_2 q_1 + q_0}$ . Για την διαφορά του  $r$  από το αναγώγημα

πρώτης τάξης, θα έχουμε:  $r = \frac{p_1}{q_1} + \left( \frac{z_2 p_1 + p_0}{z_2 q_1 + q_0} - \frac{p_1}{q_1} \right) = \frac{p_1}{q_1} + \frac{z_2 p_1 q_1 + p_0 q_1 - z_2 q_1 p_1 - q_0 p_1}{q_1 (z_2 q_1 + q_0)}$  και

από την θεμελιώδη ιδιότητα(2.7.):  $r - \frac{p_1}{q_1} = \frac{-1}{q_1 (z_2 q_1 + q_0)}$  [3] οπότε  $|q_1 r - p_1| = \frac{1}{z_2 q_1 + q_0}$  [4].

Με τον ίδιο τρόπο, για  $n \leq N-1$ , γενικεύοντας τις [1], [2], [3], [4], (βλ. και ενότητες 2.6., 2.7)

παίρνουμε:  $r = \frac{p_n}{q_n} + \left( \frac{z_{n+1} p_n + p_{n-1}}{z_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right) = \frac{p_n}{q_n} + \frac{z_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - z_{n+1} q_n p_n - q_{n-1} p_n}{q_n (z_{n+1} q_n + q_{n-1})} =$

$$= \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{q_n (z_{n+1} q_n + q_{n-1})} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{q_n (z_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

Τελικά καταλήγουμε στις:

$$3.5.1. \quad r - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})} \text{ και } |q_n r - p_n| = \frac{1}{z_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

Από το θεώρημα 3.3.1. έχουμε  $a_{n+1} < z_{n+1} < a_{n+1} + 1, 0 \leq n \leq N-2$ , οπότε

$$z_1 = z_1 q_0 + q_{-1} > a_1 = q_1, \quad z_1 = z_1 q_0 + q_{-1} < a_1 + 1 \leq a_2 a_1 + 1 = a_2 q_1 + 1 = q_2.$$

Γενικά:  $z_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$  και

$$z_{n+1}q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} = q_{n+1} + q_n \leq a_{n+2}q_{n+1} + q_n = q_{n+2}.$$

$$\text{Επομένως} \quad \frac{1}{q_{n+2}} < |q_n r - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}, \quad n \leq N-2 \text{ και } |p_{N-1} - q_{N-1}r| = \frac{1}{q_N}, \quad p_N - q_N r = 0.$$

Για την ακολουθία  $q_n$  γνωρίζουμε από την 2.6, ότι  $0 < 1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_k < q_{k+1} < \dots$ ,

άρα  $\frac{1}{q_{n+3}} < \frac{1}{q_{n+2}} < \frac{1}{q_{n+1}}$ . Από τις  $\frac{1}{q_{n+3}} < |p_{n+1} - q_{n+1}r| < \frac{1}{q_{n+2}} = \frac{1}{q_{n+2}} < |p_n - q_n r| < \frac{1}{q_{n+1}}$  παίρνουμε την:

$$3.5.2. \quad |p_{n+1} - q_{n+1}r| < |p_n - q_n r|$$

Άμεση συνέπεια αυτής και των ιδιοτήτων της  $(q_k)$  είναι η

$$3.5.3. \quad \left| r - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \left| r - \frac{p_n}{q_n} \right|, \text{ δηλ. οι απόλυτες τιμές των διαφορών } r - \frac{p_n}{q_n}, \quad q_n r - p_n$$

ελαττώνονται καθώς αυξάνει το  $n$  και τα αναγωγήματα πλησιάζουν συνεχώς τον στόχο τους, τον ρητό  $r$ .

3.5.4. Για την περίπτωση  $z_{N-1} = a_{N-1} + 1$ , όταν  $a_N = 1$ , θα έχουμε:

$$z_{N-1}q_{N-2} + q_{N-3} = (a_{N-1} + 1)q_{N-2} + q_{N-3} = q_{N-1} + q_{N-2} = 1 \cdot q_{N-1} + q_{N-2} = a_N q_{N-1} + q_{N-2} = q_N,$$

$$\text{οπότε } \frac{1}{q_N} = |p_{N-2} - q_{N-2}r| < \frac{1}{q_{N-1}}.$$

Όταν λοιπόν είμαστε σε αυτή την περίπτωση, τότε για τα δύο, πριν το τελευταίο, αναγωγήματα θα έχουμε  $\frac{1}{q_N} = |p_{N-2} - q_{N-2}r| = |p_{N-1} - q_{N-1}r|$ , γιατί η  $|p_{N-1} - q_{N-1}r| = \frac{1}{q_N}$  ισχύει

σε κάθε περίπτωση ( $z_N q_{N-1} + q_{N-2} = a_N q_{N-1} + q_{N-2} = q_N$ ).

Επίσης, από την  $z_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$ , για  $n > 0$  θα έχουμε και την

$$3.5.5. \quad \left| r - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

(αν  $n = N-1$  η πρώτη ανισότητα γίνεται ισότητα, αφού  $z_N q_{N-1} + q_{N-2} = a_N q_{N-1} + q_{N-2} = q_N$ )

### 3.6. Γεωμετρική ερμηνεία

Το ρητό κλάσμα  $r = a/\beta$  βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $\psi = \frac{\alpha}{\beta}\chi = r\chi$  που διέρχεται από την αρχή  $(0,0)$  με κλίση  $a/\beta$ . Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε ευθεία με κλίση  $p/q$  που διέρχεται από την αρχή, ένα δεύτερο σημείο που μας εξυπηρετεί είναι φυσικά το  $(q,p)$ .

Έχοντας στο μυαλό μας αυτή την λεπτομέρεια, μπορούμε να δούμε την ερμηνεία που έδωσε ο Felix Klein (1897) για τον τρόπο με τον οποίο τα αναγωγήματα προσεγγίζουν τον ρητό  $a/\beta$  (Olds, 1963 :77). Για απλοποίηση της παρουσίασης, ας υποθέσουμε ότι έχουμε το θετικό ρητό κλάσμα  $a/\beta$ .

Από την ενότητα 2.7 γνωρίζουμε ότι το ρητό κλάσμα είναι το μεγαλύτερο από τα αναγωγήματα άρτιας ή το μικρότερο από τα αναγωγήματα περιττής τάξης. Για τα υπόλοιπα αναγωγήματα ξέρουμε ότι κάθε αναγωγή άρτιας τάξης είναι μικρότερο από τον δοσμένο ρητό και κάθε αναγωγή περιττής τάξης μεγαλύτερο και από τις ιδιότητες των ακολουθιών  $p_k, q_k$  συμπεραίνουμε ότι τα αναγωγήματα μικρότερης τάξης έχουν και μικρότερους όρους. Αν αγνοήσουμε προσωρινά και το τελευταίο αναγωγή που είναι ο ρητός  $a/\beta$ , συμπεραίνουμε ότι :

Αν  $A(q_k, p_k)$  είναι το παραστατικό σημείο κάποιου από τα αναγωγήματα άρτιας τάξης, τότε η κλίση του διανύσματος  $OA$  θα είναι μικρότερη από την κλίση της ευθείας  $\psi = \frac{\alpha}{\beta}\chi$ , και το  $A$  θα βρίσκεται «κάτω» από την ευθεία.

Αν  $B(q_k, p_k)$  είναι το παραστατικό σημείο κάποιου από τα αναγωγήματα περιττής τάξης, τότε η κλίση του διανύσματος  $OB$  θα είναι μεγαλύτερη από  $a/\beta$  και άρα το  $B$  θα βρίσκεται «πάνω» από την  $\psi = \frac{\alpha}{\beta}\chi$ .

Επίσης, από τις ανισοτικές σχέσεις 3.5. έχουμε ότι:  $|p_{n+1} - q_{n+1}r| < |p_n - q_n r|$ , (εκτός αν  $z_{N-1} = a_{N-1} + 1$ , όταν  $a_N=1$ , οπότε  $\frac{1}{q_N} = |p_{N-2} - q_{N-2}r| = |p_{N-1} - q_{N-1}r|$ ).

Η ευθεία  $\chi = q_n$  τέμνει την  $\psi = \frac{\alpha}{\beta}\chi$  στο σημείο  $\left(q_n, q_n \frac{\alpha}{\beta}\right) = (q_n, q_n r)$ .

Οι απόλυτες τιμές,  $|p_n - q_n r|$ , εκφράζουν τα μήκη των κατακόρυφων τμημάτων που έχουν άκρα τα σημεία  $(q_n, p_n)$  και τα σημεία της ευθείας  $(q_n, q_n r)$ .

Η ανισότητα 3.5.2. αποδεικνύει ότι τα μήκη αυτών των τμημάτων ελαττώνονται συνεχώς έως ότου μηδενισθούν στο τελευταίο αναγωγήμα, δηλ. για τα σημεία  $(q_N, p_N)$  και  $(q_N, q_N r)$ , αφού τότε  $q_N r = q_N \frac{\alpha}{\beta} = q_N \frac{p_N}{q_N} = p_N$ . Επίσης, από την 2.6 και πάλι, επειδή και η ακολουθία  $p_n$  (υποθέσαμε  $\alpha/\beta$  θετικό, άρα  $a_0 \geq 0$ ) είναι αύξουσα, κάθε επόμενο από το τρέχον σημείο, θα βρίσκεται «πάνω» ή «δεξιά και πάνω» από το προηγούμενο.

**Παράδειγμα:**

Ας υποθέσουμε ότι αναπτύσσουμε το  $8/5$  σε συνεχές κλάσμα:

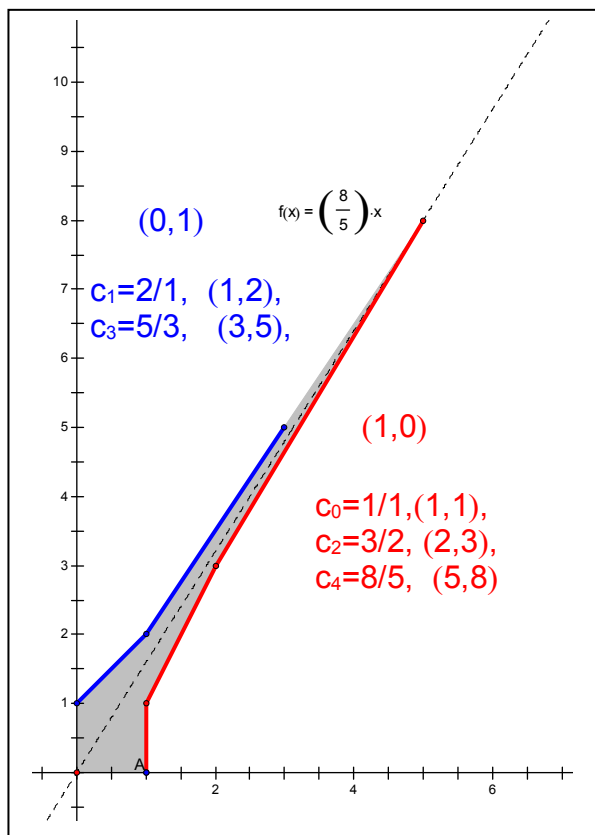
$$\frac{8}{5} = [1, 1, 1, 2] = [1, 1, 1, 1, 1].$$

	-2	-1	0	1	2	3	4	5
p	0	1	1	2	3	5	8	
a			1	1	1	1	1	
q	1	0	1	1	2	3	5	
c			1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	

Σχεδιάζουμε την ευθεία  $\psi = \frac{8}{5}x$ , τα σημεία που αντιστοιχούν στα αναγωγήματα

άρτιας τάξης, δηλ. τα  $(1,1), (2,3), (5,8)$ , τα σημεία που αντιστοιχούν στα αναγωγήματα περιττής τάξης, δηλ. τα  $(1,2), (3,5)$  και τα σημεία  $(1,0), (0,1)$ , εντάσσοντας το  $(1,0)$  στα σημεία που αντιστοιχούν στα άρτια (έχει δείκτη -2) και το  $(0,1)$  στα σημεία που αντιστοιχούν στα περιττά αναγωγήματα (δείκτης περιττός, -1).

Ενώνουμε τώρα με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία  $(1,0), (1,1), (2,3), (5,8)$ . Μπορούμε να σκεφτούμε ότι σχηματίζουν ένα «πολυγωνικό μονοπάτι» που συνεχώς πλησιάζει την ευθεία. Αυτό το «άρτιο» μονοπάτι φτάνει την ευθεία στο σημείο  $(5,8)$ . Ανάλογα τα σημεία  $(0,1), (1,2), (3,5)$  δημιουργούν ένα «περιττό» πολυγωνικό μονοπάτι.

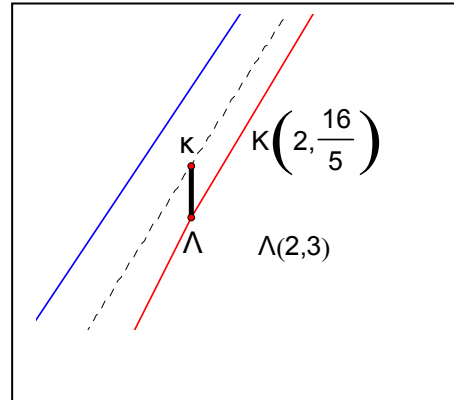




Ας δούμε τι εκφράζουν οι διαφορές  $\left|q_n \frac{8}{5} - p_n\right|$ .

Για το τελευταίο αναγωγήμα,  $\frac{8}{5}$ , θα έχουμε  $5 \cdot (8/5) - 8 = 0$ . Για τα άρτιας τάξης αναγωγήματα,  $c_0, c_2$ , επειδή  $\frac{p_n}{q_n} < \frac{8}{5}$ , το σημείο  $(q_n, p_n)$  βρίσκεται κάτω από το  $\left(q_n, q_n \frac{8}{5}\right)$ ,

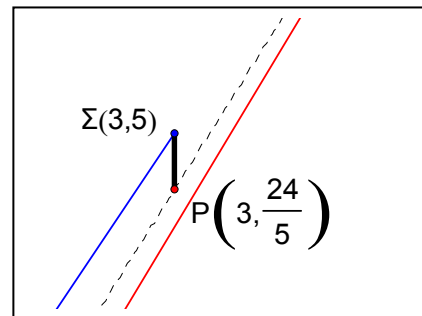
που είναι σημείο της  $\psi = \frac{8}{5}\chi$ . Η απόλυτη τιμή εκφράζει το μήκος του κατακόρυφου ευθ. τμήματος με άκρα τα σημεία  $(q_n, p_n)$  και  $\left(q_n, q_n \frac{8}{5}\right)$ .



Στο διπλανό σχήμα, το  $\Lambda$  είναι το σημείο με το οποίο παριστάνουμε το  $c_2$  και το ευθ.τμήμα  $K\Lambda$  έχει μήκος  $\left|q_2 \frac{8}{5} - p_2\right| = \left|\frac{16}{5} - 3\right| = \frac{1}{5}$ .

Ανάλογα, για τα περιττής τάξης αναγωγήματα  $c_1, c_3$ , επειδή  $\frac{p_n}{q_n} > \frac{8}{5}$ , το σημείο  $(q_n, p_n)$  βρίσκεται πάνω από το  $\left(q_n, q_n \frac{8}{5}\right)$ , που είναι

σημείο της  $\psi = \frac{8}{5}\chi$ . Η απόλυτη τιμή εκφράζει και πάλι το μήκος του κατακόρυφου ευθ. τμήματος με άκρα τα σημεία  $(q_n, p_n)$  και  $\left(q_n, q_n \frac{8}{5}\right)$ .



Στο διπλανό σχήμα, το  $\Sigma$  είναι το σημείο με το οποίο

παριστάνουμε το  $c_3$  και το ευθ.τμήμα  $\Sigma P$  έχει μήκος  $\left|q_3 \frac{8}{5} - p_3\right| = \left|\frac{24}{5} - 5\right| = \frac{1}{5}$

Παρατηρούμε ότι  $|p_{N-1} - q_{N-1}\Gamma| = |p_3 - q_3\Gamma| = \left|5 - 3 \cdot \frac{8}{5}\right| = \frac{1}{5} = \frac{1}{q_4} = \frac{1}{q_N}$  και επίσης ,

επειδή  $a_4 = 1, z_3 = [1, 1] = a_3 + 1 = 2$  (περίπτωση 3.5.4.) έχουμε:

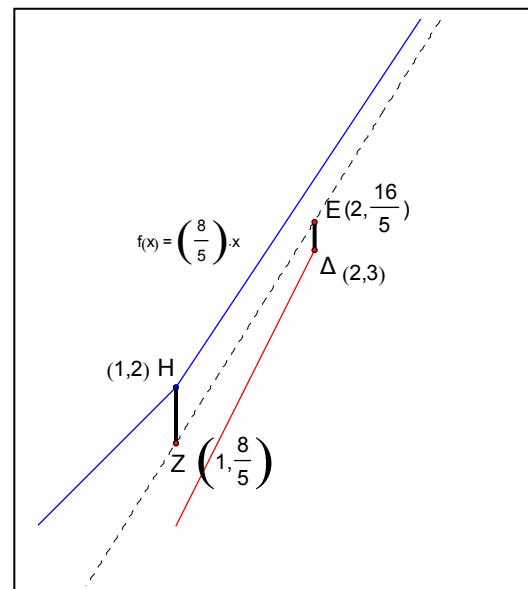
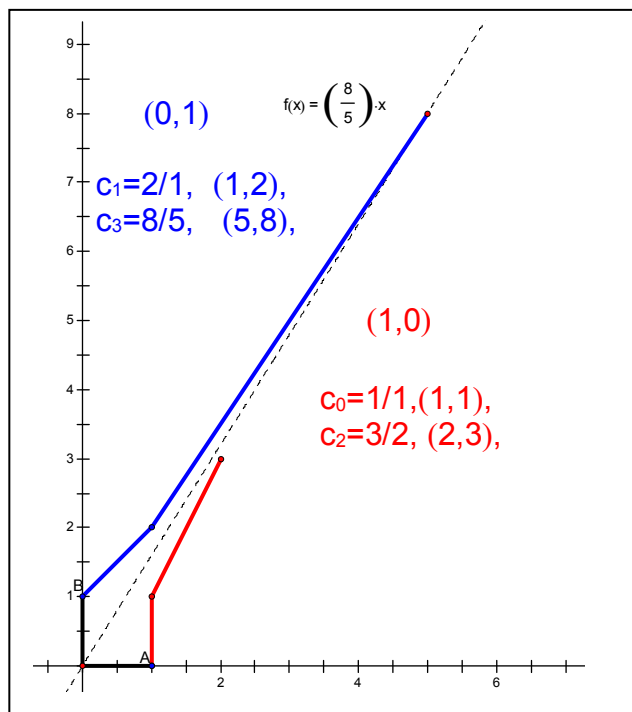
$$\frac{1}{q_N} = |p_{N-2} - q_{N-2}\Gamma| < \frac{1}{q_{N-1}}, \text{ δηλ. } \frac{1}{5} = \left|3 - 2 \cdot \frac{8}{5}\right| < \frac{1}{3} \text{ και } \frac{1}{5} = \left|5 - 3 \cdot \frac{8}{5}\right| = \left|3 - 2 \cdot \frac{8}{5}\right|.$$

Κ3: Ρητοί και πεπερασμένα απλά συνεχή κλάσματα

Αν για το  $\frac{8}{5}$  προτιμήσουμε το  $\frac{8}{5} = [1, 1, 1, 2]$ , για τα αναγωγήματα θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0	1	1	2	3	8	
a			1	1	1	2	
q	1	0	1	1	2	5	
c			1/1	2/1	3/2	8/5	

Στην γραφική παράσταση θα έχουμε ένα παραστατικό σημείο λιγότερο:



Εδώ φυσικά,  $a_N = a_3 = 2$  (δεν είμαστε στην περίπτωση 3.5.4.), και το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta E$  θα έχει μικρότερο μήκος από το  $ZH$ ,

$$|p_2 - q_2 r| < |p_1 - q_1 r|, r = 8/5.$$

### 3.7. Σύγκριση συνεχών κλασμάτων

**3.7.1.Θεώρημα:** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα συνεχή κλάσματα  $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_N]$  και  $b = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n, \dots, b_M]$  τα οποία έχουν ίσα τα πρώτα  $n$  μερικά πηλικά (τα μερικά πηλικά με δείκτες  $0, 1, 2, \dots, n-1$ ), αλλά όχι το  $n$ -τάξης, δηλαδή για  $i \leq n-1$ , έχουμε  $a_i = b_i$ , αλλά  $a_n \neq b_n$  ή δεν υπάρχει  $a_n$ .

- Αν  $n$  ,άρτιος, τότε  $a > b \Leftrightarrow a_n > b_n$
- Αν  $n$  περιττός, τότε  $a > b \Leftrightarrow a_n < b_n$
- Αν  $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$  και  $b = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n, \dots, b_M]$ , τότε  $a > b \Leftrightarrow n$  άρτιος

#### Απόδειξη:

Τα πλήρη πηλικά  $k$  τάξης των αναπτυγμάτων των  $a$  και  $b$ , είναι τα  $z_k^a = [a_k, a_{k+1}, \dots, a_N]$ ,  $z_k^b = [b_k, b_{k+1}, \dots, b_M]$  αντίστοιχα. Έχουμε διαδοχικά:

$$a > b \Leftrightarrow a_0 + \frac{1}{z_1^a} > b_0 + \frac{1}{z_1^b} \Leftrightarrow z_1^a < z_1^b, \quad z_1^a < z_1^b \Leftrightarrow a_1 + \frac{1}{z_2^a} < b_1 + \frac{1}{z_2^b} \Leftrightarrow z_2^a > z_2^b,$$

$$z_2^a > z_2^b \Leftrightarrow a_2 + \frac{1}{z_3^a} > b_2 + \frac{1}{z_3^b} \Leftrightarrow z_3^a < z_3^b, \quad z_3^a < z_3^b \Leftrightarrow a_3 + \frac{1}{z_4^a} < b_3 + \frac{1}{z_4^b} \Leftrightarrow z_4^a > z_4^b$$

(Έχουμε υποθέσει ότι για  $i \leq n-1$ , έχουμε  $a_i = b_i$ , αλλά  $a_n \neq b_n$ ).

Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία, οπότε,

- αν  $n$  άρτιος,  $a > b \Leftrightarrow z_n^a > z_n^b \Leftrightarrow a_n + \frac{1}{z_{n+1}^a} > b_n + \frac{1}{z_{n+1}^b}$ . Αλλά τα μερικά πηλικά είναι θετικοί ακέραιοι και  $\frac{1}{z_{n+1}^a} < 1$ ,  $\frac{1}{z_{n+1}^b} < 1$ . Άρα  $a_n + \frac{1}{z_{n+1}^a} > b_n + \frac{1}{z_{n+1}^b} \Leftrightarrow a_n > b_n$
- αν  $n$  περιττός,  $a > b \Leftrightarrow z_n^a < z_n^b \Leftrightarrow a_n + \frac{1}{z_{n+1}^a} < b_n + \frac{1}{z_{n+1}^b}$ .

$$\text{Άρα } a > b \Leftrightarrow z_n^a < z_n^b \Leftrightarrow a_n < b_n$$

Η ανισοτική σχέση μεταξύ των πλήρων πηλίκων  $n$ -τάξης, μεταφέρεται και στα μερικά πηλικά  $n$ -τάξης. Αν τα μερικά πηλικά  $(n-1)$ -τάξης είναι ίσα, τα πλήρη πηλικά  $(n-1)$ -τάξης ικανοποιούν την αντίστροφη ανισότητα από εκείνη των πλήρων πηλίκων  $n$ -τάξης.

Αν  $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$  και  $b = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n, \dots, b_M]$ , τότε

- Αν  $a_{n-1} > 1$ . Γράφουμε τον  $a$  στη μορφή  $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1} - 1, 1]$ . Οι  $a, b$  έχουν ίσα τα πρώτα  $n-1$  μερικά πηλίκα (αυτά με δείκτες  $0, 1, 2, \dots, n-2$ ) και  $a_{n-1} - 1 < a_{n-1}$ . Από την προηγούμενη απόδειξη συμπεραίνουμε ότι  $a_{n-1} - 1 < a_{n-1} \Leftrightarrow a > b$ , μόνον όταν  $n-1$  περιττός, δηλ. μόνον όταν  $n$  άρτιος.
- Αν  $a_{n-1} = 1$ . Γράφουμε τον  $a$  στη μορφή  $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, 1] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-2} + 1]$ . Οι  $a, b$  έχουν ίσα τα πρώτα  $n-2$  μερικά πηλίκα (αυτά με δείκτες  $0, 1, 2, \dots, n-3$ ) και  $a_{n-2} + 1 > a_{n-2}$ . Από την προηγούμενη απόδειξη και πάλι συμπεραίνουμε ότι  $a_{n-2} + 1 > a_{n-2} \Leftrightarrow a > b$ , μόνον όταν  $n-2$  άρτιος, δηλ. μόνον όταν  $n$  άρτιος.

**Παραδείγματα:**  $[1, 2, 3, 4, 5] < [1, 2, 5, 4, 3]$ ,  $[29, 2, 59, 20] > [29, 2, 59]$ ,  $[1, 2, 3, 4, 5] > [1, 2, 3, 5, 4]$ ,  
 $[1, 2, 3, 4, 5, 6] < [1, 2, 3, 4]$ ,  $[3, 1, 15, 7] > [3, 1, 1, 1, 1, 1]$ .

Πολλοί Μαθηματικοί «αισθάνονται μέσα τους» τις διαδικασίες και βάζουν αμέσως το κατάλληλο σύμβολο στα παραπάνω παραδείγματα. Αυτή η «αίσθηση» όμως δεν είναι προνόμιο των Μαθηματικών: Ο διάλογος που ακολουθεί πραγματοποιήθηκε τον Φεβρουάριο του 2009 στο Μουσείο Μπενάκη, (Τσιγκάκου, 2011:10, Φ: Φανή-Μαρία Τσιγκάκου, Γ: Γιάννης Μόραλης):

Φ. -Κύριε Μόραλη, έχετε σπουδάσει αρχιτεκτονική; Γ.-Όχι.

Φ.-Στο σχολείο ήσασταν καλός στα μαθηματικά; Γ.- Έτσι και έτσι.

Φ.-Σας ρωτώ γιατί, όπως καταλαβαίνετε, απορώ πως έχετε σχεδιάσει τόσο άψογες αρχιτεκτονικές συνθέσεις. Γ.-Απλούστατα, με την αίσθηση!

Θα επιχειρήσουμε και πάλι, όπως και στο τμήμα 2.6, την λεκτική περιγραφή του Θ.3.7.1:

Αν τα αναπτύγματα των δύο ρητών  $a, b$  έχουν ίσα κάποια αρχικά μερικά πηλίκα, και το πρώτο στο οποίο διαφέρουν έχει άρτιο δείκτη, τότε, ό,τι σχέση έχουν τα μερικά πηλίκα με αυτόν τον άρτιο δείκτη, την ίδια έχουν και οι ρητοί. Αν το πρώτο μερικό πηλίκο στο οποίο διαφέρουν έχει περιττό δείκτη, τότε οι ρητοί  $a, b$  ικανοποιούν την αντίστροφη ανισότητα από εκείνη των μερικών πηλίκων με τον συγκεκριμένο περιττό δείκτη (αρχίζουμε από το  $a_0$ ).

Αν όλα τα μερικά πηλίκα του  $a$  είναι ίσα με ένα αρχικό πλήθος μερικών πηλίκων του  $b$ , δηλ. ο  $b$  έχει στο ανάπτυγμά του τα  $n$  αρχικά μερικά πηλίκα του  $a$ , τα  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , τότε  $a > b$  μόνον όταν το πλήθος αυτό είναι άρτιο, δηλ. μόνον όταν το τελευταίο μερικό πηλίκο του  $a$  έχει περιττό δείκτη (αρχίζουμε από το  $a_0$ ).

### 3.8. Προσεγγίσεις

Έστω ότι έχουμε ένα θετικό ρητό κλάσμα με «μεγάλους» όρους. Βρίσκουμε το ανάπτυγμά του σε συνεχές κλάσμα. Τότε από την 3.5.5,

$$\left| \gamma - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2},$$

συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε το δοσμένο κλάσμα, το οποίο είναι το τελευταίο αναγώγημα, με κάποιο απλούστερο, κάποιο προηγούμενο αναγώγημα, αφού αυτό θα έχει μικρότερους όρους (2.6.2 : ιδιότητες των  $p_k, q_k$ ).

#### Παραδείγματα:

**3.8.1.** Δίνεται το κλάσμα  $\frac{2065}{902}$ . Θα βρούμε ένα κλάσμα με μικρότερο αριθμητή και

μικρότερο παρονομαστή που να προσεγγίζει το  $\frac{2065}{902}$  με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων (δ.ψ.). Θα αναζητήσουμε αυτό το κλάσμα στα αναγωγήματα του  $\frac{2065}{902}$ .

Θα πρέπει  $\left| \frac{2065}{902} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2} 10^{-3} = 0.0005$ . Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο βρίσκουμε:

$$\frac{2065}{902} = [2, 3, 2, 5, 5, 1, 3] \text{ και από τον αλγόριθμο των αναγωγημάτων: } \left\{ 2, \frac{7}{3}, \frac{16}{7}, \frac{87}{38}, \frac{451}{197}, \frac{538}{235}, \frac{2065}{902} \right\}.$$

$$\text{Αν } \gamma = \frac{2065}{902}, \text{ τότε } \left| \frac{p_n}{q_n} - \gamma \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n q_n} = \frac{1}{q_n^2}.$$

Υπολογίζουμε τα τετράγωνα των παρονομαστών των αναγωγημάτων, τα τετράγωνα των  $q_k$  μέχρι να βρούμε τετράγωνο μεγαλύτερο του  $\frac{1}{\varepsilon} = 2000$ , όπου  $\varepsilon = 0.0005$ :

$$38^2 = 1444, 197^2 = 38809, \text{ θα πρέπει να πάρουμε το αναγώγημα } 4^{\text{ης}} \text{ τάξης, το } 451/197 :$$

$$\left| \frac{2065}{902} - \frac{451}{197} \right| = 0.00001688... < 0.0005. \text{ Αν όμως ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος από το } \frac{1}{q_n^2}$$

$$\text{τότε θα είναι και από το } \frac{1}{q_n q_{n+1}}, \text{ αφού } \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}, \text{ αλλά ένας μεγαλύτερος από το } \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

$$\text{μπορεί να είναι και ανάμεσα στους } \frac{1}{q_n q_{n+1}}, \frac{1}{q_n^2}.$$

Για να εξετάσουμε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι  $1*3=3 < 2000$ ,  $3*7 = 21 < 2000$ ,  $7*38 = 266 < 2000$ ,  $38*197 = 7486 > 2000$  (δηλ. ενώ  $38*7=266 < 2000$  και  $38^2 = 1444 < 2000$ , το  $38*197=7486$  είναι μεγαλύτερο από το 2000,  $q_3 q_4 > 2000$ ), άρα

$$\left| \frac{2065}{902} - \frac{p_3}{q_3} \right| < \frac{1}{q_3 q_4} < 0.0005, \quad \left| \frac{2065}{902} - \frac{87}{38} \right| = 0.00011669... < 0.0005 \text{ και παίρνουμε το}$$

απλούστερο από το  $4^{\text{ης}}$  (σε σχέση με το μέγεθος αριθμητή και παρονομαστή), το αναγώγημα  $3^{\text{ης}}$  τάξης, το  $87/38$ , το οποίο όμως μας παρέχει τη ζητούμενη ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

**3.8.2.** Δίνεται το κλάσμα  $\frac{2893}{1323}$ . Θα βρούμε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα,

ένα κλάσμα με μικρότερο αριθμητή και μικρότερο παρονομαστή που να το προσεγγίζει το με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Έχουμε  $\frac{2893}{1323} = [2, 5, 2, 1, 4, 5, 1, 2]$  και αναγωγήματα:  $\{2, \frac{11}{5}, \frac{24}{11}, \frac{35}{16}, \frac{164}{75}, \frac{855}{391}, \frac{1019}{466}, \frac{2893}{1323}\}$ .

Υπολογίζουμε διαδοχικά τα τετράγωνα των παρονομαστών: 1, 5, 11, 16, 75... και βρίσκουμε: 1, 25, 121, 256, 5625. Επειδή  $5625 > 2000$ , πρέπει να πάρουμε το αναγώγημα  $4^{\text{ης}}$  τάξης.

Δοκιμάζουμε όμως και το γινόμενο:  $16 * 75 = 1200 < 2000$ . Άρα δεν μπορούμε να πάρουμε το αναγώγημα  $3^{\text{ης}}$  τάξης (για την ζητούμενη ακρίβεια). Τελικά ένα από τα ζητούμενα απλούστερα κλάσματα που προσεγγίζουν το  $2893/1323$  με ακρίβεια τριών δ.ψ. είναι το  $164/75$ .

**3.8.3. Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος** (320-240 π.Χ.) στο «περί μεγεθών και αποστημάτων ηλίου και σελήνης», πρόταση 13, ισχυρίζεται (Fowler, 2003: 53) ότι ο λόγος  $\frac{88}{45}$  δίνει μια

κάτω προσέγγιση του  $\frac{7921}{4050}$ .

Πράγματι:  $\frac{7921}{4050} = [1, 1, 21, 1, 1, 1, 2, 22]$  με αναγωγήματα:  $\{1, 2, \frac{43}{22}, \frac{45}{23}, \frac{88}{45}, \frac{133}{68}, \frac{354}{181}, \frac{7921}{4050}\}$ ,

οπότε το αναγώγημα τέταρτης τάξης  $88/45$  είναι μικρότερο από το  $7921/4050$ . Το  $7921/4050$  προσεγγίζεται έτσι με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων, αφού για το σφάλμα ισχύει:

$$\frac{7921}{4050} - \frac{88}{45} = \frac{1}{4050} = 0.000246914 \leq 0.0005 = 0.5 * 10^{-3}.$$

Στο ίδιο έργο, στην πρόταση 15, ισχυρίζεται ότι ο λόγος  $\frac{43}{37}$  είναι μια κάτω

προσέγγιση του  $\frac{71755875}{61735500}$ . Αν αναπτύξουμε το  $\frac{71755875}{61735500}$  σε συνεχές κλάσμα, βρίσκουμε

$[1, 6, 6, 4, 1, 2, 1, 2, 1, 6]$ . Τα αναγωγήματα είναι  $\{1, \frac{7}{6}, \frac{43}{37}, \frac{179}{154}, \frac{222}{191}, \frac{623}{536}, \frac{845}{727}, \frac{2313}{1990}, \frac{3158}{2717}, \frac{21261}{18292}\}$ ,

οπότε και πάλι το άρτιας τάξης αναγώγημα  $43/37$  είναι μικρότερο από το  $71755875/6173500$ .



## Κ4: Άρρητοι και άπειρα συνεχή κλάσματα

### 4.1. Σύμβολα και τεχνικές

Στις παραγράφους 2.3 και 2.4 είδαμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να προκύψουν άπειρα απλά συνεχή κλάσματα, με το νόημα των ορισμών 2.2. Ίσως έγινε φανερό, ότι για να δώσουμε αριθμητικό νόημα στην άπειρη διαδικασία είναι απαραίτητο να καταφύγουμε στην έννοια του ορίου.

Όπως π.χ. από το θεώρημα της γεωμετρικής σειράς (αν  $|r| < 1$ , τότε  $a + ar + ar^2 + \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( a \frac{1-r^k}{1-r} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \sum_1^{\infty} ar^{k-1} = a \sum_1^{\infty} r^{k-1} = \frac{a}{1-r}$ ) έχουμε βρει ότι το άπειρο

άθροισμα  $1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$  είναι ένα σύμβολο για τον αριθμό 2,  $\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2$ . Ο

αριθμός 2 είναι το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων,  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1$ ,

$s_3 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ , ...,  $s_k = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$  (με την συνηθισμένη τεχνική, έχουμε

διαδοχικά:  $\frac{1}{2}s_k = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ,  $s_k \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ,  $s_k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

και μπορούμε να κάνουμε τη διαφορά  $|s_k - 2|$ , για κατάλληλο  $k$ , «όσο θέλουμε μικρή»).

Ανάλογα βλέπουμε και το νόημα της ισότητας:  $0.999\dots = 1$ . Υποθέτουμε ότι έχουμε την ακολουθία  $a_1 = 0.9$ ,  $a_2 = 0.09$ ,  $a_3 = 0.009$ , .... Από αυτήν σχηματίζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων  $s_1 = 0.9$ ,  $s_2 = 0.9 + 0.09 = 0.99$ ,  $s_3 = 0.9 + 0.09 + 0.009 = 0.999$ , ...,

$s_k = \sum_1^k a_k$ . Το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων υπάρχει, το ονομάζουμε

άθροισμα της σειράς και γράφουμε  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \sum_1^{\infty} a_k$ . Εφόσον υπάρχει το όριο, η αναζήτηση

της τιμής του περιγράφεται με το τέχνασμα του πολ/μου επί 10: Θέτουμε  $x = 0.999\dots$ , οπότε έχουμε διαδοχικά:  $10x = 9.999\dots$ , αφαιρούμε,  $9x = 9$ ,  $x = 1$ . Για τον αριθμό 1 λοιπόν, εκτός

από τα ...συνηθισμένα σύμβολα:  $\frac{5}{5}$ ,  $\frac{-10}{-10}$ ,  $\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$ ,  $\eta\mu 90^\circ$ ,  $e^0$ ,  $\ln e$ ,  $\log 10$ ,  $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$ ,

$\frac{\pi}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\pi}$ ,  $i^4$ ,  $(\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-1)}$  (και άπειρα άλλα), αποκτήσαμε και το ασυνήθιστο

$0.\bar{9} = 0.999\dots$ .

Ο Ζήνων φυσικά δεν θα συμφωνούσε με τέτοιου είδους ισότητες, π.χ. με την ισότητα  $0.999\dots=1$ . Όσους όρους και να προσθέσουμε, το άθροισμα ολοένα μεγαλώνει, αλλά πάντα κάτι μένει να μας χωρίζει από τον 1. Όμως, προσθέτοντας όρους πλησιάζουμε τον 1 «όσο θέλουμε», δηλ. αποδεικνύουμε την ισότητα μέσω (των) ανισοτήτων  $|1-s_k|<\varepsilon$ , για κάθε θετικό  $\varepsilon$ , όπου  $s_k$  είναι κατάλληλο μερικό άθροισμα της σειράς (και αυτό είναι το θεμελιώδες γνώρισμα της ανάλυσης, η απόδειξη ισοτήτων μέσω ανισοτήτων). Το όριο των μερικών αθροισμάτων είναι 1, γράφουμε  $0.999\dots=1$ . Στην εποχή του Ζήωνα οι Έλληνες δεν αποδέχονταν τέτοιου είδους επιχειρήματα και δεν ήταν διατεθειμένοι να δεχτούν ότι ένα άθροισμα με άπειρο πλήθος προσθετέων μπορεί να έχει πεπερασμένη τιμή. Δεν είχαν αντίρρηση να προσθέσουν όσους όρους της προόδου χρειαζόταν για να επιτύχουν την επιθυμητή προσέγγιση, διέθεταν μια ισχυρή διαισθητική κατανόηση της έννοιας του ορίου (π.χ. οι εργασίες του Αρχιμήδη), αλλά αντιδρούσαν στην ιδέα να φτάσουν μέχρι το άπειρο και έτσι προέκυψαν πολλές μαθηματικές, φιλοσοφικές και μεταφυσικές συζητήσεις. Η απαίτηση για μεγάλη αυστηρότητα στα μαθηματικά και η καθαρή θεωρητική και φιλοσοφική τους σκέψη δημιούργησε ένα «άνω φράγμα» στην παραπέρα εξέλιξη των μαθηματικών. *«Χρειάστηκε να περάσουν αιώνες ώστε ο κόσμος να αποστασιοποιηθεί από την Ελληνική αυστηρότητα και στατικότητα και με τις εργασίες μιας σειράς διανοητών μαθηματικών (π.χ. Kepler, Cavallieri, Fermat, Descartes, Wallis, Barrow, Newton, Leibniz), οι οποίοι διέθεταν ισχυρή και αυθεντική διαίσθηση, ενόραση και φαντασία, να ξεπεράσει αυτό το άνω φράγμα και να δημιουργήσει τον απειροστικό λογισμό (Δρόσος, 2000: 247).*

Ας ακολουθήσουμε τεχνική παρόμοια με τον υπολογισμό του αθροίσματος της προηγούμενης σειράς σε ένα άπειρο συνεχές κλάσμα (παραβλέπουμε προς το παρόν το νόημα, «πειραματιζόμαστε» με τα σύμβολα και παραπλήσιες τεχνικές). Ας πάρουμε π.χ. το

$$\text{«απλούστερο»}: 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} \quad \text{Θέτουμε: } x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} \quad \text{και} \quad \text{έχουμε} \quad \text{διαδοχικά: } x = 1 + \frac{1}{x}, x^2 - x - 1 = 0,$$

ο  $x$  είναι μεγαλύτερος του 1, άρα  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , ο αριθμός φ. Μπορούμε να συνεχίσουμε τα

πειράματα, π.χ. ποιό είναι το νόημα του συμβόλου  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$ ; Θέτουμε και εδώ

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}, \text{ οπότε } x = \sqrt{1 + x}, x^2 - x - 1 = 0, \text{ ο } x \text{ είναι μεγαλύτερος του 1, άρα}$$



$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \text{τελικά:} \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi (=1.61803398\dots) . \text{Αν}$$

πειραματιστούμε με τα σύμβολα του διπλανού πλαισίου, έχουμε διαδοχικά:

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}, \quad x^2 + x = 1 + x + 1, \quad x^2 = 2$$

και επειδή  $x > 1$ , παίρνουμε:  $x = \sqrt{2}$ .

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

Οι αριθμομηχανές δίνουν  $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$ , άρα  $1.414213562\dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$  [Α].

Ίσως την παράσταση αριστερά του = είναι αδύνατον να τη θυμόμαστε, αλλά δεξιά του =, έχουμε πολύ απλούστερη μορφή. Αν δεχτούμε αυτή την ισότητα, τότε μπορούμε, για την τετραγωνική ρίζα του 2, να αντικαταστήσουμε το κάπως «φτωχό και ψυχρό» σύμβολο  $\sqrt{2}$  με το πλουσιότερο και οπωσδήποτε περιεκτικότερο  $[1, 2, 2, 2, \dots]$ , το σύμβολο για το άπειρο συνεχές κλάσμα [Α].

Με την ίδια «πειραματική» τεχνική, παρατηρούμε το πολυώροφο διπλανό σχήμα, λύνουμε την εξίσωση

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} \quad (x > 1) \quad \text{και} \quad \text{καταλήγουμε στο περιεκτικότερο σύμβολο}$$

$[1, 1, 2, 1, 2, \dots]$ , αντί του συνηθισμένου  $\sqrt{3}$ .

Μπορούμε φυσικά να αυξήσουμε την πολυπλοκότητα των συμβόλων, π.χ. για την τετραγωνική ρίζα του 3, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούμε και το πολύ πλούσιο, αλλά κάπως δύσχρηστο σύμβολο του διπλανού πλαισίου (αφού φυσικά πρώτα καθορίσουμε το νόημα αυτού του συμβόλου). Ίσως όμως είναι προτιμότερο από την ψυχρότητα του:

$$\left( \sqrt[4]{3\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}, \quad \text{που είναι σύμβολο «όλα ή τίποτα», ενώ στο πολυώροφο}$$

$$1 + \frac{3 + \frac{3 + \dots}{1 + \dots}}{3 + \frac{1 + \dots}{3 + \dots}} = 1 + \frac{3 + \frac{3 + \dots}{1 + \dots}}{1 + \frac{3 + \dots}{1 + \dots}}$$

σχήμα, είναι δυνατόν να αρχίσουμε υπολογισμούς:

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{3+\frac{3}{1}}{1+\frac{1}{1}} = 1.5, \quad \frac{3+\frac{3+\frac{3}{1}}{1+\frac{1}{1}}}{1+\frac{1+\frac{1}{1}}{1}} = 1.8, \quad \frac{3+\frac{3+\frac{3+\frac{3}{1}}{1+\frac{1}{1}}}{1+\frac{1+\frac{1}{1}}{1}}}{1+\frac{3+\frac{3+\frac{3}{1}}{1+\frac{1}{1}}}{1+\frac{1+\frac{1}{1}}{1}}} = 1.7143, \text{ κλπ}$$

Με τα τεχνάσματα οδηγηθήκαμε σε κάποια αποτελέσματα, αλλά είναι γνωστό ότι καλό θα είναι να ελέγχουμε τον αυθορμητισμό μας, π.χ.: αν εφαρμόσουμε παραπλήσιο τέχνασμα για να υπολογίσουμε το άθροισμα  $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ , βρίσκουμε  $2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ ,  $2S = S - 1$ ,  $S = -1!!$ , κάτι δεν πάει καλά. Μπορούμε να κατασκευάσουμε και άλλα παράδοξα αποτελέσματα (αν χρησιμοποιήσουμε αποκλίνουσες σειρές), π.χ. αν  $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , τότε  $S = (1-1) + (1-1) + \dots$ ,  $S = 1 - (1-1+1-1+\dots) = 1 - S$ ,  $S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots$ , δηλ.  $S = 0$  ή  $S = 1/2$  ή  $S = 1$ , τελικά, υπάρχει κάποια τιμή για το  $S$  και, αν υπάρχει, τότε ποιά είναι;

Έστω τώρα  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ , όπου  $x$  τυχαίος πραγματικός. Αλλάζουμε μεταβλητή,  $n = m+1$ ,  
 $z = \lim_{m+1 \rightarrow \infty} x^{m+1} = \lim_{m+1 \rightarrow \infty} x \cdot x^m = x \lim_{m+1 \rightarrow \infty} x^m$ . Αν όμως  $m+1 \rightarrow \infty$ , τότε και  $m \rightarrow \infty$ , οπότε  
 $\lim_{m+1 \rightarrow \infty} x^m = \lim_{m \rightarrow \infty} x^m = z$  και τελικά  $z = x \cdot z$ . Αν απλοποιήσουμε αμέσως, συμπεραίνουμε ότι  $x=1$ , αλλά και αν δεν βιαστούμε και λάβουμε υπ' όψιν την τυραννία του μηδενός, τότε  $x=1$  ή  $z = 0$ . Φαίνεται ότι αποδείξαμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$  για όλα τα  $x \neq 1$ , αλλά τι γίνεται αν πάρουμε π.χ.  $x=2$ ; Βρίσκουμε  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = 0!$

Είναι πλέον φανερό ότι θα πρέπει να οριοθετήσουμε τον ενθουσιασμό μας, να κρατήσουμε τα σωστά και να βρούμε την αιτία των παράδοξων αποτελεσμάτων, να βεβαιωθούμε πρώτα για την ύπαρξη και μετά να αναζητήσουμε τεχνικές για τον προσδιορισμό των αριθμών που παριστάνουν τα σύμβολα. Αναμφίβολα, αυτή η πειραματική μέθοδος προσέγγισης οδηγεί πολλές φορές σε λανθασμένα συμπεράσματα, αλλά τα λάθη και ο έλεγχός τους είναι μέρος της διαδικασίας της μάθησης (βλ. και K9). Όπως έγραψε και ο Morris Kline στο περίφημο άρθρο του 'Λογική εναντίον Παιδαγωγικής', «αν ο φόβος του λάθους ήταν εμπόδιο, τότε το παιδί δεν θα μάθαινε ποτέ να περπατάει» (Kline, 1981).

Ο Daniel Dennett καθηγητής φιλοσοφίας και διευθυντής του Κέντρου Γνωσιακών Μελετών στο Πανεπιστήμιο Tufts της Μασαχουσέτης, υπενθυμίζει την τεχνική της διαίρεσης: βρισκόμαστε αντιμέτωποι με δύο αστάθμητα μεγάλα νούμερα και πρέπει να ξεκινήσουμε. Ο διαιρέτης στο διαιρετέο χωράει έξι, επτά ή οκτώ φορές; Αν ο επιλεγμένος αριθμός είναι μικρός, τον μεγαλώνεις, αν είναι μεγάλος, τον μικραίνεις. Ακόμα και αν η αρχική επιλογή είναι τελείως «παράλογη», η διαδικασία λειτουργεί, απλά παίρνει λίγο περισσότερο χρόνο. Και καταλήγει: *«Η βιολογική εξέλιξη προχωρά μέσα από μια τεράστια, αδυσώπητη διεργασία δοκιμής και λάθους-έτσι κι αλλιώς χωρίς λάθη οι δοκιμές δεν θα επιτελούσαν τίποτε... Έτσι, οποιαδήποτε κι αν είναι η ερώτηση, αν δεν γνωρίζετε την απάντηση, ο μόνος τρόπος να την ανακαλύψετε είναι να κάνετε ένα άφοβο άλμα στο κενό και να ενημερωθείτε από το αποτέλεσμα. Φυσικά, μπορείτε να καθοδηγηθείτε από όσα ήδη γνωρίζετε και να μην ψάχνετε εντελώς στα τυφλά»* (Dennett, 1999).

Το ζήτημα δεν είναι να αποφύγουμε τα λάθη αλλά να τα συναντήσουμε, να δημιουργήσουμε λάθη και να τα υπερπηδήσουμε (Papert, 1991).

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  είναι μια (άπειρη) ακολουθία ακεραίων, όλων θετικών, εκτός πιθανόν του πρώτου όρου, του  $a_0$ .

Θεωρούμε και τους αριθμούς  $c_0=[a_0]$ ,  $c_1=[a_0, a_1]$ ,  $c_2=[a_0, a_1, a_2]$ ,  $c_3=[a_0, a_1, a_2, a_3], \dots$ ,  $c_n=[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ , δηλαδή τα αναγωγήματα του συνεχούς κλάσματος  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Με τις προϋποθέσεις που έχουν τεθεί στο τμήμα 2.2, οι αριθμοί αυτοί είναι ρητοί.

#### 4.2. Η σύγκλιση της ακολουθίας των αναγωγημάτων

**Θεώρημα 4.2.1.** Η ακολουθία των αναγωγημάτων  $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$  ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ , είναι συγκλίνουσα. Το όριο αυτής της ακολουθίας βρίσκεται πάντα μεταξύ δυο οποιονδήποτε αναγωγημάτων και δεν είναι ίσο με κάποιο από αυτά.

##### Απόδειξη:

Στην παράγραφο 2.7 (συνέπεια 5) αποδείξαμε ότι η ακολουθία των άρτιων αναγωγημάτων είναι γνήσια αύξουσα, η ακολουθία των περιττών αναγωγημάτων είναι γνήσια φθίνουσα και ότι κάθε περιττό αναγωγήμα είναι μεγαλύτερο από κάθε άρτιο αναγωγήμα. Επίσης, ότι για  $n \geq 2$ , κάθε αναγωγήμα  $c_n = \frac{p_n}{q_n}$  περιέχεται μεταξύ των δύο προηγούμενων του:

προηγούμενων του:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \dots < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Επομένως, η ακολουθία των άρτιων αναγωγημάτων είναι γνήσια αύξουσα και άνω φραγμένη, π.χ. από το  $c_1$ . Άρα έχει πεπερασμένο supremum και συγκλίνει σ' αυτό, έστω  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_{2n} - x) = 0$ . Επειδή η  $(c_{2n})$  είναι γνήσια αύξουσα, το σύνολο  $\{c_{2n} : n \geq 0\}$  δεν έχει μέγιστο, άρα  $c_{2n} < x$  [1]

Η ακολουθία των περιττών αναγωγημάτων είναι γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη, π.χ. από το  $c_0$ . Επομένως έχει πεπερασμένο infimum και συγκλίνει σε αυτό, έστω  $y$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_{2n-1} - y) = 0$ . Επειδή η  $(c_{2n+1})$  είναι γνήσια φθίνουσα, το σύνολο  $\{c_{2n+1} : n \geq 0\}$  δεν έχει ελάχιστο, άρα  $c_{2n+1} > y$  [2].

Αν τώρα τα όρια των ακολουθιών άρτιων και περιττών αναγωγημάτων είναι διαφορετικά, μάλλον κάτι δεν πάει καλά με την προσπάθεια απόδοσης νοήματος αριθμού στο σύμβολο  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ .

Θα αποδείξουμε όμως ότι  $x=y$ .

Έχουμε :  $x - y = (x - c_{2n}) + (c_{2n} - c_{2n+1}) + (c_{2n+1} - y)$ . Επειδή  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$  (2.6.2) και

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{(-1)^{2n+2}}{q_{2n}q_{2n+1}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} \quad (2.7.2), \text{ θα είναι και } \lim_{n \rightarrow \infty} (c_{2n} - c_{2n+1}) = 0.$$

Επομένως, υπάρχει το όριο του αθροίσματος  $(x - c_{2n}) + (c_{2n} - c_{2n-1}) + (c_{2n-1} - y)$  και είναι 0, άρα  $x=y$ . Από τις [1] και [2], παίρνουμε  $c_{2n} < x = y < c_{2n+1}$ .

Το όριο λοιπόν της  $(c_n)$  είναι αριθμός μεγαλύτερος από όλα τα άρτια και μικρότερος από όλα τα περιττά αναγωγήματα. Από την μονοτονία των ακολουθιών των άρτιων και περιττών αναγωγημάτων, συμπεραίνουμε επίσης ότι, κάθε επόμενο άρτιο αναγωγήμα είναι πλησιέστερα στο όριο από το προηγούμενο άρτιο και κάθε επόμενο περιττό αναγωγήμα είναι πλησιέστερα στο όριο από το προηγούμενο περιττό.

#### 4.2.2. Παρατηρήσεις:

1.Θα λέμε ότι η ακολουθία  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , σύμβολο  $(a_n)$ , είναι **σύνθεση** των ακολουθιών  $(\chi_n)$ ,  $(\psi_n)$ , τότε και μόνον όταν κάθε όρος της  $(a_n)$  είναι όρος μιας τουλάχιστον των  $(\chi_n)$ ,  $(\psi_n)$ , και οι  $(\chi_n)$ ,  $(\psi_n)$  είναι υπακολουθίες της  $(a_n)$ . Ισχύει το ακόλουθο

**Θεώρημα:** Αν οι ακολουθίες  $(\chi_n)$ ,  $(\psi_n)$  συγκλίνουν στο ίδιο όριο, τότε και η σύνθεση των  $(\chi_n)$ ,  $(\psi_n)$ , συγκλίνει στο κοινό όριο των  $(\chi_n)$ ,  $(\psi_n)$ .

**Απόδειξη:**

Αν  $\chi_n \rightarrow \alpha, \psi_n \rightarrow \alpha$ , τότε  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists v_1 \in \mathbb{N})(\forall n > v_1) \Rightarrow |\chi_n - \alpha| < \varepsilon$  και

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists v_2 \in \mathbb{N})(\forall n > v_2) \Rightarrow |\psi_n - \alpha| < \varepsilon$

Έστω ότι οι τάξεις των  $\chi_{v_1}, \psi_{v_2}$  στην ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι κ,λ.Θέτουμε  $v_0 = \max\{κ, λ\}$ . Τότε

$(\forall n > v_0) \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ , άρα  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists v_0 \in \mathbb{N})(\forall n > v_0) \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ , δηλ.  $\alpha_n \rightarrow \alpha$

Για την απόδειξη της σύγκλισης με την μέθοδο αυτή, συνήθως παίρνουμε τις υπακολουθίες των περιττών και αρτίων δεικτών (θεώρημα «φερμουάρ» - ισχύει και για μη πεπερασμένο όριο). Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η ακολουθία των αναγωγημάτων  $(c_n)$  είναι «σύνθεση» των υπακολουθιών των άρτιων  $(c_{2n})$  και περιττών  $(c_{2n-1})$  αναγωγημάτων και επειδή αυτές συγκλίνουν στο ίδιο όριο, σε αυτό το όριο θα συγκλίνει και η  $(c_n)$ .

2. Αν συμβολίσουμε με  $(a_n)$  την γνήσια αύξουσα ακολουθία των άρτιων και με  $(b_n)$  την γνήσια φθίνουσα ακολουθία των περιττών αναγωγημάτων, τότε δημιουργείται η ακολουθία των μη κενών κλειστών διαστημάτων  $D_n = [a_n, b_n]$ ,  $n \geq 0$ , με  $D_n \supset D_{n+1}$ . Θα έχουμε:  $[x, y] = \left[ \sup_n a_n, \inf_n b_n \right] \subset [a_n, b_n]$  για κάθε  $n$  και  $[x, y] = \bigcap_n [a_n, b_n]$ . Επειδή  $\lim_n (b_n - a_n) = 0$ , το σύνολο  $\bigcap_n [a_n, b_n]$  αποτελείται από ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό (αρχή του κιβωτισμού).

**4.2.3.** Τα αναγωγήματα (ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος) είναι ρητοί, το όριο δεν είναι κάποιος από αυτούς τους ρητούς, αφού βρίσκεται πάντα μεταξύ οποιουδήποτε αναγωγήματος άρτιας και οποιουδήποτε περιττής τάξης, αλλά πιθανόν να είναι κάποιος από τους άπειρους ρητούς που δεν είναι αναγωγήματα του  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ . Π.χ. η ακολουθία των

μερικών αθροισμάτων  $s_1 = 1, s_2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1, \dots, s_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$  της σειράς

$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$  είναι γνήσια αύξουσα και συγκλίνει στον ρητό 2, που δεν είναι

ίσος με κάποιο από τα μερικά αθροίσματα.

### 4.3. Η μοναδική τιμή ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος

**4.3.1.Ορισμός:** Ας υποθέσουμε ότι  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  είναι μια (άπειρη) ακολουθία ακεραίων, όλων θετικών, εκτός πιθανόν του πρώτου όρου, του  $a_0$ . Τιμή του άπειρου (απλού) συνεχούς κλάσματος  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ , ονομάζουμε το όριο της ακολουθίας των αναγωγημάτων του. Θα γράφουμε :  $[a_0, a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  και θα λέμε ότι το  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  συγκλίνει στην τιμή του.

Ο ρητός  $[a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$  είναι το n-τάξης αναγωγή του  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ .

### 4.3.2.Θεώρημα: Η τιμή ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος είναι άρρητος.

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι είναι ρητός, έστω ο  $w = a/b$ , με  $a, b$  ακεραίους και  $b > 0$ .

Αφού ο  $w$  βρίσκεται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών αναγωγημάτων και δεν είναι ίσος

με κάποιο από αυτά, θα έχουμε:  $0 < \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{wq_n - p_n}{q_n} \right| < \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ ,

Αν  $w = \frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ , τότε, πολλαπλασιάζοντας επί τον θετικό  $bq_n$  την προηγούμενη

ανισότητα, θα έχουμε:  $0 < |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_{n+1}}$ , για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ . Αλλά η ακολουθία

$q_n$  είναι αύξουσα(2.6.2), μπορούμε επομένως να βρούμε  $n$ , ώστε  $b < q_{n+1}$ . Υπάρχει λοιπόν

ακέραιος, ο  $|aq_n - bp_n|$  μεταξύ 0 και 1. Άτοπον. Για να άρουμε το άτοπο θα πρέπει να

άρουμε την υπόθεση ότι ο  $w$  είναι ρητός. Θα αποδείξουμε παρακάτω και το αντίστροφο

αυτού του θεωρήματος, δηλ. ότι κάθε άρρητος αναπτύσσεται σε ένα άπειρο συνεχές κλάσμα.

### 4.3.3.Θεώρημα:

Αν  $x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ , τότε  $a_0 = [x]$  και  $x = [a_0, a_1, \dots] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots]}$ .

### Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι  $x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  και ότι  $y = [a_1, a_2, a_3, \dots]$  ( $y \neq 0$ , αφού είναι

άρρητος). Τότε  $c_0 = a_0 < x < a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1] = c_1 \leq a_0 + 1$ , αφού  $a_1 \geq 1$  και το όριο βρίσκεται

πάντα μεταξύ δυο διαδοχικών αναγωγημάτων. Έχουμε λοιπόν τον άρρητο  $x$  μεταξύ των

διαδοχικών ακεραίων  $a_0$  και  $a_0 + 1$ , επομένως  $a_0 = [x]$ .

Αν  $n \geq 1$ , τότε  $c_n = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}$ . Τα όρια των αναγωγημάτων των

$[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  και  $[a_1, a_2, a_3, \dots]$  υπάρχουν και από το Θ.4.3.2. είναι άρρητοι αριθμοί.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:  $[a_0, a_1, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]} \right)$ ,

οπότε:  $[a_0, a_1, \dots] = a_0 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} [a_1, \dots, a_n]} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots]}$ .

**4.3.4. Παρατήρηση:** αν  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots] = x$ , τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το συνεχές κλάσμα που συγκλίνει στον  $\frac{1}{x}$  και αντίστροφα (όπως και στους ρητούς, παρατήρηση 3.1.4):

i. Αν  $x > 1$  και  $x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ , τότε  $\frac{1}{x} = [0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$

ii. Αν  $0 < x < 1$  και  $x = [0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ , τότε  $\frac{1}{x} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$

**Απόδειξη:** i.  $[0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots] = 0 + \frac{1}{[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]} = \frac{1}{x}$

ii.  $\frac{1}{x} = \frac{1}{[0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]} = \frac{1}{0 + \frac{1}{[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]}} = \frac{1}{\frac{1}{[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$

**4.3.5. Θεώρημα:**

Αν δύο άπειρα (απλά) συνεχή κλάσματα,  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ ,  $[b_0, b_1, b_2, b_3, \dots]$ , συγκλίνουν στο ίδιο όριο τότε  $a_k = b_k$ , για κάθε  $k \geq 0$ .

**Απόδειξη:**

Ας υποθέσουμε ότι συγκλίνουν στον άρρητο  $x$ . Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, θα έχουμε  $a_0 = [x] = b_0$  και  $[a_0, a_1, \dots] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots]} = b_0 + \frac{1}{[b_1, b_2, \dots]} = [b_0, b_1, b_2, \dots]$

Άρα  $[a_1, a_2, \dots] = [b_1, b_2, \dots]$  και με το ίδιο επιχείρημα βρίσκουμε  $a_1 = b_1$ . Επαγωγικά καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα.

#### 4.4. Το άπειρο συνεχές κλάσμα ενός αρρήτου

##### 4.4.1. Ο αλγόριθμος της ανάπτυξης ενός αρρήτου σε άπειρο απλό συνεχές κλάσμα.

Στο κεφάλαιο 3 είδαμε ότι το πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα παριστάνει έναν ρητό και αντίστροφα, κάθε ρητός αναπτύσσεται σε πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα. Στην παράγραφο 2.3, εφαρμόζοντας μια διαδικασία ανάλογη του Ευκλείδειου αλγορίθμου, αλλά «από άλλη σκοπιά», οδηγηθήκαμε στο ότι θα θέλαμε για το σύμβολο  $[2, 4, 4, 4, \dots]$  να ισχύει  $\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \dots]$ . Γενικεύοντας αυτή την ιδέα θα παρουσιάσουμε την μέθοδο με την οποία ένας δοσμένος άρρητος αναπτύσσεται σε (άπειρο - απλό) συνεχές κλάσμα.

Έστω λοιπόν ο άρρητος  $\xi$ . Θέτουμε  $\xi = z_0$ . Ορίζουμε  $a_0 = [z_0]$ . Τότε  $0 < z_0 - a_0 < 1$ , αφού  $z_0$  άρρητος και  $\xi = z_0 = a_0 + z_0 - a_0$ . Ο  $a_0$  είναι ακέραιος, θετικός, αρνητικός, ή 0.

Θέτουμε  $z_1 = \frac{1}{z_0 - a_0}$ . Τότε ο  $z_1$  είναι άρρητος,  $z_1 > 1$  και

$$z_0 = a_0 + z_0 - a_0 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{z_0 - a_0}} = a_0 + \frac{1}{z_1}, \text{ δηλ. } z_0 = [a_0, z_1].$$

Θέτουμε  $a_1 = [z_1]$  και όπως πριν έχουμε:  $z_1 = a_1 + z_1 - a_1 = a_1 + \frac{1}{\frac{1}{z_1 - a_1}} = a_1 + \frac{1}{z_2}$ , όπου

$$z_2 = \frac{1}{z_1 - a_1}. \text{ Ο } a_1 \text{ είναι θετικός ακέραιος. Επίσης } z_0 = a_0 + \frac{1}{z_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{z_2}} = [a_0, a_1, z_2].$$

Ακολουθώντας αυτή την διαδικασία, αν έχουν οριστεί οι ακέραιοι  $a_0, a_1, \dots, a_n$  (μερικά πηλικά) και οι άρρητοι  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (πλήρη πηλικά), τότε ορίζουμε

$$z_{n+1} = \frac{1}{z_n - a_n}, \quad a_{n+1} = [z_{n+1}] \text{ και επομένως } z_0 = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, z_{n+1}], \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Είναι φανερό ότι οι  $z_n$  είναι άρρητοι για όλα τα  $n$  και εκτός ίσως του  $z_0$ , θετικοί. Αν αρχίσουμε επομένως με έναν άρρητο αριθμό,  $z_0$ , οι  $z_n - a_n$  θα είναι άρρητοι και η διαδικασία «παράγει» συνεχώς μερικά πηλικά  $a_{n+1}$ . Από τον τρόπο που ορίσαμε τα  $a_n, z_n$  έχουμε επίσης ότι :

$$z_{n+1} > a_{n+1}, \quad \frac{1}{z_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}, \quad z_n = a_n + \frac{1}{z_{n+1}} < a_n + \frac{1}{a_{n+1}}, \text{ δηλ. } a_n < z_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}}.$$



**4.4.2. Παράδειγμα:** Ας εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για την ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα του αρρήτου:  $-\sqrt{5}$ . Έχουμε διαδοχικά:

$$z_0 = -\sqrt{5} = [-\sqrt{5}] + (-\sqrt{5} + 3) = -3 + (-\sqrt{5} + 3) = -3 + \frac{1}{\frac{1}{-\sqrt{5} + 3}} = a_0 + \frac{1}{z_1}, \quad z_1 = \frac{1}{-\sqrt{5} + 3}$$

$$0 < \frac{1}{z_1} = -\sqrt{5} + 3 < 1, \quad z_1 = \frac{1}{-\sqrt{5} + 3} = \frac{1}{z_0 - a_0} > 1 \text{ (αρνητικοί μπορεί να είναι μόνο οι } z_0, a_0)$$

$$\frac{1}{-\sqrt{5} + 3} = \frac{\sqrt{5} + 3}{9 - 5} = \left[ \frac{1}{-\sqrt{5} + 3} \right] + \left( \frac{\sqrt{5} + 3}{4} - 1 \right) = 1 + \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right) = 1 + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{5} - 1}} = a_1 + \frac{1}{z_2}$$

$$z_2 = \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{4} = \sqrt{5} + 1 = 3 + (\sqrt{5} - 2) = a_2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}} = a_2 + \frac{1}{z_2 - a_2} = a_2 + \frac{1}{z_3}$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = 4 + (\sqrt{5} - 2) = a_3 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}} = a_3 + \frac{1}{z_4}$$

$$z_4 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = 4 + (\sqrt{5} - 2) = a_4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}} = a_4 + \frac{1}{z_5}$$

$$z_5 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = 4 + (\sqrt{5} - 2) = a_5 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5} - 2}} = a_5 + \frac{1}{z_6}$$

Αν παρατηρήσουμε τις τρεις τελευταίες γραμμές, μάλλον πρέπει να σταματήσουμε, και συμπεραίνουμε ότι  $-\sqrt{5} = [-3, 1, 3, 4, 4, 4, z_6] = \left[ -3, 1, 3, 4, 4, 4, \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \right]$ . Θα θέλαμε φυσικά (όπως και στο παράδειγμα 2.3) να γράψουμε  $-\sqrt{5} = [-3, 1, 3, 4, 4, 4, \dots]$ , γνωρίζοντας ότι στις τρεις τελείες έχει μόνον τεσσάρια. Μπορούμε όμως; Θα πρέπει  $\lim[-3, 1, 3, 4, 4, 4, \dots, 4] = -\sqrt{5}$ .

#### 4.4.3. Θεώρημα:

Έστω  $\xi$  ένας άρρητος και οι  $a_n, z_n$  όπως έχουν οριστεί στο τμήμα 4.4.1. Αν  $\frac{p_n}{q_n}$  είναι το

$n$ -τάξης αναγωγή του  $\xi$ , τότε για κάθε  $n \geq 0$ , έχουμε:  $\xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})}$ .

#### Απόδειξη:

Από την  $\xi = z_0 = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, z_{n+1}]$  και το θεώρημα 2.6, για  $n \geq 0$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z_{n+1}p_n + p_{n-1}}{z_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n} + \left( \frac{z_{n+1}p_n + p_{n-1}}{z_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right) = \frac{p_n}{q_n} + \frac{z_{n+1}p_n q_n + p_{n-1}q_n - z_{n+1}q_n p_n - q_{n-1}p_n}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \\ &= \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})} \end{aligned}$$

#### 4.4.4. Θεώρημα:

Αν  $\xi$  ένας άρρητος και οι  $a_n, z_n$  όπως έχουν οριστεί στην 4.4.1., τότε

i.  $\xi = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  και ii.  $z_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ , για  $n \geq 0$ .

#### Απόδειξη:

i. Από την 4.4.1, συμπεραίνουμε ότι για κάθε  $n \geq 0$ , οι  $z_n$  είναι άρρητοι και επίσης  $0 < z_n - a_n < 1$ , άρα για τον αντίστροφο του  $z_n - a_n$ , τον  $z_{n+1}$ , θα ισχύει:  $z_{n+1} > 1$  και επομένως, για το ακέραιο μέρος του  $a_{n+1}$  θα έχουμε:  $a_{n+1} \geq 1$ .

Από τις ιδιότητες της ακολουθίας  $(q_n)$ , τμήμα 2.6.2, και το θεώρημα 4.4.3., συμπεραίνουμε ότι  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(z_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0$ , αφού  $z_{n+1} > a_{n+1}$  δηλ.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$  και από τον ορισμό 4.2.1. έπεται ότι  $\xi = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ .

ii. Επειδή  $\xi = z_0$ , μένει να αποδείξουμε ότι  $z_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ , για  $n \geq 1$ . Μπορούμε όμως να αρχίσουμε τη διαδικασία της παραγράφου 4.4.1. με το  $z_n$  αντί του  $\xi = z_0$ . Τότε εφαρμόζουμε το μέρος i.

#### 4.4.5. Παρατηρήσεις:

1. Τα θεωρήματα 4.4.4 και 4.3.5 μας δίνουν την μοναδικότητα της ανάπτυξης ενός αρρήτου σε συνεχές κλάσμα και στο παράδειγμα 4.4.2. μπορούμε πλέον να γράψουμε  $-\sqrt{5} = [-3, 1, 3, 4, 4, 4, \dots]$  (βλ. και παρατήρηση 4).

2. Η ακολουθία των αναγωγημάτων ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος συγκλίνει. Συγκλίνει όμως και η ακολουθία των αναγωγημάτων κάθε πλήρους πηλίκου του, αφού και το πλήρες πηλίκο είναι ένα άπειρο συνεχές κλάσμα, και με τα σύμβολα του Θ.4.4.4., το όριο είναι ο άρρητος  $z_n$ . Μπορούμε να βρούμε και τη σχέση των ορίων:

Έστω  $\frac{p_k}{q_k}$  η ακολουθία των αναγωγημάτων του  $z_0 = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  και  $\frac{p'_k}{q'_k}$  η ακολουθία των αναγωγημάτων ενός πλήρους πηλίκου π.χ. του  $z_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots], n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad \frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n+k}] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}] = \\ &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, [a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}]] = \left[ a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \frac{p'_k}{q'_k} \right] = \frac{p_{n-1} \frac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1} \frac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}}. \end{aligned}$$

Η ακολουθία των αναγωγημάτων του  $[a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots], n \geq 1$  έχει όριο  $z_n$ . Η ακολουθία των αναγωγημάτων του  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  έχει όριο  $z_0 = \frac{p_{n-1}z_n + p_{n-2}}{q_{n-1}z_n + q_{n-2}}$ .

Αντίστροφα: η ακολουθία των αναγωγημάτων του  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  έχει όριο  $z_0$ , και η ακολουθία των αναγωγημάτων του  $[a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots], n \geq 1$  έχει όριο  $z_n = \frac{z_0 q_{n-2} - p_{n-2}}{p_{n-1} - z_0 q_{n-1}}$ .

Π.χ. Επειδή:  $1 + \sqrt{2} = [2, 2, 2, \dots]$ , θα έχουμε:

$$[1, 2, 2, \dots] = \frac{p_0(1 + \sqrt{2}) + p_{-1}}{q_0(1 + \sqrt{2}) - q_{-1}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{1} = \sqrt{2} \text{ και επίσης, από την :}$$

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots], \text{ παίρνουμε: } [2, 2, \dots] = \frac{q_{-1}(\sqrt{2}) - p_{-1}}{p_0 - (\sqrt{2})q_0} = \frac{-1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

3. Η ύπαρξη των ορίων και η μοναδικότητα του αναπτύγματος νομιμοποιούν τους χειρισμούς του τμήματος 4.1 για τον προσδιορισμό του αριθμού που παριστάνει ένα άπειρο συνεχές κλάσμα. Η μέθοδος είναι ίδια με την αναζήτηση του κλάσματος που παριστάνει ένας περιοδικός δεκαδικός. Αν θέλουμε να γράψουμε τον 4.3555... σε κλασματική μορφή, έχουμε διαδοχικά:  $x = 4.3555\dots$ ,  $100x = 435.55\dots$ ,  $10x = 43.55\dots$ , αφαιρούμε,  $90x = 435 - 43$ , κλπ, δηλ. διαχειριζόμαστε πρώτα τα ...άπειρα 5 της περιόδου.

4. Για να βρούμε τον άρρητο που παριστάνει το  $[3, 6, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$ , αν υπάρχει τμήμα μερικών πηλίκων που επαναλαμβάνεται, όπως εδώ το «1, 4», βρίσκουμε πρώτα τον άρρητο  $[1, 4, 1, 4, \dots]$  ως εξής: θέτουμε  $w = [1, 4, 1, 4, \dots]$  και έχουμε  $w = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{w}}$ , οπότε ο  $w$

είναι η θετική ρίζα της  $4w^2 - 4w - 1 = 0$ ,  $w = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ . Αυτό είναι το όριο των αναγωγμάτων του  $[1, 4, 1, 4, \dots]$ . Για να βρούμε τον άρρητο  $x$  στον οποίο συγκλίνει το  $[3, 6, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$ , έχουμε  $x = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{w}}$  και με αντικατάσταση του  $w$  και τις

απαραίτητες πράξεις, καταλήγουμε στον  $x = \frac{14 - \sqrt{2}}{4}$ .

5. Για το ανάπτυγμα του  $-\xi$ , όταν γνωρίζουμε το ανάπτυγμα του  $\xi$  ισχύει το παρακάτω:

**Θεώρημα:** Αν  $\xi = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ , τότε

$$\text{αν } a_1 = 1, \text{ τότε } -\xi = [-a_0 - 1, 1 + a_2, a_3, a_4, \dots]$$

$$\text{αν } a_1 > 1, \text{ τότε } -\xi = [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots]$$

**Απόδειξη:** Έστω ο άρρητος  $\xi$  με  $\xi = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ . Θέτουμε  $\xi = z_0$ . Για το μερικό πηλίκο  $a_0$  ισχύουν:  $a_0 = [z_0]$ ,  $a_0 = [z_0] < z_0 < a_0 + 1$ ,  $-a_0 - 1 < -z_0 < -a_0$ . Άρα  $[-\xi] = [-z_0] = -a_0 - 1$

**Αν  $a_1 = 1$ , τότε**  $\xi = a_0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{z_2}} = a_0 + \frac{z_2}{1 + z_2}$ . Για τον  $-\xi$  έχουμε:

$$-\xi = -a_0 - \frac{z_2}{1 + z_2} = -a_0 - 1 + 1 - \frac{z_2}{1 + z_2} = -a_0 - 1 + \frac{1}{1 + z_2}. \text{ Επειδή } a_2 = [z_2], \text{ θα είναι } [1 + z_2] = 1 + a_2.$$

Το επόμενο πλήρες πηλίκο του  $\xi$  θα είναι το  $\frac{1}{1 + z_2 - (1 + a_2)} = \frac{1}{z_2 - a_2} = z_3$ , οπότε το ανάπτυγμα του  $-\xi$  σε συνεχές κλάσμα θα είναι  $-\xi = [-a_0 - 1, 1 + a_2, a_3, a_4, \dots]$ .

**Αν  $a_1 > 1$ , τότε**  $\xi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{z_1}}$ .

Για τον  $-\xi$  ισχύει :  $-\xi = -a_0 - 1 + (-\xi) - (-a_0 - 1) = -a_0 - 1 - z_0 + a_0 + 1$ .

Από τις:  $[z_1] = a_1 \geq 2$ ,  $z_1 - 1 > [z_1] - 1 \geq 1$ ,  $z_1 = \frac{1}{z_0 - a_0}$  παίρνουμε  $z_0 - a_0 = \frac{1}{z_1}$  και  $-z_0 + a_0 + 1 = \frac{-1}{z_1} + 1 = \frac{-1 + z_1}{z_1}$ . Για να βρούμε το δεύτερο μερικό πηλίκο του αναπτύγματος του  $-\xi$ , αντιστρέφουμε το  $\frac{-1 + z_1}{z_1}$  και παίρνουμε το ακέραιο μέρος:  $-\xi = -a_0 - 1 + \frac{1}{\frac{z_1}{z_1 - 1}} = -a_0 - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{z_1 - 1}}$ .

Το ακέραιο μέρος του  $z_1 - 1$  είναι  $a_1 - 1$  και  $z_1 - 1 - (a_1 - 1) = z_1 - a_1$ .

$$\text{Καταλήγουμε στην } -\xi = -a_0 - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1 - 1 + \frac{1}{z_1 - a_1}}} = -a_0 - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1 - 1 + \frac{1}{z_2}}},$$

$$\text{οπότε } -\xi = [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots].$$

**Παραδείγματα:**  $\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, 4, \dots]$ ,  $-\sqrt{5} = [-3, 1, 3, 4, 4, \dots]$ ,  $\sqrt{19} = [4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$ ,  $-\sqrt{19} = [-5, 1, 1, \overline{3, 1, 2, 8, 2}]$ ,  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [\overline{1}]$ ,  $-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} [-2, 2, \overline{1}]$ .

**4.4.6.Ορισμός.** Μια ακολουθία αριθμών  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ονομάζεται **περιοδική**, όταν υπάρχουν ελάχιστοι φυσικοί  $k, m$  με  $k < m$ , ώστε να είναι  $a_{k+r} = a_{m+r}$ ,  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ , δηλ. όταν η ακολουθία ταυτίζεται με την  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{m-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{m-1}, a_k, \dots$ . Οι  $(m-k)$  σε πλήθος αριθμοί  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{m-1}$  είναι η περίοδος της ακολουθίας. Αν  $k=0$  η ακολουθία ονομάζεται **απλή (ή καθαρώς) περιοδική** ενώ αν  $k > 0$  ονομάζεται **σύνθετη ή μεικτή περιοδική**.

Οι ονομασίες αυτές μεταφέρονται και στα άπειρα συνεχή κλάσματα, αφού το  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  μπορεί να θεωρηθεί σαν η ακολουθία  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ . Έτσι το  $[3, 6, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$  είναι σύνθετο περιοδικό κλάσμα με περίοδο «1, 4» ( $k = 2, m = 4$ , περίοδος είναι οι  $a_2, a_3$ ). Φυσικά μπορούμε να θεωρήσουμε περίοδο και την «1,4,1,4» ή την «1,4,1,4,1,4», αλλά συνήθως παίρνουμε το μικρότερο πλήθος και **μήκος περιόδου** ονομάζουμε τον μικρότερο αριθμό της ομάδας των μερικών πηλίκων που επαναλαμβάνεται (στο παράδειγμα έχουμε μήκος περιόδου 2). Για να δηλώσουμε την περίοδο, όπως και για τους περιοδικούς δεκαδικούς, βάζουμε μια παύλα πάνω από την ομάδα των μερικών πηλίκων που επαναλαμβάνεται, π.χ. για το προηγούμενο παράδειγμα γράφουμε  $x = \frac{14 - \sqrt{2}}{4} = [3, 6, \overline{1, 4}]$ .

Δεν έχουμε όμως πάντα περιοδικά συνεχή κλάσματα. Μπορούμε να κατασκευάσουμε συνεχή κλάσματα που δεν είναι περιοδικά (όπως κατασκευάζουμε και μη περιοδικούς δεκαδικούς) π.χ.  $[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,\dots]$ . Από το Κ3 γνωρίζουμε ότι οι ρητοί αναπτύσσονται σε πεπερασμένα συνεχή κλάσματα και αντίστροφα, ένα πεπερασμένο συνεχές κλάσμα παριστάνει κάποιον ρητό (το τελευταίο αναγωγήμα). Τα περιοδικά είναι λοιπόν αναπήματα άρρητων. Στο Κ6 θα αποδείξουμε ότι η περιοδικότητα του συνεχούς κλάσματος είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των άρρητων ριζών δευτεροβάθμιων εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές (τετραγωνικοί άρρητοι).

#### 4.5. Η διαφορά μεταξύ του άρρητου και των αναγωγήματων του

Οι ανισότητες είναι ανάλογες με αυτές της παραγράφου 3.5., χωρίς τις λεπτομέρειες για τις τιμές του  $n$ , αφού τώρα έχουμε άπειρο συνεχές κλάσμα.

##### 4.5.1. Θεώρημα.

Έστω  $\xi$  ένας άρρητος και οι  $a_n, z_n$  όπως έχουν οριστεί στο τμήμα 4.4.1.

Αν  $\frac{p_n}{q_n}$  είναι το  $n$ -τάξης αναγωγήμα του  $\xi$ , τότε για κάθε  $n \geq 0$ , έχουμε:

$$\mathbf{A.} \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n (z_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

$$\mathbf{B.1.} \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}, \quad \mathbf{B.2.} \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}, \quad \mathbf{B.3.} |\xi q_n - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}},$$

$$\mathbf{\Gamma.1.} |q_{n+1} \xi - p_{n+1}| < |q_n \xi - p_n|, \quad \mathbf{\Gamma.2.} \left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|, \quad \mathbf{\Gamma.3.} \frac{1}{q_{n+2}} < |\xi q_n - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

**Ιδιαίτερα,**

$$\mathbf{\Delta.} \frac{1}{2q_n q_{n+1}} < |\xi - c_n| = \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

**Απόδειξη.**

**A.** Προκύπτει άμεσα από το Θ. 4.4.3.

**B.** Για τον παρονομαστή της A έχουμε:  $z_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$  (το μερικό πηλίκο  $a_{n+1}$  είναι το ακέραιο μέρος του αντίστοιχου πλήρους πηλίκου  $z_{n+1}$ ) και  $q_{n+1} \geq q_n$ , οπότε :

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n (z_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n (a_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2} \cdot [\beta]$$

Πολ/ζουμε την προηγούμενη επί  $q_n$  και παίρνουμε την  $|\xi q_n - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$

**Παρατήρηση:** Από την 2.6. γνωρίζουμε ότι για την ακολουθία  $(q_n)$  ισχύει:

$0 < 1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_k < q_{k+1} < \dots$ , οπότε η ισότητα στην  $\frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}$  είναι πιθανή μόνον

αν  $n = 0$ . Μερικές φορές θα αγνοούμε αυτή την τετριμμένη (πιθανή) περίπτωση (για να ισχύει θα πρέπει το δεύτερο μερικό πηλίκο να είναι 1,  $a_1=1$ ) και θα γράφουμε  $q_{n+1} > q_n$  για κάθε  $n \geq 0$ .

Η  $z_{n+1} > a_{n+1}$  όμως ισχύει για κάθε  $n \geq 0$  και έτσι η πρώτη από τις ανισότητες στην  $[\beta]$

είναι γνήσια ανισότητα, οπότε, για κάθε  $n \geq 0$ , θα έχουμε  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$ .

**Γ.** Αν αληθεύει η πρώτη ανισότητα, η Γ.1, τότε η δεύτερη προκύπτει από την

πρώτη ως εξής:  $\left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_{n+1}} |\xi q_{n+1} - p_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+1}} |\xi q_n - p_n| \leq \frac{1}{q_n} |\xi q_n - p_n| = \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|$

Αποδεικνύουμε την πρώτη:

$$z_{n+1}q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} + q_n = q_{n+1} + q_n \leq a_{n+2}q_{n+1} + q_n = q_{n+2}$$

Από την  $\xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n (z_{n+1}q_n + q_{n-1})}$  και την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n (z_{n+1}q_n + q_{n-1})} > \frac{1}{q_n q_{n+2}}. \text{ Πολ/ζουμε επί } q_n \text{ και προκύπτει η: } |\xi q_n - p_n| > \frac{1}{q_{n+2}}$$

Από την ομάδα **B** έχουμε  $|\xi q_{n+1} - p_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+2}}$  και τελικά  $|\xi q_{n+1} - p_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+2}} < |\xi q_n - p_n|$ .

$$\Delta. \quad \text{Από την Γ.2.,} \quad \left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|,$$

και επειδή ο άρρητος  $\xi$  βρίσκεται μεταξύ των διαδοχικών αναγωγημάτων  $c_n$  και  $c_{n+1}$ ,

$$\text{παίρνουμε:} \quad \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| + \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < 2 \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|.$$

Το αποτέλεσμα αυτό, μαζί με τις Β.1, Β.2, δίνουν τις ανισότητες της ομάδας  $\Delta$  ( $n \geq 1$ , γιατί πιθανόν  $q_1 = q_0 = 1$ ).

#### 4.5.2. Παραδείγματα προσεγγίσεων.

Η διαδικασία είναι ανάλογη με εκείνη της ενότητας 3.8 για την προσέγγιση ρητών.

1.  $\sqrt{5}$ . **α.** Εστω ότι θέλουμε να βρούμε ένα ρητό κλάσμα που να προσεγγίζει την  $\sqrt{5} = [2, \bar{4}]$  με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, δηλ.  $\left| \sqrt{5} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2} 10^{-3} = 0.0005$ . Θα αναζητήσουμε αυτό το κλάσμα στα αναγωγήματα της  $\sqrt{5}$ :  $\{2, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292}, \dots\}$ .

Υπολογίζουμε τα τετράγωνα των παρονομαστών των αναγωγημάτων, τα τετράγωνα των  $q_k$  μέχρι να βρούμε τετράγωνο μεγαλύτερο του  $\frac{1}{\varepsilon} = 2000$ , όπου  $\varepsilon = 0.0005$ . Θα βρούμε κάποιο  $q_k$  με αυτή την ιδιότητα, γιατί η ακολουθία  $(q_k)$  είναι αύξουσα. Έχουμε:  $17^2 = 289$ ,  $72^2 = 5184$ , και σύμφωνα με την ανισότητα Β.2., θα πρέπει να πάρουμε το αναγώγημα 3<sup>ης</sup> τάξης, το  $161/72$ . Δεν μπορούμε να πάρουμε το αναγώγημα 2<sup>ης</sup> τάξης (και να χρησιμοποιήσουμε την Β.1.) , γιατί  $17 \cdot 72 = 1224 < 2000$ . Ο αριθμός  $161/72$  είναι μεγαλύτερος από την  $\sqrt{5}$ , γιατί είναι αναγώγημα περιττής τάξης.

1.  $\sqrt{5}$ . **β.** Οι Μαθηματικοί όμως, όπως και οι μη Μαθηματικοί, δεν ικανοποιούνται από την υπάρχουσα κατάσταση. Αφού ήδη βρήκαμε μια προσέγγιση της  $\sqrt{5}$  με την ζητούμενη ακρίβεια, θα θέλαμε να διερευνήσουμε αν υπάρχει δυνατότητα «καλύτερης» προσέγγισης (για ακρίβεια 3 δ.ψ.), δηλ. αν υπάρχει ρητό κλάσμα με μικρότερους όρους από το  $161/72$ , που να προσεγγίζει την  $\sqrt{5}$  με αυτή την ακρίβεια.



Ας δοκιμάσουμε κάποια κλάσματα με μικρότερους όρους, π.χ. τα  $47/21$ ,  $85/38$ ,  $123/55$  παρατηρούμε ότι  $\left| \sqrt{5} - \frac{47}{21} \right| > 0.0005$ ,  $\left| \sqrt{5} - \frac{85}{38} \right| > 0.0005$ , αλλά  $\left| \sqrt{5} - \frac{123}{55} \right| < 0.0005$ , οπότε μπορούμε να πάρουμε το  $123/55$  (τύχη: είναι και αυτό ανάγωγο, όπως τα αναγωγήματα). Θα ασχοληθούμε όμως με αυτό το θέμα στο επόμενο κεφάλαιο.

2: ε. Ο Euler βρήκε ότι  $\frac{e-1}{2} = [0, 1, 6, 10, 14, 18, 22, \dots]$ . Τα αρχικά αναγωγήματα είναι  $\{0, 1, \frac{6}{7}, \frac{61}{71}, \frac{860}{1001}, \frac{15541}{18089}, \frac{342762}{398959}, \dots\}$ . Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό αυτόν με ακρίβεια 4 δ.ψ. παρατηρούμε ότι  $71^2=5041$ ,  $71*1001=71071$ , δηλ.  $\frac{1}{71*1001} = \frac{1}{71071} < \frac{1}{2} 10^{-4} = \frac{1}{20000}$  και επομένως, σύμφωνα με την ανισότητα Β.1., παίρνουμε το αναγώγημα  $3^{ns}$  τάξης, το  $61/71$ .

Αν χρησιμοποιήσουμε το αναγώγημα  $6^{ns}$  τάξης,  $\frac{342762}{398959}$ , μπορούμε να βρούμε τον ρητό  $\frac{1084483}{398959}$  που έχει ίδια τα πρώτα 11 δεκαδικά ψηφία με τον (υπερβατικό)  $e$  και όπως θα έλεγε και ο Πτολεμαίος ... «το παραλειπόμενον μηδενί αξιολόγω διαφέρει του προς αίσθησιν ακριβούς» (Λάμπρου, 2000).

3: «π» . α. Αν χρησιμοποιήσουμε μια αριθμομηχανή, όπως περιγράφεται και στον αλγόριθμο 2.3, μπορούμε να βρούμε κάποια αρχικά μερικά πηλικά του αναπτύγματος του «π» (πληκτρολογούμε: «π», πρώτο μερικό πηλίκιο το 3, αφαιρούμε, πλήκτρα « - , 3, = », αντιστρέφουμε, πλήκτρο «1/x», δεύτερο μερικό πηλίκιο 7, αφαιρούμε κλπ).

Το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα του αριθμού « π » το έδωσε ο Lambert το 1770 :  $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, \backslash 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, \dots]$ . Οι περισσότερες αριθμομηχανές (π.χ. η Sharp: EL-531P) αρχίζουν συνήθως τα λάθη μετά από το ένατο μερικό πηλίκιο. Η αριθμομηχανή του φορητού HP Pavillion dv9000 βρήκε «σωστά» 38 μερικά πηλικά. Οι άρρητοι, εκτός από τον κλονισμό της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας, προβληματίζουν και τις υπολογιστικές μηχανές. Υπάρχουν φυσικά και τα πολύ ισχυρά συστήματα άλγεβρας υπολογιστών που λύνουν τα προβλήματα των απλών αριθμομηχανών: π.χ. με την εντολή `ContinuedFraction[π, 200]` στο mathematica παίρνουμε τα 200 πρώτα μερικά πηλικά του αναπτύγματος του «π» και αν θέλουμε περισσότερα, αλλάζουμε το 200.

\*Το σύμβολο «π» (πρώτο γράμμα της λέξης περιφέρεια) εισήγαγε το 1706 ο William Jones.

Τα 5 πρώτα αναγωγήματα του  $\pi$  είναι  $\left\{ \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102} \right\}$ . Επειδή

$$\frac{1}{7 \cdot 106} = 0.00134... < 0.005 = 0.5 \cdot 10^{-2}, \text{ αν θέλουμε ακρίβεια 2 δ.ψ. παίρνουμε το } \frac{22}{7}, \text{ αν}$$

θέλουμε ακρίβεια 3 δ.ψ. το  $\frac{333}{106}$ , γιατί  $\frac{1}{113 \cdot 106} = 0.000083... < 0.0005 = 0.5 \cdot 10^{-3}$ . Με το

νόημα της «καλύτερης προσέγγισης», όπως περιγράφεται στο παράδειγμα 1.  $\sqrt{5}$ .β, τα αναγωγήματα  $\frac{22}{7}$  και  $\frac{333}{106}$  είναι καλύτερες προσεγγίσεις (για την συγκεκριμένη ακρίβεια) από τα δεκαδικά κλάσματα  $3.14 = \frac{314}{100}$  και  $3.141 = \frac{3141}{1000}$ . Ο Αρχιμήδης (περίπου 287-212 π.Χ.), με την γνωστή μέθοδο των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων

πολυγώνων, βρήκε ότι για το 96-γωνο ισχύει  $\frac{6336}{2017 \frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673 \frac{1}{2}}$ , ή απλούστερα

$$\frac{223}{71} = 3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \quad (\text{ο Αρχιμήδης φυσικά, έκανε κάτι πολύ περισσότερο, έδωσε τη}$$

διαδικασία με την οποία βρίσκουμε όποια ακρίβεια θέλουμε).

Για το αναγωγήμα  $3^{\text{ης}}$  τάξης,  $\frac{355}{113}$ , σύμφωνα με τις ανισότητες της ομάδας Β, θα

$$\text{έχουμε } \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \frac{1}{113 \cdot 33102} = \frac{1}{3740526} < \frac{1}{2000000} = 0.5 \cdot 10^{-6}, \text{ δηλ. ο ρητός } \frac{355}{113} \text{ έχει τα 6}$$

πρώτα δεκαδικά ψηφία ίδια με του  $\pi$ .

Ο ρητός  $\frac{355}{113}$  είναι περιοδικός, αλλά, αφού προσεγγίζει τον διάσημο  $\pi$ , χρειάζεται

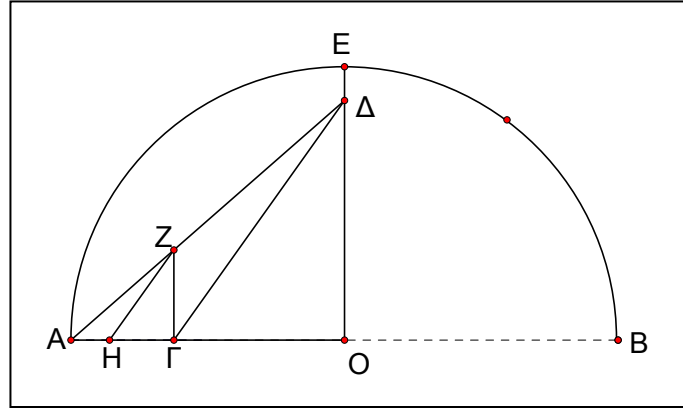
λίγη υπομονή για να βρούμε την περίοδο των 112 ψηφίων, (υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο «\» το χρησιμοποιούμε όπως το «-» για την γραφή μιας λέξης σε δύο σειρές, με την διαφορά ότι ο αριθμός μπορεί να απαιτεί πολλές σειρές, ή πολλές σελίδες, ή τόμους κλπ):

$$\frac{355}{113} = 3.141592920353982300884955752212389380530973451327433 \backslash$$

628318584070796460176991150442477876106194690265486725663716814159292035398 \ 23008849557522123893805309734513274336283185840707... (βλ. και ενότητα 9.8.7).

### 3: «π» . β. Προσεγγιστική κατασκευή του π.

Είναι γνωστό ότι ο π δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη. Υπάρχουν όμως ενδιαφέρουσες προσεγγιστικές κατασκευές. Για παράδειγμα ο Jacob de Gelder (το 1849) έδωσε την ακόλουθη κατασκευή χρησιμοποιώντας το  $4^{\circ}$  από τα αναγωγίματα του π, το αναγώγιμα  $3^{15}$  τάξης, το  $\frac{355}{113}$  ( $=3.14159292035\dots$ ,  $\pi = 3.14159265358979323846264\dots$ ).



Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$$

\*Στην ενότητα 7.6. αποδεικνύουμε ότι κάθε πρώτος της μορφής  $p = 4k+1$  γράφεται σαν άθροισμα δύο τετραγώνων. Για τον προσδιορισμό των δύο αυτών ακεραίων ακολουθούμε τη μέθοδο Legendre (1752-1833), που σχετίζεται με το ανάπτυγμα της  $\sqrt{p}$ .

Θα κατασκευάσουμε το τμήμα  $AH = \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$ , οπότε μένει η απλή κατασκευή του τμήματος  $3+AH$ . Κατασκευάζουμε τον κύκλο  $(O, OE=1)$  και την διάμετρο  $AB$  κάθετη στην ακτίνα  $OE$  στο  $O$ . Στην ακτίνα  $OE$  παίρνουμε τμήμα  $OD=7/8$  και στο τμήμα  $AD$  παίρνουμε  $AZ=1/2$ . Φέρνουμε τις  $ZG//EO$  και  $ZH//\Gamma\Delta$ . Τότε, με ομοιότητες και Πυθαγόρειο

καταλήγουμε στην  $AH = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$  (Olds, 1963: 60).

### 4. Μια μέθοδος για τον υπολογισμό λογαρίθμων.

Όπως είναι γνωστό, ο λογάριθμος ενός αριθμού αποτελείται από δύο μέρη: το ακέραιο μέρος, ή χαρακτηριστικό, και το δεκαδικό μέρος. Με το χαρακτηριστικό συνήθως δεν ασχολούμαστε, γιατί προκύπτει από απλή παρατήρηση, π.χ., για λογαρίθμους με βάση το 10, το χαρακτηριστικό του 4758 είναι 3, του 2 είναι 0, του 0.008 είναι -3 κλπ. (για να ακριβολογούμε, αυτό ήταν γνωστό παλαιότερα, τώρα ο αυτοματισμός των υπολογιστικών μηχανών μας έχει, ίσως, αποξενώσει από την ουσία αυτού του θέματος, όπως και πολλών άλλων).

Η παρακάτω μέθοδος προτάθηκε από τον Daniel Shanks το 1954 (Olds, 1963: 85)

Υποθέτουμε λοιπόν ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον  $\log_a b$ , με  $1 < b < a$ . Δημιουργούμε την ακολουθία των αριθμών  $(b_k)$  και την ακολουθία των θετικών ακεραίων  $(n_k)$  ως εξής:

Θέτουμε  $b_1 = b$  και βρίσκουμε τον κατάλληλο ακέραιο  $n_1$  με την ιδιότητα  $b_1^{n_1} < a < b_1^{n_1+1}$ . Ορίζουμε τον  $b_2 = \frac{a}{b_1^{n_1}}$ .

Βρίσκουμε τον ακέραιο  $n_2$  με την ιδιότητα  $b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$ . Ορίζουμε τον  $b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$ .

Βρίσκουμε τον  $n_3$  με την ιδιότητα  $b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$ . Ορίζουμε τον  $b_4 = \frac{b_2}{b_3^{n_3}}$ .

Συνεχίζουμε :

Βρίσκουμε τον  $n_k$  με την ιδιότητα  $b_k^{n_k} < b_{k-1} < b_k^{n_k+1}$  και ορίζουμε τον  $b_{k+1} = \frac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}}$ .

Από την  $b_1^{n_1} < a < b_1^{n_1+1}$ , έχουμε  $a = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}}$ , με  $\frac{1}{x_1} < 1$ , άρα  $x_1 > 1$ . Η  $b_2 = \frac{a}{b_1^{n_1}}$  γίνεται:

$b_2 = \frac{a}{b_1^{n_1}} = \frac{b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}}}{b_1^{n_1}} = b_1^{\frac{1}{x_1}}$ , ή  $b_2^{x_1} = b_1 (= b)$ . Από την  $b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$  παίρνουμε:  $b_1 = b_2^{n_2 + \frac{1}{x_2}}$ , με

$\frac{1}{x_2} < 1$ , άρα  $x_2 > 1$ . Οι  $b_2^{x_1} = b_1$  και  $b_1 = b_2^{n_2 + \frac{1}{x_2}}$  δίνουν  $x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2}$ .

Η  $b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$  γίνεται:  $b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}} = \frac{b_2^{n_2 + \frac{1}{x_2}}}{b_2^{n_2}} = b_2^{\frac{1}{x_2}}$ , ή  $b_3^{x_2} = b_2$ . Από την  $b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$ ,

παίρνουμε  $b_2 = b_3^{n_3 + \frac{1}{x_3}}$ , με  $\frac{1}{x_3} < 1$ , άρα  $x_3 > 1$ . Οι  $b_3^{x_2} = b_2$  και  $b_2 = b_3^{n_3 + \frac{1}{x_3}}$  οδηγούν στην

$x_2 = n_3 + \frac{1}{x_3}$ .

Αν λύσουμε την  $a = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}} = b^{n_1 + \frac{1}{x_1}}$  ως προς  $b$ , έχουμε  $b = a^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{x_1}}}$  και χρησιμοποιώντας

$$\text{τα προηγούμενα αποτελέσματα: } b = a^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{x_1}}} = a^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{x_2}}}} = a^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{x_3}}}}}$$

(το συνεχές κλάσμα είναι εκθέτης του  $a$ ).

$$\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}$$

Συνεχίζουμε αυτή την διαδικασία, οπότε  $b = a$  και από τον ορισμό των λογαρίθμων έχουμε  $\log_a b = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}$ .

\*Είναι γνωστό ότι, αν  $a > 0$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  και  $(\rho_v)$  μια οποιαδήποτε ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στον  $\tau$ , τότε ονομάζουμε  $\tau$ - δύναμη του  $a$  το όριο (υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από την  $\rho_v$ ) της ακολουθίας  $(a^{\rho_v})$ . Γράφουμε  $a^\tau = \lim_{v \rightarrow \infty} a^{\rho_v}$ , δηλ. το όριο «μεταφέρεται» στον εκθέτη,  $\lim_{v \rightarrow \infty} a^{\rho_v} = a^{\lim_{v \rightarrow \infty} \rho_v}$ . Ο ορισμός είναι φυσικά επέκταση του ορισμού δυνάμεων με ρητό εκθέτη (αν  $\tau$  ρητός και  $(\rho_v)$  η σταθερή ακολουθία  $\rho_v = \tau$ ). Αν  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ , ο λογάριθμος με βάση  $a$  του  $b$  είναι ο (υπάρχει και είναι μοναδικός) πραγματικός αριθμός  $x$  που ικανοποιεί την εξίσωση  $a^x = b$ , τον συμβολίζουμε:  $x = \log_a b$ .

Ας υπολογίσουμε τον  $\log_{10} 2$  (πιο απλά  $\log 2$ ).

Βρίσκουμε πρώτα τον ακέραιο  $n_1$  με την ιδιότητα  $2^{n_1} < 10 < 2^{n_1+1}$ , είναι ο 3,  $n_1=3$ , γιατί:  $2^3 < 10 < 2^4$ . Ορίζουμε τον  $b_2 = \frac{a}{b^{n_1}} = \frac{10}{2^3} = \frac{10}{8} = 1.25$ . Βρίσκουμε τον  $n_2$  με την ιδιότητα  $1.25^{n_2} < 2 < 1.25^{n_2+1}$ ,  $n_2 = 3$ , γιατί:  $1.25^3 < 2 < 1.25^4$ . Ορίζουμε τον  $b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}} = \frac{2}{1.25^3} = 1.024$ . Για τον ακέραιο  $n_3$  με την ιδιότητα  $1.024^{n_3} < 1.25 < 1.024^{n_3+1}$  χρειάζεται μεγαλύτερη προσπάθεια (έχουν και οι αριθμομηχανές τη χρησιμότητά τους, αρκεί να καταλαβαίνουμε τη δύναμή τους, αλλά και τα όριά τους), βρίσκουμε  $n_3 = 9$ . Ορίζουμε τον  $b_4 = \frac{b_2}{b_3^{n_3}} = \frac{1.25}{1.024^9}$ ,  $b_4 = 1.00974195868$ . Έχουμε ήδη βρει ότι  $\log 2 = [0, 3, 3, 9, \dots]$ . Τα 4

πρώτα αναγωγήματα είναι  $0, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{28}{93}$  και για το αναγώγημα  $3^{\eta\varsigma}$  τάξης  $\frac{28}{93}$  θα ισχύει

$$\left| \log 2 - \frac{28}{93} \right| < \frac{1}{93^2} = \frac{1}{8649} < \frac{1}{2000} = 0.5 \cdot 10^{-3} \quad (\text{δηλ. με ακρίβεια } 3 \text{ δ.ψ. : } \log 2 = \frac{28}{93},$$

ο άρρητος  $\log 2$  έχει τουλάχιστον τα 3 πρώτα δεκαδικά ψηφία ίδια με τα δ.ψ. του

$$\frac{28}{93} (= 0.\overline{301075268817204}).$$

### 4.6. Γεωμετρική ερμηνεία

#### 4.6.1.

Αν συνδυάσουμε τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα με τις συνέπειες 5 και 6 της παραγράφου 2.7, για τον άρρητο  $\xi$  με ανάπτυγμα  $[a_0, a_1, \dots]$  και αναγωγήματα  $p_n/q_n$  θα έχουμε:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \dots < \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} < \dots < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Αν τοποθετήσουμε τα σημεία  $A_n$  με τετμημένες  $\frac{p_n}{q_n} = c_n$  σε έναν άξονα, τότε το  $A_1$  θα είναι δεξιά του  $A_0$ , το  $A_2$  μεταξύ  $A_0$  και  $A_1$  κλπ, το  $A_{n+1}$  ( $c_{n+1}$ ) μεταξύ των  $A_{n-1}(c_{n-1})$ ,  $A_n(c_n)$ .

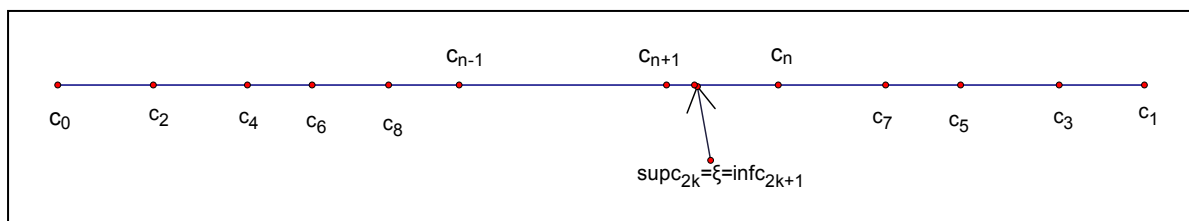
Το όριο, δηλ. ο άρρητος  $\xi$ , περιλαμβάνεται μεταξύ δυο σημείων με διαδοχικούς δείκτες, μεταξύ δυο διαδοχικών αναγωγημάτων.

Η ανισοτική σχέση 6 της 2.7,  $\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right|$ , δείχνει ότι το  $A_{n+1}$  βρίσκεται

πιο κοντά στο  $A_n$ , από ότι βρίσκεται το  $A_n$  στο  $A_{n-1}$ , και η Γ.2. από τις παραπάνω,

$\left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|$ , δείχνει ότι το  $A_{n+1}$  βρίσκεται πιο κοντά στην οριακή τιμή, στον άρρητο

$\xi$ , στην οποία συγκλίνει το συνεχές κλάσμα, από ότι βρίσκεται το  $A_n$ .

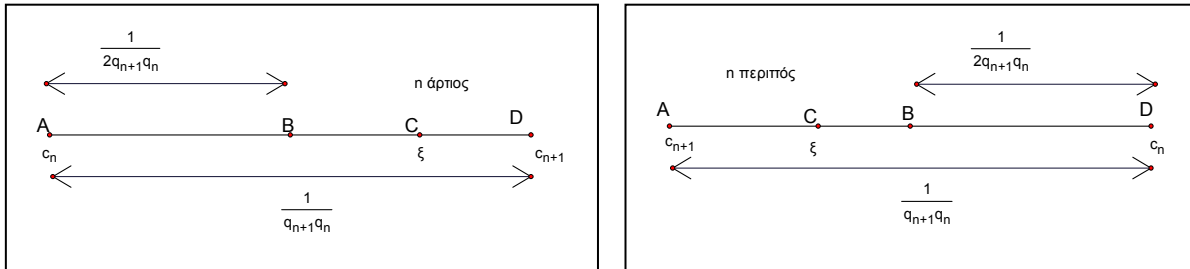


Εικόνα 4.6.1.α.

Η απόσταση των αναγωγημάτων  $c_n, c_{n+1}$  είναι  $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$ . Οι ανισότητες  $\Delta$  του Θ.4.5.1.,

δείχνουν ότι η απόσταση του  $\xi$  από το  $c_n$  θα είναι μεγαλύτερη του  $\frac{1}{2q_n q_{n+1}}$  και φυσικά

μικρότερη του  $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$ , αφού ο  $\xi$  βρίσκεται μεταξύ των δύο αυτών αναγωγημάτων.



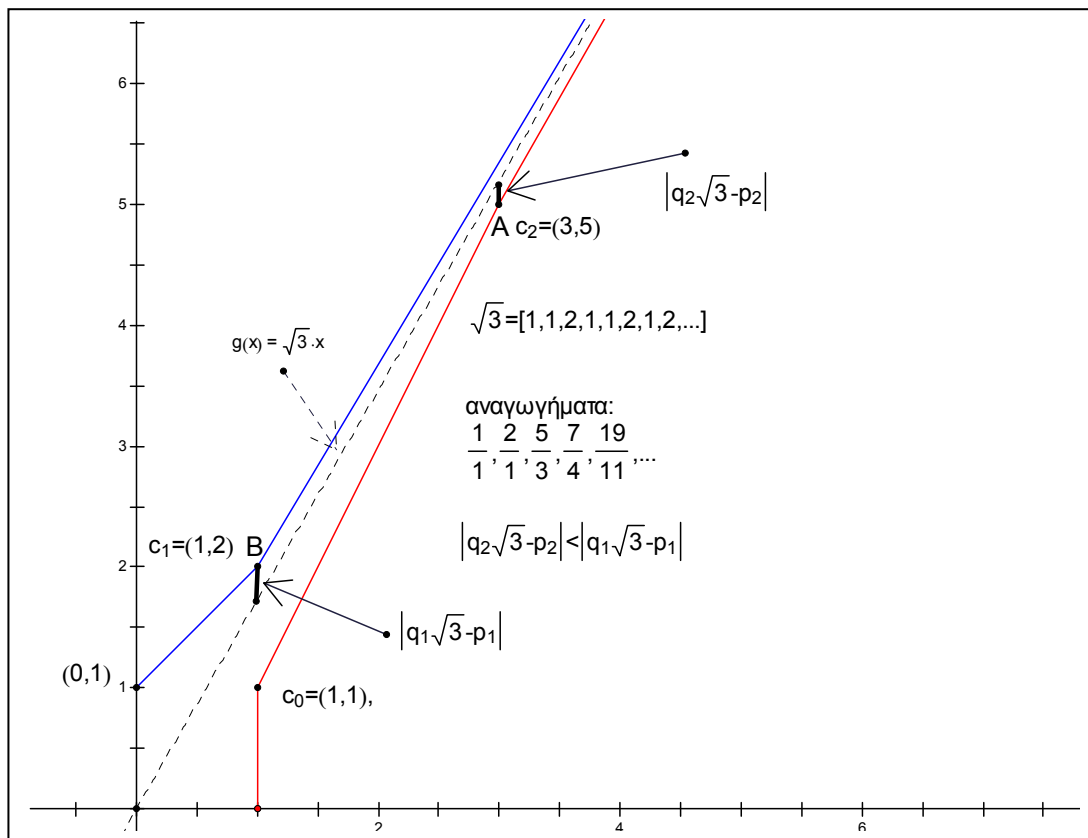
#### 4.6.2.

Όπως και στην περίπτωση των πεπερασμένων συνεχών κλασμάτων (ενότητα 3.6), σχεδιάζουμε την  $\psi = \xi\chi$  (η εικόνα είναι για να βοηθήσει την σκέψη, να βοηθήσουμε το πνεύμα να αξιοποιήσει την εποπτεία για να την ξεπεράσει, ο υπολογιστής σχεδιάζει την  $\psi = \xi\chi$  χρησιμοποιώντας μια ρητή προσέγγιση του αρρήτου  $\xi$ ).

Ας υποθέσουμε  $\xi > 0$ . Οι απόλυτες τιμές  $|q_n \xi - p_n|$  εκφράζουν τα μήκη των κατακόρυφων τμημάτων που έχουν άκρα τα σημεία  $(q_n, p_n)$  και τα σημεία της ευθείας  $(q_n, q_n \xi)$ . Η ανισότητα Γ.1 του Θ.4.5.1,  $|q_{n+1} \xi - p_{n+1}| < |q_n \xi - p_n|$ , εκφράζει ότι τα μήκη αυτών των τμημάτων ελαττώνονται συνεχώς, αλλά εδώ δεν υπάρχει τελευταίο αναγώγημα και δεν έχουμε μηδενισμό κάποιας διαφοράς, όπως στους ρητούς, αφού  $\xi$  άρρητος, οπότε για κάθε αναγώγημα  $|q_n \xi - p_n| > 0$ .

Τα πολυγωνικά μονοπάτια των άρτιων και το αντίστοιχο των περιττών αναγωγημάτων, σχηματίζονται και πάλι. Επίσης, από την 2.6, επειδή και η ακολουθία  $p_n$  (υποθέσαμε  $\xi$  θετικό, άρα  $a_0 \geq 0$ ) είναι αύξουσα, κάθε επόμενο από το τρέχον παραστατικό σημείο κάποιου αναγωγήματος, θα βρίσκεται «πάνω» ή «δεξιά και πάνω» από το προηγούμενο.

**Παράδειγμα :** η διαδικασία για την  $\sqrt{3}$



**4.7. Σύγκριση**

**4.7.1.Θεώρημα:** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα συνεχή κλάσματα  $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots]$  και  $b = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots]$  τα οποία έχουν ίσα τα πρώτα  $n$  μερικά πηλικά (τα μερικά πηλικά με δείκτες  $0, 1, 2, \dots, n-1$ ), αλλά όχι το  $n$ -στό, δηλαδή για  $i \leq n-1$ , έχουμε  $a_i = b_i$ , αλλά  $a_n \neq b_n$ .

- ο Αν  $n$  ,άρτιος, τότε  $a > b \Leftrightarrow a_n > b_n$
- ο Αν  $n$  περιττός, τότε  $a > b \Leftrightarrow a_n < b_n$

**Απόδειξη:** Είναι ίδια με την απόδειξη του Θ.3.7.1., απλά τώρα τα πλήρη πηλικά  $k$  τάξης των αναπτύγματος των  $a$  και  $b$ , είναι τα  $z_k^a = [a_k, a_{k+1}, \dots]$ ,  $z_k^b = [b_k, b_{k+1}, \dots]$  αντίστοιχα. Επαναλαμβάνουμε μόνο το συμπέρασμα:

Αν τα αναπτύγματα των δύο αρρήτων  $a, b$  έχουν ίσα κάποια αρχικά μερικά πηλικά, και το πρώτο στο οποίο διαφέρουν έχει άρτιο δείκτη, τότε ότι σχέση έχουν τα μερικά πηλικά με αυτόν τον άρτιο δείκτη, την ίδια θα έχουν και τα πλήρη πηλικά.



Τα μερικά πηλικά είναι φυσικοί, οι αντίστροφοι των πλήρων πηλίκων είναι αριθμοί μεταξύ 0 και 1, η ανισοτική σχέση των «άρτιων μερικών πηλίκων» μεταφέρεται στους δοσμένους αρρήτους. Αν το πρώτο μερικό πηλίκο στο οποίο διαφέρουν έχει περιττό δείκτη, τότε οι άρρητοι  $a, b$  ικανοποιούν την αντίστροφη ανισότητα από εκείνη των μερικών πηλίκων με τον συγκεκριμένο περιττό δείκτη.

**4.7.2. Παρατήρηση.** Το θεώρημα ισχύει και αν κάποιος από του  $a, b$  είναι ρητός. Ιδιαίτερα, για την σύγκριση ρητού,  $a$ , και αρρήτου,  $b$ , που έχει τα πρώτα  $n$  μερικά πηλικά ίδια με του ρητού  $a$ , έχουμε (η απόδειξη όπως στο Θ.3.7.1):

**Αν**  $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$  και  $b = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots]$ , **τότε**  $a > b \Leftrightarrow n$  άρτιος

Αν όλα τα μερικά πηλικά του ρητού  $a$  είναι ίσα με ένα αρχικό πλήθος μερικών πηλίκων του αρρήτου  $b$ , τότε  $a > b$  μόνον όταν το πλήθος αυτό είναι άρτιο, δηλ. μόνον όταν το τελευταίο μερικό πηλίκο του  $a$  έχει περιττό δείκτη (αρχίζουμε από το  $a_0$ ).

#### Παραδείγματα:

1.  $[1, 2, 3, 4, 5] < [1, 2, 5, 4, 3, \dots]$ ,  $[29, 2, 59, 20, \dots] > [29, 2, 59]$ ,  $[1, 2, 3, 4, 5, \dots] > [1, 2, 3, 5, 4, \dots]$ .

2.  $[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2] < [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] = [1, \overline{1, 2}] < [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 3]$ .

Αν αλλάξουμε σύμβολα, για τις ανισότητες του παραδείγματος 2, μπορούμε να γράψουμε

$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ . Είναι οι προσεγγίσεις για την  $\sqrt{3}$  που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης στο

τρίτο θεώρημα της πραγματείας «Κύκλου Μέτρησης»: «Παντός κύκλου ή περιμέτρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἐβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἐβδομηκοστομόνοις» ( $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ , Σταμάτης, 1970: 222).

Ο Αρχιμήδης δεν έδωσε κάποια εξήγηση για το πώς κατέληξε στις συγκεκριμένες ρητές προσεγγίσεις της  $\sqrt{3}$ .

Κατά την προσφιλή του μέθοδο, ανακοίνωνε τις ανακαλύψεις του χωρίς αποδείξεις γιατί δεν ήθελε να στερήσει από τους μαθηματικούς την μέγιστη ευχαρίστηση: να δημιουργήσουν οι ίδιοι την απόδειξη μετά από εντατική διανοητική δραστηριότητα (και πράγματι, όπως γνωρίζουμε, οι μαθηματικοί, ανέπτυξαν πολλές και διαφορετικές μεθόδους προσέγγισης της  $\sqrt{3}$  και πιθανόν να επινοήσουν και άλλες, γιατί είναι αδύνατη κάποια επιβεβαίωση από τον ίδιο).

Τα αναγωγήματα της  $\sqrt{3}$  είναι :  $1, 2, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \frac{5042}{2911}, \dots$  Ο ρητός  $\frac{265}{153}$  είναι το αναγωγήμα  $8^{\text{ης}}$  τάξης, άρα μικρότερος της  $\sqrt{3}$ , και, σύμφωνα με το

$$\Theta.4.5.1.B. \text{ θα έχουμε } \left| \sqrt{3} - \frac{265}{153} \right| < \frac{1}{153^2} = \frac{1}{23409} < \frac{1}{20000} = 0.5 \cdot 10^{-4}.$$

Ο ρητός  $\frac{1351}{780}$  είναι το αναγωγήμα  $11^{\text{ης}}$  τάξης, άρα μεγαλύτερος από την  $\sqrt{3}$  και θα ισχύει:  $\left| \sqrt{3} - \frac{1351}{780} \right| < \frac{1}{780^2} = \frac{1}{608400} < \frac{1}{200000} = 0.5 \cdot 10^{-5}.$

## 4.8. Σειρές

**4.8.1.** Αν μας δοθεί η ακολουθία  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τα «μερικά αθροίσματα»  $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων λέγεται (άπειρη) σειρά και παριστάνεται με ένα από τα σύμβολα:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \sum_1^{\infty} a_k$ . Ο  $k$  είναι «πλασματικός δείκτης» και μπορεί να αντικατασταθεί με κάποιο άλλο γράμμα, π.χ.  $n, m, r$ .

Πολλές φορές αρχίζουμε με δείκτη 0, π.χ. την  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$ , μπορούμε να την συμβολίσουμε με  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ , ή με  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ , ή  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m}$  κλπ. Αν  $p \geq 0$ , το σύμβολο  $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$  σημαίνει ότι και το  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , όπου  $b_k = a_{p+k-1}$ . Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεων ή όταν η αρχική τιμή του δείκτη δεν μας ενδιαφέρει, γράφουμε απλά:  $\sum a_k$  ή  $\sum a_n$ . Αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων και είναι ο πραγματικός αριθμός  $S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ , τότε λέμε ότι η σειρά  $\sum_1^{\infty} a_k$  είναι συγκλίνουσα, έχει άθροισμα  $S$  και γράφουμε  $\sum_1^{\infty} a_k = S$ . Αν η ακολουθία  $(s_n)$  αποκλίνει, τότε η σειρά  $\sum_1^{\infty} a_k$  λέγεται αποκλίνουσα. Το σύμβολο  $\sum_1^{\infty} a_k$  για μια συγκλίνουσα σειρά σημαίνει και τη σειρά (δηλ. την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων) και το άθροισμά της (δηλ. το όριό της).

Από τις ιδιότητες των ορίων καταλαβαίνουμε ότι οι η πρόσθεση ή η αφαίρεση ενός πεπερασμένου πλήθους όρων δεν επιδρά στη σύγκλιση ή στην απόκλιση της σειράς, όμως (αν η σειρά συγκλίνει) μπορεί να αλλάξει το άθροισμά της. Οι δύο σειρές  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ,  $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$  ή συγκλίνουν ή αποκλίνουν και οι δύο. Αν συγκλίνουν και  $s_n$ ,  $t_n$  τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα, τότε  $t_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+n-1} = s_{n+p-1} - s_{p-1}$ .

Αν  $p = 1$ , τότε για τα όρια θα έχουμε  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Αν  $p = 4$ , για την  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$  θα έχουμε:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{5^k}$ ,  $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}$

#### 4.8.2. Εναλλασσόμενες σειρές.

**Οι σειρές που έχουν τη μορφή  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ , όπου κάθε  $a_n > 0$ , λέγονται εναλλασσόμενες. Από το 1705 ο Leibniz (1646-1727) παρατήρησε ότι αν η ακολουθία  $(a_n)$  είναι φθίνουσα με όριο το 0, τότε η εναλλασσόμενη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  (ή  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ) συγκλίνει. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω **θεώρημα** που λέγεται και**

**κανόνας του Leibniz:**

**Αν** η ακολουθία θετικών όρων,  $a_n$ , είναι γνήσια φθίνουσα με όριο 0, **τότε** η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  συγκλίνει. **Αν**  $S$  είναι το άθροισμα της σειράς και  $s_n$  το  $n$ -τάξης μερικό άθροισμά της, **τότε** ισχύουν οι ανισότητες:  $0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1}$  για κάθε  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

**Απόδειξη:**

Για τα μερικά αθροίσματα  $s_{2n}$  με άρτιο πλήθος όρων έχουμε:  $s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ , δηλ.το  $s_{2n}$  είναι άθροισμα  $n$  θετικών όρων (αφού  $a_n$  γνήσια φθίνουσα) και  $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$ .

#### Κ4: Άρρητοι και άπειρα συνεχή κλάσματα

Επίσης:  $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$ , δηλ.  $s_{2n} < a_1$ . Η ακολουθία  $s_{2n}$  είναι λοιπόν γνήσια αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει, έστω  $S_1$  το όριό της.

Για τα μερικά άθροίσματα  $s_{2n-1}$  με περιττό πλήθος όρων έχουμε:  $s_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}$ , δηλ.το  $s_{2n-1}$  είναι άθροισμα  $n$  θετικών όρων ( $a_n$  γνήσια φθίνουσα) και  $s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} < 0$ . Επίσης:  $s_{2n-1} > a_1 - a_2$ , δηλ. η ακολουθία  $s_{2n-1}$  είναι γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα συγκλίνει, έστω  $S_2$  το όριο της ( $s_{2n-1}$ ).

$$\text{Από τις ιδιότητες των ορίων παίρνουμε : } S_1 - S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n-1}).$$

Τελικά  $S_1 - S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_{2n}) = 0$ , γίνεται δηλ. η ακολουθία  $s_n$  σύνθεση ( τμήμα 4.2.2.) των

$$s_{2n}, s_{2n-1} \text{ που έχουν κοινό όριο, άρα } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = S_1 = S_2 = S.$$

Επειδή  $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} < 0$  (υποθέσαμε ότι η  $(a_n)$  είναι ακολουθία θετικών όρων), θα έχουμε και  $s_{2n} < s_{2n-1}$ .

Ο αριθμός  $S$  είναι το supremum της ακολουθίας  $s_{2n}$ , και επίσης το infimum της  $s_{2n-1}$ .

Θα έχουμε λοιπόν :

$$s_2 < s_4 < s_6 < \dots < s_{2n} < s_{2n+2} \dots < \sup s_{2k} = S = \inf s_{2k-1} < \dots < s_{2n+1} < s_{2n-1} < \dots < s_3 < s_1.$$

Από τις  $s_{2n} < s_{2n+2} < S$  και  $S < s_{2n+1} < s_{2n-1}$  παίρνουμε τις

$$0 < S - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \text{ και } 0 < s_{2n-1} - S < s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \text{ οι οποίες ενοποιούνται στην}$$

$$0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι αν η  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  είναι μια εναλλασσόμενη σειρά που ικανοποιεί

τις συνθήκες του Θ. Leibniz, τότε το  $n$ -τάξης μερικό άθροισμα  $s_n$  προσεγγίζει το άθροισμα της σειράς με σφάλμα του οποίου η απόλυτη τιμή είναι μικρότερη από την τιμή του  $a_{n+1}$ . Από την  $0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1}$  παρατηρούμε ότι το πρόσημο της διαφοράς είναι το πρόσημο που έχει ο  $a_{n+1}$  στην εναλλασσόμενη σειρά.

Π.χ. Για την γεωμετρική σειρά  $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots$ , οι προϋποθέσεις του  $\Theta$ .

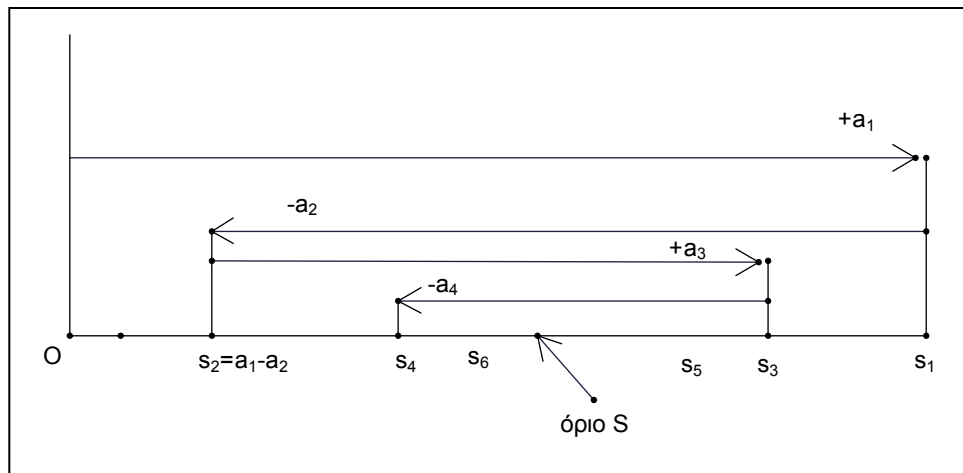
Leibniz ικανοποιούνται και αν αποκοπούν οι όροι της σειράς μετά τον  $8^{\circ}$ , τότε το άθροισμα που «χάνεται» είναι θετικό και μικρότερο του  $a_9 = \frac{1}{256}$ .

Πράγματι,  $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$  και

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} = 0.6640625. \text{ Η διαφορά } \frac{2}{3} - 0.6640625 = 0.002604166$$

είναι θετική και μικρότερη του  $a_9 = \frac{1}{256} = 0.00390625$ .

Μια ιδέα του τρόπου με τον οποίο προσεγγίζουν τα μερικά αθροίσματα της σειράς το όριό της μας δίνει η παρακάτω : **Εικόνα 4.8.2.**



Το  $s_1$  είναι σε απόσταση  $a_1$  από τον κατακόρυφο άξονα. Επειδή  $a_2 < a_1$ , το  $s_2$  θα είναι δεξιότερα από την αρχή των αξόνων. Προσθέτοντας  $a_3$  δεν θα φτάσουμε το  $s_1$  γιατί  $a_3 < a_2$  κλπ. Το μέγεθος κάθε βήματος είναι μικρότερο από το προηγούμενο. Το πλάτος της ταλάντωσης γύρω από το όριο  $S$  συνεχώς ελαττώνεται και πλησιάζει το  $0$ , όπως το όριο της  $(a_n)$ .

**Παρατήρηση:** Αν η  $(a_n)$  είναι φθίνουσα, πιθανόν κάποιες διαφορές  $a_n - a_{n+1}$  να μηδενίζονται, οπότε στην απόδειξη θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το «άθροισμα θετικών όρων» με το «άθροισμα μη αρνητικών όρων». Εφόσον ικανοποιούνται και οι άλλες δύο προϋποθέσεις,  $a_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , όπως φαίνεται και από την απόδειξη, το  $\Theta$ . Leibniz ισχύει.

**4.8.3.**

Για την ύπαρξη του ορίου των αναγωγημάτων του συνεχούς κλάσματος  $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$  μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής: Από την συνέπεια 3 της θεμελιώδους

ιδιότητας των αναγωγημάτων (τμήμα 2.7), έχουμε :  $c_{n-1} - c_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$ ,  $\forall n \geq 1$ , οπότε

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}, \quad \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_{n-2}}, \dots, \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{(-1)^2}{q_2 q_1}, \quad \frac{p_0}{q_0} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{(-1)^1}{q_1 q_0}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε  $-\frac{p_n}{q_n} + \frac{p_0}{q_0} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_{n-2}} + \dots + \frac{1}{q_2 q_1} + \frac{-1}{q_1 q_0}$ ,

ή  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_{n-2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}$  ή καλύτερα  $\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}$  [1]

Από τις ιδιότητες της ακολουθίας  $(q_k)$  (τμήμα 2.6.2) συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία θετικών

όρων:  $t_n = \frac{1}{q_{n-1} q_n}$  είναι γνήσια φθίνουσα με όριο το 0 (ισχύει:

$0 < 1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n < q_{n+1} < \dots$  δηλ.  $q_n > q_{n-1}$  για  $n \geq 2$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ ).

Επομένως, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Leibniz και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων  $\frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_2 q_3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$  συγκλίνει. Η πρόσθεση του  $\frac{p_0}{q_0}$  δεν επιδρά στη σύγκλιση.

Άρα υπάρχει το  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$  και

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_0}{q_0} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_2 q_3} - \dots$$

Το όριο αυτής της σειράς είναι η τιμή του συνεχούς κλάσματος, δηλ., αν  $x$  είναι η τιμή του

ορίου, μπορούμε να γράψουμε  $x = [a_0, a_1, a_2, \dots] = \frac{p_0}{q_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$ .

Η [1] δείχνει ότι ο υπολογισμός των αναγωγημάτων  $c_n$ , εξαρτάται από τον πρώτο όρο, τον  $a_0$  (αφού  $p_0 = a_0$ ,  $q_0 = 1$ ,  $a_0$  είναι το ακέραιο μέρος του  $x$ ) και τις τιμές των  $q_n$ .

Το  $c_n$  δεν εξαρτάται από τα  $p_n$  :  $c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}$ .

Για παράδειγμα, αν έχουμε το  $[1,2,2,2,2,2,\dots]$ , η ακολουθία  $(q_k)$  είναι η :  $1,2,5,12,29,\dots$ (από τον αλγόριθμο των αναγωγημάτων, Θ.2.6.1) και μπορούμε να υπολογίσουμε τα αναγωγήματα από τα μερικά αθροίσματα της παραπάνω σειράς:

$$1, 1 + \frac{1}{1*2} = \frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{1*2} - \frac{1}{2*5} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5},$$

$$1 + \frac{1}{1*2} - \frac{1}{2*5} + \frac{1}{5*12} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{60} = \frac{17}{12}, 1 + \frac{1}{1*2} - \frac{1}{2*5} + \frac{1}{5*12} - \frac{1}{12*29} = \frac{41}{29} \text{ κλπ.}$$

Αν  $S$  είναι το όριο της σειράς  $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ ,  $(\sum_1^\infty (-1)^{n-1} t_n, t_n = \frac{1}{q_{n-1} q_n}, n = 1, 2, \dots)$  και  $s_n$  ένα

μερικό άθροισμα,  $s_n = \sum_1^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$ , γνωρίζουμε από το Θ. Leibniz, ότι

$$0 < (-1)^n (S - s_n) < t_{n+1} \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Όμως } 0 < (-1)^n (0 + S - s_n) < t_{n+1} \Leftrightarrow 0 < (-1)^n (a_0 - a_0 + S - s_n) < t_{n+1},$$

δηλ.  $0 < (-1)^n ((a_0 + S) - (a_0 + s_n)) < t_{n+1}$  και τώρα τα  $a_0 + S, a_0 + s_n$  είναι αντίστοιχα το όριο

$$\text{και το μερικό άθροισμα } n \text{-τάξης της σειράς } a_0 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$$

Για άρτιο δείκτη,  $2n$ , θα έχουμε  $0 < ((a_0 + S) - (a_0 + s_{2n})) < \frac{1}{q_{2n} q_{2n+1}}$  και για περιττό,  $2n-1$ , θα

έχουμε  $0 < (a_0 + s_{2n-1}) - (a_0 + S) < \frac{1}{q_{2n-1} q_{2n}}$ . Βρίσκουμε και πάλι ότι το όριο είναι

μεγαλύτερο από όλα τα αναγωγήματα άρτιας τάξης, αφού αυτά είναι τα  $a_0 + s_{2n}$  και ανάλογα, μικρότερο από όλα τα αναγωγήματα περιττής τάξης.

Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο  $x$  για την τιμή του ορίου, και  $\frac{p_n}{q_n}$  για τα μερικά

αθροίσματα  $n$ -τάξης, που τώρα είναι τα αναγωγήματα του συνεχούς κλάσματος, τότε για

κάθε αναγωγήμα ισχύει:  $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$  και  $\left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}}$ . Από τις ιδιότητες της

ακολουθίας  $(q_k)$  συμπεραίνουμε (όπως και στο Θ.4.5.1.), ότι κάθε επόμενο αναγωγήμα

βρίσκεται πλησιέστερα στο όριο, αφού  $\left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$ .

Η διαφορά της εικόνας 4.6.1.α με την εικόνα 4.8.2. είναι τελικά μόνον στο  $c_0$ .

### 4.9. Ισοδύναμοι αριθμοί

**4.9.1.** Σε κάθε όρο μιας ακολουθίας  $(a_n)$  είναι συνδεδεμένες δύο έννοιες: η τάξη « $n$ » και η τιμή του όρου, π.χ. στην  $a_n = 2^n$ , αν αρχίσουμε με  $n=1$ , τότε ο  $10^{05}$  όρος (τάξη) είναι ο 1024 (τιμή), γράφουμε  $a_{10} = 1024$ . Αν θεωρήσουμε **όλους** τους όρους μιας ακολουθίας με τάξη μεγαλύτερη από κάποιον φυσικό, π.χ. τους όρους με τάξη μεγαλύτερη του  $10^6$ , λέμε ότι αυτοί οι όροι συγκροτούν ένα **τελικό τμήμα** της ακολουθίας. Δηλ. τελικά τμήματα παίρνουμε αν «κόψουμε» κάποιο πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων. Από την θεωρία της συγκλίσεως είναι γνωστό ότι η σύγκλιση ή η απόκλιση δεν επηρεάζονται από την πρόσθεση ή αφαίρεση πεπερασμένου πλήθους αρχικών όρων στην ακολουθία και επίσης, το όριο, όταν υπάρχει, είναι το ίδιο με το όριο ενός τελικού τμήματος της ακολουθίας. Οι ακολουθίες  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  και  $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n}, \dots$  για κάθε φυσικό  $k$ , ή αποκλίνουν, ή συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Στην ενότητα αυτή θα διερευνήσουμε την σχέση που υπάρχει μεταξύ των τιμών των **συνεχών κλασμάτων με το ίδιο τελικό τμήμα**, δηλ. τη σχέση μεταξύ των  $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots]$  και  $y = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, c_0, c_1, c_2, \dots]$ .

**4.9.2. Ορισμός:** Ένας πραγματικός αριθμός  $s$  ονομάζεται ισοδύναμος με τον  $t$ , συμβολικά  $s \sim t$ , αν υπάρχουν ακέραιοι  $a, b, c, d$ , που ικανοποιούν τη συνθήκη  $ad - bc = \pm 1$  (διαφορετικά  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1$ ) και τέτοιοι ώστε:  $s = \frac{at+b}{ct+d}$ , π.χ. οι αριθμοί  $\sqrt{2}$  και  $\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1}$  είναι ισοδύναμοι, γιατί  $2*1-3*1 = -1$ .

**4.9.3. Θεώρημα:** Η σχέση « $\sim$ » όπως περιγράφεται στον ορισμό 4.9.2. είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

**Απόδειξη:**

1. ανακλαστική:  $x \sim x$ , γιατί μπορούμε να γράψουμε  $x = \frac{ax+b}{cx+d}$  με  $a=1, b=0, c=0, d=1$

και για τους ακεραίους  $a, b, c, d$  ισχύει:  $ad - bc = 1$ .

2. Συμμετρική: Αν  $x \sim y$ , δηλ.  $x = \frac{ay+b}{cy+d}$  με ακεραίους  $a, b, c, d$  για τους οποίους ισχύει:

$ad - bc = \pm 1$ , τότε  $y = \frac{-dx+b}{cx-a} = \frac{Ax+B}{Cx+D}$  με  $AD - BC = (-d)(-a) - bc = ad - bc = \pm 1$ ,

άρα και  $y \sim x$ .



3. Μεταβατική: Αν  $x \sim y$ , δηλ.  $x = \frac{ay + b}{cy + d}$  και  $y \sim z$ , δηλ.  $y = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$  με ακεραίους

$a, b, c, d$  και  $a', b', c', d'$  για τους οποίους ισχύει:  $ad - bc = \pm 1$ ,  $a'd' - b'c' = \pm 1$ , τότε:

$$x = \frac{a \left( \frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) + b}{c \left( \frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) + d} = \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'} = \frac{Kz + L}{Mz + N} \text{ με}$$

$$\begin{aligned} KN - LM &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') = aa'dd' + bb'cc' - ab'c'd - a'bcd' = \\ &= a'd'(ad - bc) - b'c'(ad - bc) = (ad - bc)(a'd' - b'c') = (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \end{aligned}$$

Η ισοδυναμία « $\sim$ » διαμερίζει το σύνολο των πραγματικών σε κλάσεις ισοδυναμίας (σύνολα μη κενά, ανά δύο ξένα, των οποίων η ένωση είναι το  $\mathbb{R}$ ).

#### 4.9.4. Παρατηρήσεις:

1. Αν θεωρήσουμε ένα τελικό τμήμα της ακολουθίας  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , π.χ. το  $a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots$ , τότε το τελικό αυτό τμήμα είναι το πλήρες πηλίκο  $k+1$  τάξης του  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , το  $z_{k+1}$ . Ας ονομάσουμε  $w$  την τιμή του  $[a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots]$ . Τότε (τα όρια υπάρχουν):

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, w] = \frac{p_k w + p_{k-1}}{q_k w + q_{k-1}}$$

με  $q_k * p_{k-1} - p_k * q_{k-1} = (-1)^k = \pm 1$  και  $w = \frac{xq_{k-1} - p_{k-1}}{p_k - xq_k} = \frac{xq_{k-1} - p_{k-1}}{x(-q_k) + p_k}$ , όπου και πάλι

$p_k * q_{k-1} - ((-q_k) * (-p_{k-1})) = \pm 1$  (από την θεμελιώδη ιδιότητα των αναγωγημάτων, τμήμα 2.7). Έχουμε λοιπόν  $x \sim w$ , δηλ. ένα συνεχές κλάσμα είναι ισοδύναμο με οποιοδήποτε τελικό τμήμα του ή διαφορετικά, ισοδύναμο με κάθε πλήρες πηλίκο του.

2. Αν  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, z_{n+1}^\alpha]$ ,  $\beta = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, z_{m+1}^\beta]$  και  $z_{n+1}^\alpha = z_{m+1}^\beta$  (πλήρη πηλίκα), τότε  $\alpha \sim \beta : \alpha = \frac{z_{n+1}^\alpha p_n + p_{n-1}}{z_{n+1}^\alpha q_n + q_{n-1}}$ ,  $\beta = \frac{z_{m+1}^\beta p_m + p_{m-1}}{z_{m+1}^\beta q_m + q_{m-1}}$ , ( $\alpha \sim z_{n+1}^\alpha \sim z_{m+1}^\beta \sim \beta$ ).

3. Για δοθέντα αριθμό  $s$  οι  $s$  και  $s+k$  ( $k$  ακέραιος), καθώς και οι  $s, \frac{1}{s}$  είναι ισοδύναμοι. Ισοδύναμοι με τον  $s$  είναι επίσης και οι  $k + \frac{1}{s}, \frac{1}{s+k}$ .

#### 4.9.5. Θεώρημα: Οποιοιδήποτε δύο ρητοί αριθμοί είναι ισοδύναμοι.

##### Απόδειξη:

Αν  $p, q$  είναι ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η διοφαντική εξίσωση  $px - qy = 1$ , έχει (πάντα) λύση, δηλ. υπάρχουν ακέραιοι  $x, y$ , ώστε  $\frac{p}{q} = \frac{y \cdot 0 + p}{x \cdot 0 + q}$  με  $qy - px = -1$ , άρα  $\frac{p}{q} \sim 0$ .

Αφού κάθε ρητός είναι ισοδύναμος με τον 0, η μεταβατικότητα της σχέσης « $\sim$ » εξασφαλίζει την ισοδυναμία του με κάθε άλλο ρητό.

**Παρατήρηση:** Έχουμε αποδείξει στο K3 (Θ.3.2.2.) ότι το ανάπτυγμα κάθε ρητού μπορεί να είναι της μορφής  $r = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, 1]$ , οπότε  $r \sim 1$  (από την παρατήρηση 4.9.4.), για κάθε ρητό  $r$  και καταλήγουμε και πάλι στην ισοδυναμία όλων των ρητών.

#### 4.9.6.

Επειδή όλοι οι ρητοί είναι ισοδύναμοι, η παραπάνω σχέση ισοδυναμίας δεν έχει κάποιο ενδιαφέρον για το σύνολο των ρητών. Διαμερίζει όμως το σύνολο των αρρήτων σε κλάσεις ισοδυναμίας των οποίων τα στοιχεία, οι άρρητοι  $\xi$ , όπως θα δούμε στο K5, έχουν την ίδια «βέλτιστη» σταθερά  $A$  στην ανισότητα:  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Aq^2}$ , που ικανοποιούν οι άπειρες ρητές προσεγγίσεις τους

#### 4.9.7.

Στην παρατήρηση 4.9.4:1 είδαμε ότι αν  $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, w] = \frac{p_k w + p_{k-1}}{q_k w + q_{k-1}}$ ,

τότε  $x \sim w$ . Για τους ακέραιους αριθμούς  $p_k, q_k, p_{k-1}, q_{k-1}$  και τον άρρητο  $w$  θα έχουμε:

(α) Από τις ιδιότητες της ακολουθίας  $(q_k)$  και των πλήρων πηλίκων  $z_k : q_k > q_{k-1} > 0$ , για  $k > 1$  και  $z_{k+1} > 1$  για  $k \geq 0$ . Ο  $w$  είναι το πλήρες πηλίκο  $k+1$  τάξης. (β). Οι ρητοί  $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}, \frac{p_k}{q_k}$

είναι διαδοχικά αναγωγήματα του αρρήτου  $x$ . (γ). Η θεμελιώδης ιδιότητα των αναγωγημάτων είναι:  $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$ , για κάθε  $k \geq 0$ . Είναι φανερό ότι ο ορισμός 4.9.2. «φωτογραφίζει» την ισοδυναμία ενός αρρήτου με κάθε πλήρες πηλίκο του. Το παρακάτω θεώρημα βεβαιώνει ότι η ισοδυναμία αρρήτων επιστρέφει τις ιδιότητες  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**Θεώρημα:**

Αν  $x \sim y$ , δηλ.  $x = \frac{Ay + B}{Cy + D}$  με  $y > 1$  και τους  $A, B, C, D$  ακεραίους για τους οποίους ισχύουν:  $C > D > 0$  και  $AD - BC = \pm 1$ ,

τότε  $\frac{B}{D}, \frac{A}{C}$  είναι διαδοχικά αναγωγήματα του συνεχούς κλάσματος που έχει τιμή  $x$ .

Αν το  $\frac{B}{D}$  είναι το αναγώγημα  $n-1$  τάξης και το  $\frac{A}{C}$  είναι το αναγώγημα  $n$ -τάξης,

τότε  $y$  είναι το πλήρες πηλίκο  $n+1$  τάξης, δηλ. ισχύουν οι:

$$\frac{B}{D} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}], \frac{A}{C} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n], x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, y].$$

**Απόδειξη:** Αναπτύσσουμε το  $\frac{A}{C}$  σε συνεχές κλάσμα, έστω  $\frac{A}{C} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$

.Από την υπόθεση  $AD - BC = \varepsilon = \pm 1$ , συμπεραίνουμε ότι  $MK\Delta(A, C) = 1$ .

Από το θεώρημα 3.2.2., μπορούμε να επιλέξουμε το  $n$  να είναι άρτιος ή περιττός, δηλ. μπορούμε να επιλέξουμε το  $n$  έτσι ώστε  $q_{n-1}p_n - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} = \pm 1 = \varepsilon$ , όπως και η παράσταση  $AD - BC = \varepsilon$ . Έχουμε λοιπόν:  $MK\Delta(A, C) = 1$ ,  $MK\Delta(p_n, q_n) = 1$ ,  $C > 0$ ,  $q_n > 0$  και  $\frac{A}{C} = \frac{p_n}{q_n}$ , άρα  $A = p_n$ ,  $C = q_n$  (αν έχουμε ίσα ανάγωγα κλάσματα  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ , με θετικούς παρονομαστές, τότε  $\alpha\delta = \beta\gamma$ , άρα  $\alpha/\gamma, \gamma/\alpha$  και τελικά:  $\alpha = \gamma$  και  $\beta = \delta$ ).

$$\text{Επίσης: } p_n D - q_n B = (-1)^{n-1}, \text{ δηλ. } q_{n-1} p_n - p_{n-1} q_n = D p_n - B q_n$$

ή  $(B - p_{n-1}) q_n = p_n (D - q_{n-1})$ . Από την τελευταία, επειδή  $MK\Delta(p_n, q_n) = 1$ , συμπεραίνουμε ότι

$$q_n / (D - q_{n-1}). \text{ Αλλά } q_n = C > D > 0, q_n \geq q_{n-1} > 0, \text{ άρα } |D - q_{n-1}| < q_n \text{ και από τις}$$

$$q_n / (D - q_{n-1}), (B - p_{n-1}) q_n = p_n (D - q_{n-1}) \text{ έπεται ότι } D = q_{n-1} \text{ και } B = p_{n-1}, \text{ δηλ.}$$

$$\frac{B}{D} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}].$$

$$\text{Η } x = \frac{Ay + B}{Cy + D} \text{ γίνεται } x = \frac{p_n y + p_{n-1}}{q_n y + q_{n-1}}, \text{ δηλ. } x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, y]. \text{ Αλλά } y > 1 \text{ οπότε}$$

αν αναπτύξουμε το  $y$  σε συνεχές κλάσμα, θα έχουμε  $y = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$  με  $a_{n+1} \geq 1$  και

$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots]$ , ένα απλό συνεχές κλάσμα με  $y$  το πλήρες πηλίκο  $(n+1)$ -τάξης.

#### 4.9.8. Θεώρημα(Lagrange).

Αν οι άρρητοι  $x, y$  έχουν ίσα τελικά τμήματα  $c_0, c_1, c_2, \dots$  (δηλ. αν διαφέρουν μόνο κατά πεπερασμένο αριθμό αρχικών μερικών πηλίκων), τότε είναι ισοδύναμοι και αντιστρόφως:

i. Αν  $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots]$  και  $y = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, c_0, c_1, c_2, \dots]$ , τότε  $x \sim y$  και

ii. Αν  $x \sim y$ , τότε  $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots]$  και  $y = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, c_0, c_1, c_2, \dots]$ .

#### Απόδειξη:

i. Ας ονομάσουμε  $w$  την τιμή του  $[c_0, c_1, c_2, \dots]$ .

Τότε (τα όρια υπάρχουν):

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, w] = \frac{p_m w + p_{m-1}}{q_m w + q_{m-1}}$$

με  $q_m p_{m-1} - p_m q_{m-1} = (-1)^m = \pm 1$ , δηλ.  $x \sim w$ .

$$\text{Επίσης } y = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, c_0, c_1, c_2, \dots] = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, w] = \frac{p'_n w + p'_{n-1}}{q'_n w + q'_{n-1}},$$

με  $q'_n p'_{n-1} - q'_{n-1} p'_n = (-1)^n = \pm 1$ , άρα  $y \sim w$ .

Από την μεταβατική ιδιότητα της ισοδυναμίας έχουμε  $x \sim y$ .

ii. Έστω τώρα  $x \sim y$ , δηλ.  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  με  $a, b, c, d$  ακεραίους, για τους οποίους ισχύει:

$ad - bc = \pm 1$ . Υποθέτουμε ότι  $cx + d > 0$  (Αν είναι  $cx + d < 0$ , τότε  $-(cx + d) > 0$  και γράφουμε

$$y = \frac{-ax - b}{-cx - d}, \text{ όπου και πάλι } \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1, \text{ δηλ. ικανοποιείται η συνθήκη της}$$

ισοδυναμίας των  $x, y$  για τους ακεραίους  $-a, -b, -c, -d$ ).

Αναπτύσσουμε τον άρρητο  $x$  σε συνεχές κλάσμα :

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k] = \frac{p_{k-1} x_k + p_{k-2}}{q_{k-1} x_k + q_{k-2}}.$$

Από τον αλγόριθμο της ανάπτυξης του  $x$ , συμπεραίνουμε ότι ο  $x_k$  θα είναι άρρητος και  $x_k > 1$ .

Αντικαθιστούμε τον  $x$  στην  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  και παίρνουμε  $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{A_k x_k + B_k}{C_k x_k + D_k}$ , με

$$A_k = ap_{k-1} + bq_{k-1}, B_k = ap_{k-2} + bq_{k-2}, C_k = cp_{k-1} + dq_{k-1}, D_k = cp_{k-2} + dq_{k-2}.$$

Οι  $a, b, c, d$ ,  $p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2}$  είναι ακέραιοι, οπότε ακέραιοι είναι και οι  $A_k, B_k, C_k, D_k$ .

Οι ακέραιοι αυτοί ικανοποιούν την συνθήκη  $A_k D_k - B_k C_k = \pm 1$ , γιατί

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix} \text{ και } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1, \begin{vmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{vmatrix} = \pm 1, \text{ από την υπόθεση και την}$$

θεμελιώδη ιδιότητα των αναγωγημάτων (η ορίζουσα του γινομένου πινάκων είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών).

Από τις  $C_k = cp_{k-1} + dq_{k-1}, D_k = cp_{k-2} + dq_{k-2}$  παίρνουμε:

$$C_k = q_{k-1} \left( c \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + d \right), D_k = q_{k-2} \left( c \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} + d \right).$$

Το όριο της ακολουθίας των αναγωγημάτων είναι η τιμή  $x$  του συνεχούς κλάσματος και επειδή το όριο εξαρτάται μόνον από τελικά τμήματα θα έχουμε  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = x$ ,

και επίσης  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( c \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + d \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( c \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} + d \right) = cx + d$ . Μπορούμε όμως, όπως παρατηρήσαμε

στην αρχή της απόδειξης του μέρους ii) να πάρουμε τους  $c, d$  ώστε  $cx + d > 0$ , οπότε θα έχουμε τους  $C_k, D_k$  θετικούς, τελικά για όλους τους δείκτες (αφού και  $q_{k-1}, q_{k-2}$  θετικοί).

$$\begin{aligned} \text{Για τον λόγο } \frac{D_k}{C_k} \text{ έχουμε: } \frac{D_k}{C_k} &= \frac{cp_{k-2} + dq_{k-2}}{cp_{k-1} + dq_{k-1}} = \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} + \left( \frac{cp_{k-2} + dq_{k-2}}{cp_{k-1} + dq_{k-1}} - \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \right) = \\ &= \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} + \frac{c(p_{k-2}q_{k-1} - p_{k-1}q_{k-2})}{q_{k-1}(cp_{k-1} + dq_{k-1})} = \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} + \frac{\pm c}{q_{k-1}(cp_{k-1} + dq_{k-1})}. \end{aligned}$$

$$\text{Το όριο της } \frac{\pm c}{cp_{k-1} + dq_{k-1}} \text{ υπάρχει γιατί: } \frac{\pm c}{cp_{k-1} + dq_{k-1}} = \left( \frac{1}{q_{k-1}} \right) \left( \frac{\pm c}{c \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + d} \right),$$

$$\text{και } \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{q_{k-1}} \right) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\pm c}{c \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + d} \right) = \frac{\pm c}{cx + d}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pm c}{cp_{k-1} + dq_{k-1}} = 0 \cdot \frac{\pm c}{cx + d} = 0$$

και επομένως  $\left| \frac{\pm c}{cp_{k-1} + dq_{k-1}} \right| < 1$  τελικά για όλους τους δείκτες.

$$\text{Γίνεται ο λόγος } \frac{D_k}{C_k} = \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} + \frac{1}{q_{k-1}} \left( \frac{\pm c}{cp_{k-1} + dq_{k-1}} \right) = \frac{q_{k-2} + \frac{\pm c}{cp_{k-1} + dq_{k-1}}}{q_{k-1}} < 1 \text{ για}$$

«αρκετά μεγάλα»  $k$ , αφού  $q_{k-1}, q_{k-2}$  θετικοί ακέραιοι, με  $q_{k-1} > q_{k-2}$ , δηλ.  $0 < D_k < C_k$ .

$$\text{Για ένα τέτοιο } k \text{ θα έχουμε : } y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{A_k x_k + B_k}{C_k x_k + D_k}, \quad x_k > 1, \text{ οι } A_k, B_k, C_k, D_k \text{ είναι}$$

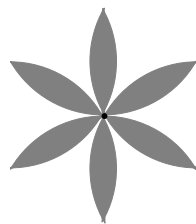
ακέραιοι με  $A_k D_k - B_k C_k = \pm 1$ , και  $0 < D_k < C_k$ .

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα και παίρνουμε  $y = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, x_k]$ .

Αλλά και  $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k]$  και αν  $x_k = [a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$ , τότε, στην ανάπτυξη των  $x, y$  σε συνεχή κλάσματα υπάρχουν δείκτες,  $n, k-1=m$ , ώστε τα επόμενα πλήρη πηλίκα να ταυτίζονται, άρα και τα τελικά τμήματα των ακολουθιών  $(a_n), (b_n)$ .

**Παραδείγματα:** οι αριθμοί  $\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$  είναι ισοδύναμοι, γιατί  $\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$ ,  $1 + \sqrt{2} = [\bar{2}]$ . Επίσης οι  $\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$  είναι ισοδύναμοι, γιατί  $\sqrt{3} = [1, \bar{1}, \bar{2}] = [1, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$ ,  $1 + \sqrt{3} = [\bar{2}, \bar{1}] = [2, 1, 2, 1, \dots]$ . Αλλά οι  $\sqrt{5}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  δεν είναι, γιατί  $\sqrt{5} = [2, \bar{4}]$ ,  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [\bar{1}]$ . Είναι όμως ισοδύναμοι οι  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ , γιατί  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [\bar{1}]$  και  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = [0, \bar{1}]$ .

*\*Η ανάπτυξη της ενότητας 4.9. στηρίχθηκε στα Hardy & Wright, 2008 και Olds, 1963.*



**K5: Η προσέγγιση των αρρήτων****5.1. Η προσπάθεια των ρητών να γνωριστούν με τους αρρήτους.**

**5.1.1.** Για έναν δοσμένο άρρητο  $\xi$  υπάρχουν ρητοί  $p/q$  «κοντά» στον  $\xi$ , ώστε η απόσταση του  $\xi$  από τον  $p/q$ , η  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right|$  να είναι μικρή. Πόσο μικρή; Η πυκνότητα των ρητών

μας επιτρέπει για  $\varepsilon > 0$ , όσο μικρό θέλουμε, να διαλέγουμε  $\frac{p}{q}$ , ώστε  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$  (Γνωρίζουμε

ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο ακολουθίας ρητών καθώς επίσης και όριο ακολουθίας αρρήτων, Νεγρεπόντης κ.α., 1999: 61).

**Ενδιαφερόμαστε για το μέγεθος του  $q$ . Αν δοθούν οι  $\xi$  και  $\varepsilon$ , τότε πόσο μεγάλος πρέπει να είναι ο  $q$ ; Ή αν δοθούν οι  $\xi$  και  $q$ , τότε πόσο μικρός μπορεί να είναι ο  $\varepsilon$ ;** Π.χ. για κάθε  $\varepsilon > 0$ , μπορούμε να βρούμε φυσικούς  $p, q$  (που εξαρτώνται βέβαια από τον  $\varepsilon$ )

ώστε  $\left| \pi - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$ , αλλά, το 1953 ο K. Mahler απέδειξε ότι για κάθε ζεύγος φυσικών  $p$  και  $q$

( $q \geq 2$ ), ισχύει η ανισότητα:  $\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{42}}$  (Δανίκας, 1991).

Αν ο παρονομαστής  $q$  είναι θετικός, η ανισότητα  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$  μπορεί να γραφεί με την μορφή:  $|q\xi - p| < q\varepsilon$ . Αυτή μας οδηγεί στην αναζήτηση του πλησιέστερου ακεραίου στον άρρητο  $q\xi$ . Συνηθίζουμε να θεωρούμε το ρητό κλάσμα  $\frac{p}{q}$  με  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$  (αν υπάρχει αρνητικό πρόσημο στον παρονομαστή, τότε αυτό «αφομοιώνεται» από τον αριθμητή).

**5.1.2.** Αν  $x$  η αληθής ή ακριβής τιμή μιας ποσότητας και  $x^*$  η προσεγγιστική ή η τιμή που υπολογίστηκε, της ίδιας ποσότητας, τότε σφάλμα  $\varepsilon$  ονομάζεται η διαφορά  $\varepsilon = x^* - x$ . Η ποσότητα  $r = x - x^*$  ονομάζεται διόρθωση. Στην πράξη, αντί για το σφάλμα ή τη διόρθωση, χρησιμοποιούμε την απόλυτη τιμή τους, που ονομάζεται απόλυτο σφάλμα. Έτσι για το απόλυτο σφάλμα θα έχουμε  $|\varepsilon| = |r| = |x^* - x|$ . Η υποσυνείδητη σύγκριση του σφάλματος με το μέγεθος της ποσότητας που μετράμε, ονομάζεται σχετικό σφάλμα,  $\delta$ , και για το απόλυτο

σχετικό σφάλμα θα έχουμε  $|\delta| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \left| \frac{x^* - x}{x} \right| \approx \left| \frac{x^* - x}{x^*} \right|$  ( $\approx$ : περίπου ίσο). Πολλές φορές

γράφουμε «σφάλμα» και εννοούμε το απόλυτο σφάλμα. Αυτό φαίνεται από τα συμφοραζόμενα.

**5.1.3.** Αν  $\varepsilon > 0$ , λέμε ότι ο αριθμός  $\alpha$  παριστάνει τον  $A$  κατά προσέγγιση  $\varepsilon$ , όταν  $|A - \alpha| \leq \varepsilon$ . Αν γνωρίζουμε ότι  $\alpha \leq A$ , τότε λέμε ότι ο  $\alpha$  προσεγγίζει τον  $A$  με έλλειψη, αν  $\alpha \geq A$  η προσέγγιση είναι με υπεροχή. **Αν ο  $\alpha$  γνωστός και ο  $A$  άγνωστος, τότε λέμε ότι ο αριθμός  $A$  είναι γνωστός με προσέγγιση  $\varepsilon$ .**

**5.1.4.** Είναι γνωστό (Χατζηδήμος, I, 1978: 3) ότι η στρογγύλευση ενός αριθμού σε  $k$  δεκαδικά ψηφία (δ.ψ.) πετυχαίνεται ως εξής: Παραλείπουμε τα δ.ψ. που υπάρχουν πέρα από την  $k$  δεκαδική θέση, το ψηφίο όμως της  $k$  δεκαδικής θέσης το αφήνουμε όπως είναι ή το αυξάνουμε κατά μία μονάδα, αντίστοιχα με το αν το μέρος που παραλείπεται είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από μισή μονάδα της  $k$  δεκαδικής τάξης που διατηρείται. Στην κρίσιμη περίπτωση όπου το μέρος που παραλείπεται είναι ακριβώς ίσο με μισή μονάδα της  $k$  δεκαδικής τάξης, το ψηφίο της  $k$  τάξης το αφήνουμε όπως είναι ή το αυξάνουμε κατά μία μονάδα αντίστοιχα με το αν αυτό είναι άρτιο ή περιττό (αυτό γίνεται κυρίως για την αποφυγή της μονόπλευρης διόγκωσης των σφαλμάτων κατά τους υπολογισμούς).

Αν θέλουμε π.χ. να στρογγυλευτεί ο αριθμός  $\pi = 3.1415926535\dots$  σε επτά, έξη, πέντε, τέσσερα, τρία, και δύο δ.ψ. βρίσκουμε αντίστοιχα: 3.1415927, 3.141593, 3.14159, 3.1416, 3.142, 3.14. Αν θέλουμε να στρογγυλευτούν οι αριθμοί 0.385 και 0.635 σε δύο δ.ψ. έχουμε αντίστοιχα: 0.38, 0.64. Για το σφάλμα  $\varepsilon$  που προκύπτει από την στρογγύλευση ενός αριθμού

σε  $k$  δ.ψ. θα ισχύει:  $|\varepsilon| \leq \frac{1}{2}10^{-k}$ . Δεν έχουμε όμως μόνο σφάλματα που προκύπτουν από την στρογγύλευση. Για παράδειγμα, κατά την αντικατάσταση μιας σειράς (άθροισμα άπειρου πλήθους όρων) με ένα μερικό άθροισμά της (άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων),

προκύπτει σφάλμα αποκοπής π.χ. για τον υπολογισμό του  $e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  είμαστε αναγκασμένοι

να σταματήσουμε σε κάποιον φυσικό  $n$ , οπότε το σφάλμα είναι:  $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ .

Όταν έχουμε βρει ένα διάστημα εντοπισμού ενός άγνωστου αριθμού  $\xi$  και εφαρμόζουμε μια μέθοδο με την οποία υπολογίζουμε διαδοχικές προσεγγίσεις, δηλ. αριθμούς  $x_n$  με την ακολουθία  $|x_n - \xi|$  φθίνουσα, τότε, όταν λέμε ότι η τελική προσέγγιση  $x_{n+1}$  συμπίπτει με τον  $\xi$  σε  $k$  δ.ψ. εννοούμε ότι οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις  $x_n$  και  $x_{n+1}$  συμπίπτουν σε  $k$  δ.ψ.

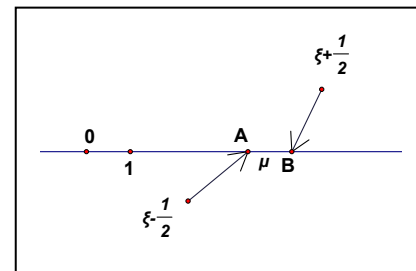


Είναι φανερό ότι αν στρογγυλοποιήσουμε έναν πραγματικό αριθμό  $\xi$  στον πλησιέστερο ακέραιο  $\mu$ , δηλαδή στον ακέραιο  $\mu$  για τον οποίο ελαχιστοποιείται η διαφορά  $|\mu - \xi|$ , το απόλυτο σφάλμα θα είναι το πολύ 0.5. Π.χ. ο 6.37 στρογγυλοποιείται στον 6, ο 9.5 στον 10, ο 4.5 στον 4 (με αυτό παλιότερα, πριν τα 0.5 «κατακτήσουν» βαθμολογικές θέσεις, δεν συμφωνούσαν οι φοιτητές), ο  $\pi$  στον 3 κλπ. Αν στρογγυλοποιήσουμε έναν άρρητο  $\xi$  στον πλησιέστερο ακέραιο  $\mu$ , τότε το απόλυτο σφάλμα είναι πάντα μικρότερο του 0.5.

**5.1.5.Θεώρημα.** Αν  $\xi$  είναι ένας οποιοσδήποτε άρρητος, τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος  $\mu$ , τέτοιος ώστε  $|\xi - \mu| < \frac{1}{2}$ .

**Απόδειξη:** Αν ο  $\xi$  απέχει την ίδια απόσταση από δυο διαδοχικούς ακεραίους  $\nu$  και  $\nu+1$ , θα έπρεπε να είναι ο ρητός  $\frac{\nu + \nu + 1}{2} = \nu + \frac{1}{2}$ , αλλά δεν είναι. Από τις  $|\xi - \nu|$ ,  $|\xi - (\nu + 1)|$  η μία είναι μικρότερη. Διαλέγουμε λοιπόν για  $\mu$  τον ακέραιο  $\nu$ , ή τον  $\nu+1$ , εκείνον που αντιστοιχεί στην μικρότερη διαφορά.

Μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής: Στην πραγματική ευθεία, οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα με μήκος τη μονάδα και άκρα  $A$  και  $B$ , περιέχει ακριβώς έναν ακέραιο, εκτός φυσικά, αν τα  $A$  και  $B$  είναι παραστατικά σημεία ακεραίων. Για τον άρρητο  $\xi$ , οι αριθμοί  $\xi - \frac{1}{2}$  και  $\xi + \frac{1}{2}$  είναι επίσης άρρητοι, άρα τα



παραστατικά τους σημεία  $A$  και  $B$  δεν είναι ακέραιοι. Για τον ακέραιο  $\mu$  που υπάρχει στο ευθ.τμήμα  $AB$ , θα ισχύει:  $\xi - \frac{1}{2} < \mu < \xi + \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\xi - \mu| < \frac{1}{2}$ .

Αν υπάρχει και δεύτερος ακέραιος  $\nu$ , με  $|\xi - \nu| < \frac{1}{2}$ , τότε  $\xi - \frac{1}{2} < \nu < \xi + \frac{1}{2}$ , και στο μοναδιαίου μήκους ευθ. τμήμα  $AB$ , θα είχαμε δύο, διαφορετικούς από τα άκρα, ακεραίους. Επομένως  $\mu = \nu$ , δηλ. ο ακέραιος  $\mu$  είναι μοναδικός. Π.χ. για τον  $\sqrt{3}$  πλησιέστερος ακέραιος είναι ο 2, για τον  $5\sqrt{3}$ , πλησιέστερος ακέραιος είναι ο 9.

**5.1.6.** Στα παραδείγματα του τμήματος 4.5.2. είδαμε ότι ο ρητός  $22/7$  (αναγωγήμα) προσεγγίζει τον  $\pi$  με ακρίβεια 2 δ.ψ. και φυσικά είναι «καλύτερος» από το δεκαδικό κλάσμα  $314/100$ , γιατί όχι μόνο έχει μικρότερο παρονομαστή, αλλά και μικρότερη απόσταση από τον

$$\pi : \left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \frac{1}{7 \cdot 106} = 0.00134... < \left| \pi - \frac{314}{100} \right| = 0.00159... .$$

Για τον ιστορικό άρρητο  $\sqrt{2}$ , αν χρησιμοποιήσουμε δεκαδικά κλάσματα, μπορούμε να γράψουμε μια ακολουθία ανισοτήτων:  $\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}$ ,  $\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100}$ ,  $\frac{1414}{1000} < \sqrt{2} < \frac{1415}{1000}$ , ... . Και εδώ τα αναγωγήματα της ανάπτυξης του  $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$ , δηλ. τα ρητά κλάσματα  $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots$  μας παρέχουν μια μέθοδο αποφυγής της ταχύτατης αύξησης των παρονομαστών. Μπορούμε επίσης να προσεγγίσουμε τον  $\sqrt{2}$  με ρητό κλάσμα που έχει οποιοδήποτε δοσμένο παρονομαστή  $v$ , με απόλυτο σφάλμα μικρότερο του  $1/2v$ , όπως μας βεβαιώνει το παρακάτω θεώρημα.

**5.1.7. Θεώρημα.** Αν  $\xi$  είναι ένας οποιοσδήποτε άρρητος και  $v$  ένας θετικός ακέραιος, τότε υπάρχει ρητός με παρονομαστή  $v$ , π.χ.  $\frac{\mu}{v}$ , τέτοιος ώστε  $-\frac{1}{2v} < \xi - \frac{\mu}{v} < \frac{1}{2v}$ , ή καλύτερα,  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{2v}$ . Για τον άρρητο  $\xi$  και τον θετικό ακέραιο  $v$ , ο  $\mu$  είναι μοναδικός.

**Απόδειξη:**

Αν  $\xi$  είναι άρρητος,  $v$  θετικός ακέραιος, τότε ο  $\xi v$  είναι άρρητος. Αν  $\mu$  είναι ο ακέραιος που καθορίζεται από το θεώρημα 5.1.5. για τον άρρητο  $\xi v$ , δηλ. ο πλησιέστερος ακέραιος στον  $\xi v$ , τότε θα έχουμε:  $-\frac{1}{2} < \xi v - \mu < \frac{1}{2}$ .

Διαιρώντας με τον θετικό  $v$ , παίρνουμε τη ζητούμενη διπλή ανισότητα. Η μοναδικότητα του  $\mu$  προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα.

**Παραδείγματα** (χρησιμοποιούμε 5 δεκ.ψηφία για την τετρ.ρίζα του 2):

άρρητος	Ακέραιος Θ.5.1.5	Ρητός Θ.5.1.7.
$\sqrt{2} = 1.41421$	1	1
$2 * \sqrt{2} = 2.82843$	3	3/2
$3 * \sqrt{2} = 4.24264$	4	4/3
$4 * \sqrt{2} = 5.65685$	6	6/4
$5 * \sqrt{2} = 7.07107$	7	7/5
$6 * \sqrt{2} = 8.48528$	8	8/6
$7 * \sqrt{2} = 9.89949$	10	10/7
$8 * \sqrt{2} = 11.31371$	11	11/8

**5.1.8. Παρατηρήσεις:**

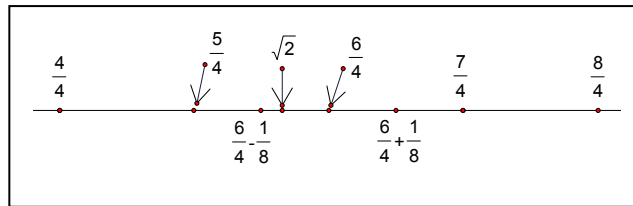
1. Ο πλησιέστερος ακέραιος  $\mu$  στον άρρητο  $\xi$  ( $v$  φυσικός) ελαχιστοποιεί την  $|v\xi - \mu|$

2. Αν  $\xi$  είναι ένας οποιοσδήποτε άρρητος και  $v$  ένας θετικός ακέραιος, τότε υπάρχει ρητός με παρονομαστή  $v$ , π.χ.  $\frac{\mu}{v}$ , τέτοιος ώστε  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{v}$ , γιατί  $-\frac{1}{v} < -\frac{1}{2v} < \xi - \frac{\mu}{v} < \frac{1}{2v} < \frac{1}{v}$ .

3. Το ρητό κλάσμα του θεωρήματος δεν είναι απαραίτητα ανάγωγο, π.χ. το  $\frac{6}{4}$  των παραδειγμάτων που ικανοποιεί την

διπλή ανισότητα:  $-\frac{1}{8} < \sqrt{2} - \frac{6}{4} < \frac{1}{8}$ .

Δεν υπάρχει ρητό κλάσμα  $\frac{\lambda}{4}$  με τον  $\lambda$



περιττό που να επαληθεύει την  $-\frac{1}{8} < \sqrt{2} - \frac{\lambda}{4} < \frac{1}{8}$ .

4. Το θεώρημα βεβαιώνει ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε οποιοδήποτε άρρητο  $\xi$  με σφάλμα λιγότερο από  $1/2v$ , για κάθε φυσικό  $v$ .

Π.χ. αν  $v=1000$ , τότε ο  $1414/1000$  προσεγγίζει τον  $\sqrt{2}$  με σφάλμα μικρότερο του  $1/2000$ . Παρατηρούμε και εδώ ότι για το αναγώγημα  $4^{th}$  τάξης,  $41/29$ , σύμφωνα με τις ανισότητες του

θεωρήματος 4.5.1., έχουμε  $\left| \sqrt{2} - \frac{41}{29} \right| < \frac{1}{29 \cdot 70} = \frac{1}{2030} < \frac{1}{2000} = 0.0005 = \frac{1}{2} 10^{-3}$ .

Για την προσέγγιση με απόλυτο σφάλμα μικρότερο του  $1/2000$ , θα προτιμήσουμε τον απλούστερο (ως προς το μέγεθος των όρων) ρητό  $\frac{41}{29}$ , αντί του δεκαδικού κλάσματος

$\frac{1414}{1000}$ . (Αναγωγήματα του  $\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$ :  $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots$ ).

5. Μπορούμε να βελτιώσουμε την προσέγγιση, να μικρύνουμε το σφάλμα, δηλ. να αυξήσουμε το πολλαπλάσιο του  $v$  στην  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{2v}$ . Ο Γερμανός μαθηματικός Peter Dirichlet, χρησιμοποιώντας την απλή αλλά γόνιμη «αρχή Dirichlet» ή «αρχή του περιστερώνα»: αν  $k$  στοιχεία κατανέμονται σε  $k-1$  κελιά, τότε ένα τουλάχιστον κελί περιέχει δύο ή περισσότερα στοιχεία, απέδειξε το 1824 το παρακάτω θεώρημα.

### 5.1.9. Θεώρημα (Dirichlet).

Αν  $\xi$  είναι ένας οποιοσδήποτε άρρητος και  $\kappa$  τυχαίος φυσικός, τότε:

**A.** υπάρχουν ακέραιοι  $\mu, \nu$  με  $0 < \nu \leq \kappa$ , ώστε  $|\nu\xi - \mu| < \frac{1}{\kappa}$ .

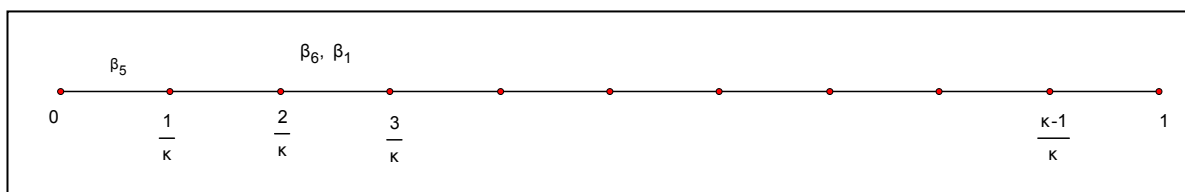
**B.** υπάρχει ρητός  $\mu/\nu$  ( $\mu$  ακέραιος,  $\nu$  φυσικός) του οποίου ο παρονομαστής δεν υπερβαίνει τον  $\kappa$ ,  $0 < \nu \leq \kappa$ , τέτοιος ώστε:  $-\frac{1}{\kappa\nu} < \xi - \frac{\mu}{\nu} < \frac{1}{\kappa\nu} \Leftrightarrow \left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\kappa\nu}$ .

**Απόδειξη:**

Αν δοθούν ο άρρητος  $\xi$  και ο φυσικός  $\kappa$ , τότε παίρνουμε τους  $\kappa$  αρρήτους:  $\xi, 2\xi, 3\xi, \dots, (\kappa-1)\xi, \kappa\xi$ . Αφαιρούμε από κάθε έναν το ακέραιο μέρος του,  $\alpha_\lambda$ , και παίρνουμε τους  $\kappa$  αρρήτους  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\kappa$  (κλασματικά μέρη, παράρτημα Α.14) που ανήκουν στο διάστημα  $(0, 1)$ :

$$\beta_1 = \xi - [\xi], \beta_2 = 2\xi - [2\xi], \dots, \beta_\kappa = \kappa\xi - [\kappa\xi]$$

Χωρίζουμε το  $(0, 1)$  σε  $\kappa$  υποδιαστήματα με τα σημεία  $1/\kappa, \dots, (\kappa-1)/\kappa$ .



Οι αριθμοί  $\beta_\lambda$  είναι άρρητοι, επομένως διαφορετικοί από τα διαιρετικά σημεία. Ας είναι  $I_\lambda, \lambda=1, 2, \dots, \kappa$  τα ανοιχτά διαστήματα, μήκους  $1/\kappa$ ,  $I_1=(0, 1/\kappa), I_2=(1/\kappa, 2/\kappa), \dots, I_\kappa=((\kappa-1)/\kappa, \kappa/\kappa)$ .

Στο πρώτο διάστημα,  $I_1$ , μπορεί να υπάρχει (ένας ή περισσότεροι) ή να μην υπάρχει κάποιος  $\beta_\lambda$  ( $\lambda$  κάποιο από τα  $1, 2, \dots, \kappa$ ). Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει π.χ. ο  $\beta_\lambda$  και ας είναι  $\beta_\lambda = \lambda\xi - \alpha_\lambda$ .

$$\text{Τότε } 0 < \lambda\xi - \alpha_\lambda < \frac{1}{\kappa}, \text{ οπότε } -\frac{1}{\lambda\kappa} < \xi - \frac{\alpha_\lambda}{\lambda} < \frac{1}{\lambda\kappa}.$$

Για  $\nu=\lambda$  και  $\mu = \alpha_\lambda$  θα έχουμε  $|\nu\xi - \mu| < \frac{1}{\kappa}$  και για τον ρητό  $\mu/\nu$ :  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\kappa\nu}$ , με  $1 \leq \nu=\lambda \leq \kappa$ .

Αν δεν υπάρχει κάποιος  $\beta_\lambda$  στο  $I_1$  τότε σε κάποιο διάστημα  $I_\mu$  θα υπάρχουν τουλάχιστον 2, π.χ. οι  $\beta_\rho, \beta_\tau$ , γιατί οι  $\beta_\lambda$  είναι σε πλήθος  $\kappa$  και θα πρέπει να «τοποθετηθούν» σε  $\kappa-1$  διαστήματα.

**Υποθέτοντας  $\rho > \tau$** , οι άρρητοι  $\beta_\rho, \beta_\tau$  βρίσκονται στο ίδιο διάστημα  $I_\mu$  και θα έχουμε διαδοχικά:  $-\frac{1}{\kappa} < \beta_\rho - \beta_\tau < \frac{1}{\kappa}$ ,  $-\frac{1}{\kappa} < \rho\xi - \alpha_\rho - \tau\xi + \alpha_\tau < \frac{1}{\kappa} \Leftrightarrow -\frac{1}{\kappa} < (\rho - \tau)\xi - (\alpha_\rho - \alpha_\tau) < \frac{1}{\kappa}$ ,

και τελικά  $-\frac{1}{\kappa(\rho - \tau)} < \xi - \frac{\alpha_\rho - \alpha_\tau}{(\rho - \tau)} < \frac{1}{\kappa(\rho - \tau)}$ . Για τον ακέραιο  $\mu = \alpha_\rho - \alpha_\tau$  (διαφορά

ακεραίων) και τον φυσικό  $0 < v = \rho - \tau < \kappa$  θα έχουμε  $|v\xi - \mu| < \frac{1}{\kappa}$  και για τον ρητό  $\mu/v$ :

$\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{\kappa v}$ . Το κλάσμα  $\mu/v$  δεν είναι απαραίτητα ανάγωγο, π.χ. οι  $(\alpha_\rho - \alpha_\tau)$  και  $(\rho - \tau)$  πιθανόν

να έχουν κοινούς παράγοντες.

**Παρατήρηση:** Υπάρχει ρητός  $\mu/v$  ( $\mu$  ακέραιος,  $v$  φυσικός) του οποίου ο παρονομαστής δεν υπερβαίνει τον  $\kappa$ ,  $0 < v \leq \kappa$ , τέτοιος ώστε:  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{(\kappa + 1)v}$ .

Απόδειξη: Αν χωρίσουμε το  $(0,1)$  σε  $\kappa + 1$  υποδιαστήματα με τα σημεία  $1/(\kappa + 1), \dots, (\kappa - 1)/(\kappa + 1), \kappa/(\kappa + 1)$ , τότε

- Αν υπάρχει ένας άρρητος στο πρώτο διάστημα, τότε  $0 < \lambda\xi - \alpha_\lambda < \frac{1}{\kappa + 1}$ , οπότε  $-\frac{1}{\lambda(\kappa + 1)} < \xi - \frac{\alpha_\lambda}{\lambda} < \frac{1}{\lambda(\kappa + 1)}$ , ( $\lambda$  κάποιο από τα  $1, 2, \dots, \kappa$ ). Για  $v = \lambda$  και  $\mu = \alpha_\lambda$  θα

έχουμε  $|v\xi - \mu| < \frac{1}{\kappa + 1}$  και για τον ρητό  $\mu/v$ :  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{(\kappa + 1)v}$ , με  $1 \leq v = \lambda \leq \kappa$ .

- Αν υπάρχει ένας άρρητος στο τελευταίο διάστημα τότε  $\frac{\kappa}{\kappa + 1} < \lambda\xi - \alpha_\lambda < 1$ , οπότε

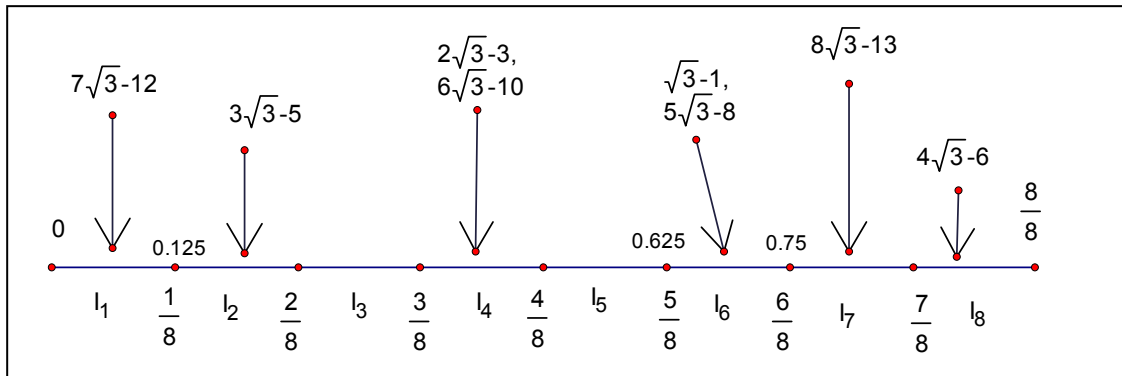
$|\lambda\xi - \alpha_\lambda - 1| < \frac{1}{\kappa + 1}$ ,  $\left| \xi - \frac{\alpha_\lambda + 1}{\lambda} \right| < \frac{1}{\lambda(\kappa + 1)}$ , ( $\lambda$  κάποιο από τα  $1, 2, \dots, \kappa$ ) και η

παρατήρηση εφαρμόζεται για  $v = \lambda$  και  $\mu = \alpha_\lambda + 1$ .

- Αν υπάρχει διάστημα που περιέχει 2 αρρήτους, η μόνη διαφορά με την απόδειξη του Θ.5.1.9. είναι ότι θα έχουμε  $\kappa + 1$  στη θέση του  $\kappa$ , οπότε, βρίσκουμε και πάλι ότι υπάρχει ρητός  $\mu/v$  ( $\mu$  ακέραιος,  $v$  φυσικός) του οποίου ο παρονομαστής δεν υπερβαίνει τον  $\kappa$ ,  $0 < v \leq \kappa$ , τέτοιος ώστε:

$$-\frac{1}{(\kappa + 1)v} < \xi - \frac{\mu}{v} < \frac{1}{(\kappa + 1)v} \Leftrightarrow \left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{(\kappa + 1)v}.$$

**5.1.10. Παράδειγμα:** Αν  $\xi = \sqrt{3}$  και  $\kappa=8$ , τότε θεωρούμε τους 8 αριθμούς  $\lambda\sqrt{3}, \lambda = 1, 2, \dots, 8$ , αφαιρούμε από καθέναν το ακέραιο μέρος του και παίρνουμε 8 αρρήτους στο  $(0,1)$ . Χωρίζουμε το  $(0,1)$  σε 8 διαστήματα και παρατηρούμε ότι:



Αν λοιπόν  $\xi = \sqrt{3}$  και  $\kappa=8$ , τότε για τον άρρητο π.χ.  $7\sqrt{3}-12$  έχουμε διαδοχικά:  $0 < 7\sqrt{3}-12 < \frac{1}{8}, -\frac{1}{8} < 7\sqrt{3}-12 < \frac{1}{8}, -\frac{1}{7 \cdot 8} < \sqrt{3}-\frac{12}{7} < \frac{1}{7 \cdot 8}$ , δηλ. ο ρητός  $\frac{12}{7}$ ,  $\mu=12$ ,  $\nu=7$ , ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος, όπως επίσης και ο ρητός  $\frac{7}{4}$  γιατί οι  $\sqrt{3}-1$ ,  $5\sqrt{3}-8$  βρίσκονται στο  $I_6$ , οπότε  $-\frac{1}{8} < 5\sqrt{3}-8 - (\sqrt{3}-1) < \frac{1}{8}$ , δηλ.  $-\frac{1}{8} < 4\sqrt{3}-7 < \frac{1}{8}$ , άρα  $-\frac{1}{4 \cdot 8} < \sqrt{3}-\frac{7}{4} < \frac{1}{4 \cdot 8}$ . Στο διάστημα  $I_4$  βρίσκονται οι  $6\sqrt{3}-10$  και  $2\sqrt{3}-3$  για τους οποίους και πάλι ισχύει:  $-\frac{1}{8} < 6\sqrt{3}-10 - (2\sqrt{3}-3) < \frac{1}{8}$ , δηλ.  $-\frac{1}{8} < 4\sqrt{3}-7 < \frac{1}{8}$ .

\* Το θεώρημα δεν ισχύει αν  $\lambda$  ρητός. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι  $\lambda = \frac{3}{5}$  και  $\kappa=10$ .

Αν  $\frac{\mu}{\nu}$  οποιοσδήποτε ρητός, διαφορετικός από τον  $\lambda$ , τότε,  $\left| \frac{3}{5} - \frac{\mu}{\nu} \right| = \left| \frac{3\nu - 5\mu}{5\nu} \right| \geq \frac{1}{5\nu} > \frac{1}{10\nu}$ .

**5.1.11.** Το θεώρημα 5.1.7. μας επιτρέπει να «γνωρίσουμε» (κατά το νόημα της παραγράφου 5.1.3) τον άρρητο  $\xi$  με προσέγγιση  $1/2\nu$ . Το Θ.5.1.9. μας δίνει τη δυνατότητα να «γνωριστούμε καλύτερα» με τον άρρητο  $\xi$ , αφού από την  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{2\nu}$  μεταβαίνουμε στην  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\kappa\nu}$  για κάποιο  $\nu \leq \kappa$ . Για τον άρρητο  $\sqrt{3}$  και παρονομαστή 8, το Θ.5.1.7. μας δίνει την  $\left| \sqrt{3} - \frac{14}{8} \right| < \frac{1}{2 \cdot 8}$  (τονίζουμε ότι στο Θ.5.1.7. παίρνουμε τον πλησιέστερο ακέραιο, που, για τον άρρητο  $8\sqrt{3}$ , είναι ο 14, ενώ για το ακέραιο μέρος  $[8\sqrt{3}] = 13$  έχουμε  $|8\sqrt{3}-14| < |8\sqrt{3}-13| \Leftrightarrow 729 < 768, \left| \sqrt{3} - \frac{13}{8} \right| > \frac{1}{2 \cdot 8}$ ).

Στο παράδειγμα 5.1.10. βρήκαμε  $\left| \sqrt{3} - \frac{12}{7} \right| < \frac{1}{7 \cdot 8}$  και  $\left| \sqrt{3} - \frac{7}{4} \right| < \frac{1}{4 \cdot 8}$ . Οι ρητοί  $\frac{12}{7}$ ,  $\frac{7}{4}$  έχουν όχι μόνο μικρότερο παρονομαστή από τον  $\frac{14}{8}$ , αλλά βρίσκονται και «πιο κοντά» στον  $\sqrt{3}$ . Για παρονομαστή 7 το Θ.5.1.7. μας δίνει την ανισότητα  $\left| \sqrt{3} - \frac{12}{7} \right| < \frac{1}{2 \cdot 7}$ , που αδικεί τον  $\frac{12}{7}$ , αφού ισχύει η  $\left| \sqrt{3} - \frac{12}{7} \right| < \frac{1}{7 \cdot 8}$ . Θα ισχύει φυσικά και η  $\left| \sqrt{3} - \frac{12}{7} \right| < \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2}$ , αλλά η  $\left| \sqrt{3} - \frac{12}{7} \right| < \frac{1}{7 \cdot 9}$  δεν ισχύει (είναι ισοδύναμη με την ψευδή ανισότητα  $\frac{7\sqrt{3}+12}{3} > 9$ ).

Ο  $7\sqrt{3}-12$  δεν βρίσκεται στο  $\left(0, \frac{1}{9}\right)$ , βρίσκεται όμως ο  $4\sqrt{3}-6$  στο  $\left(\frac{8}{9}, 1\right)$ , επομένως  $\left| 4\sqrt{3}-7 \right| < \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left| \sqrt{3}-\frac{7}{4} \right| < \frac{1}{4 \cdot 9}$ . Αν  $\kappa=8$ , ένας ρητός  $\mu/\nu$  (της παρατήρησης) για τον οποίο ισχύει η  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{9\nu}$  είναι ο  $\frac{7}{4}$ .

**5.1.12. Θεώρημα.** Αν  $\xi$  είναι ένας οποιοσδήποτε άρρητος τότε:

υπάρχουν άπειροι ρητοί  $\mu/\nu$  ( $\mu$  ακέραιος,  $\nu$  φυσικός), ώστε  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu^2}$ .

**Απόδειξη:**

Για τον  $\mu/\nu$  που ήδη έχει βρεθεί στο Θ. 5.1.9, επειδή  $0 < \nu \leq \kappa$ , θα έχουμε και  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\kappa\nu} \leq \frac{1}{\nu^2}$ . Υπάρχει λοιπόν τουλάχιστον ένας. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος ρητών κλασμάτων, ώστε να ισχύει η  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu^2}$ , ας πούμε τα  $\frac{M_1}{N_1}, \frac{M_2}{N_2}, \dots, \frac{M_j}{N_j}$ . Θεωρούμε τους  $j$  αρρήτους:  $\xi - \frac{M_1}{N_1}, \xi - \frac{M_2}{N_2}, \dots, \xi - \frac{M_j}{N_j}$  και έστω  $\varepsilon = \min_{1 \leq t \leq j} \left| \xi - \frac{M_t}{N_t} \right|$ . Ο  $\xi$  είναι άρρητος, επομένως ο  $\varepsilon$  πρέπει να είναι θετικός. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα (παράρτημα Γ2) υπάρχει φυσικός  $k$ , ώστε  $\frac{1}{k} < \varepsilon$ .

Για τον  $k$  αυτόν το θεώρημα 5.1.9. δίνει ρητό  $p/q$ , με  $1 \leq q \leq k$ , ώστε  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{kq}$  και άρα  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{kq} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$ . Από τον ορισμό του  $\varepsilon$  συμπεραίνουμε ότι ο  $\frac{p}{q}$  για τον οποίο ισχύει  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{kq} \leq \frac{1}{q^2}$  είναι διαφορετικός από τους  $\frac{M_t}{N_t}$ ,  $1 \leq t \leq j$ . Οι ρητοί  $\mu/\nu$  με την ιδιότητα  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu^2}$  είναι επομένως άπειροι.

Από την παρατήρηση του Θ.5.1.9, για  $\kappa = \nu$  έχουμε  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{(\nu+1)\nu}$ . Προκύπτει ότι υπάρχουν άπειροι ρητοί  $\mu/\nu$  ( $\mu$  ακέραιος,  $\nu$  φυσικός), ώστε  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ .

**5.1.13. Θεώρημα:** Ένας πραγματικός αριθμός  $\xi$  είναι άρρητος αν και μόνον αν για κάθε θετικό  $\varepsilon$ , υπάρχουν άπειρα ζεύγη ακεραίων  $(\nu, \mu)$ , ώστε:  $|\nu\xi - \mu| < \varepsilon$ .

**Απόδειξη: Α.** Έστω  $\xi$  άρρητος και  $\varepsilon > 0$ . Υπάρχει φυσικός  $\nu$  με  $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$  (Αρχιμήδεια ιδιότητα). Το Θ.5.1.12. εξασφαλίζει άπειρους  $\mu/\nu$  που ικανοποιούν την  $\left| \xi - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu^2}$ , άρα και άπειρα ζεύγη ακεραίων  $(\nu, \mu)$ , ώστε:  $|\nu\xi - \mu| < \frac{1}{\nu} < \varepsilon$ .

**Β.** Έστω ότι έχουμε τον αριθμό  $\xi$  για τον οποίο ισχύει η πρόταση: για κάθε θετικό  $\varepsilon$ , υπάρχουν άπειρα ζεύγη ακεραίων  $(p, q)$ , ώστε:  $|\xi q - p| < \varepsilon$ . Αν ο  $\xi$  είναι ρητός, τότε ο  $|\xi q - p|$  είναι ρητός, π.χ. ο  $\frac{u}{\beta}$ , όπου  $u$  μη αρνητικός ακέραιος. Για  $\frac{p}{q} \neq \xi$ , θα έχουμε  $|\xi q - p| > 0$  και επομένως  $|\xi q - p| \geq \frac{1}{\beta}$ . Αν λοιπόν διαλέξουμε  $0 < \varepsilon < \frac{1}{\beta}$ , τότε, δεν υπάρχει ζεύγος ακεραίων  $(p, q)$ , ώστε να ικανοποιεί την  $|\xi q - p| < \varepsilon$ . Αφού για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχουν άπειρα ζεύγη ακεραίων  $(p, q)$ , ώστε:  $|\xi q - p| < \varepsilon$ , συμπεραίνουμε ότι ο  $\xi$  είναι άρρητος.

**5.1.14.** Το Θεώρημα αποτελεί **κριτήριο αρρητότητας**. Το πρώτο κριτήριο είναι φυσικά η πρόταση X.2 των Στοιχείων. Για την απόδειξη της X.2, τα άνισα μεγέθη  $\alpha, \beta$  υποτίθεται ότι έχουν κοινό μέτρο  $\varepsilon$ . Με την άπειρη ανθυφαίρεση του μικρότερου από το μεγαλύτερο μέγεθος ο Ευκλείδης, χρησιμοποιώντας την X.1 (τμήμα 2.8) η οποία είναι η βάση της μεθόδου της εξάντλησης (που οφείλεται στον Εύδοξο), καταλήγει στο άτοπο ότι το υποτιθέμενο κοινό μέτρο  $\varepsilon$  των  $\alpha, \beta$  μετρά ένα μέγεθος μικρότερό του. Στο δέκατο βιβλίο των Στοιχείων παρατίθεται μια εκτεταμένη γεωμετρική θεώρηση των αρρήτων, ή καλύτερα των ασυμμέτρων, όπως αναφέρονται, δηλ. ευθύγραμμων τμημάτων που δεν έχουν κοινό μέτρο. Είναι γνωστό ότι η διάκριση μεταξύ των αριθμών της αριθμητικής και των γεωμετρικών ποσοτήτων αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο των Ελληνικών μαθηματικών. Πλήρως ικανοποιητική θεωρία αρρήτων, απαλλαγμένη από γεωμετρικές ερμηνείες, δεν παρουσιάστηκε μέχρι το 1872, όταν ο Richard Dedekind (1831-1916) δημοσίευσε την περίφημη πραγματεία του *Continuity and Irrational Numbers*.



## 5.2. Ενδιάμεσα κλάσματα και δευτεροβάθμια αναγωγήματα

### 5.2.1

Στην ενότητα 5.1. η πολιορκία ενός αρρήτου  $\xi$  ξεκίνησε από ένα διάστημα μοναδιαίου μήκους στο οποίο βρίσκεται ο  $\xi$  και αυτό μας οδήγησε στην ύπαρξη ακεραίου  $\mu$ , ώστε  $|\xi - \mu| < \frac{1}{2}$  δηλ. ο  $\xi$  έγινε γνωστός κατά προσέγγιση  $1/2$ .

Στη συνέχεια αποδείξαμε ότι για κάθε φυσικό  $v$ , μπορούμε να βρούμε ακέραιο  $\mu$ , ώστε  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{2v}$ , άρα για τον άρρητο  $\xi$ , υπάρχουν άπειροι ρητοί,  $\frac{\mu}{v}$ , ώστε  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{2v}$ .

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Dirichlet πλησιάσαμε λίγο περισσότερο, αφού αποδείξαμε την ύπαρξη άπειρου πλήθους ρητών  $\frac{\mu}{v}$ , με την ιδιότητα  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{v^2}$  (ή την λίγο καλύτερη  $\left| \xi - \frac{\mu}{v} \right| < \frac{1}{v(v+1)}$ ) και έτσι «γνωρίσαμε» τον  $\xi$  κατά προσέγγιση  $\frac{1}{v^2}$  (ή  $\frac{1}{v(v+1)}$ ).

Φτάσαμε έτσι, από έναν διαφορετικό δρόμο, στις θεμελιώδεις ανισότητες του θεωρήματος 4.5.1. Αν  $\frac{p_n}{q_n}$  είναι το  $n$ -τάξης αναγωγήματα του  $\xi$ , τότε η  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$  (όπως και

η  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ ), ισχύει για όλα τα αναγωγήματα του  $\xi$ , άρα για δοθέντα άρρητο  $\xi$

υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα  $\frac{p}{q}$ ,  $q > 0$ , τέτοια ώστε  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ . Αν  $\xi$  ρητός, τότε η

ανισότητα ισχύει, τουλάχιστον, για τα υπάρχοντα -πεπερασμένου πλήθους- αναγωγήματα του  $\xi$  (είναι η 3.5.5). Στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα διερευνήσουμε την διαδικασία προσέγγισης του  $\xi$  με την βοήθεια των συνεχών κλασμάτων. Για την προσέγγιση του  $\xi$ , από καθαρά πρακτική άποψη, δεν έχει σημασία αν ο  $\xi$  είναι ρητός ή άρρητος. Μπορεί ο  $\xi$  να είναι ρητός με πολύ μεγάλους όρους και θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε στη θέση του ένα κλάσμα με μικρότερο αριθμητή και ιδίως παρονομαστή, που να προσεγγίζει «όσο γίνεται καλύτερα» τον  $\xi$  για κάποιον συγκεκριμένο «βαθμό ακρίβειας».

**Στα περισσότερα θεωρήματα θα υποθέτουμε τον  $\xi$  άρρητο, αλλά τα συμπεράσματα (με μερικές ασήμαντες τροποποιήσεις) ισχύουν και για ρητούς.**

Το αναγώγημα  $\frac{p_n}{q_n}$  μας παρέχει γνώση του αρρήτου κατά προσέγγιση  $\frac{1}{q_n^2}$ . Μπορούμε να βελτιώσουμε την γνώση, να πλησιάσουμε περισσότερο με κάποιον ρητό  $\frac{\alpha}{\beta}$  που δεν είναι αναγώγημα, πληρώνοντας κάποιο τίμημα: την αύξηση του μεγέθους των όρων του  $\frac{p_n}{q_n}$ .

Για το θεώρημα που ακολουθεί, θα υποθέσουμε τον  $\xi$  θετικό, οπότε οι ακολουθίες  $(q_k)$  και  $(p_k)$  είναι αύξουσες.

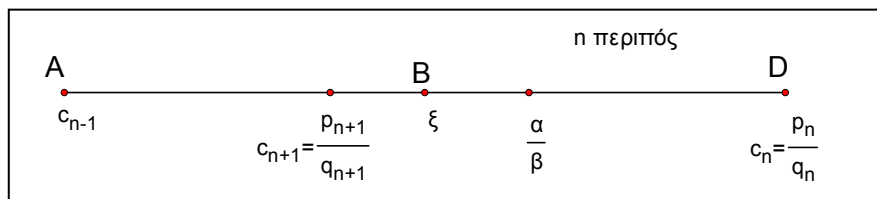
**5.2.2. Θεώρημα.** Αν ένα ρητό κλάσμα  $\frac{\alpha}{\beta}$  προσεγγίζει τον αριθμό  $\xi$  καλύτερα από ένα αναγώγημα, δηλ. αν για κάποιο αναγώγημα  $\frac{p_n}{q_n}$  ισχύει:  $\left| \xi - \frac{\alpha}{\beta} \right| < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|$ , τότε το  $\frac{\alpha}{\beta}$  έχει τους όρους του αντίστοιχα, μεγαλύτερους από τους όρους του αναγωγήματος.

**Απόδειξη.** Ας υποθέσουμε ότι η προσέγγιση του  $\xi$  από τον ρητό  $\frac{\alpha}{\beta}$  είναι με υπεροχή (ανάλογη είναι και η απόδειξη αν ο  $\frac{\alpha}{\beta}$  προσεγγίζει τον  $\xi$  με έλλειψη).

**A.** υποθέτουμε ότι και το  $n$ -τάξης αναγώγημα  $\frac{p_n}{q_n}$  προσεγγίζει τον  $\xi$  με υπεροχή, δηλ.

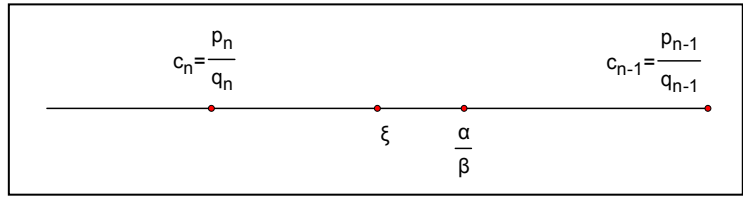
$$\xi < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_n}{q_n}. \text{ Για το αναγώγημα } (n+1) \text{ τάξης, θα έχουμε } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \xi < \frac{p_n}{q_n}, \text{ οπότε}$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \xi < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_n}{q_n}.$$



Η τελευταία δίνει  $0 < \frac{\beta p_n - \alpha q_n}{\beta q_n} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ , ή  $0 < \frac{N}{\beta} < \frac{1}{q_{n+1}}$  με  $N$  θετικό ακέραιο, οπότε  $\frac{\beta}{N} > q_{n+1}$  και άρα  $\beta > q_{n+1}$ . Από την  $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{\alpha}{\beta}$  παίρνουμε  $\alpha q_{n+1} > \beta p_{n+1}$ . Οι  $\alpha q_{n+1} > \beta p_{n+1}$  και  $\beta > q_{n+1}$ , δίνουν και την  $\alpha > p_{n+1}$ . Έτσι το κλάσμα  $\frac{\alpha}{\beta}$  έχει τους όρους του μεγαλύτερους από τους όρους του αναγωγήματος  $\frac{p_n}{q_n}$  ( $p_{n+1} > p_n, q_{n+1} > q_n$ ).

**B.** Υποθέτουμε τώρα ότι το  $n$ -τάξης αναγώγημα  $\frac{p_n}{q_n}$  προσεγγίζει τον  $\xi$  με έλλειψη.

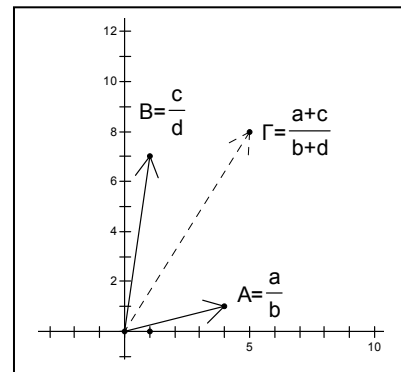


Τότε το αναγώγημα  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  προσεγγίζει τον  $\xi$  με υπεροχή και η απόστασή του από τον  $\xi$  θα είναι μεγαλύτερη από ότι η απόσταση του  $c_n$ , οπότε  $\xi < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ .

Στο μέρος A αποδείξαμε ότι αν  $\xi < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_n}{q_n}$ , τότε  $\alpha > p_{n+1}$  και  $\beta > q_{n+1}$  (με συνέπεια τις  $\alpha > p_n, \beta > q_n$ ). Από την  $\xi < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  θα έχουμε και πάλι  $\alpha > p_n$  και  $\beta > q_n$ .

**5.2.3.Ορισμός.** Αν έχουμε τα ρητά κλάσματα

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  με θετικούς παρονομαστές (οπότε  $ad < cb$ ), τότε για το κλάσμα  $\frac{a+c}{b+d}$  ισχύει:  $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{cb-ad}{b(b+d)} > 0$ ,  $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{cb-ad}{d(b+d)} > 0$ , δηλ.  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$  [1].



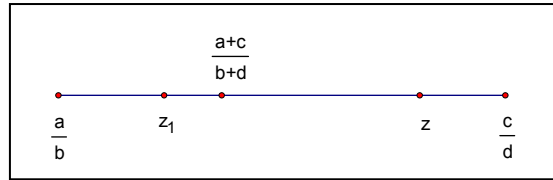
Το κλάσμα  $\frac{a+c}{b+d}$  ονομάζεται **ενδιάμεσο** των  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  ( $a, b, c, d$  ακέραιοι,  $b > 0, d > 0$ ).

Αν παραστήσουμε τα κλάσματα με τον συνήθη τρόπο,  $(b, a), (d, c), (b+d, a+c)$ , τότε η ανισοτική σχέση [1] μεταφέρεται στις κλίσεις των διανυσμάτων.

Για την πράξη της πρόσθεσης κλασμάτων, η πρόσθεση «αριθμητή με αριθμητή» και «παρονομαστή με παρονομαστή» είναι τόσο κοινή σε μικρούς και μεγάλους μαθητές, ώστε καιρός είναι να καθιερωθεί η ονομασία για το συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

Για το ενδιάμεσο κλάσμα  $\frac{a+c}{b+d}$  ισχύει η  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{b+d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{d}{b+d} \cdot \frac{c}{d}$ , δηλ. το  $\frac{a+c}{b+d}$  είναι ένας **σταθμικός μέσος** των  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ . Γενικότερα, ο σταθμικός μέσος δύο πραγματικών  $x, y$  είναι ο  $(1-t)x + ty$ , με  $0 \leq t \leq 1$  και βρίσκεται στο διάστημα με άκρα  $x, y$  (για  $t=0.5$  έχουμε τον συνηθισμένο μέσο).

Αν  $z$  είναι κάποιος **άρρητος** μεταξύ των  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ , τότε  $\left|z - \frac{a}{b}\right| \neq \left|z - \frac{c}{d}\right|$ , και η  $\left|z - \frac{a+c}{b+d}\right|$  είναι μικρότερη μίας τουλάχιστον από τις  $\left|z - \frac{a}{b}\right|, \left|z - \frac{c}{d}\right|$ . Μπορούμε να μικρύνουμε το διάστημα εντοπισμού του αρρήτου, παίρνοντας ενδιάμεσο κλάσμα μεταξύ των  $\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}$ , ή μεταξύ των  $\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}$ , ανάλογα με τη θέση του  $z$ . Η «γνωριμία» με τον άρρητο μπορεί να συνεχιστεί παίρνοντας νέα ενδιάμεσα κλάσματα.



### Παράδειγμα:

Για τον άρρητο  $\sqrt{2}$  έχουμε:  $1 < \sqrt{2} < 2$ ,  $1 < \sqrt{2} < \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{4}{3} = \frac{1+3}{1+2} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ ,  $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}, \frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{10}{7}, \frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}, \frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}, \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}, \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{58}{41}$  κλπ.

Πλησιάζουμε κάπως αργά, αλλά, όπως αναφέρεται και στους «Στοχασμούς»: «η πιο μεγάλη απόλαυση είναι το πλησίασμα της απόλαυσης» (Βαλερύ, 1996: 28).

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδέα παίρνοντας ενδιάμεσα κλάσματα **μεταξύ** των αναγωγμάτων του αναπτύγματος ενός αριθμού σε συνεχές κλάσμα.

### 5.2.4.Ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots]$ .

Τα **δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_{k-2}, c_k$  ( $k \geq 2$ )** είναι οι ρητοί

$$c_{k,t} = \frac{p_{k,t}}{q_{k,t}} = \frac{p_{k-2} + tp_{k-1}}{q_{k-2} + tq_{k-1}}, \quad 1 \leq t \leq a_k - 1.$$

Μερικές φορές θα παραλείπουμε το «μεταξύ των  $c_{k-2}, c_k$ »

### 5.2.5.Παρατηρήσεις:

1. Αν  $a_k = 1$ , τότε δεν υπάρχουν δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_{k-2}, c_k$  (το  $\frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}$ , ενδιάμεσο κλάσμα των  $c_{k-2}, c_{k-1}$ , είναι το  $c_k$ ). Αν δώσουμε στο  $t$  και τις τιμές

0 και  $a_k$  θα βρούμε τα αναγωγήματα ( $k-2$ ) και  $k$  τάξης, τα  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$  και  $\frac{p_{k-2} + a_k p_{k-1}}{q_{k-2} + a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k}$ .

2. Τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα είναι τα συνεχή κλάσματα  $c_{k,t} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t]$ , όπου  $1 \leq t \leq a_{k-1}$ .

3. Γνωρίζουμε την θεμελιώδη ιδιότητα των αναγωγημάτων:  $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$  (ενότητα 2.7.1).

Για δύο διαδοχικά δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_k}{q_k}$ , θα έχουμε επίσης

$$p_{k,t+1}q_{k,t} - q_{k,t+1}p_{k,t} = (-1)^k,$$

$$\begin{aligned} \text{γιατί } (p_{k-2} + (t+1)p_{k-1})(q_{k-2} + tq_{k-1}) - (q_{k-2} + (t+1)q_{k-1})(p_{k-2} + tp_{k-1}) &= \\ &= -(q_{k-1}p_{k-2} - p_{k-1}q_{k-2}) = (-1)^{k-2} = (-1)^k. \end{aligned}$$

4. Πίνακας δευτεροβάθμιων αναγωγημάτων μεταξύ των  $c_{k-2}, c_k$ . Τα  $c_{k-2}, c_k$  μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι τα  $c_{k,0}, c_{k,a_k}$ .

$p_{k,t}$	$p_{k-2}$	$p_{k-2} + 1 \cdot p_{k-1}$	$p_{k-2} + tp_{k-1}$	$p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1}$	$p_{k-2} + a_k p_{k-1}$
$t \cdot p_{k-1}$	$0 \cdot p_{k-1}$	$1 \cdot p_{k-1}$	$t \cdot p_{k-1}$	$(a_k - 1) \cdot p_{k-1}$	$a_k \cdot p_{k-1}$
$t$	$0$	$1$	$t$	$a_k - 1$	$a_k$
$t \cdot q_{k-1}$	$0 \cdot q_{k-1}$	$1 \cdot q_{k-1}$	$t \cdot q_{k-1}$	$(a_k - 1) \cdot q_{k-1}$	$a_k \cdot q_{k-1}$
$q_{k,t}$	$q_{k-2}$	$q_{k-2} + 1 \cdot q_{k-1}$	$q_{k-2} + tq_{k-1}$	$q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1}$	$q_{k-2} + a_k q_{k-1}$
$c_{k,t}$	$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$	$\frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}$	$\frac{p_{k-2} + tp_{k-1}}{q_{k-2} + tq_{k-1}}$	$\frac{p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1}}$	$\frac{p_{k-2} + a_k p_{k-1}}{q_{k-2} + a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k}$

5. Από την παρατήρηση 3 συμπεραίνουμε ότι τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_{k-2}, c_k$  είναι κλάσματα ανάγωγα. Το γεγονός αυτό προκύπτει και από την παρατήρηση 2, αφού ένα δευτεροβάθμιο αναγωγήματα είναι το τελευταίο αναγωγήμα του (πεπερασμένου-απλού) συνεχούς κλάσματος  $c_{k,t} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t]$  και τα αναγωγήματα είναι κλάσματα ανάγωγα.

5.2.6.

Το δευτεροβάθμιο αναγώγημα  $\frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}$  είναι **ενδιάμεσο** των  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ . Το

$\frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}}$  ενδιάμεσο των  $\frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}, \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  και τελικά κάθε δευτεροβάθμιο αναγώγημα

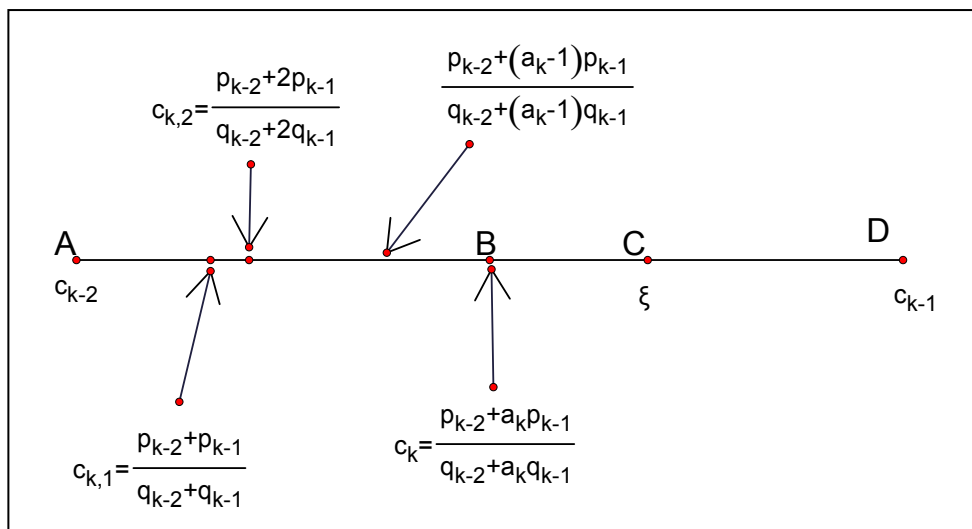
μεταξύ των  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_k}{q_k}$  είναι ενδιάμεσο του προηγούμενου δευτεροβάθμιου και του  $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ .

**Αν k άρτιος**, από την  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  (τμήμα 2.7) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} < \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \text{ και διαδοχικά,}$$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} < \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} < \frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}} < \dots < \frac{p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1}} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να προκύψει άμεσα και από το Θ.3.7.1, αφού τα δευτεροβάθμια αναγώγημα είναι τα συνεχή κλάσματα  $c_{k,t} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t]$  και η σύγκριση γίνεται μεταξύ των  $c_{k,t}$  και  $c_{k,t+1}$  (το t είναι το k-τάξης μερικό πηλίκο του  $c_{k,t}$ ).



Αν προχωρήσουμε ένα βήμα ακόμα, παρατηρούμε ότι το ενδιάμεσο των

$$\frac{p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1}} \text{ και } \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$$

$$\frac{p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1} + p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1} + q_{k-1}} = \frac{p_{k-2} + a_k p_{k-1}}{q_{k-2} + a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k}$$

Επίσης: 
$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} < \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} < \dots < \frac{p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1}} < \frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$$

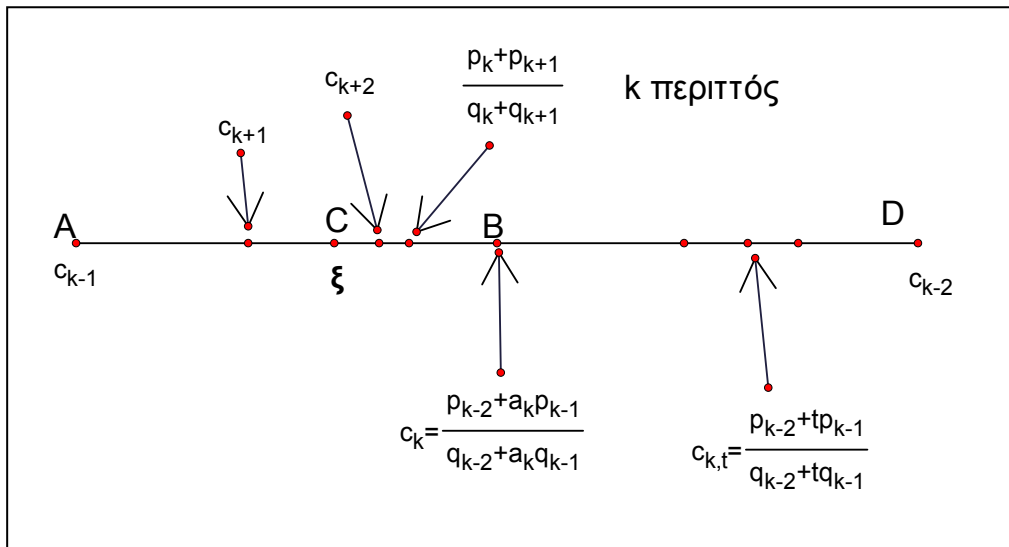
Αν αρχίσουμε από το  $\frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}$  και αυξάνουμε κατά 1 τον t στο  $\frac{p_{k-2} + tp_{k-1}}{q_{k-2} + tq_{k-1}}$ ,

τότε θα «πέσουμε πάνω» στο k-τάξης αναγωγήμα  $\frac{p_k}{q_k}$ .

**Αν k περιττός**, από την  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} > \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  (τιμήμα 2.7) θα έχουμε:  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} > \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} > \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$

και διαδοχικά,  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} > \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} > \frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}} > \dots > \frac{p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1}} > \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ . Και εδώ

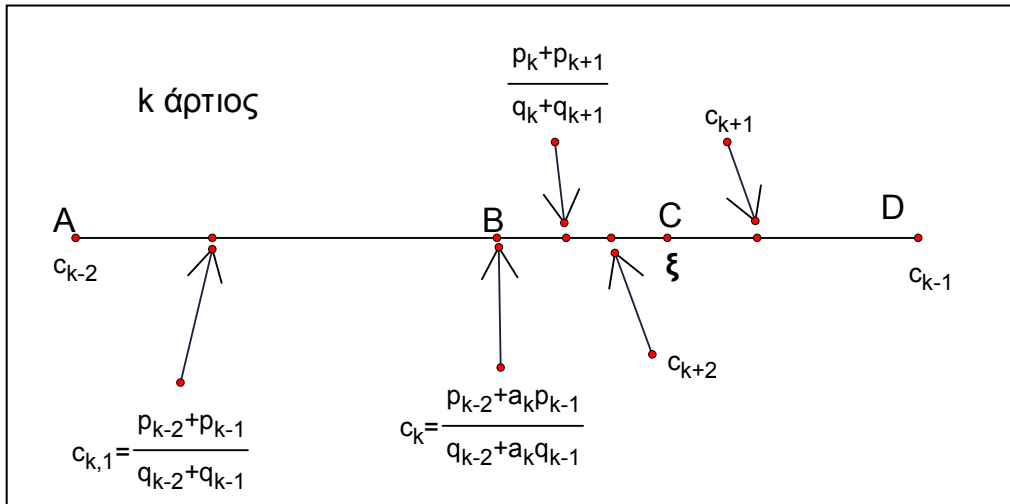
παρατηρούμε ότι  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} > \frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}} > \dots > \frac{p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1}} > \frac{p_k}{q_k} > \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ .



Συμπεραίνουμε επίσης ότι, σε κάθε περίπτωση, το επόμενο από το τρέχον δευτεροβάθμιο αναγωγήμα βρίσκεται πλησιέστερα στον ξ από το προηγούμενο.

Τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_{k-2}$ ,  $c_k$  με αρχή το αναγωγήμα  $c_{k-2}$  «κατευθύνονται» προς το  $c_{k-1}$ . Το  $c_k$  βρίσκεται μεταξύ των  $c_{k-2}$ ,  $c_{k-1}$ . Η τιμή του συνεχούς κλάσματος,  $\xi$ , βρίσκεται πάντα μεταξύ των διαδοχικών αναγωγήματων  $c_{k-1}$ ,  $c_k$  και έτσι τα αναγωγήματα  $c_{k-2}$ ,  $c_k$  (και τα δύο άρτιας ή περιττής τάξης) βρίσκονται είτε δεξιά είτε αριστερά του  $\xi$ . Αυτό υποχρεώνει και όλα τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_{k-2}$ ,  $c_k$  να βρίσκονται είτε δεξιά είτε αριστερά του  $\xi$ .

**5.2.7.** Η τιμή  $\xi$  του συνεχούς κλάσματος βρίσκεται λοιπόν πάντα μεταξύ ενός αναγωγίματος και του ενδιάμεσου κλάσματος μεταξύ αυτού του αναγωγίματος και του προηγούμενου του, π.χ. μεταξύ των  $\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}$  και  $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$  (αυτό το ενδιάμεσο κλάσμα, αν  $a_{k+2} > 1$ , είναι δευτεροβάθμιο αναγωγήμα μεταξύ των  $c_k, c_{k+2}$ , αν  $a_{k+2} = 1$ , είναι το αναγωγήμα  $(k+2)$ -τάξης, το  $c_{k+2}$ ).



Το ενδιάμεσο κλάσμα  $\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}$  (είτε είναι δευτεροβάθμιο αναγωγήμα, είτε είναι το

$c_{k+2}$ ) είναι μεταξύ των  $c_k = \frac{p_k}{q_k}$  και  $\xi$ , άρα  $\left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| > \left| \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k (q_k + q_{k+1})}$ .

Από τις θεμελιώδεις ανισότητες του Θ.4.5.1. έχουμε ότι  $\frac{1}{2q_k q_{k+1}} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right|$ . Αλλά

$q_{k+1} > q_k$ , άρα:  $\frac{1}{2q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k (q_k + q_{k+1})} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right|$  και βρίσκουμε ένα **καλύτερο κάτω φράγμα**

για την διαφορά  $\left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right|$ , το  $\frac{1}{q_k (q_k + q_{k+1})}$ . Από την  $\frac{1}{q_k (q_k + q_{k+1})} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right|$ , με

πολλαπλασιασμό επί  $q_k$  παίρνουμε και την  $\frac{1}{q_k + q_{k+1}} < |\xi q_k - p_k|$ . Καταλήγουμε λοιπόν στις

**ανισότητες 5.2.7:**  $\frac{1}{q_k (q_k + q_{k+1})} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right|$ ,  $\frac{1}{q_k + q_{k+1}} < |\xi q_k - p_k|$ .



**5.2.8. Παραδείγματα:**

1. Θεωρούμε τα τρία πρώτα αναγωγήματα του  $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \dots] : \left\{ \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106} \right\}$

(τμήμα 4.5.2). Δευτεροβάθμια αναγωγήματα

μεταξύ των  $c_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1}$  (μερικό πηλίκο  $a_0 = 3$ )

και  $c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}$  (μερικό πηλίκο  $a_2 = 15$ )

	-2	-1	0	1	2	
p	0	1	3	22	3+22t	
a			3	7	t	
q	1	0	1	7	1+7t	
c			3/1	22/7	(3+22t)/(1+7t)	

είναι τα ρητά κλάσματα  $\frac{3+22t}{1+7t}$ ,  $1 \leq t \leq a_2 - 1 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 14$ . Για  $t=1$ , συμβολίζουμε το

$$\frac{3+22 \cdot 1}{1+7 \cdot 1} = \frac{25}{8} \text{ με } c_{2,1} \text{ ή με } \frac{p_{2,1}}{q_{2,1}}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \frac{p_{2,1}}{q_{2,1}} = [a_0, a_1, 1] = [3, 7, 1].$$

$$\text{Ομοίως } c_{2,2} = \frac{p_{2,2}}{q_{2,2}} = [a_0, a_1, 2] = [3, 7, 2] = \frac{3+22 \cdot 2}{1+7 \cdot 2} = \frac{47}{15}, \quad \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{113}{36}, \frac{132}{43}, \frac{157}{50},$$

$$\frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \quad c_{2,14} = \frac{p_{2,14}}{q_{2,14}} = [3, 7, 14] = \frac{3+22 \cdot 14}{1+7 \cdot 14} = \frac{311}{99}, \quad \text{δηλ. τα}$$

δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_0, c_2$  είναι ακριβώς οι τιμές των (πεπερασμένων) συνεχών κλασμάτων  $[3, 7, t]$ ,  $1 \leq t \leq 14$ . Αν στην  $\frac{3+22t}{1+7t}$  θέσουμε  $t=15=a_2$ , θα βρούμε

$$\text{φυσικά το αναγωγήμα } 2^{\text{ης}} \text{ τάξης, το } c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}.$$

2. Αν έχουμε τον άρρητο  $\sqrt{5} = [2, \bar{4}]$ ,  $a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 4, a_3 = 4, \dots$ , με αναγωγήματα:  $\{2, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292}, \dots\}$ , τότε τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_1, c_3$  είναι οι αριθμοί:  $\frac{9+38t}{4+17t}$ ,  $1 \leq t \leq 3$ , δηλ. οι  $\frac{47}{21}, \frac{85}{38}, \frac{123}{55}$ . Έχουμε δει ότι τα αναγωγήματα μας παρέχουν «καλές» προσεγγίσεις των αρρήτων (αλλά και των ρητών, τμήμα 3.8) και στο παράδειγμα «4.5.2:1.  $\sqrt{5}$ .β.» βρήκαμε ότι ένα από τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα, το  $\frac{123}{55}$ , είναι «καλύτερη» προσέγγιση (έχει μικρότερους όρους) του  $\sqrt{5}$  για την ζητούμενη ακρίβεια των 3 δ.ψ. από το αναγωγήμα τρίτης τάξης, το  $\frac{161}{72}$  (η απόσταση του  $\sqrt{5}$  από το αναγωγήμα 3<sup>ης</sup> τάξης είναι μικρότερη, αλλά τα δύο κλάσματα έχουν ίδια τα 3 πρώτα δ.ψ. τα οποία μας ενδιαφέρουν για την συγκεκριμένη ακρίβεια).

### 5.3. Βέλτιστες προσεγγίσεις

**5.3.1. Ορισμός.** Ονομάζουμε τον ρητό  $\frac{p}{q}$  μία **βέλτιστη προσέγγιση** ενός

πραγματικού αριθμού  $\xi$ , όταν για κάθε άλλο ρητό  $u/v$ , διαφορετικό από τον  $p/q$ , με τον ίδιο ή μικρότερο παρονομαστή, ο  $u/v$  διαφέρει από τον  $\xi$  κατά μεγαλύτερη ποσότητα από ότι ο  $p/q$  (οι  $p, q, u, v$  είναι ακέραιοι, οι  $q, v$  θετικοί ακέραιοι), δηλ. όταν οι ανισότητες:  $1 \leq v \leq q$  και

$\frac{p}{q} \neq \frac{u}{v}$ , οδηγούν στο συμπέρασμα:  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \left| \xi - \frac{u}{v} \right|$ . Διαφορετικά: Ο  $\frac{p}{q}$  ( $q > 0$ ) είναι μία

**βέλτιστη προσέγγιση** ενός πραγματικού αριθμού  $\xi$ , όταν  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| = \min_{\substack{u \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq v \leq q}} \left| \xi - \frac{u}{v} \right|$ . **Η βέλτιστη**

**προσέγγιση είναι άμεσα συνδεδεμένη με τον παρονομαστή  $q$ .**

Για **συγκεκριμένο** φυσικό  $q$  υπάρχει ο μοναδικός (αν  $\xi$  άρρητος) πλησιέστερος ακέραιος  $p$ , ώστε  $|q\xi - p| < \frac{1}{2}$ , και ο ρητός  $p/q$ , ώστε  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q}$  (Θ.5.1.5-Θ.5.1.7). Αυτός ο  $p/q$  είναι ο καλύτερος με παρονομαστή  $q$  γιατί για  $u \neq p$ , οι  $u/q$  διαφέρουν από τον  $p/q$  τουλάχιστον κατά  $1/q$ , άρα από τον  $\xi$  περισσότερο από  $1/(2q)$ .

Για  $1 \leq v \leq q$  βρίσκουμε λοιπόν  $q$  ρητούς.

Αν  $\xi$  ρητός, πιθανόν να έχουμε δύο «πλησιέστερους» ακέραιους, π.χ. αν  $\xi=1.625$ , τότε  $4*1.625=6.5$  και οι ακέραιοι 6 και 7 ισαπέχουν από τον 6.5, αλλά, όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, θα αγνοούμε αυτή την τετριμμένη περίπτωση (που οδηγεί σε κάποιες ασήμαντες λεπτομέρειες ή εξαιρέσεις). Θα θεωρούμε λοιπόν ότι **ο  $\xi$  είναι άρρητος**, αλλά, θα δίνουμε και παραδείγματα με ρητούς.

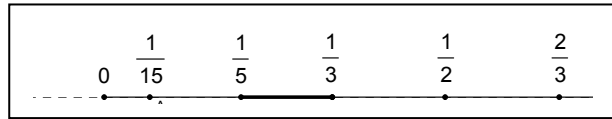
Το σύνολο  $\Xi = \left\{ \min_{u \in \mathbb{Z}} \left| \xi - \frac{u}{1} \right|, \min_{u \in \mathbb{Z}} \left| \xi - \frac{u}{2} \right|, \dots, \min_{u \in \mathbb{Z}} \left| \xi - \frac{u}{q-1} \right|, \min_{u \in \mathbb{Z}} \left| \xi - \frac{u}{q} \right| \right\}$  είναι πεπερασμένο και,

για **συγκεκριμένο**  $q$ , η βέλτιστη προσέγγιση του  $\xi$  είναι ο ελάχιστος αριθμός του  $\Xi$ . Η λέξη «μία» στον ορισμό αναφέρεται στις διαφορετικές βέλτιστες προσεγγίσεις για διαφορετικούς φυσικούς  $q$ .

**Παραδείγματα:**

1. Ο ρητός  $\frac{1}{3}$  είναι μία βέλτιστη προσέγγιση του  $\frac{1}{5}$ , γιατί για  $\frac{1}{3} \neq \frac{u}{v}$  με  $u \in \mathbb{Z}$  και

$$1 \leq v \leq 3 \text{ ισχύει: } \frac{2}{15} = \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right| < \left| \frac{1}{5} - \frac{u}{v} \right|.$$



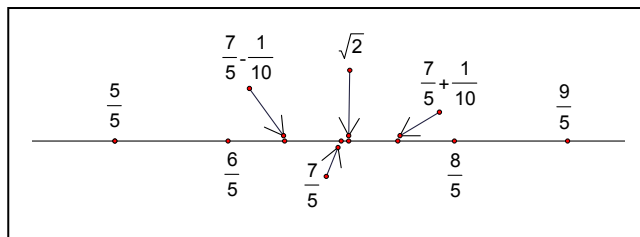
Για τον  $3 \cdot \frac{1}{5}$  ο μοναδικός πλησιέστερος

ακέραιος είναι ο 1, με  $\left| 3 \cdot \frac{1}{5} - 1 \right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{2 \cdot 3}$ . Οι  $\frac{u}{3}$  με  $u \neq 1$  διαφέρουν από τον  $1/3$  τουλάχιστον κατά  $1/3$ , άρα από τον  $1/5$  περισσότερο από  $1/6$ . Ανάλογα βρίσκουμε ότι ο καλύτερος ρητός με παρονομαστές 2 ή 1 είναι ο μηδέν και τελικά  $\left| \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right| < \left| \frac{1}{5} - 0 \right|$ .

2. α. Ο ρητός  $\frac{7}{5}$  είναι η καλύτερη προσέγγιση του  $\sqrt{2}$ , από όλα τα ρητά κλάσματα με

παρονομαστή 5: Εύκολα διαπιστώνουμε ότι  $7 < 5\sqrt{2} < 7 + \frac{1}{2}$ , άρα  $\sqrt{2} - \frac{7}{5} < \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$ . Ο 7 είναι ο μοναδικός ακέραιος του Θ.5.1.7. που αντιστοιχεί στον 5, είναι ο ακέραιος του

Θ.5.1.5, για τον οποίο  $\left| 5\sqrt{2} - 7 \right| < \frac{1}{2}$ , ο πλησιέστερος ακέραιος στον άρρητο  $5\sqrt{2}$  (εξετάζουμε συνήθως την  $\left| v\sqrt{2} - \mu \right|$  αντί της  $\left| \sqrt{2} - \frac{\mu}{v} \right|$ ). Ο  $\sqrt{2}$



διαφέρει από τον  $\frac{7}{5}$  λιγότερο από μισή μονάδα της κλασματικής μονάδας  $\frac{1}{5}$  (λιγότερο από

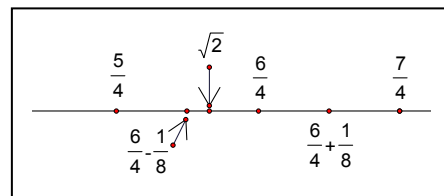
$1/10$ ). Για διαφορετικούς από τον 7 ακεραίους  $k$ , ο  $\frac{k}{5}$  διαφέρει από τον  $\frac{7}{5}$  τουλάχιστον

$$\text{κατά } \frac{1}{5}, \text{ άρα } \left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \right| = \min_{u \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{2} - \frac{u}{5} \right|.$$

2.β. Ανάλογα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

οι καλύτερες προσεγγίσεις του  $\sqrt{2}$  με παρονομαστές

1,2,3,4 είναι αντίστοιχα οι ρητοί:  $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}$  (και δεν



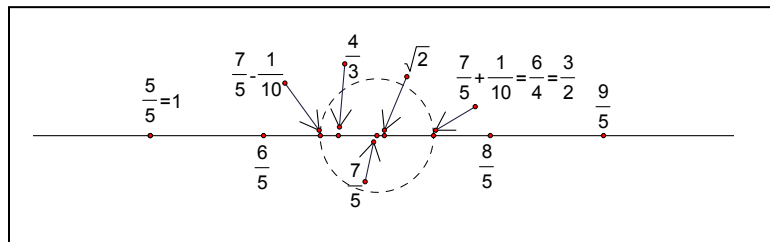
χρειάζεται να δούμε τα παραδείγματα του Θ.5.1.7).

2.γ. Οι αριθμοί  $1, \frac{3}{2}$ , αλλά και ο  $\frac{7}{5}$  είναι αναγωγήματα του  $\sqrt{2}$  (συνεχές κλάσμα  $[1, \bar{2}]$ , αναγωγήματα  $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \dots$ ). Σύμφωνα με το Θ. 4.5.1. για τα αναγωγήματα ισχύει η  $\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ , οπότε θα έχουμε  $\frac{1}{4} < |\sqrt{2} - 1| < \frac{1}{2}$ ,

$$\frac{1}{20} < \left| \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{120} < \left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \right| < \frac{1}{60}. \quad \text{Αλλά}$$

$$\frac{1}{60} < \frac{1}{20} < \frac{1}{4}.$$



Μπορούμε φυσικά να χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες 5.2.7,  $\frac{1}{q_k (q_k + q_{k+1})} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right|$ , και να πάρουμε καλύτερα κάτω φράγματα:  $\frac{1}{3} < |\sqrt{2} - 1|$ ,  $\frac{1}{14} < \left| \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right|$ ,  $\frac{1}{85} < \left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \right|$ . Ο ρητός  $\frac{4}{3}$  είναι δευτεροβάθμιο αναγωγήμα μεταξύ των 1 και  $\frac{7}{5}$  ( $\frac{4}{3} = \frac{1+3}{1+2}$ ). Επειδή ο  $\frac{7}{5}$  είναι αναγωγήμα άρτιας τάξης είναι  $\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ . Επειδή  $\frac{4}{3} < \frac{7}{5}$ , θα έχουμε  $\left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \right| < \left| \sqrt{2} - \frac{4}{3} \right|$ . Αν συνδυάσουμε τις 2.α,β,γ, συμπεραίνουμε ότι για  $\frac{7}{5} \neq \frac{u}{v}$  με  $u \in \mathbb{Z}$  και  $1 \leq v \leq 5$ , ισχύει:  $\left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \right| < \left| \sqrt{2} - \frac{u}{v} \right|$ , δηλ. ο  $\frac{7}{5}$  είναι μια βέλτιστη προσέγγιση του  $\sqrt{2}$ .

\* Ο  $\left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \right|$  είναι ο ελάχιστος του  $\Xi = \left\{ \left| \sqrt{2} - \frac{1}{1} \right|, \left| \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right|, \left| \sqrt{2} - \frac{4}{3} \right|, \left| \sqrt{2} - \frac{6}{4} \right|, \left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \right| \right\}$ .

**5.3.2.Θεώρημα.** Κάθε βέλτιστη προσέγγιση ενός πραγματικού αριθμού  $\xi$  είναι ένα αναγωγήμα ή ένα δευτεροβάθμιο αναγωγήμα της ανάπτυξης του  $\xi$  σε συνεχές κλάσμα.

**Απόδειξη.**

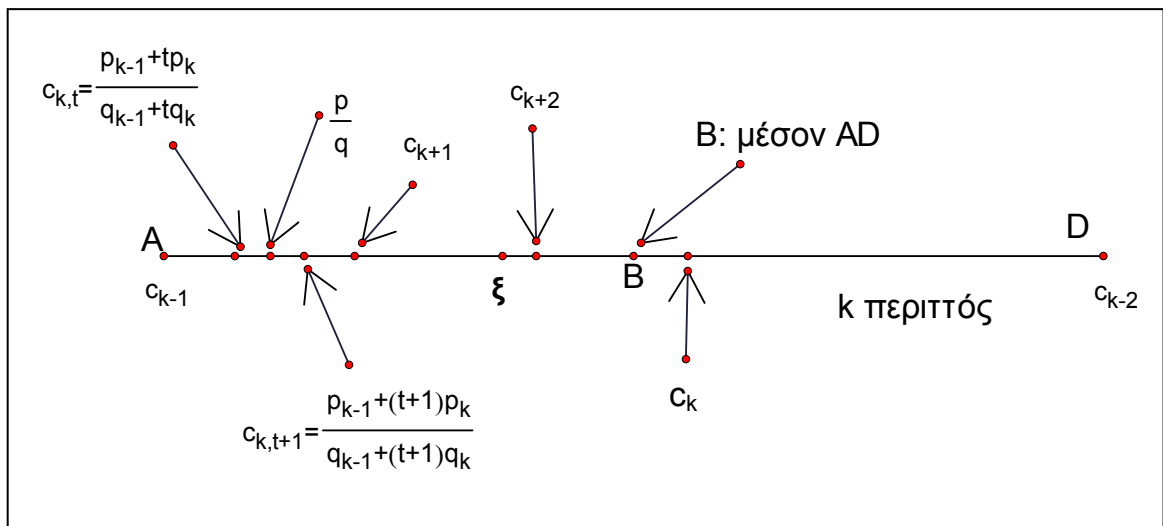
Υποθέτουμε ότι ο  $\frac{p}{q}$  είναι μία **βέλτιστη προσέγγιση** του  $\xi = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ , δηλ.

ότι για κάθε άλλο ρητό  $u/v$ , διαφορετικό από τον  $p/q$ , αν  $1 \leq v \leq q$ , τότε  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \left| \xi - \frac{u}{v} \right|$ .

Η υπόθεση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα  $\frac{p}{q} \geq a_0$ , γιατί διαφορετικά, αν  $\frac{p}{q} < a_0$  θα είχαμε  $\frac{p}{q} \neq \frac{a_0}{1}$  και  $|\xi - a_0| = \left| \xi - \frac{a_0}{1} \right| < \left| \xi - \frac{p}{q} \right|$ , με  $1 \leq q$ , δηλ. ο  $\frac{p}{q}$  δεν θα ήταν βέλτιστη προσέγγιση. Επίσης  $\frac{p}{q} \leq a_0 + 1$ , γιατί διαφορετικά, αν  $\frac{p}{q} > a_0 + 1$  θα είχαμε  $\frac{p}{q} \neq \frac{a_0 + 1}{1}$  και  $|\xi - (a_0 + 1)| = \left| \xi - \frac{a_0 + 1}{1} \right| < \left| \xi - \frac{p}{q} \right|$ , με  $1 \leq q$ , δηλ. και πάλι ο  $\frac{p}{q}$  δεν θα ήταν βέλτιστη προσέγγιση.

Αν ο ρητός  $\frac{p}{q}$  δεν ταυτίζεται με κάποιο αναγωγήμα ή κάποιο δευτεροβάθμιο αναγωγήμα, τότε θα βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών ρητών κλασμάτων αυτού του είδους. Η μορφή των δευτεροβάθμιων αναγωγήματων **μεταξύ των  $c_{k-1}$ ,  $c_{k+1}$**  είναι:  $\frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k}$ ,  $1 \leq t \leq a_{k+1} - 1$  και για να έχουμε στη διάθεσή μας και την υποψηφιότητα του αναγωγήματος  $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ , θεωρούμε  $0 \leq t \leq a_{k+1} - 1$  [\*].

Ο  $\frac{p}{q}$  θα βρίσκεται λοιπόν μεταξύ των  $\frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k}$  και  $\frac{p_{k-1} + (t+1)p_k}{q_{k-1} + (t+1)q_k}$  για κάποιο  $0 \leq t \leq a_{k+1} - 1$ .



Έτσι  $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k} \right| < \left| \frac{p_{k-1} + (t+1)p_k}{q_{k-1} + (t+1)q_k} - \frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k} \right| = \frac{1}{(q_{k-1} + (t+1)q_k)(q_{k-1} + tq_k)}$  (η απόλυτη τιμή του αριθμητή είναι 1 από την παρατήρηση 5.2.5:3).

$$\text{Αλλά } \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k} \right| = \frac{N}{q(q_{k-1} + tq_k)} \geq \frac{1}{q(q_{k-1} + tq_k)}.$$

$$\text{Τελικά } \frac{1}{q(q_{k-1} + tq_k)} \leq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k} \right| < \frac{1}{(q_{k-1} + (t+1)q_k)(q_{k-1} + tq_k)}, \text{ δηλ}$$

$$q_{k-1} + (t+1)q_k < q.$$

Το κλάσμα  $\frac{p_{k-1} + (t+1)p_k}{q_{k-1} + (t+1)q_k}$  έχει μικρότερο παρονομαστή από τον παρονομαστή του

$$\frac{p}{q} \text{ και από το τμήμα 5.2.6. γνωρίζουμε ότι } \left| \xi - \frac{p_{k-1} + (t+1)p_k}{q_{k-1} + (t+1)q_k} \right| < \left| \xi - \frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k} \right|.$$

Επειδή ο ρητός  $\frac{p}{q}$  βρίσκεται μεταξύ των  $\frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k}$  και  $\frac{p_{k-1} + (t+1)p_k}{q_{k-1} + (t+1)q_k}$  θα έχουμε

$$\text{και } \left| \xi - \frac{p_{k-1} + (t+1)p_k}{q_{k-1} + (t+1)q_k} \right| < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \text{ με } q_{k-1} + (t+1)q_k < q. \text{ Αλλά αυτό είναι αντίθετο με την}$$

υπόθεση ότι ο  $\frac{p}{q}$  είναι βέλτιστη προσέγγιση του  $\xi$ .

Άρα ο  $\frac{p}{q}$  ταυτίζεται με κάποιο από τα  $\frac{p_{k-1} + tp_k}{q_{k-1} + tq_k}$ ,  $0 \leq t \leq a_{k+1} - 1$ .

**Παρατήρηση:** Αν έχουμε τον ρητό  $\frac{1}{4} = [0, 4]$ , τα αναγωγήματα είναι  $\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}$ ,  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{4}$ .

Ο ρητός  $\frac{1}{3}$  είναι βέλτιστη προσέγγιση του  $\frac{1}{4}$ , αφού αν  $\frac{1}{3} \neq \frac{u}{v}$ , για  $1 \leq v \leq 3$ , έχουμε

$$\left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right| < \left| \frac{1}{4} - \frac{u}{v} \right|. \text{ Ο } \frac{1}{3} \text{ δεν είναι αναγωγήμα του } \frac{1}{4}. \text{ Για να δώσουμε την ευκαιρία στον } \frac{1}{3} \text{ να}$$

είναι δευτεροβάθμιο αναγωγήμα, θεωρούμε το σχήμα  $\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0}$ , σαν αναγωγήμα τάξης (-1).

Έτσι, τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ  $\frac{p_{-1}}{q_{-1}}$  και  $\frac{p_1}{q_1}$ , δηλ. μεταξύ  $\frac{1}{0}$ ,  $\frac{1}{4}$  είναι τώρα τα

$$\left( \frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1} \right): \frac{1+0}{0+1}, \frac{1+2 \cdot 0}{0+2 \cdot 1}, \frac{1+3 \cdot 0}{0+3 \cdot 1} \text{ και μαζί με τα αναγωγήματα } c_0, c_1 \text{ είναι τα κλάσματα}$$

$$\left( \frac{1}{0} \right), \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}. \text{ Ανάλογα μπορούμε να σκεφτούμε και για το παράδειγμα 5.3.1:1.}$$

Στην [\*], αν  $k=0$ , παίρνουμε  $1 \leq t < a_1$ .

**5.3.3.** Γνωρίζουμε (5.2.6.) ότι τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_{k-2}$ ,  $c_k$  με αρχή το αναγωγήμα  $c_{k-2}$  «κατευθύνονται» προς το  $c_{k-1}$  και ότι κάθε επόμενο από το τρέχον δευτεροβάθμιο αναγωγήμα βρίσκεται πλησιέστερα στον  $\xi$  από το προηγούμενο.

Η απόσταση  $\left| \xi - \frac{p_{k-2} + tp_{k-1}}{q_{k-2} + tq_{k-1}} \right|$  μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του  $t$ ,  $1 \leq t \leq a_k - 1$ .

Επομένως  $\left| \xi - \frac{p_{k-2} + (a_k - 1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)q_{k-1}} \right| < \dots < \left| \xi - \frac{p_{k-2} + tp_{k-1}}{q_{k-2} + tq_{k-1}} \right| < \dots < \left| \xi - \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} \right|$ .

Γνωρίζουμε επίσης ότι:  $\left| \xi - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} \right|$ .

Θα διερευνήσουμε τη δυνατότητα κάποιου ή κάποιων δευτεροβάθμιων αναγωγημάτων να πλησιάσουν περισσότερο τον  $\xi$  από το  $(k-1)$  τάξης αναγωγή  $c_{k-1}$ , δηλ. θα εξετάσουμε αν υπάρχει  $t$  (ο  $t$  είναι φυσικός με  $1 \leq t \leq a_k - 1$ ) ώστε  $\left| \xi - \frac{p_{k-2} + tp_{k-1}}{q_{k-2} + tq_{k-1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right|$ .

**5.3.4. Θεώρημα.** Έστω  $\xi$  άρρητος,  $\xi = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, z_k]$ , όπου  $a_i$  είναι τα μερικά πηλίκια και  $z_k$  το πλήρες πηλίκιο  $k$ -τάξης. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\left| \xi - \frac{p_{k-2} + tp_{k-1}}{q_{k-2} + tq_{k-1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| \Leftrightarrow t > \frac{a_k}{2} \text{ ή } \left( t = \frac{a_k}{2} \text{ και } [a_k, a_{k-1}, \dots, a_1] > z_k \right)$$

**Απόδειξη:** Έχουμε

$$\left| \xi - \frac{p_{k-2} + tp_{k-1}}{q_{k-2} + tq_{k-1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{t(\xi q_{k-1} - p_{k-1}) + \xi q_{k-2} - p_{k-2}}{q_{k-2} + tq_{k-1}} \right| < \left| \frac{\xi q_{k-1} - p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| [1]$$

Αλλά  $\xi = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, z_k] = \frac{z_k p_{k-1} + p_{k-2}}{z_k q_{k-1} + q_{k-2}} \Leftrightarrow z_k = \frac{-(\xi q_{k-2} - p_{k-2})}{\xi q_{k-1} - p_{k-1}}$ . Η τελευταία είναι

ισοδύναμη με την  $\xi q_{k-2} - p_{k-2} = -z_k (\xi q_{k-1} - p_{k-1})$ .

$$\text{Η [1] γίνεται : } \left| \frac{(t - z_k)(\xi q_{k-1} - p_{k-1})}{q_{k-2} + tq_{k-1}} \right| < \left| \frac{\xi q_{k-1} - p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| \Leftrightarrow |t - z_k| q_{k-1} < q_{k-2} + tq_{k-1} [2]$$

Για το  $t$  έχουμε:  $1 \leq t \leq a_k - 1 < a_k < z_k$ , άρα  $z_k - t > 0$  και η [2] ισοδυναμεί με την  $(z_k - t)q_{k-1} < q_{k-2} + tq_{k-1} \Leftrightarrow 2tq_{k-1} + q_{k-2} > z_k q_{k-1}$ .

Αν  $2t = a_k$ , τότε  $2tq_{k-1} + q_{k-2} > z_k q_{k-1} \Leftrightarrow a_k q_{k-1} + q_{k-2} > z_k q_{k-1} \Leftrightarrow q_k > z_k q_{k-1} \Leftrightarrow \frac{q_k}{q_{k-1}} > z_k$

Από την παρατήρηση 3.1.5 έχουμε:  $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1]$  και συμπεραίνουμε ότι αν

$$2t = a_k, \text{ τότε } 2tq_{k-1} + q_{k-2} > z_k q_{k-1} \Leftrightarrow \frac{q_k}{q_{k-1}} > z_k \Leftrightarrow [a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1] > z_k.$$

○ Αν  $t > \frac{a_k}{2} \Leftrightarrow 2t \geq a_k - 1$ , τότε

$$2tq_{k-1} + q_{k-2} \geq (a_k - 1)q_{k-1} + q_{k-2} \geq (a_k - 1)q_{k-1} + q_{k-1} > z_k q_{k-1}.$$

○ Αν  $t < \frac{a_k}{2} \Leftrightarrow 2t \leq a_k - 1$ , τότε

$$2tq_{k-1} + q_{k-2} \leq (a_k - 1)q_{k-1} + q_{k-2} \leq (a_k - 1)q_{k-1} + q_{k-1} < z_k q_{k-1}.$$

Οι περιπτώσεις για το  $t$  είναι «εξαντλητικές», άρα το θεώρημα αποδείχθηκε.

Τα ενδιαφέροντα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_{k-2}$ ,  $c_k$ , αυτά που βρίσκονται πλησιέστερα από το  $c_{k-1}$  στον άρρητο  $\xi$ , είναι αυτά για τα οποία  $t > \frac{a_k}{2}$  ( $t \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq t \leq a_k - 1$ ).

Αν ο  $a_k$  είναι άρτιος, υπάρχει μεσαίο δευτεροβάθμιο, το  $\frac{p_{k-2} + \frac{a_k}{2} p_{k-1}}{q_{k-2} + \frac{a_k}{2} q_{k-1}}$  και θα πρέπει να

εξετάσουμε αν ισχύει η συνθήκη του θεωρήματος.

### 5.3.5. Παραδείγματα:

1. Θα αποδείξουμε ότι το κλάσμα  $311/99$  είναι η βέλτιστη προσέγγιση του  $\pi$  ανάμεσα σε όλους τους ρητούς με παρονομαστή μικρότερο ή ίσο του 100.

Για τον  $\pi$  γνωρίζουμε ότι  $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \dots]$ . Τα πέντε πρώτα αναγωγήματα είναι:  $\left\{ 3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102} \right\}$ . Τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $\frac{3}{1}, \frac{333}{106}$  έχουμε

βρει ότι είναι τα  $\frac{25}{8}, \frac{47}{15}, \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{113}{36}, \frac{132}{43}, \frac{157}{50}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}$

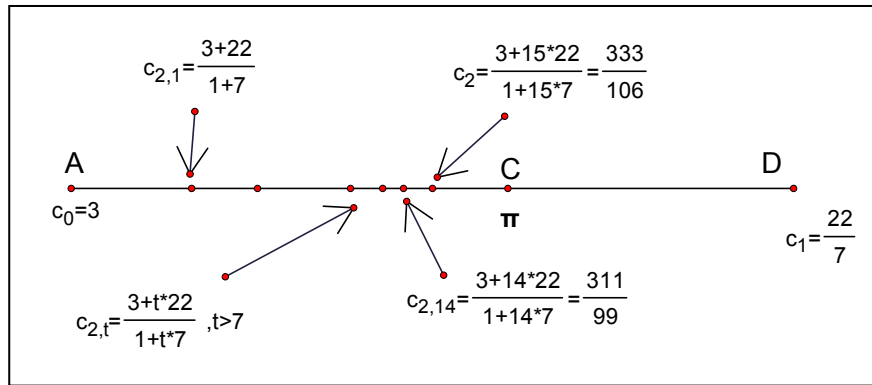
(5.2.8) Μετά το δευτεροβάθμιο  $\frac{311}{99}$ , ακολουθεί το αναγωγήμα 2<sup>ης</sup> τάξης  $\frac{333}{106}$ .

Έχουμε  $a_2 = 15$ ,  $1 \leq t \leq 14$ ,  $c_0 = 3$ ,  $c_1 = 22/7$ ,  $c_2 = 333/106$ ,  $c_3 = 355/113$ ,  $c_4 = 103993/33102$ .

Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι για  $t > 7$  (αντίστοιχα δευτεροβάθμια:  $\frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}$ ) παίρνουμε καλύτερες προσεγγίσεις για τον  $\pi$ , από την προσέγγιση που δίνει το αναγωγήμα πρώτης τάξης, ο ρητός  $22/7$  ( $|\pi - c_{2,t}| < |\pi - c_1|$ ,  $t > 7$ , με το γνωστό τίμημα: έχουμε κλάσματα με μεγαλύτερους όρους).



Επειδή  $c_2$  είναι αναγωγήμα άρτιας τάξης, τα δευτεροβάθμια σχηματίζουν αύξουσα ακολουθία, άρα καλύτερο από τα δευτεροβάθμια είναι το τελευταίο, ο ρητός  $\frac{311}{99}$ . Το  $c_2=333/106$ , έχει παρονομαστή μεγαλύτερο του 100, άρα η βέλτιστη προσέγγιση του  $\pi$  με παρονομαστή μικρότερο ή ίσο του 100 είναι ο ρητός  $311/99$ .



Ας δούμε και τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_2$ ,  $c_4$ , τα  $\frac{333+t355}{106+t113}$ ,  $1 \leq t \leq 291$ .

$$\text{Για } t = 147 \left( > \frac{292}{2} \right), \text{ έχουμε, } c_{4,147} = \frac{333+147 \cdot 355}{106+147 \cdot 113} = \frac{52518}{16717} \text{ και } \left| \frac{52518}{16717} - \pi \right| < \left| \frac{355}{113} - \pi \right|.$$

Επειδή  $a_4 = 292$ , συγκρίνουμε τα συνεχή κλάσματα:

$$[a_4, a_3, a_2, a_1] = [292, 1, 15, 7] = [b_0, b_1, b_2, b_3] \text{ και } z_k = z_4 = [292, 1, 1, \dots] = [d_0, d_1, d_2, \dots]. \text{ Το}$$

πρώτο μερικό πηλίκο στο οποίο διαφέρουν έχει άρτιο δείκτη  $b_2 = 15 > 1 = d_2$ , άρα

$$[292, 1, 15, 7] > [292, 1, 1, \dots] \text{ (4.7.1.) και σύμφωνα με το θεώρημα θα έχουμε } |\pi - c_{4,146}| < |\pi - c_3|.$$

$$\text{Υπολογίζουμε λοιπόν (για } t = \frac{a_k}{2} \text{) και το } c_{4,146} = \frac{333+146 \cdot 355}{106+146 \cdot 113} = \frac{52163}{16604},$$

$$\text{οπότε: } \left| \frac{52163}{16604} - \pi \right| < \left| \frac{355}{113} - \pi \right|.$$

Συμπεραίνουμε ότι η επόμενη καλύτερη προσέγγιση του  $\pi$ , μετά τον ρητό  $355/113$ , είναι ο  $52163/16604$ .

**Ο ρητός  $355/113$  είναι η βέλτιστη προσέγγιση του  $\pi$  μεταξύ όλων των ρητών κλασμάτων με παρονομαστή που δεν υπερβαίνει τον 16603.**

2. Για τον  $\frac{1+\sqrt{3}}{2} = [1, 2]$ , έχουμε  $a_0=1, a_1=2, a_2=1, a_3=2, \dots$   
 Αναγωγήματα:  $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{11}{8}, \frac{15}{11}, \frac{41}{30}, \frac{56}{41}, \frac{153}{112}, \dots$ . Δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ των  $c_1=3/2, c_3=11/8$  έχουμε μόνο για  $t=1$ , το  $\frac{3+4}{2+3} = \frac{7}{5}$  με  $[a_3, a_2, a_1] = [2, 1, 2] < [2, 1, 2, 1, \dots]$  (παρατήρηση 4.7.2). Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι το  $7/5$  δεν είναι καλύτερη προσέγγιση του αρρήτου από το  $4/3$ . Πράγματι:  $\left| \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3} \right| < \left| \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{5} \right|$ , γιατί  $15\sqrt{3} < 26$ .

3. Ας θεωρήσουμε τον ρητό  $\frac{4}{5} = [0, 1, 4]$  με αναγωγήματα  $0, 1, \frac{4}{5}$ . Τα δευτεροβάθμια αναγωγήματα μεταξύ  $c_0, c_2$  είναι τα  $1/2, 2/3, 3/4$ . Σύμφωνα με το θεώρημα το δευτεροβάθμιο  $1/2$  δεν είναι βέλτιστη προσέγγιση του  $4/5$ , δεν είναι καλύτερη προσέγγιση από το  $c_1=1$  ( $t=1 < \frac{a_2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ). Πράγματι:  $\left| \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{10} > \left| \frac{4}{5} - 1 \right| = \left| \frac{4}{5} - \frac{1}{1} \right| = \frac{1}{5}$  και  $1 < 2$ . Αν ήταν βέλτιστη, θα έπρεπε  $\left| \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \right| < \left| \frac{4}{5} - \frac{u}{v} \right|$  για όλα τα ρητά κλάσματα με  $1 \leq v \leq 2$ . Για το  $\frac{2}{3}$  εξετάζουμε αν ισχύει η  $[a_2, a_1] = [4, 1] > [4] = z_2[3]$ . Σύμφωνα με το Θ.3.7.1.η [3] ισχύει, άρα ο  $\frac{2}{3}$  είναι καλύτερη προσέγγιση του  $\frac{4}{5}$  από το αναγωγήμα  $c_1$ . Πράγματι  $\left| \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{15} < \left| \frac{4}{5} - 1 \right| = \frac{1}{5}$ . Ο  $\frac{2}{3}$  είναι η βέλτιστη προσέγγιση του  $4/5$  μεταξύ όλων των κλασμάτων με παρονομαστή που δεν υπερβαίνει τον 3.

### 5.3.6. Παρατηρήσεις.

1. Από το Θ. 5.3.4, αλλά και τα προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι το αντίστροφο του Θ.5.3.2. δεν ισχύει.

2. Αν  $a_k=2$ , τότε έχουμε ένα δευτεροβάθμιο αναγωγήμα, το  $c_{k,1} = \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}$ , που μπορούμε να το βρούμε και με αφαιρέσεις:  $\frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} = \frac{(2p_{k-1} + p_{k-2}) - p_{k-1}}{(2q_{k-1} + q_{k-2}) - q_{k-1}} = \frac{p_k - p_{k-1}}{q_k - q_{k-1}}$ . Από το παράδειγμα 2 συμπεραίνουμε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητα καλύτερο από το  $c_{k-1}$ .

3. Αν  $a_k \geq 3$ , το  $\frac{p_k - p_{k-1}}{q_k - q_{k-1}}$  είναι το τελευταίο δευτεροβάθμιο και σύμφωνα με το Θ.5.3.4. θα ισχύει:  $\left| \xi - \frac{p_k - p_{k-1}}{q_k - q_{k-1}} \right| < \left| \xi - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right|$  γιατί  $\frac{p_k - p_{k-1}}{q_k - q_{k-1}} = c_{k,t}$ , με  $t > \frac{a_k}{2}$ .

### 5.4. Άριστες προσεγγίσεις

**5.4.1. Ορισμός.** Ονομάζουμε τον ρητό  $\frac{p}{q}$  ( $p$  ακέραιος,  $q$  φυσικός) μια **άριστη προσέγγιση** ενός πραγματικού  $\xi$ , όταν οι ανισότητες:  $1 \leq v \leq q$  και  $\frac{p}{q} \neq \frac{u}{v}$ , οδηγούν στο συμπέρασμα:  $|\xi q - p| < |\xi v - u|$ . Όπως και για την βέλτιστη προσέγγιση, μπορούμε να πούμε ότι ο  $\frac{p}{q}$  είναι μια **άριστη προσέγγιση** ενός πραγματικού  $\xi$ , όταν  $|\xi q - p| = \min_{\substack{u \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq v \leq q}} |\xi v - u|$ .

**5.4.2.** Η διαφορά στην ονομασία, βέλτιστη-άριστη, προέρχεται από την χρήση των ανισοτήτων  $|\xi q - p| < |\xi v - u|$  και  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \left| \xi - \frac{u}{v} \right|$ . Η  $|\xi q - p| < |\xi v - u|$  είναι ισχυρότερη: Οι  $1 \leq v \leq q$  και  $\left| \xi - \frac{u}{v} \right| \leq \left| \xi - \frac{p}{q} \right|$ , με πολ/σμό δίνουν  $|\xi q - p| \geq |\xi v - u|$ .

Άρα αν ισχύουν οι  $1 \leq v \leq q$  και  $|\xi q - p| < |\xi v - u|$ , τότε θα ισχύει και η  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \left| \xi - \frac{u}{v} \right|$ . Οι άριστες προσεγγίσεις είναι και βέλτιστες.

Μια βέλτιστη προσέγγιση όμως δεν είναι αναγκαστικά άριστη. Π.χ. Ο ρητός  $\frac{1}{3}$  δεν είναι μια άριστη προσέγγιση του  $\frac{1}{5}$ , γιατί για  $\frac{u}{v}$  με  $v=1, u=0$ , ισχύει:  $\left| 1 \cdot \frac{1}{5} - 0 \right| < \left| 3 \cdot \frac{1}{5} - 1 \right|$  (είδαμε όμως ότι είναι βέλτιστη, 5.3.1).

**5.4.3. Θεώρημα.** Αν ο ρητός  $p/q$  είναι μια άριστη προσέγγιση του **αρρήτου**  $\xi$ , τότε ο  $p/q$  είναι κάποιο από τα αναγωγήματα της ανάπτυξης του  $\xi$  σε συνεχές κλάσμα και αντιστρόφως.

**Απόδειξη:**

A. (είναι περίπου όπως και η απόδειξη του Θ. 5.3.2).

Υποθέτουμε ότι ο  $\frac{p}{q}$  είναι μία άριστη προσέγγιση του αρρήτου  $\xi = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ ,

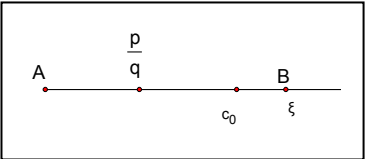
δηλ. για κάθε ρητό  $\frac{u}{v}$  διαφορετικό από τον  $\frac{p}{q}$  με  $1 \leq v \leq q$ , ισχύει:  $|\xi q - p| < |\xi v - u|$ .

Υπενθυμίζουμε ότι για τα αναγωγήματα και τον  $\xi$  θα πρέπει να έχουμε την παρακάτω

$$\text{εικόνα: } c_0 = \frac{p_0}{q_0} < c_2 = \frac{p_2}{q_2} < \dots < \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+1} < \dots < c_3 = \frac{p_3}{q_3} < c_1 = \frac{p_1}{q_1}.$$

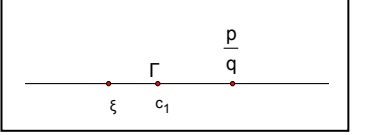
Αν ο ρητός  $\frac{p}{q}$  δεν είναι αναγωγήμα, τότε εξετάζουμε τρεις δυνατότητες: να βρίσκεται αριστερά του  $c_0$ , δεξιά του  $c_1$  ή ανάμεσα στα αναγωγήματα  $c_{n-1}, c_{n+1}$  ( $n \geq 1$ ).

α. Αν  $\frac{p}{q} < c_0 = \frac{a_0}{1}$ , τότε για τον ρητό  $\frac{u}{v} = \frac{a_0}{1}$  ( $v=1 \leq q, u = a_0$ ) ισχύει  $|1 \cdot \xi - a_0| < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq |\xi q - p|$ , γιατί  $q \geq 1$ , γεγονός



που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο  $\frac{p}{q}$  είναι άριστη προσέγγιση (δηλ. για τον  $p/q$  ισχύει  $|\xi q - p| < |\xi v - u|$ , όταν  $1 \leq v \leq q$ ).

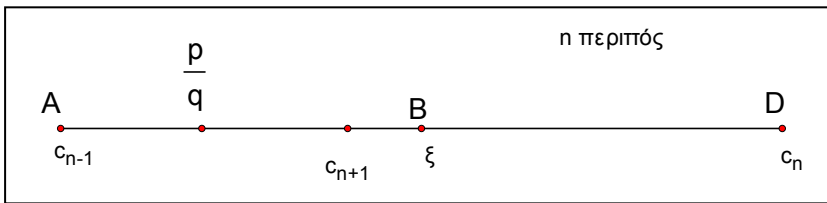
β. Αν  $\frac{p}{q} > c_1$ , τότε  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \left| \frac{p}{q} - c_1 \right| = \left| \frac{p - p_1}{q - q_1} \right| \geq \frac{1}{qq_1}$ , γιατί  $|q_1 p - p_1 q| \geq 1$ , αφού ο  $p/q$  δεν είναι το αναγωγήμα πρώτης



τάξης. Πολλ/ζουμε επί τον θετικό  $q$ :  $|\xi q - p| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{1}{a_1}$ .

Από τις  $\xi = z_0 = a_0 + \frac{1}{z_1}$ ,  $\xi - a_0 = \frac{1}{z_1}$  συμπεραίνουμε ότι  $|1 \cdot \xi - a_0| < \frac{1}{a_1}$  ( $a_0$  είναι το ακέραιο μέρος του  $\xi$ ,  $a_1 \geq 1$  είναι το ακέραιο μέρος του  $z_1 > 1$ ,  $z_1 > a_1$ ). Βρίσκουμε  $|1 \cdot \xi - a_0| < |\xi q - p|$ , δηλ. για τον ρητό  $\frac{u}{v} = \frac{a_0}{1}$  ( $v=1 \leq q, u = a_0$ ) ισχύει  $|\xi q - p| > |\xi v - u|$ , που και πάλι έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο  $\frac{p}{q}$  είναι άριστη προσέγγιση του  $\xi$ .

γ. Αν ο  $p/q$  είναι ανάμεσα στα  $c_{n-1}, c_{n+1}$  τότε και τα δυο αυτά αναγωγήματα είναι είτε δεξιά, είτε αριστερά του  $\xi$ , και το  $c_n$  στην αντίθετη πλευρά, π.χ. αν  $n$  περιττός, θα έχουμε την εξής εικόνα:



Άρα  $\left| \frac{p}{q} - c_{n-1} \right| < |c_n - c_{n-1}| = \left| \frac{p_n - p_{n-1}}{q_n - q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$  ( $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ ) και  $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \geq \frac{1}{qq_{n-1}}$  ( $|qp_{n-1} - pq_{n-1}| \geq 1$ ). Από τις  $\frac{1}{qq_{n-1}} \leq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|$  και  $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$ , συμπεραίνουμε ότι:  $q > q_n$ . Επίσης:  $\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \left| \frac{p_{n+1} - p}{q_{n+1} - q} \right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$ , οπότε  $|\xi q - p| > \frac{1}{q_{n+1}}$ .

Από το Θ.4.5.1, ανισότητα Β.1, έχουμε  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ , δηλ.  $|\xi q_n - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$ .

Τελικά  $|\xi q_n - p_n| < |\xi q - p|$ , με  $1 \leq q_n < q$ , άτοπον (σύμφωνα με την υπόθεση ο  $p/q$  είναι άριστη προσέγγιση του  $\xi$ , άρα για τον  $u/v$  με  $v = q_n, u = p_n$  θα έπρεπε να έχουμε την  $|\xi q - p| < |\xi v - u| = |\xi q_n - p_n|$ , αφού  $1 \leq v = q_n \leq q$ ).

Συμπεραίνουμε ότι ο μόνος «τόπος για να σταθεί» ο ρητός  $\frac{p}{q}$  είναι το παραστατικό σημείο κάποιου από τα αναγωγήματα της ανάπτυξης του  $\xi$  σε συνεχές κλάσμα.

**Β.** Υποθέτουμε ότι ο  $\frac{p}{q}$  είναι το  $k$ -τάξης αναγωγήμα του αρρήτου  $\xi$ ,  $\frac{p}{q} = \frac{p_k}{q_k}$ .

Έστω  $v$  τυχαίος θετικός ακέραιος, με  $1 \leq v \leq q_k$ . Θεωρούμε τις διαφορές  $|v\xi - m|$ , για όλους τους ακέραιους  $m$ . Για κάθε  $v$  υπάρχει μοναδικός  $m$  που ελαχιστοποιεί την  $|v\xi - m|$  (Θ.5.1.7). Θεωρούμε τον ελάχιστο από τους  $|v\xi - m|$  (το πλήθος αυτών των διαφορών είναι  $q_k$ ). Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα ζεύγη ακεραίων  $v, m$  με την ελάχιστη τιμή, παίρνουμε εκείνον που έχει μικρότερο  $v$ . Ονομάζουμε  $\rho$  τον μικρότερο  $v$  που ελαχιστοποιεί την  $|v\xi - m|$ . Ονομάζουμε επίσης  $\sigma$  τον μοναδικό αντίστοιχο του  $\rho$  (ο  $\xi$  είναι άρρητος). Έτσι  $|\rho\xi - \sigma| = \min_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq v \leq q_k}} |v\xi - m|$  [1]. Από το μέρος Α συμπεραίνουμε ότι ο  $\frac{\sigma}{\rho}$  είναι κάποιο αναγωγήμα

του  $\xi$ , έστω το  $\frac{p_s}{q_s}$ ,  $1 \leq s \leq k$ . Η [1] γίνεται :  $|q_s \xi - p_s| = \min_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq v \leq q_k}} |v\xi - m|$ .

Αν  $s < k$ , από την  $\frac{1}{q_s + q_{s+1}} < |\xi q_s - p_s|$  (5.2.7.) και τις  $q_s \leq q_{k-1}, q_{s+1} \leq q_k$  (αφού  $s < k$ )

παίρνουμε την  $\frac{1}{q_k + q_{k-1}} \leq \frac{1}{q_s + q_{s+1}} < |\xi q_s - p_s|$ . Από το Θ.4.5.1. έχουμε  $|\xi q_k - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}$ .

Αλλά  $s < k$  άρα  $q_s \leq q_k$  και από τον ορισμό των  $p_s, q_s$  παίρνουμε  $|\xi q_s - p_s| \leq |\xi q_k - p_k|$ .

Οι  $|\xi q_k - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}$ ,  $\frac{1}{q_k + q_{k-1}} < |\xi q_s - p_s|$  και  $|\xi q_s - p_s| \leq |\xi q_k - p_k|$  μας οδηγούν στην

$\frac{1}{q_k + q_{k-1}} < \frac{1}{q_{k+1}}$  και αυτή στην αδύνατη  $q_{k+1} < q_k + q_{k-1}$  (από τον ορισμό των  $q_k$  :

$q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1} \geq q_k + q_{k-1}$ ).

Αν  $s = k$ , τότε  $|q_k \xi - p_k| = \min_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq v \leq q_k}} |v\xi - m|$ , και το αντίστροφο αποδείχθηκε.

#### 5.4.4. Παρατηρήσεις.

1. Αν  $\xi$  άρρητος και αν ο ρητός  $p/q$  ( $p$  ακέραιος,  $q$  φυσικός) ικανοποιεί την  $|\xi q - p| < |\xi q_k - p_k|$  για κάποιο αναγώγημα  $\frac{p_k}{q_k}$  τότε  $q \geq q_{k+1}$ .

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι  $v$  είναι ο ελάχιστος φυσικός για τον οποίο υπάρχει ακέραιος  $\mu$  ώστε  $|\xi v - \mu| < |\xi q_k - p_k|$ . Σύμφωνα με το θεώρημα, ο  $\mu/v$  είναι κάποιο αναγώγημα,  $\frac{p_m}{q_m}$ . Τότε όμως η τάξη  $m$  του  $\mu/v$  πρέπει να είναι μεγαλύτερη του  $k$  (η απόσταση του  $\xi$  από τα διαδοχικά αναγωγήματα συνεχώς μικραίνει), δηλ.  $m \geq k+1$ , οπότε  $q \geq v = q_m \geq q_{k+1}$ .

2. Αν  $\left| \xi - \frac{u}{v} \right| < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right|$  για κάποιο  $k \geq 1$ , τότε  $v > q_k$ .

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε ότι  $v \leq q_k$ . Πολ/ζοντας κατά μέλη έχουμε  $|\xi v - u| < |\xi q_k - p_k|$ , οπότε  $v \geq q_{k+1}$  από την παρατήρηση 1. Αλλά για  $k \geq 1$  ισχύει  $q_{k+1} > q_k$  και οδηγούμαστε στο άτοπο:  $q_{k+1} \leq v \leq q_k < q_{k+1}$ . Η ανισότητα  $k \geq 1$ , είναι απαραίτητη, π.χ.  $\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$ ,  $\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1}$  και

για τον ρητό  $\frac{2}{1}$  ισχύει  $\left| \xi - \frac{\alpha}{\beta} \right| < \left| \sqrt{3} - \frac{2}{1} \right| < \left| \sqrt{3} - \frac{1}{1} \right| = \left| \xi - \frac{p_0}{q_0} \right|$ , με  $v = q_0$ .

3. Η προηγούμενη παρατήρηση δείχνει ότι το αναγώγημα  $k$ -τάξης,  $\frac{p_k}{q_k}$ , είναι η βέλτιστη προσέγγιση του  $\xi$ . Λύνει το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right|$  μεταξύ όλων των ρητών με παρονομαστή  $q$  που δεν υπερβαίνει τον  $q_k$ , όπου ο  $q_k$  είναι παρονομαστής κάποιου αναγωγήματος. Το γενικότερο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της  $\left| \xi - \frac{r}{s} \right|$ , όπου  $s$  θετικός ακέραιος, δηλ. της βέλτιστης προσέγγισης του  $\xi$  μεταξύ όλων των ρητών με παρονομαστή που δεν υπερβαίνει τον  $s$ , έχει λυθεί στο τμήμα 5.3.

4. Αν  $\left| \xi - \frac{u}{v} \right| < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right|$ , τότε  $v > \frac{q_{k+1}}{2}$ .

**Απόδειξη:** Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$0 < \left| \frac{u}{v} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \left| \frac{u}{v} - \xi + \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \left| \frac{u}{v} - \xi \right| + \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < 2 \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{2}{q_k q_{k+1}}. \text{ Πολ/ζουμε επί } v q_k \text{ και}$$

παίρνουμε:  $0 < |q_k u - v p_k| < 2 v q_{k+1}$  με  $|q_k u - v p_k| \geq 1$ , άρα  $v > \frac{q_{k+1}}{2}$ .

### 5.5 Το Θεώρημα Hurwitz

**5.5.1.** Στα τμήματα 5.3. και 5.4. συγκρίναμε τις διαφορές  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right|$  ή τις  $|\xi q - p|$ , με άλλες του ίδιου τύπου. Στο 5.4. είδαμε ότι οι άριστες προσεγγίσεις ενός αριθμού  $\xi$  είναι αναγωγήματα. Με δεδομένο τον παρονομαστή  $q_n$  του  $n$ -τάξης αναγωγήματος του  $\xi$ , το  $n$ -τάξης αναγωγήμα  $\frac{p_n}{q_n}$  είναι άριστη (άρα και βέλτιστη) προσέγγιση του  $\xi$ .

Μας επιτρέπει να γνωρίζουμε (κατά το νόημα της παραγράφου 5.1.3) τον τυχαίο άρρητο  $\xi$  με προσέγγιση  $\frac{1}{q_n^2}$  αφού η  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$  ισχύει για όλα τα αναγωγήματα του  $\xi$  (4.5.1). Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την αξιολόγηση της διαφοράς  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|$ .

Θα διερευνήσουμε τη δυνατότητα για τον συγκεκριμένο παρονομαστή  $q_n$  να ισχύει κάποια ισχυρότερη ανισότητα, π.χ. η  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2}$  ή γενικότερα η  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{r \cdot q_n^2}$  για κάποιον θετικό  $r$ . Στην προσπάθεια αυτή πιθανόν να χρειαστεί να θυσιαστούν κάποια αναγωγήματα. Η ισχυρότερη ανισότητα μπορεί να ισχύει για άπειρα, αλλά όχι για όλα τα αναγωγήματα. Μπορεί επίσης η «καλύτερη» ανισότητα να είναι επιλεκτική: να ισχύει για κάποιους αρρήτους αλλά να μην ισχύει για όλους. Με τον εκθέτη του παρονομαστή (την τάξη της προσέγγισης) θα ασχοληθούμε στην ενότητα 5.6.

**5.5.2.** Οι ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις του  $\xi$ , είναι εκείνες που η απόστασή τους από τον  $\xi$  είναι μικρότερη του αντιστρόφου του τετραγώνου του παρονομαστή  $q_n$ , του  $\frac{1}{q_n^2}$ . Είναι τα  $n$ -τάξης αναγωγήματα  $\frac{p_n}{q_n}$ . Για την απόσταση δυο διαδοχικών αναγωγημάτων έχουμε

$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ . Ο Borel είχε την ιδέα να εκφράσει το αποτέλεσμα αυτό με την βοήθεια

των αντιστρόφων των τετραγώνων των παρονομαστών των αναγωγημάτων  $\frac{p_n}{q_n}$  και  $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$

(Βαρόπουλος, 1949: 97):  $\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \lambda \left( \frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n+1}^2} \right)$ .

Γνωρίζουμε ότι ο (άρρητος)  $\xi$  βρίσκεται πάντα μεταξύ δύο διαδοχικών αναγωγμάτων. Άρα η απόσταση των διαδοχικών αναγωγμάτων  $c_n, c_{n+1}$  είναι καθοριστική και για την απόσταση του  $\xi$  από αυτά. Ο  $\lambda$  ονομάζεται «σχετική απόσταση» των  $c_n$  και  $\xi$ . Για

την τιμή  $\frac{1}{\lambda} = \frac{q_{n+1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n+1}}$ , αφού είναι άθροισμα θετικών αντιστρόφων, θα έχουμε  $\frac{1}{\lambda} \geq 2$ .

Συμπεραίνουμε ότι  $\frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n+1}^2} \right)$ : **Ανισότητα 5.5.2.**

Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο παρακάτω

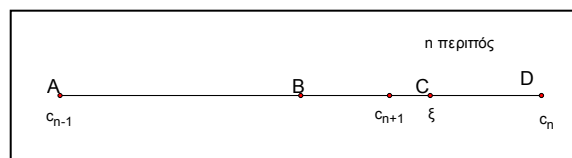
**5.5.3. Θεώρημα.** Αν  $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$  είναι διαδοχικά αναγωγήματα του αρρήτου  $\xi$ , τότε

τουλάχιστον ένα από αυτά, ας το ονομάσουμε  $\frac{p}{q}$ , ικανοποιεί την ανισότητα:  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$ .

**Απόδειξη:**

Γνωρίζουμε ότι ο  $\xi$  βρίσκεται πάντα μεταξύ δύο διαδοχικών αναγωγμάτων.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ισχύουν



ταυτόχρονα οι  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{2q_n^2}$  και  $\left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2}$

Ο  $\xi$  είναι άρρητος, η ισότητα δεν είναι δυνατή και για το άθροισμα των αποστάσεων του  $\xi$  από τα δυο αυτά διαδοχικά αναγωγήματα θα έχουμε:

$$\frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| + \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \text{ που είναι αδύνατη (5.5.2).}$$

Η ισότητα  $\frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ , ισχύει μόνον αν  $q_1 = q_0 = 1$ .

Στην ειδική αυτή περίπτωση θα έχουμε  $n = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $p_0 = a_0$ ,  $p_1 = a_1 a_0 + 1 = a_0 + 1$ ,

$$\text{και } 0 < \frac{p_1}{q_1} - \xi = 1 + a_0 - \left( a_0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \right) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} < 1 - \frac{a_2}{1 + a_2} = \frac{1}{1 + a_2} \leq \frac{1}{2} \text{ και το}$$

θεώρημα εφαρμόζεται και πάλι ( $[a_0, a_1, a_2] < [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ ), παρατήρηση 4.7.2).



**5.5.4. Πρόσμημα.** Αν  $\xi$  άρρητος, τότε υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$

$$q > 0, \text{ τέτοια ώστε } \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

**5.5.5. Θεώρημα.** Αν  $\xi$  άρρητος και αν το ρητό κλάσμα  $\frac{p}{q}$  (με  $q \geq 1$ ) ικανοποιεί την ανισότητα:  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$ , τότε το  $\frac{p}{q}$  είναι απαραίτητα κάποιο από τα αναγωγήματα του  $\xi$ .

Θα αποδείξουμε ότι ο ρητός  $\frac{p}{q}$  είναι μια άριστη προσέγγιση του  $\xi$ .

Υποθέτουμε ότι για τον διαφορετικό από τον  $\frac{p}{q}$  ( $p, q$  ακέραιοι,  $q > 0$ ) ρητό  $\frac{r}{s}$  ( $r, s$  ακέραιοι,  $s > 0$ ), ισχύει:  $|s\xi - r| \leq |q\xi - p|$ .

$$\text{Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε: } \left| \frac{p}{q} - \frac{r}{s} \right| = \left| \frac{p}{q} + \xi - \xi - \frac{r}{s} \right| \leq \left| \frac{p}{q} - \xi \right| + \left| \xi - \frac{r}{s} \right|.$$

Από την υπόθεση  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$  παίρνουμε  $|q\xi - p| < \frac{1}{2q}$  και επομένως οι προηγούμενες και η

$$|s\xi - r| \leq |q\xi - p| \text{ δίνουν: } \left| \frac{p}{q} - \frac{r}{s} \right| \leq \left| \frac{p}{q} - \xi \right| + \left| \xi - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2qs}.$$

Αν πολ/σουμε επί  $qs$  παίρνουμε  $|ps - rq| < \frac{s}{2q} + \frac{1}{2}$ . Επειδή οι ρητοί  $\frac{p}{q}$ ,  $\frac{r}{s}$  είναι διαφορετικοί, για τον ακέραιο  $ps - rq$  θα έχουμε:  $1 \leq |ps - rq| < \frac{s}{2q} + \frac{1}{2}$ , άρα  $s > q$ .

Αποδείξαμε λοιπόν την πρόταση: αν  $|s\xi - r| \leq |q\xi - p|$ , τότε  $s > q$ .

Η αντιθετοαντίστροφη αυτής είναι η πρόταση: Αν  $s \leq q$ , τότε  $|q\xi - p| < |s\xi - r|$ . Τότε όμως, σύμφωνα με το θεώρημα 5.4.3, ο ρητός  $p/q$  είναι αναγωγήμα του  $\xi$ .

**Παράδειγμα:** Ο ρητός  $22/9$  είναι αναγωγήμα του  $\sqrt{6}$ , γιατί η  $\left| \sqrt{6} - \frac{22}{9} \right| < \frac{1}{2 \cdot 9^2}$  ισχύει.

**5.5.6. Οι αριθμοί**  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ,  $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Α. Στο θεώρημα 4.5.1. βρήκαμε ότι ισχύει η:  $\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ . Από τον ορισμό των  $q_n$  έχουμε  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ . Η προηγούμενη δίνει και την  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$ .

Από την άποψη της προσέγγισης, είναι καλύτερα να έχουμε μερικά πηλίκα όσο γίνεται μεγαλύτερα. Αλλά τα μερικά πηλίκα εξαρτώνται από τον  $\xi$  και τα «χειρότερα» από την άποψη της προσέγγισης είναι εκείνα που έχουν τις μικρότερες δυνατές τιμές, τα  $0, 1, 1, 1, \dots$ . Αν  $w = [0, \bar{1}]$ , τότε  $w = \frac{1}{1 + [0, \bar{1}]} = \frac{1}{1 + w}$  και ο  $\xi$  είναι η θετική ρίζα της

$$x^2 + x - 1 = 0, \text{ δηλ. } w = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\varphi}. \text{ Τα αναγωγήματα είναι } 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \dots$$

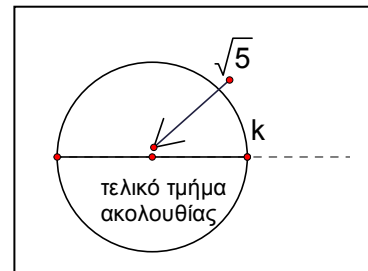
Παρατηρούμε ότι  $p_n = q_{n-1}$  ( $p_1 = q_0, p_2 = q_1, p_3 = q_2, \dots, p_n = q_{n-1}$  επαγωγικά) και επομένως  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n}$ . Ο άρρητος  $w$  είναι το όριο της ακολουθίας των αναγωγημάτων, άρα

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n}. \text{ Από το } \Theta.4.5.1 : \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n (z_{n+1} q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2 \left( z_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)} [*].$$

Τα πλήρη πηλίκα του  $w = [0, \bar{1}]$  είναι  $z_n = [\bar{1}] = 1 + w$  ( $n \geq 1$ ), επομένως  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( z_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) = 1 + 2w = \sqrt{5}$ .

[\*\*] Άρα, για  $k > \sqrt{5}$  η  $z_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} > k$  θα ισχύει μόνον

για πεπερασμένο πλήθος όρων της ακολουθίας  $z_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}$ .



Από την [\*] συμπεραίνουμε ότι και η  $\left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{k q_n^2}$  θα ισχύει για πεπερασμένο πλήθος αναγωγημάτων. Έτσι, ο  $w$ , δηλ. ο  $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ , μπορεί να ελπίζει στην ισχύ της

$\left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2}$  για άπειρο πλήθος αναγωγημάτων, αλλά όχι σε καλύτερη (μεγαλύτερη) σταθερά από τον  $\sqrt{5}$ .

**B.** Ακολουθώντας παραπλήσια τεχνική μπορούμε να αποδείξουμε ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για τον  $\varphi = [\bar{1}]$  (από την 4.3.4. έχουμε  $\frac{1}{\varphi} = [0, \bar{1}]$ , οπότε  $\varphi = [\bar{1}]$ ).

Μερικά αρχικά αναγωγήματα είναι:  $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \dots$

Εδώ παρατηρούμε ότι  $q_n = p_{n-1}$  και επομένως  $\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}$ . Όμως, το  $\frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}$  με  $p, q$  από τον  $\varphi$ , είναι το  $n$ -τάξης αναγωγήμα του  $1/\varphi$  και επομένως  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{1}{\phi}$ .

Το  $n$ -τάξης αναγωγήμα του  $1/x$  είναι ο αντίστροφος του  $(n-1)$  τάξης αναγωγήματος του  $x$ : Αυτό φαίνεται από τον αλγόριθμο των αναγωγήματων (2.6) και την παρατήρηση 4.3.4:

$$\text{αν } x > 1 \text{ και } x=[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots], \text{ τότε } \frac{1}{x} = [0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots].$$

Αναγωγήματα του $x=[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$						
n	-2	-1	0	1	2	3
p	0	1	$a_0$	$a_1 a_0 + 1$	$a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0$	...
a			$a_0$	$a_1$	$a_2$	
q	1	0	1	$a_1$	$a_2 a_1 + 1$	...

Αναγωγήματα του $(1/x)=[0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$							
n	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0	1	0	1	$a_1$	$a_2 a_1 + 1$	...
a			0	$a_0$	$a_1$	$a_2$	
q	1	0	1	$a_0$	$a_1 a_0 + 1$	$a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0$	...

Το 0 στην αρχή της γραμμής των μερικών πηλίκων του  $1/x$ , εναλλάσσει τις γραμμές των  $p, q$  του  $x$ .

$$\text{Η } [*] \text{ για τον } \varphi \text{ είναι: } \left| \varphi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left( z_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Επίσης  $z_n = [\bar{1}]$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( z_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$ . Η συνέχεια είναι ίδια με του  $\frac{1}{\phi}$ , ακριβώς όπως η παράγραφος [\*\*] στο μέρος A.

Οι παρονομαστές των αναγωγήματων των  $\varphi, \frac{1}{\phi}$  είναι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας

Fibonacci:  $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \dots, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, \dots$ . Η μέθοδος υπολογισμού υποβάλλει την ιδέα ότι για να υπολογίσουμε κάποιον αριθμό Fibonacci, θα πρέπει να γνωρίζουμε τους προηγούμενους, όπως πολλοί άνθρωποι πιστεύουν ότι για να φτάσουν στην ηλικία των 100 χρόνων πρέπει πρώτα να γίνουν 99.

Το 1843 ο Γάλλος Μαθηματικός J.Binet (1786-1856) ανέτρεψε αυτή την ιδέα (για τους αριθμούς  $f_n$ ), και ανεξαρτητοποίησε την μέθοδο υπολογισμού των  $f_n$  από τους προηγούμενους:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \phi^n - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n \right], \quad n \geq 1. \text{ Μπορούμε να}$$

πάρουμε την γενική έκφραση των αριθμών Fibonacci με τα σύγχρονα εργαλεία της αριθμητικής ανάλυσης: αν γράψουμε την  $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$  στη μορφή  $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$  έχουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και χαρακτηριστική εξίσωση  $r^2 - r - 1 = 0$  (Χατζηδήμος 1978, II, Κεφ.13).

Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι η  $f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ , όπου  $r_1, r_2$  οι ρίζες της δευτεροβάθμιας. Οι σταθερές προσδιορίζονται από τους δύο πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci. Με την βοήθεια αυτής της σχέσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\left| f_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right| < \left| \frac{\left(-\frac{1}{\phi}\right)^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ και στη συνέχεια ότι } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \text{ Οι } \phi, 1/\phi \text{ είναι άρρητοι,}$$

οι αριθμοί Fibonacci ακέραιοι.

Όπως αναφέρει και ο Πλάτωνας, δια στόματος Σωκράτη στο «Ιππίας Μείζων», 303b1-c2, ένας ρητός μπορεί να είναι το άθροισμα δυο ρητών ή δυο αρρήτων, όπως ένας άρτιος μπορεί να είναι το άθροισμα δύο αρτίων ή δυο περιττών: «ΣΩ. Ποτέρων οὖν, ὦ Ἰππία, δοκεῖ σοι τὸ καλὸν εἶναι; πότερον ὧν σὺ ἔλεγες· εἴπερ ἐγὼ ἰσχυρὸς καὶ σὺ, καὶ ἀμφοτέροι, καὶ εἴπερ ἐγὼ δίκαιος καὶ σὺ, καὶ ἀμφοτέροι, καὶ εἴπερ ἀμφοτέροι, καὶ ἐκάτερος· οὕτω δὴ καὶ εἴπερ ἐγὼ καλὸς καὶ σὺ, καὶ ἀμφοτέροι, καὶ εἴπερ ἀμφοτέροι, καὶ ἐκάτερος; ἢ οὐδὲν κωλύει, ὥσπερ ἀρτίων ὄντων τινῶν ἀμφοτέρων τάχα μὲν ἐκάτερα περιττὰ εἶναι, τάχα δ' ἄρτια, καὶ αὐτῶν ἀρρήτων ἐκατέρων ὄντων τάχα μὲν ῥητὰ τὰ συναμφοτέρα εἶναι, τάχα δ' ἄρρητα, καὶ ἄλλα μυρία τοιαῦτα, ἃ δὴ καὶ ἐγὼ ἔφην ἐμοὶ προφαίνεσθαι.»

Οι αριθμοί  $\phi, \frac{1}{\phi}$  είναι ισοδύναμοι (4.9) και κάθε άλλος ισοδύναμος με αυτούς έχει ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα με τελικό τμήμα  $[1, 1, 1, 1, \dots]$ . Άρα, για κατάλληλα μεγάλο  $k$ , και για κάθε  $n > k$ , θα έχουμε πλήρη πηλικά  $z_n = [1, 1, 1, \dots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Για τον λόγο  $\frac{q_{n-1}}{q_n}$ , όταν «τελικά» τα μερικά πηλικά είναι ίσα με 1, την μικρότερη

δυνατή τιμή, άρα και την χειρότερη από την άποψη της προσέγγισης, αφού  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$ ,

$$\text{θα έχουμε } \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1}}} = \frac{1}{\frac{q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}.$$

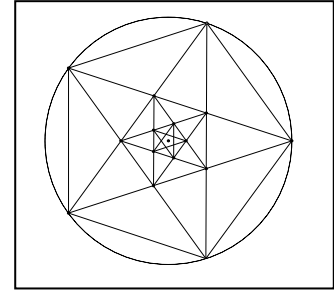
Οι αριθμοί  $\frac{q_{n-1}}{q_n}$  και  $\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$  μεταβάλλονται αντίστροφα και γίνονται εναλλακτικά

μεγαλύτεροι ή μικρότεροι (ταλαντεύονται γύρω) από την θετική ρίζα της  $x = \frac{1}{1+x}$ , δηλ.

την τιμή  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$ . Για την τιμή αυτή το άθροισμα  $\frac{1}{\lambda} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n-1}}$  γίνεται ίσο με  $\sqrt{5}$  και η

σχετική απόσταση (5.5.2) των  $c_n, c_{n-1}$  γίνεται  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Γ. Με την γραμμική κατασκευή του πενταγώνου οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη του άρρητου «χρυσού αριθμού»  $\phi$ , που αντιστοιχεί στο λόγο της «χρυσής τομής», ή παραδοσιακά, της διαίρεσης ενός ευθ. τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Ο αριθμός αυτός θεωρήθηκε μια «Θεία Αναλογία» στενά συνυφασμένη με την αίσθηση του κάλλους και της αρμονίας.



« Οι αρχαίοι Έλληνες σκέφτηκαν ότι η ομορφιά είναι η σωστή δόση και αναλογία των αντίθετων και ότι η αρμονική διαίρεση δεν σημαίνει αναγκαστικά την ισότητα και τη συμμετρία, δηλ. μια στείρα, στατική διχοτόμηση, αλλά την επίτευξη μιας δυναμικής ισορροπίας μεταξύ δυο αρμονικών άνισων μερών. Μόνο οι φιλόσοφοι και οι μαθηματικοί μπορούσαν να συλλάβουν μια τέτοια ιδέα και να βρουν σε μια ανισότητα την ακριβή θέση μιας τέλει αρμονίας, να γεφυρώσουν με πραγματική τάξη το χάος ανάμεσα στα δυο άκρα» (Ευαγγελόπουλος Δ., 2002:208).

Η «Θεία Αναλογία» χρησιμοποιήθηκε όχι μόνο στην Αρχαιότητα (κτίρια και αγγεία), αλλά και στις μέρες μας, π.χ. στο κτίριο των Ηνωμένων Εθνών και στο σύστημα Modulor του Le Corbusier (ψευδώνυμο του γνωστού γάλλου αρχιτέκτονα C.E.Jeanerret). Χρησιμοποιήθηκε όχι μόνο στην Αρχιτεκτονική, αλλά και στην Ζωγραφική, και το όνομά της οφείλεται στον Λεονάρντο Ντα Βίντσι, που ήταν ο πρώτος που την ονόμασε Sectio Aurea, δηλ. χρυσή τομή. Η χρυσή τομή συνδέεται τόσο με τη φανερή όσο και με την κρυμμένη αρμονία μεταξύ δυο μερών ή του μέρους με το όλον. Ο Φειδίας, αρχιτέκτονας του Παρθενώνα, του καλλιμάρμαρου αυτού αριστουργήματος της Ελληνικής Αρχαιότητας, αξιοποίησε στο έπακρο την ιδιότητα της χρυσής τομής και «κληροδότησε» στην ανθρωπότητα το σύμβολο για τον  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , το « $\phi$ ».

Σύμφωνα με αυτά που έχουν εκτεθεί στα Α,Β και στην ενότητα 5.5.1, ο αριθμός  $\phi$  (και οποιοσδήποτε ισοδύναμός του) καθορίζει την σταθερά  $r = \sqrt{5}$ , στην  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{r \cdot q_n^2}$ .

Το 1891 ο Hurwitz απέδειξε ότι η σταθερά  $\sqrt{5}$  είναι η καλύτερη δυνατή για την προσέγγιση ενός αρρήτου και έτσι ο (άρρητος) αριθμός  $\phi$  έγινε ο πλέον απομακρυσμένος από τα (ρητά) αναγωγήματά του.

### 5.5.7. Θεώρημα (Hurwitz):

Αν  $\xi$  τυχαίος άρρητος, τότε υπάρχουν άπειροι ρητοί  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q > 0$ , τέτοιοι ώστε

$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ . Η σταθερά  $\sqrt{5}$  είναι η καλύτερη δυνατή: αν αντικατασταθεί από κάποιον μεγαλύτερο αριθμό, τότε υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος ρητών που ικανοποιούν την ανισότητα.

**A.** Θα αποδείξουμε ότι αν  $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$  είναι διαδοχικά αναγωγήματα του αρρήτου

$\xi$ , τότε τουλάχιστον ένα από αυτά, ας το ονομάσουμε  $\frac{p}{q}$ , ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Υποθέτουμε ότι  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$  και για τα τρία αναγωγήματα.

Από τις  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$  και  $\left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2}$  (όπως και στο Θ.5.5.3.) καταλήγουμε

στην  $\frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$  που είναι ισοδύναμη με την  $\frac{q_{n+1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n+1}} < \sqrt{5}$  (η ισότητα δεν

είναι δυνατόν να ισχύει). Για  $x \geq 1$ , η συνάρτηση  $x + \frac{1}{x}$  είναι γνήσια αύξουσα, με  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

αν  $x = \varphi$  ( $\varphi > 1$ ). Από την  $\frac{q_{n+1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n+1}} < \sqrt{5}$  συμπεραίνουμε ότι  $\frac{1}{\varphi} < \frac{q_n}{q_{n+1}} < \frac{q_{n+1}}{q_n} < \varphi$

( $\frac{q_{n+1}}{q_n} \geq 1$  από την 2.6).

Από τις  $\left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2}$  και  $\left| \xi - \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+2}^2}$  παίρνουμε την

$\frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+2}^2} \leq \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}$  που είναι ισοδύναμη με την  $\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} + \frac{q_{n+1}}{q_{n+2}} < \sqrt{5}$ . Επομένως

$\frac{1}{\varphi} < \frac{q_{n+1}}{q_{n+2}} < \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} < \varphi$ , με  $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$ .

Καταλήγουμε στο άτοπο:  $\varphi > \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} = a_{n+2} + \frac{q_n}{q_{n+1}} \geq 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}} > 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$

**B.** Αρκεί να παρουσιάσουμε έναν άρρητο για τον οποίο η σταθερά  $\sqrt{5}$  είναι η καλύτερη δυνατή. Στην ενότητα 5.5.6. είδαμε ότι αν αντικαταστήσουμε την  $\sqrt{5}$  με μεγαλύτερη σταθερά, έστω  $k$ , τότε για τον άρρητο  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , και τους ισοδύναμους με αυτόν, η  $\left| \varphi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{kq^2}$  ισχύει μόνο για πεπερασμένο πλήθος αναγωγημάτων.

Αν για κάποιον ρητό ισχύει  $\left| \varphi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{kq^2}$ , με  $k > \sqrt{5}$ , τότε θα ισχύει και η  $\left| \varphi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$  και ο  $\frac{p}{q}$ , σύμφωνα με το Θ.5.5.5, θα είναι αναγωγή του  $\xi$ .

Αλλά τότε η  $\left| \varphi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{kq^2}$  θα ισχύει για πεπερασμένο πλήθος ρητών.

### 5.5.8. Σχόλια.

1. Για την απόδειξη του θεωρήματος ο Hurwitz δεν χρησιμοποίησε συνεχή κλάσματα. Η απόδειξη που έδωσε βασίστηκε στις ιδιότητες των κλασμάτων που είναι όροι ακολουθιών Farey. Για κάθε φυσικό  $n$  ακολουθία  $F_n$  αποτελείται από τα ανάγωγα κλάσματα  $\frac{a}{b}$  με  $0 \leq a \leq b \leq n$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ). Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι 6 πρώτες ακολουθίες Farey και η μέθοδος κατασκευής τους:

Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους ρητούς  $0/1$  και  $1/1$ .

Στην δεύτερη γραμμή, αντιγράφουμε τα  $0/1$  και  $1/1$ . Επειδή  $1+1=2$ , παρεμβάλλουμε το  $1/2$ .

Στην Τρίτη γραμμή, ανάμεσα στα  $0/1$  και  $1/2$ , επειδή  $1+2=3$ , παρεμβάλλουμε το  $1/3$ . Ανάμεσα στα  $1/2$  και  $1/1$ , το  $2/3$ .

Στην τέταρτη, ανάμεσα στα  $0/1$  και  $1/3$  παρεμβάλλουμε το  $1/4$ , αλλά ανάμεσα στα  $1/3$  και  $1/2$ , δεν παρεμβάλλουμε το  $2/5$  γιατί  $3+2 > 4$ . Ανάλογα δεν παρεμβάλλουμε το  $3/5$  μεταξύ των  $1/2$  και  $2/3$ , αλλά παρεμβάλλουμε το  $3/4$  ανάμεσα στα  $2/3$  και  $1/1$ .

Στην  $n$ -οστή γραμμή, αντιγράφουμε την προηγούμενη και παρεμβάλλουμε το κλάσμα  $\frac{a+a'}{b+b'}$  ανάμεσα σε δύο διαδοχικά  $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$  (δηλ. το ενδιάμεσο κλάσμα) αν ικανοποιείται η συνθήκη  $b+b' \leq n$ . Η  $n$ -οστή γραμμή του πίνακα,  $F_n$ , περιέχει διατεταγμένα όλα τα ανάγωγα κλάσματα  $a/b$ , όπου  $0 \leq a \leq b \leq n$ .

Έτσι, ο πίνακας με τα κλάσματα Farey μέχρι και την 6<sup>η</sup> γραμμή είναι:

Fr <sub>1</sub>	$\frac{0}{1}$																	$\frac{1}{1}$	
Fr <sub>2</sub>	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$									$\frac{1}{1}$	
Fr <sub>3</sub>	$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$						$\frac{1}{1}$	
Fr <sub>4</sub>	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$				$\frac{1}{1}$	
Fr <sub>5</sub>	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$	
Fr <sub>6</sub>	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{1}$

Μεταξύ των πολλών ιδιοτήτων των ακολουθιών Farey, η σημαντική για την απόδειξη του Θ. Hurwitz είναι: Αν για κάποιο n, ο άρρητος  $\xi$ , με  $0 < \xi < 1$ , βρίσκεται ανάμεσα σε δυο διαδοχικά κλάσματα  $p/q, r/s$  της Fr<sub>n</sub>, τότε τουλάχιστον ένα από τα  $p/q, (p+q)/(r+s), r/s$ , ας το

ονομάσουμε  $x/y$  ικανοποιεί την  $\left| \xi - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}y^2}$  (το  $\frac{p+r}{q+s}$  είναι το ενδιάμεσο κλάσμα των

$\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ ). Για μεγαλύτερους του 1 αρρήτους  $\xi$ , αφαιρούμε το  $[\xi]$  και ο  $\{\xi\} = \xi - [\xi]$ , το κλασματικό μέρος του  $\xi$ , είναι μεταξύ 0 και 1.

2. Είναι ενδιαφέρον να τονίσουμε ότι για την απόδειξη (με άτοπο) χρησιμοποιήθηκε η εξής βοηθητική πρόταση:

Αν  $x, y$  είναι θετικοί ακέραιοι, τότε ισχύει μια τουλάχιστον από τις ανισότητες:

$$\frac{1}{xy} < \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right), \quad \frac{1}{x(x+y)} < \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right).$$

Και η απόδειξη της βοηθητικής είναι με άτοπο:



Υποθέτουμε ότι  $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$  και  $\frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right)$ . Με απαλοιφή παρονομαστών, πρόσθεση κατά μέλη, πολλαπλασιασμό επί 2 (συμπλήρωση τετραγώνου) και παρατηρώντας ότι  $6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$  καταλήγουμε στην  $(2y - (\sqrt{5} - 1)x)^2 \leq 0$ , που είναι αδύνατη γιατί  $\sqrt{5}$  άρρητος (και οι  $x, y$  θετικοί ακέραιοι).

Αν  $q_n, q_{n+1}$  είναι παρονομαστές διαδοχικών αναγωγημάτων η  $\frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2} + \frac{1}{\sqrt{5} q_{n+1}^2}$  που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Θ. 5.5.7. και προέκυψε από τις  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2}$  και  $\left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5} q_{n+1}^2}$  είναι η  $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$  για  $x = q_n, y = q_{n+1}$ .

Το κλάσμα  $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$  εκφράζει την απόσταση των διαδοχικών αναγωγημάτων  $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ .

Το  $\frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}$  είναι το ενδιάμεσο κλάσμα των  $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ .

Η  $\frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right)$  για  $x = q_n, y = q_{n+1}$  γίνεται

$\frac{1}{q_n (q_n + q_{n+1})} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{(q_n + q_{n+1})^2} \right)$  και μπορεί να προκύψει από την πρόσθεση των

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2} \quad \text{και} \quad \left| \xi - \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5} (q_n + q_{n+1})^2}.$$

Το άτοπο στο οποίο οδηγεί η ταυτόχρονη ισχύ των  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2}$ ,

$\left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5} q_{n+1}^2}$ ,  $\left| \xi - \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5} (q_n + q_{n+1})^2}$  μας δείχνει ότι, αν η απόσταση του  $\xi$  από

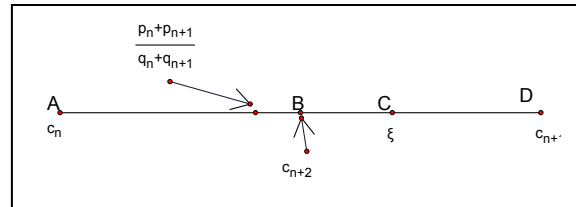
τα διαδοχικά αναγωγήματα  $c_n, c_{n+1}$  δεν είναι μικρότερη του  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  του αντιστρόφου του

τετραγώνου του αντίστοιχου παρονομαστή, τότε είναι σίγουρα μικρότερη από το  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  του

αντιστρόφου του τετραγώνου του παρονομαστή του ενδιάμεσου κλάσματος των  $c_n, c_{n+1}$ .

Ας υποθέσουμε π.χ. ότι  $c_n < c_{n+1}$ . Τότε το  $\frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}$  είναι είτε το  $c_{n+2}$ , αν  $a_{n+2}=1$ , είτε δευτεροβάθμιο αναγώγημα μεταξύ των  $c_n, c_{n+2}$ , αν  $a_{n+2}>1$ . Αν λοιπόν δεν ισχύει κάποια από τις  $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$  και  $\left| \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2}$ , τότε θα ισχύει η  $\left| \xi - \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}(q_n + q_{n+1})^2}$ .

Από την σχετική θέση των  $c_n, c_{n+1}$ ,  $c_{n+2}, \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}$  και  $\xi$ , «υποχρεώνεται» το  $c_{n+2}$



να ικανοποιήσει την  $\left| \xi - \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+2}^2}$ .

3. Η απαίτηση για τρία διαδοχικά αναγωγίματα στο  $\Theta$ . Hurwitz δεν μπορεί να περιοριστεί. Ας έχουμε για παράδειγμα τον άρρητο  $\xi = \frac{1}{4 - \sqrt{2}} = [0, 2, 1, 1, \bar{2}]$  με αναγωγίματα:  $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{12}{31}, \dots$ . Οι  $\left| \xi - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4\sqrt{5}}$  και  $\left| \xi - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{9\sqrt{5}}$  δεν ισχύουν, αλλά επαληθεύεται η  $\left| \xi - \frac{2}{5} \right| < \frac{1}{25\sqrt{5}}$  (ο  $2/5$ , το αναγώγημα  $3^{\text{ης}}$  τάξης, είναι ενδιάμεσο κλάσμα των  $1/2$  και  $1/3$ ).

4. Οι αριθμοί  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ,  $\xi = \frac{-10\varphi+7}{7\varphi-5}$  είναι ισοδύναμοι ( $-50+49=1$ , ενότητα 4.9). Αν κάνουμε τους υπολογισμούς βρίσκουμε  $\xi = \frac{169 + \sqrt{5}}{-118} = [-2, 1, 1, 4, \bar{1}]$ . Υπάρχουν άπειροι ισοδύναμοι με τον  $\varphi$  και όλοι παίζουν τον ίδιο ρόλο για το  $\Theta$ . Hurwitz. Αν αγνοήσουμε τους αριθμούς που είναι ισοδύναμοι με τον  $\varphi$ , τότε αποδεικνύεται ότι η σταθερά  $\sqrt{5}$  μπορεί να αντικατασταθεί από την  $\sqrt{8}$  (Hardy-Wright, 2008: 212).

Αν αγνοήσουμε και την κλάση ισοδυναμίας (4.9) που καθορίζει ο  $\sqrt{2}$ , τότε και η  $\sqrt{8}$  μπορεί να αντικατασταθεί από την  $\sqrt{221}/5$  (Olds, 1963: 128).

5. Το θεώρημα του Hurwitz είναι ένα παράδειγμα μιας ολόκληρης κατηγορίας σχετικών θεωρημάτων και προβλημάτων που μελετώνται υπό το γενικό τίτλο των Διοφαντικών προσεγγίσεων. Το θέμα έχει μία μακροχρόνια ιστορία. Υπάρχουν ακόμα πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα που περιμένουν λύσεις. Τα τελευταία χρόνια διάφορες νέες μέθοδοι έχουν εφευρεθεί, αλλά η μελέτη των συνεχών κλασμάτων είναι, και πιθανώς θα παραμείνει, ο θεμέλιος λίθος για εκείνους που επιθυμούν να ερευνήσουν περισσότερο αυτό το θέμα.

## 5.6. Η Τάξη της προσέγγισης

**5.6.1.Ορισμός.**Θα λέμε ότι ο αριθμός  $\xi$  **επιτρέπει (ή δέχεται) προσεγγίσεις τάξης  $m$**  ( $m$  φυσικός), αν, για μια συγκεκριμένη σταθερά  $c$ , που εξαρτάται μόνο από τον  $\xi$ , υπάρχει άπειρο πλήθος ρητών κλασμάτων  $p/q$  ( $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ ), που ικανοποιούν την ανισότητα:

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^m} = \frac{K(\xi)}{q^m}. \text{ Αν ένας αριθμός επιτρέπει προσεγγίσεις μιας τάξης, π.χ. τάξης 4,}$$

είναι προφανές ότι θα επιτρέπει και προσεγγίσεις μικρότερης τάξης: 3, 2, ή 1.

**5.6.2.Θεώρημα.**Κάθε άρρητος επιτρέπει προσεγγίσεις τάξης τουλάχιστον 2.

**Απόδειξη.** Το συμπέρασμα είναι άμεσο από το Θ.4.5.1: B.2( $c=1$ ) ή το πόρισμα 5.5.4. ( $c=1/2$ ) ή το «ισχυρότερο» Θ. Hurwitz ( $c = 1/\sqrt{5}$ ).

**5.6.3. Θεώρημα.** Κάθε ρητός επιτρέπει προσεγγίσεις τάξης 1, αλλά όχι οποιασδήποτε μεγαλύτερης τάξης.

**Απόδειξη: Α.** Έστω  $a/b$  ρητός με τους  $a, b$  σχετικά πρώτους και  $b > 0$ . Η διοφαντική εξίσωση  $ax - by = 1$  έχει άπειρες λύσεις (τμήμα 3.4). Αν  $x_0, y_0$  είναι μια ακέραια λύση, τότε οι άπειρες δίνονται από τις  $x = x_0 + bt, y = y_0 + at$ , για **κάθε** ακέραιο  $t$ . Συμπεραίνουμε ότι η παράσταση  $x = x_0 + bt$  ( $b > 0$  και  $t$  ακέραιος) είναι θετική για άπειρες τιμές του ακεραίου  $t$ .

Υπάρχουν λοιπόν άπειρα ρητά κλάσματα που ικανοποιούν την  $\left| \frac{a}{b} - \frac{y}{x} \right| = \frac{1}{bx}$  και άρα και την

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{y}{x} \right| < \frac{2}{x} \text{ (από την } ax - by = 1 \text{ έχουμε και } MK\Delta(x, y) = 1 \text{)}. \text{ Εφαρμόζεται ο ορισμός για } \xi = \frac{a}{b},$$

$p=y, q=x, c=2, m=1$ . Άρα ο  $a/b$  επιτρέπει προσεγγίσεις τουλάχιστον τάξης 1.

**Β.** Για οποιοδήποτε κλάσμα διαφορετικό από το  $a/b$ , θα έχουμε  $\left| \frac{a}{b} - \frac{y}{x} \right| \geq \frac{1}{bx}$ . Αν ο  $a/b$  επιτρέπει προσεγγίσεις τάξης 2, τότε θα πρέπει να υπάρχει κάποια σταθερά  $c$ , ώστε η

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{y}{x} \right| < \frac{c}{x^2} \text{ να ισχύει για άπειρο πλήθος ρητών κλασμάτων } y/x.$$

Έπεται ότι θα πρέπει να ισχύει η  $\frac{1}{bx} < \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{c}{x}$  για άπειρο πλήθος φυσικών  $x$  (υποθέτουμε συνεχώς κλάσματα με θετικούς παρονομαστές). Αλλά για τους συγκεκριμένους αριθμούς  $b, c$ , η  $x < bc$  μπορεί να ισχύει μόνο για πεπερασμένο πλήθος φυσικών.

Συμπεραίνουμε ότι: Οι ρητοί δέχονται προσεγγίσεις τάξης 1 και χαρακτηρίζονται από αυτή την τάξη προσέγγισης.

**5.6.4.** Από το θεώρημα 5.6.3. προκύπτει ότι αν ένας αριθμός  $\xi$  επιτρέπει προσεγγίσεις τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του 2, τότε αυτός είναι άρρητος. Ισχύει λοιπόν και το αντίστροφο του Θ. 5.6.2. Έχουμε ένα ακόμα **κριτήριο αρρητότητας** (όπως και το Θ. 5.1.13).

### 5.6.5.

**A.** Από την θεωρία σύγκλισης σειρών είναι γνωστές οι προτάσεις:

α) Κριτήριο φράγματος: Η σειρά  $\sum_1^{\infty} a_n$  μη αρνητικών όρων,  $a_n \geq 0$ , συγκλίνει μόνον αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της,  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $n$  φυσικός, είναι άνω φραγμένη.

β) Κριτήριο σύγκρισης: Αν  $0 \leq a_n \leq b_n$  για κάθε φυσικό  $n$ , και η σειρά  $\sum_1^{\infty} b_n$  συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η  $\sum_1^{\infty} a_n$  και αν  $a_{n_0} < b_{n_0}$  για κάποιο  $n_0$ , τότε  $\sum_1^{\infty} a_n < \sum_1^{\infty} b_n$ .

γ) Θεώρημα της γεωμετρικής σειράς: Αν  $|a| < 1$ , τότε η σειρά  $\sum_1^{\infty} a^n$  συγκλίνει στο άθροισμα  $\frac{a}{1-a}$ .

Προκύπτει άμεσα ότι: Αν για την ακολουθία  $(a_n)$  ισχύει  $0 \leq a_n \leq 9$ , για κάθε  $n$ , τότε η σειρά  $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$  συγκλίνει σε έναν αριθμό  $z$ , με  $0 \leq z \leq 1$ , αφού

$$0 \leq \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_1^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Συνέπεια των προηγούμενων είναι και ότι η σειρά

$\sum_1^{\infty} 10^{-2^m} = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-4} + \dots + 10^{-2^m} + \dots$  συγκλίνει και επομένως υπάρχει το άθροισμά της, ο αριθμός  $\xi = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-8} + \dots + 10^{-2^m} + \dots$

Επίσης, πραγματικοί αριθμοί είναι και τα αθροίσματα  $\sum_{m=1}^{\infty} 10^{-m!}$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m!}$ .

**B.**

Είδαμε ότι αν έχουμε κάποιον άρρητο, αυτός δέχεται προσεγγίσεις τάξης 2. Μπορούμε να μην πάρουμε κάποιον από τους υπάρχοντες, αλλά να **κατασκευάσουμε** αρρήτους που δέχονται προσεγγίσεις τάξης 2.

Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός  $\xi = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-8} + \dots + 10^{-2^m} + \dots$  επιτρέπει προσεγγίσεις τάξης 2, δηλ. ότι υπάρχει μια σταθερά  $c$  και άπειρα ρητά κλάσματα που

ικανοποιούν την  $0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^2}$ .

Ορίζουμε τους ρητούς:

$$r_1 = 10^{-1} + 10^{-2} = 11/100 = 0.11 = p_1/q_1, \quad p_1 = 11, q_1 = 10^2,$$

$$r_2 = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-4} = 0.1101 = 0.11 + 0.0001 = 1101/10000 = 1101/10^4 = 1101/10^{2^2} = p_2/q_2,$$

$$r_3 = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-2^3} = 0.11010001 = 0.1101 + 0.00000001 = 11010001/10^{2^3},$$

$$r_4 = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-2^3} + 10^{-2^4} = 0.1101000100000001 = p_4/10^{2^4}$$

$$r_5 = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-2^3} + 10^{-2^4} + 10^{-2^5} = 0.11010001000000010000000000000001 = p_5/q_5$$

$$, \dots, r_m = 10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-2^m} = p_m/10^{2^m} = p_m/q_m, \quad q_m = 10^{2^m}$$

Τα δεκαδικά ψηφία του  $r_m$  είναι μονάδες, στις θέσεις  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots, 2^m$ . Τα υπόλοιπα είναι «0». Για κάθε φυσικό  $m$ , ο ρητός  $r_m$  έχει παρονομαστή  $10^{2^m}$ . Ας εξετάσουμε τις διαφορές  $\xi - r_m$ .

$$\text{Έχουμε: } \xi - r_1 = \xi - \frac{p_1}{q_1} = b_1, \quad b_1 = 0.000100010\dots = 10^{-4} \times 1.0001000000010\dots < 2 \cdot 10^{-2^2}$$

$$\xi - r_2 = \xi - \frac{p_2}{q_2} = b_2, \quad b_2 = 0.00000001\dots = 10^{-2^3} \times 1.000000010\dots < 2 \times 10^{-2^3}$$

$$\xi - \frac{p_3}{q_3} = b_3, \quad b_3 = 10^{-2^4} \cdot 1.00\dots < 2 \cdot 10^{-2^4} \quad \text{και γενικά}$$

$$\xi - r_m = \xi - \frac{p_m}{q_m} = b_m, \quad b_m = 10^{-2^{m+1}} \times 1.000\dots < 2 \times 10^{-2^{m+1}} \quad (\text{οι τρεις τελείες δεν δηλώνουν μόνο}$$

μηδενικά, αλλά και μονάδες στις κατάλληλες θέσεις).

Καταλήγουμε στην  $\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| < 2 \cdot 10^{-2^{m+1}} = \frac{2}{(10^{2^m})^2}$  για κάθε φυσικό  $m$ . Η σταθερά  $c$

είναι 2 και η  $\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{2}{(10^{2^m})^2} = \frac{2}{(q_m)^2}$  ικανοποιείται για άπειρο πλήθος ρητών  $p_m/q_m$ . Άρα

ο  $\xi$  δέχεται προσεγγίσεις τάξης 2, επομένως είναι άρρητος.

Μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής:

$$\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-2^{m+j}} < 10^{-2^{m+1}} (1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots) = \frac{10}{9} 10^{-2^{m+1}}$$

(οι όροι των σειρών είναι μη

αρνητικοί, η γεωμετρική σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$  συγκλίνει, ισχύει το κριτήριο σύγκρισης), οπότε

παίρνουμε  $c = 10/9$ .

Εκείνο που φάνηκε αρχικά ιδιαίτερα παράξενο και ανεξήγητο στους Πυθαγορείους με την ανακάλυψη των αρρήτων, ήταν ότι υπήρχαν μεγέθη τα οποία, παρόλο που ήταν αντιληπτά και ακόμα περισσότερο κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη, δεν μπορούσαν να μετρηθούν, να υποταχθούν στο λογισμό. Αυτό έρχονταν σε αντίθεση με τη βασική τους θεώρηση ότι τα πάντα ήταν (ρητοί) αριθμοί, ότι όλα τα όντα ή τα αντικείμενα ήταν αριθμήσιμα, ρητά, υποταγμένα στο λόγο. Ο προβληματισμός ήταν τόσο μεγάλος, ώστε δεν ήθελαν να εντάξουν τον  $\sqrt{2}$  στους αριθμούς. Το ίδιο το όνομα που δόθηκε σ' αυτή την οντότητα το μαρτυρεί: Άλογον! Είναι πιθανόν να μην δεχόταν στην οικογένεια των αριθμών και τον «τεχνητό» αριθμό  $\xi = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-8} + \dots + 10^{-2^m} + \dots$ , και να μην τους ενδιέφερε η αρρητότητά του. Οι μαθηματικοί όμως δημιουργούν αποδεκτούς αριθμούς, σύμφωνα με τις υπάρχουσες θεωρίες, χωρίς να ενδιαφέρονται αν μπορούν να γίνουν αντιληπτοί, αν «κατασκευάζονται», ή αν είναι δυνατόν να περιγραφούν με λέξεις. Μερικές φορές παραβλέπουν και τον έλεγχο που επιβάλλει η «λογική», και οδηγούμενοι από τολμηρές εικασίες, δημιουργούν νοητικές οντότητες οι οποίες γίνονται παραδεκτές από ...μελλοντικές θεωρίες. «*Το κύριον στοιχείων των Μαθηματικών είναι ότι ταύτα προωθούνται δια της μεθόδου της συνεχούς προσαυξήσεως: νέα θεωρία παρατίθενται εις τας παλαιάς... Η διάρκεια του έργου του Μαθηματικού αδιαφορεί προς τον χρόνον, μη επηρεαζομένη από την πάροδον των αιώνων...*» (Βαρόπουλος, 1949: 152).

5.6.6.

Ο Γάλλος μαθηματικός Joseph Liouville (1809-1882) προχώρησε ακόμα περισσότερο. Κατασκεύασε δικούς του αρρήτους που δέχονται προσεγγίσεις **οποιασδήποτε** τάξης. Παράδειγμα ενός τέτοιου αριθμού είναι εκείνος που ορίζεται σαν μια άπειρη δεκαδική ακολουθία  $\xi = 0.a_1a_2a_3\dots$ , όπου  $a_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = m! \\ 0 & \text{αν } i \neq m! \end{cases}$ ,  $m$  φυσικός.

Συγκεκριμένα θα έχουμε  $a_1 = a_2 = a_6 = a_{24} = a_{120} = a_{720} = a_{5040} = \dots = 1$  και  $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ ,  $a_7 = a_8 = \dots = a_{23} = 0$ ,  $a_{25} = a_{26} = \dots = a_{119} = 0$ ,  $a_{121} = \dots = a_{719} = 0$  κλπ.

Πιο σύντομα μπορούμε να γράψουμε:

$$\xi = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + \dots + 10^{-m!} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} 10^{-m!} = 0.110001000000000000000000100\dots$$

Με σκέψεις όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, για κάθε  $m > 1$ , θα έχουμε:

$$\xi = 0.a_1a_2\dots a_{(m-1)!} + 0.0\dots 0a_{m!}a_{m!+1}\dots = \frac{p_m}{q_m} + b_m, \quad \text{όπου} \quad p_m = a_1a_2\dots a_{(m-1)!}, \quad q_m = 10^{(m-1)!},$$

$$b_m = 0.0\dots 0a_{m!}a_{m!+1}\dots$$

Για τους  $b_m$  ισχύει:  $b_m = 10^{-m!} \times a_{m!} \cdot a_{m!+1} \dots = 10^{-m!} \times 1.00\dots$ . Οι τρεις τελείες δεν είναι μόνο μηδενικά.

Π.χ.  $p_3 = 11$ ,  $q_3 = 10^2$ ,  $b_3 = 10^{-6} \times a_6 \cdot a_7 \dots a_{23}a_{24}a_{25}\dots a_{119}a_{120}a_{121}\dots = 10^{-6} \times 1.0\dots 010\dots 010\dots$

Καταλήγουμε στην

$$\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| = b_m = 10^{-m!} \times a_{m!} \cdot a_{m!+1} \dots = 10^{-m!} \times 1.00\dots < 2 \cdot 10^{-m!} = \frac{2}{(10^{(m-1)!})^m} = \frac{2}{(q_m)^m}, \text{ για κάθε}$$

φυσικό  $m > 1$ . Η σταθερά  $c$  είναι 2 και η  $\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{2}{(q_m)^m}$  ικανοποιείται για άπειρο πλήθος

ρητών  $p_m/q_m$ , άρα ο  $\xi$  δέχεται προσεγγίσεις οποιασδήποτε τάξης.

Αν τροποποιήσουμε λίγο τα σύμβολα, μπορούμε να γράψουμε

$$p_m = a_1a_2\dots a_{m!} = 10^{m!} \sum_{n=1}^m 10^{-n!}, \quad q_m = 10^{m!}, \text{ οπότε οι } p_m, q_m \text{ είναι σχετικά πρώτοι ακέραιοι, π.χ.}$$

$$p_3 = 110001, \quad q_3 = 10^6, \quad p_3 = 110001 = 10^{3!} \sum_{n=1}^3 10^{-n!}.$$

Για την διαφορά του ρητού  $p_m/q_m$  από τον  $\xi$  θα έχουμε:

$$\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| = \sum_{j=m+1}^{\infty} 10^{-j!} < 10^{-(m+1)!} (1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots) = \frac{10}{9} \frac{1}{(10^{m!})^{m+1}} < \frac{10}{9} \frac{1}{(q_m)^m} \quad \text{και για την}$$

σταθερά  $c$ , μπορούμε να πάρουμε  $c=10/9$ .

\*Επειδή  $\frac{1}{10^{m!}} < \frac{9}{10}$ , η  $\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{10}{9} \frac{1}{(10^{m!})^{m+1}}$  μας δίνει και την

$$\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{1}{(10^{m!})^m} = \frac{1}{(q_m)^m}.$$

### 5.6.7.

Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε το 10 στον παρονομαστή. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον αριθμό  $\theta = 2^{-1!} + 2^{-2!} + \dots + 2^{-m!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$ . Τότε  $p_m = 2^{m!} \sum_{n=1}^m 2^{-n!}$ ,  $q_m = 2^{m!}$ ,

π.χ.  $p_4 = 2^{4!} \sum_{n=1}^4 2^{-n!}$ ,  $q_4 = 2^{4!}$ . Για την διαφορά του ρητού  $p_m/q_m$  από τον  $\theta$  θα έχουμε:

$$\left| \theta - \frac{p_m}{q_m} \right| = \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-j!} < 2^{-(m+1)!} (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots) = 2 \cdot 2^{-(m+1)!} = \frac{2}{(2^{m!})^{m+1}} < \frac{2}{(2^{m!})^m} = \frac{2}{(q_m)^m}.$$

\*Επειδή  $\frac{1}{2^{m!}} < \frac{1}{2}$  (για  $m > 1$ ) η  $\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{2}{(2^{m!})^{m+1}}$  δίνει και την

$$\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{1}{(2^{m!})^m} = \frac{1}{(q_m)^m}.$$

Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε παραγοντικά. Μπορούμε να ορίσουμε τον

$$\xi = 0.a_1 a_2 a_3 \dots \quad \text{έτσι ώστε } a_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = m^m \\ 0 & \text{αν } i \neq m^m \end{cases}, m \text{ φυσικός.}$$

### 5.6.8.

Αρκετοί Μαθηματικοί δεν έδωσαν σημασία στους περιέργους αυτούς αριθμούς. Επειδή, αρχικά τουλάχιστον, δεν ανησύχησε η μαθηματική κοινότητα, ο Liouville δεν κινδύνεψε και από κάποια τρικυμία, όπως ο Ίππασος. Ήδη εκείνη την εποχή οι Μαθηματικοί έλυναν πολύπλοκες εξισώσεις και χειρίζονταν περίεργα σύμβολα, π.χ.

$$\sqrt[3]{(3\sqrt{21} + 8)(3\sqrt{21} - 8)} \quad \text{και δεν ενδιαφέρθηκαν για τις ιδιοτροπίες του Liouville.}$$



Εξάλλου οι αριθμοί αυτοί δεν πρόεκυψαν από την προσπάθεια μέτρησης (η κατασκευής) κάποιου αντιληπτού μεγέθους, όπως ο  $\sqrt{2}$  (ή ο «αντίδικός» του για την προτεραιότητα στην αρρητότητα, ο αριθμός  $\phi$ ) και όπως είναι γνωστό από την εποχή του Αριστοτέλη (Περί Ψυχής) «ουδέποτε άνευ φαντάσματος νοεή η ψυχή»: *καὶ ἔστι τὸ ἠδεσθαι καὶ λυπεῖσθαι τὸ ἐνεργεῖν τῇ αἰσθητικῇ μεσότητι πρὸς τὸ ἀγαθὸν ἢ κακόν, ἢ τοιαῦτα. καὶ ἡ φυγὴ δὲ καὶ ἡ ὄρεξις ταῦτό, ἢ κατ' ἐνέργειαν, καὶ οὐχ ἕτερον τὸ ὀρεκτικὸν καὶ τὸ φευκτικόν, οὐτ' ἀλλήλων οὔτε τοῦ αἰσθητικοῦ· ἀλλὰ τὸ εἶναι ἄλλο. τῇ δὲ διανοητικῇ ψυχῇ τὰ φαντάσματα οἷον αἰσθήματα ὑπάρχει, ὅταν δὲ ἀγαθὸν ἢ κακὸν φήσῃ ἢ ἀποφήσῃ, φεύγει ἢ διώκει· διὸ οὐδέποτε νοεῖ ἄνευ φαντάσματος ἢ ψυχῆ* (Aristoteles:De anima: 431a10-17, φαντάσματα: νοητικές εικόνες).

Ο Liouville όμως κατόρθωσε να δώσει στους αριθμούς αυτούς το όνομά του.

**5.6.9.Ορισμός.** Αν για κάθε θετικό ακέραιο  $m$ , υπάρχει ρητός  $\frac{p_m}{q_m}$  με  $q_m > 1$  ώστε να

ισχύει η  $\left| \xi - \frac{p_m}{q_m} \right| < (q_m)^{-m}$ , τότε ονομάζουμε τον  $\xi$  **αριθμό Liouville**.

Είναι φανερό ότι οι αριθμοί Liouville ορίστηκαν να είναι εκείνοι που επιτρέπουν προσεγγίσεις οποιασδήποτε τάξης. Κατασκευάστηκαν με στόχο να αποδείξουν την ύπαρξη αριθμών που δέχονται προσεγγίσεις οποιασδήποτε τάξης. Οι ρητοί δέχονται προσεγγίσεις τάξης 1 και χαρακτηρίζονται από αυτή την τάξη προσέγγισης. Οι άρρητοι δέχονται προσεγγίσεις τάξης τουλάχιστον 2. Στα προηγούμενα παραδείγματα κατασκευάστηκαν κάποιοι άρρητοι που δέχονται προσεγγίσεις οποιασδήποτε τάξης. Στο υπόλοιπο μέρος αυτού του κεφαλαίου θα διερευνηθεί η δυνατότητα χαρακτηρισμού των αρρήτων που προσεγγίζονται με τάξη ακριβώς 2 και όχι μεγαλύτερη.

## 5.7. Αλγεβρικοί αριθμοί

**5.7.1.Ορισμοί.** Οι περισσότεροι από τους αριθμούς που συναντούμε στη στοιχειώδη άλγεβρα μπορεί να θεωρηθούν ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές, π.χ. οι αριθμοί  $-1$ ,  $5/3$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$ ,  $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , είναι ρίζες αντίστοιχα των εξισώσεων  $x+1=0$ ,  $3x-5=0$ ,  $x^2-2=0$ ,  $x^4-10x^2+1=0$ ,  $x^4-16x^2+16=0$ ,  $x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0$ ,  $x^2+1=0$ .

Ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός  $\xi$  ονομάζεται **αλγεβρικός**, αν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου (που δεν είναι ίσο με το μηδενικό) με ακέραιους συντελεστές, δηλ. αν ο  $\xi$  ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής  $a_n \chi^n + \dots + a_1 \chi + a_0 = 0$ , όπου τα  $a_k$  είναι ακέραιοι, όχι όλοι μηδέν. Μία πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές ονομάζεται αλγεβρική εξίσωση. Η δυνατότητα να επιλυθεί εξαρτάται από το είδος των αριθμών που επιτρέπεται να δώσουμε στη μεταβλητή  $\chi$ .

Ονομάζουμε  $\mathbb{Z}[\chi]$  το σύνολο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Συμβολίζουμε αυτά τα πολυώνυμα με  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  κλπ. Αν  $a$  είναι ρίζα του  $P(x)$ , τότε είναι ρίζα και του  $P(x)Q(x)$ , όπου  $Q(x)$  είναι τυχαίο πολυώνυμο. Επομένως κάθε αλγεβρικός αριθμός είναι ρίζα ενός άπειρου συνόλου πολυωνύμων του  $\mathbb{Z}[\chi]$ . Οι βαθμοί των πολυωνύμων είναι φυσικοί και μπορούμε να βρούμε μεταξύ τους τα πολυώνυμα με τον ελάχιστο βαθμό.

Αν  $n$  είναι ο ελάχιστος του συνόλου των βαθμών, τότε ο  $a$  θα λέγεται **αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n$**  και συμβολίζεται με:  $\text{dega}=n$ .

Π.χ. ο  $\sqrt{3}$  είναι ρίζα των  $x^2 - 3 = 0$ ,  $x^4 - 9 = 0$ ,  $x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$  κλπ. Ο  $\sqrt{3}$  είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού 2. Ο  $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  είναι επίσης αλγεβρικός βαθμού 2.

Στην εργασία αυτή θα περιοριστούμε στους πραγματικούς (εκτός κάποιων παρατηρήσεων στην ενότητα 5.9).

Αν έχουμε τον ρητό  $2/3$ , αυτός είναι ρίζα του  $x - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0$ , δηλ. ο  $2/3$  είναι αλγεβρικός βαθμού 1. Αλλά και **κάθε** ρητός αριθμός  $\frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta \neq 0$  είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές, π.χ. του  $\beta\chi - \alpha = 0$ .

Φυσικά αυτός ο ρητός είναι ρίζα και των πολυωνύμων  $(\beta\chi - \alpha) Q(x)$ , όπου  $Q(x)$  είναι οποιοδήποτε μη μηδενικό πολυώνυμο.

Και αντιστρόφως, αν ένας αλγεβρικός είναι βαθμού 1, δηλ. είναι ρίζα του  $R(x) = mx + n$ ,  $m \neq 0$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , τότε είναι ρητός. **Ρητοί είναι οι αλγεβρικοί βαθμού 1.** Άρα, αν ένας αριθμός δεν είναι αλγεβρικός, τότε αποκλείεται να είναι ρητός.

Ένας άρρητος **μπορεί** να είναι αλγεβρικός, π.χ. ο  $\sqrt{2}$  είναι αλγεβρικός βαθμού 2, ο  $\sqrt[3]{2}$  αλγεβρικός βαθμού 3 (5.7.2).

Ένας αλγεβρικός με βαθμό μεγαλύτερο του 1 είναι λοιπόν άρρητος. Ένας άρρητος **μπορεί** να είναι αλγεβρικός, με βαθμό μεγαλύτερο του 1. Το «**μπορεί**» μπορεί να διαγραφεί; Υπάρχουν άρρητοι που δεν είναι αλγεβρικοί; Κι αν δεν είναι αλγεβρικοί, τότε τί θα είναι; Μέχρι τα μέσα του 19<sup>ου</sup> αιώνα κανείς τέτοιος αριθμός δεν είχε εμφανιστεί.

Επίσης δεν είχε διαπιστωθεί αν κάποιος από τους υπάρχοντες αριθμούς ήταν μη αλγεβρικός άρρητος. Οι μαθηματικοί πίστευαν πως η εμφάνιση ενός μη αλγεβρικού αρρήτου, αν ποτέ πραγματοποιούνταν, θα αποτελούσε παράδοξο. Το 1844 ο Liouville συσχέτισε τους άρρητους αλγεβρικούς με τις επιτρεπτές προσεγγίσεις και πρόεκυψε ανώτερο όριο για την τάξη προσέγγισης. Στη συνέχεια δημιούργησε αριθμούς που υπερβαίνουν αυτό το όριο.

Συμβολίζουμε το σύνολο των αλγεβρικών με  $\mathbf{A}$ . Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει το  $\mathbf{A}$  περιέχει το σύνολο των ρητών. Αποδεικνύεται ότι το  $\mathbf{A}$ , με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελεί, όπως και το  $\mathbb{Q}$ , ένα σώμα (Niven, 1956: 84)

### 5.7.2. Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι αλγεβρικός βαθμού 3.

Ο άρρητος  $\sqrt[3]{2}$  είναι ρίζα της  $x^3-2=0$ . Δεν είναι ρίζα πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, γιατί αν  $a\sqrt[3]{2} + b = 0$ , τότε θα έπρεπε να είναι ο ρητός  $-b/a$ . Θα αποδείξουμε ότι ο  $\sqrt[3]{2}$  δεν είναι ρίζα δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

Αν  $a(\sqrt[3]{2})^2 + b(\sqrt[3]{2}) + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , τότε  $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} = -c$ . Αν οι αριθμοί  $\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}$  ικανοποιούν αυτήν την ισότητα, τότε θα ικανοποιούν και την  $b^2\sqrt[3]{4} + 2a^2\sqrt[3]{2} = c^2 - 4ab$  (υψώνουμε στο τετράγωνο την προηγούμενη).

Θεωρούμε το σύστημα  $\{ax + by = -c, b^2x + 2a^2y = c^2 - 4ab\}$ .

Αν η ορίζουσά του,  $2a^3 - b^3$  είναι μη μηδενική, τότε  $\sqrt[3]{2} = \frac{ac^2 + b^2c - 4a^2b}{2a^3 - b^3}$ , άτοπον, γιατί,  $a, b, c$  ακέραιοι και  $\sqrt[3]{2}$  άρρητος. Αν  $2a^3 - b^3 = 0$ , τότε  $2 = \frac{b^3}{a^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3$ , δηλ.  $\sqrt[3]{2} = \frac{b}{a}$ , άτοπον, γιατί  $b/a$  ρητός.

Επομένως ο  $\sqrt[3]{2}$ , που είναι ρίζα του  $x^3-2=0$ , είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού 3.

### 5.8. Το Θεώρημα του Liouville

**5.8.1.Θεωρημα (Liouville)** Αν  $a$  είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n \geq 2$ , τότε υπάρχει ένας αριθμός  $c=c(a) > 0$ , τέτοιος ώστε, για κάθε  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  να ισχύει:  $\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n}$ .

**Απόδειξη:**

Έστω  $a$  αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n \geq 2$ . Τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο  $P(x)$ , με ακέραιους συντελεστές, έστω  $P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0, b_n \neq 0$ , ώστε  $P(a) = 0$ .

Συμπεραίνουμε (παράρτημα Β.3) ότι ο  $p/q$  δεν είναι ρίζα του  $P(x)$ , άρα  $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ , με

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{q^n} = \frac{s}{q^n}, \text{ όπου } s \neq 0 \text{ ακέραιος.}$$

Άρα  $|s| \geq 1$  και  $\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^n}$ , οπότε

$$\frac{1}{q^n} \leq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| P(a) - P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| b_n \left( a^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n \right) + b_{n-1} \left( a^{n-1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \right) + \dots + b_1 \left( a - \frac{p}{q} \right) \right| \quad [1]$$

Αν  $\left| a - \frac{p}{q} \right| < 1$ , τότε  $\left| \frac{p}{q} \right| < 1 + |a|$  (ισχύει η:  $|a| - |b| \leq \|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|, a, b \in \mathbb{R}$ )

Αλλά και  $|a| < 1 + |a|$ . Τότε, για  $k=1,2,\dots,n$  θα έχουμε:

$$\left| a^k - \left(\frac{p}{q}\right)^k \right| = \left| a - \frac{p}{q} \right| \left| a^{k-1} + a^{k-2} \frac{p}{q} + \dots + \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} \right| \leq \left| a - \frac{p}{q} \right| k (|a| + 1)^{k-1} \leq \left| a - \frac{p}{q} \right| n (|a| + 1)^{n-1} \quad [2]$$

Αν  $H$  είναι η μέγιστη των απολύτων τιμών των  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , τότε από τις [1] και [2] παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^n} \leq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| &= \left| P(a) - P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| b_n \left( a^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n \right) + b_{n-1} \left( a^{n-1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \right) + \dots + b_1 \left( a - \frac{p}{q} \right) \right| \leq \\ &\leq nH \left| a - \frac{p}{q} \right| n (|a| + 1)^{n-1} \leq \left| a - \frac{p}{q} \right| n^2 (|a| + 1)^{n-1} H \end{aligned}$$

Οδηγούμαστε να πάρουμε  $\frac{1}{c} = n^2 H(1+|a|)^{n-1}$  (που είναι μεγαλύτερος του 1), δηλ. ο

$$c = \frac{1}{n^2 H(1+|a|)^{n-1}} < 1 \quad \text{έχει την επιθυμητή ιδιότητα.}$$

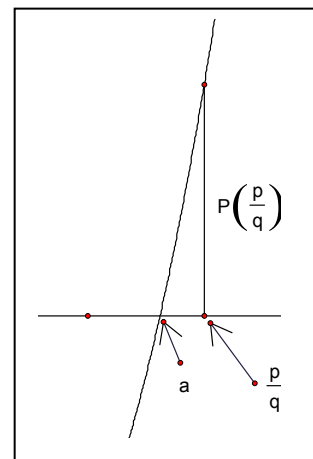
$$\text{Αν } \left| a - \frac{p}{q} \right| \geq 1, \text{ τότε } \left| a - \frac{p}{q} \right| \geq 1 \geq \frac{1}{q^n} > \frac{c}{q^n}.$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, αν  $a$  είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n \geq 2$ , τότε υπάρχει ένας αριθμός  $c$  που εξαρτάται από τον  $a$  και κατασκευάζεται με τον τρόπο που υποδείχτηκε, τέτοιος ώστε, για κάθε  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  να ισχύει:  $\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n}$ .

**Παρατηρήσεις:**

1. Έστω το  $P(x) = b_n x^n + \dots + b_0, b_n \neq 0$ . Το θεώρημα του Liouville μπορεί επίσης να αποδειχθεί αν εξετάσουμε τη διαφορά  $P(a) - P\left(\frac{p}{q}\right)$  και χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής του

Lagrange : Αν  $\frac{p}{q}$  είναι μια ρητή προσέγγιση του  $a$ , μπορούμε να θεωρήσουμε  $a - 1 < \frac{p}{q} < a + 1$ .



Για  $x \in (a - 1, a + 1)$  θα έχουμε  $|x| < |a| + 1$  και μπορούμε να βρούμε φράγμα για την  $|P'(x)|$ :

$$|P'(x)| = |nb_n x^{n-1} + (n-1)b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1| < |nb_n x^{n-1}| + |(n-1)b_{n-1} x^{n-2}| + \dots + |b_1| < n|b_n|(|a|+1)^{n-1} + \dots + |b_1|. \text{ Από το Θ. μέσης τιμής έχουμε } (P(a)=0): P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - a\right) P'(h),$$

για κάποιο  $h$  μεταξύ των  $a, \frac{p}{q}$ . Συνεχίζουμε παίρνοντας απόλυτες τιμές κλπ.

2. Το θεώρημα ισχύει και για τους ρητούς. Αν ο αριθμός  $a$  είναι ρητός, δηλ.  $dega=1$

$$\text{και } a = \frac{s}{t}, s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}, a \neq \frac{p}{q}, \text{ τότε } \left| \frac{s}{t} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|sq - pt|}{tq} \geq \frac{1}{tq} = \frac{c'}{q}.$$

$$\text{Η ιδιότητα } \left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c'}{q} \text{ ισχύει για τον } c' = \frac{1}{t}.$$

Παίρνοντας  $c_0$  τον μικρότερο από τους  $c'$ ,  $c$  μπορούμε να αφαιρέσουμε τον περιορισμό  $n \geq 2$  και να αναδιατυπώσουμε το θεώρημα:

Αν  $a$  είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n$ ,  $n$  θετικός ακέραιος, τότε υπάρχει ένας αριθμός  $c_0 > 0$ , τέτοιος ώστε, για κάθε  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  με  $a \neq \frac{p}{q}$ , να ισχύει:  $\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c_0}{q^n}$ .

**3.** Το θεώρημα λέει ότι ένας άρρητος αλγεβρικός δεν μπορεί να προσεγγιστεί «πολύ καλά» από ρητούς. Επομένως, αν βρούμε έναν άρρητο που μπορεί να προσεγγιστεί «πολύ καλά» από ρητούς, αυτός δεν είναι αλγεβρικός.

**5.8.2.Θεωρημα:** Ένας αλγεβρικός αριθμός  $a$  βαθμού  $n$  δεν επιτρέπει προσεγγίσεις τάξης μεγαλύτερης του  $n$ .

**Απόδειξη.**

Από το Θ.Liouville έπεται αν  $a$  είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n$ , τότε υπάρχει ένας αριθμός  $c$  που εξαρτάται από τον  $a$ , τέτοιος ώστε, **για κάθε**  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$  να ισχύει:  $\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n}$ .

Αν ο  $a$  επιτρέπει προσεγγίσεις τάξης  $m$ , τότε για μια συγκεκριμένη σταθερά  $\gamma$ , που εξαρτάται μόνο από τον  $a$ , υπάρχει άπειρο πλήθος ρητών κλασμάτων  $p/q$  ( $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ ) που ικανοποιούν την ανισότητα:  $0 < \left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{\gamma}{q^m}$ . Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακολουθία θετικών ακεραίων  $q$  ώστε να ισχύει η:  $\frac{c}{q^n} < \frac{\gamma}{q^m} \Leftrightarrow q^{m-n} < \frac{\gamma}{c}$ . Αλλά η τελευταία ανισότητα είναι αδύνατη για  $m > n$  και για κατάλληλα μεγάλο  $q$ .

### 5.8.3. Παρατηρήσεις:

1. Σύμφωνα με το θεώρημα 5.8.2, οι άρρητοι αλγεβρικοί βαθμού 2 δέχονται προσεγγίσεις τάξης 2 (αφού οποιοσδήποτε άρρητος δέχεται προσεγγίσεις τάξης τουλάχιστον δύο, Θ. 5.6.3) και όχι μεγαλύτερης (π.χ. οι  $\sqrt{7}$ ,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ).

2. Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός  $\xi = \sum_{m=1}^{\infty} 10^{-m!}$  της ενότητας 5.6.6. δεν είναι ρίζα οποιουδήποτε πολυωνύμου βαθμού n.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο  $\xi$  είναι αλγεβρικός βαθμού n, δηλ. ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής  $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ , με  $c_k$  ακεραίους,  $c_n \neq 0$ . Ο  $\xi$  βρίσκεται στο διάστημα (0,1). Από την  $f'(x) = \left| \sum_{k=1}^n k c_k x^{k-1} \right| < \sum_{k=1}^n |k c_k|$ , για κάθε x του (0,1), καθορίζεται μία σταθερά  $\sum_{k=1}^n |k c_k| = C [1]$  που εξαρτάται από τους συντελεστές  $c_k$ .

Για τις διαφορές των αριθμών  $r_m = \sum_{p=1}^m 10^{-p!}$  από τον  $\xi$  θα έχουμε  $\xi - r_m = \sum_{p=m+1}^{\infty} 10^{-p!} < 10^{-(m+1)!} (1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots) < 2 \cdot 10^{-(m+1)!} [2]$ .

Από το Θεώρημα μέσης τιμής, αφού  $f(\xi) = 0$ , παίρνουμε, για κάθε m, την  $|f(r_m)| = |\xi - r_m| |f'(\theta)| [3]$  για κάποιο  $\theta$  μεταξύ των αριθμών  $\xi$  και  $r_m$ . Θα αποδείξουμε ότι αυτή η ισότητα δεν είναι δυνατή για κατάλληλα μεγάλο m.

Από τις [1], [2], [3] έχουμε:  $|f(r_m)| < 2C \cdot 10^{-(m+1)!} [4]$ .

Η πολυωνυμική εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει n μιγαδικές, άρα το πολύ n πραγματικές ρίζες. Μπορούμε να πάρουμε κατάλληλα μεγάλο m, ώστε  $f(r_m) \neq 0$ . Από την  $f(r_m) = \sum_{k=0}^n c_k r_m^k$

παίρνουμε  $|f(r_m)| = \left| \sum_{k=0}^n c_k r_m^k \right|$ .

Ένας τυχαίος όρος του πολυωνύμου  $f(r_m)$  είναι ο  $c_k r_m^k = c_k \left( \sum_{p=0}^m 10^{-p!} \right)^k$ . Το άθροισμα  $\sum_{p=0}^m 10^{-p!}$  μπορεί να γίνει ένα κλάσμα με παρονομαστή  $10^{m!}$  και το  $\left( \sum_{p=0}^m 10^{-p!} \right)^k$  γίνεται κλάσμα με παρονομαστή  $10^{k \cdot m!}$ .

Θα ισχύει  $\left| c_k \left( \sum_{p=0}^m 10^{-p!} \right)^k \right| > \frac{1}{10^{k \cdot m!}}$ , αν ο  $c_k$  δεν είναι 0. Έχουμε υποθέσει ότι ο  $\xi$  είναι αλγεβρικός βαθμού  $n$ , επομένως  $c_n \neq 0$ . Βεβαιωνόμαστε έτσι για την αλήθεια της  $|f(r_m)| = \left| \sum_{k=0}^n c_k r_m^k \right| > \frac{1}{10^{n \cdot m!}}$  για κάθε  $m$ .

Από τις [3], [4] και την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε την  $\frac{1}{10^{n \cdot m!}} < |f(r_m)| = |\xi - r_m| |f'(r_m)| < \frac{2C}{10^{(m+1)!}}$  και τελικά την  $10^{m(m+1-n)} < 2C$ , για κάθε  $m$ . Οι αριθμοί  $C, n$  είναι σταθεροί για το συγκεκριμένο πολυώνυμο. Επομένως αυτή η ανισότητα δεν είναι δυνατόν να ισχύει για κατάλληλα μεγάλο  $m$ . Για να άρουμε την αντίφαση, θα πρέπει να άρουμε την υπόθεση ότι ο  $\xi$  είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης. Άρα ο  $\xi$  δεν είναι αλγεβρικός.

**3.** Οι αριθμοί που κατασκευάστηκαν στις ενότητες 5.6.6, 5.6.7. επιτρέπουν προσεγγίσεις οποιασδήποτε τάξης, άρα δεν είναι αλγεβρικοί.

**4.** Το 1955 ο άγγλος μαθηματικός Klaus Roth απέδειξε ότι δεν υπάρχει άρρητος αλγεβρικός αριθμός που να δέχεται προσεγγίσεις τάξης μεγαλύτερης του 2 (Niven, 1956: 93). Για την ανακάλυψη αυτή ο Roth πήρε το βραβείο Fields.

## 5.9. Υπερβατικοί αριθμοί

**5.9.1. Ορισμός.** Υπερβατικοί ονομάζονται οι άρρητοι που δεν είναι αλγεβρικοί.

Υπάρχουν, π.χ. οι αριθμοί Liouville. Ο αριθμός  $\sum_{m=1}^{\infty} 10^{-m!}$  (5.6.6.) ήταν ένας από εκείνους που χρησιμοποιήθηκαν από τον Liouville το 1851 για την απόδειξη της ύπαρξης υπερβατικών αριθμών. Ίσως δεν τους γνωρίζουμε καλά και έτσι ο ορισμός δεν τους περιγράφει. Απλά σχηματίζουμε μια ιδέα του συνόλου των υπερβατικών, ...εξαιρώντας εκείνους που δεν ανήκουν σ' αυτό το σύνολο. Οι συγκεκριμένοι αριθμοί υπερβαίνουν τα σύνορα της δημοκρατίας - του βασιλείου- των αλγεβρικών.



Ο ορισμός δεν κρύβει κάτι μεταφυσικό αν και είναι γνωστό ότι «ο Leibniz χρησιμοποιούσε τον όρο «υπερβατικός», υπερβατικές καμπύλες, μέθοδοι, αριθμοί κλπ, συνειδητά, έχοντας κατά νου την υπερβατικότητα του Θεού σε σχέση με τα ανθρώπινα... Άλλωστε τα μαθηματικά πραγματεύονται τον κόσμο των ιδεών, που υπερβαίνουν τον πραγματικό κόσμο» (Chaitin, 2007: 202).

**5.9.2.** Οι αλγεβρικοί άρρητοι επιτρέπουν προσεγγίσεις τάξης 2. Άλλα αυτό δεν είναι προνόμιό τους. Υπάρχουν (άπειροι) υπερβατικοί που από την άποψη της προσέγγισης είναι όπως οι αλγεβρικοί βαθμού 2. Η τάξη προσέγγισης 2 χαρακτηρίζει έναν αριθμό σαν άρρητο, αλλά δεν διευκρινίζει το είδος του αρρήτου (αλγεβρικός ή υπερβατικός).

**5.9.3.** Ο Euler το 1737 απέδειξε την αρρητότητα των  $e$ ,  $e^2$ . Ο γερμανοελβετός μαθηματικός Johann Heinrich Lambert το 1766 απέδειξε την αρρητότητα του  $\pi$ . Ο Lambert έδειξε ότι οι συναρτήσεις  $e^x$  και  $\operatorname{erf} x$ , δεν μπορούν να παίρνουν ρητές τιμές, αν ο  $x$  είναι ρητός διάφορος του 0. Ο Liouville απέδειξε ότι ο  $e$  δεν αποτελεί λύση κάποιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Δεν μπόρεσε όμως να αποδείξει ότι δεν αποτελεί λύση οποιασδήποτε πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές.

Την υπερβατικότητα του  $e$  κατόρθωσε να αποδείξει το 1873 ο Γάλλος μαθηματικός Charles Hermit (1822-1901). Έτσι ο  $e$  είναι ο πρώτος υπερβατικός που ορίζεται με απλές μεθόδους της ανάλυσης και όχι με τη βοήθεια αριθμητικών σειρών, όπως οι αριθμοί του Liouville. Ο Hermit, είναι ακόμα ένα παράδειγμα (ενορατικού) μαθηματικού, που δεν περιέγραφε ποτέ πως έφτανε στα αποτελέσματα των σκέψεών του. Η ιδιοφυΐα τέτοιων ανθρώπων είναι φυσικά δώρο της φύσης και είναι απλή σύμπτωση το ότι στο λύκειο είχε δάσκαλο των μαθηματικών κάποιον κ. Richard, **τον ίδιο** που δεκαπέντε χρόνια νωρίτερα είχε διακρίνει τις εξαιρετικές ικανότητες του Galois (1811-1831).

Το 1882 ο Carl Lious Ferdinard Lindemann (1852-1939) βελτίωσε τη μέθοδο του Hermit και απέδειξε ότι και ο  $\pi$  είναι υπερβατικός.

**5.9.4.** Ο Lindemann απέδειξε το εξής γενικό θεώρημα: η ισότητα  $\sum_{k=1}^m A_k e^{a_k} = 0$ , όπου οι  $A_k$  είναι αλγεβρικοί αριθμοί και οι εκθέτες  $a_k$  είναι **διαφορετικοί** μεταξύ τους αλγεβρικοί αριθμοί (πραγματικοί ή μιγαδικοί), είναι δυνατή μόνον αν μηδενίζονται όλοι οι «συντελεστές»  $A_k$ , που δηλώνει την γραμμική ανεξαρτησία των  $e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_m}$  επί του σώματος των αλγεβρικών αριθμών (απόδειξη στο: Irrational Numbers, του Ivan Niven).

### Συνέπειες του Θεωρήματος Lindemann:

1. Αν  $x \neq 0$ , αλγεβρικός αριθμός και  $y$  αλγεβρικός δεν είναι δυνατόν να ισχύει η:  $e^x - ye^0 = 0$ . Αν έχουμε την  $e^x = y$ , τότε οι αριθμοί  $x, y$  δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα αλγεβρικοί, εκτός αν  $x=0$  και  $y=1$ . Ο  $e^x$  είναι υπερβατικός για κάθε μη μηδενικό αλγεβρικό  $x$ . Ιδιαίτερα: Αν  $x=1$ , τότε ο  $y=e$ , είναι υπερβατικός.

2. Το μόνο αλγεβρικό σημείο (σημείο με συντεταγμένες αλγεβρικούς αριθμούς) από το οποίο διέρχεται η εκθετική καμπύλη  $e^x$  είναι το  $(0,1)$ .

3. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η  $e^{i\pi} + e^0 = 0$  (Euler). Επομένως ο  $i\pi$  δεν είναι δυνατόν να είναι αλγεβρικός και επειδή ο  $i$  είναι αλγεβρικός (ρίζα της  $x^2 + 1 = 0$ ) και το σύνολο των αλγεβρικών σώμα, υπερβατικός θα είναι ο  $\pi$ . Δύο από τους διασημότερους αριθμούς της επιστήμης των μαθηματικών, οι  $e$  και  $\pi$ , αποδείχθηκαν λοιπόν υπερβατικοί και το κυριότερο, οι αριθμοί αυτοί ήταν «δημιουργημένοι» από φυσικές μεθόδους και, ιδίως ο  $\pi$ , πολύ πριν την κατασκευή των τεχνητών αριθμών του Liouville.

4. Τα ευθ. τμήματα που κατασκευάζονται, αν δοθεί μια μονάδα, με κανόνα και διαβήτη (σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων), έχουν μήκη που εκφράζονται με αλγεβρικούς αριθμούς. Αν δοθεί κύκλος, παίρνουμε την ακτίνα για μονάδα, οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν  $\pi$  τετραγωνικές μονάδες. Η κατασκευή ισοδύναμου τετραγώνου, οδηγεί στην προσπάθεια κατασκευής της πλευράς, που είναι  $\sqrt{\pi}$ .

Αν ο  $\sqrt{\pi}$  ήταν αλγεβρικός, επειδή το σύνολο των αλγεβρικών είναι σώμα, αλγεβρικός θα έπρεπε να ήταν και ο  $\pi$ . Αλλά ο  $\pi$  είναι υπερβατικός. Άρα η κατασκευή του  $\sqrt{\pi}$  είναι αδύνατη, επομένως και ο τετραγωνισμός του κύκλου αδύνατος.

5. Αν  $a \neq 0$  αλγεβρικός και ο αριθμός  $\eta\mu a = \beta$  είναι αλγεβρικός, τότε, από τον τύπο του Euler,  $\eta\mu a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$ , παίρνουμε την  $2i\eta\mu a = e^{ia} - e^{-ia}$  και στη συνέχεια την  $e^{ia} - e^{-ia} - 2i\beta e^0 = 0$ . Αλλά η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη, αφού έχει διαφορετικούς αλγεβρικούς εκθέτες και αλγεβρικούς συντελεστές που δεν είναι όλοι μηδέν. Επειδή οι  $1, 2, a, i$  είναι αλγεβρικοί και το σύνολο των αλγεβρικών είναι σώμα, υπερβατικός θα είναι ο  $\beta$ .

Το μόνο αλγεβρικό σημείο από το οποίο διέρχεται η καμπύλη  $y = \eta\mu x$  είναι το  $(0,0)$ . Με τον ίδιο τρόπο, από τον τύπο του Euler,  $\sigma\upsilon\nu a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$ , συμπεραίνουμε ότι αν  $a \neq 0$  αλγεβρικός, τότε ο αριθμός  $\sigma\upsilon\nu a$  είναι υπερβατικός. Με παρόμοιο τρόπο, με την βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης (και του Euler) αποδεικνύουμε ότι για μη μηδενικό αλγεβρικό  $a$ , οι αριθμοί  $e^a, e^{-a}$  είναι υπερβατικοί.

Ανάλογες σκέψεις μπορούμε να κάνουμε και για τις υπερβολικές συναρτήσεις και ίσως με κάποια προσοχή στα σύνολα ορισμού, και για τις αντίστροφες τριγωνομετρικών και υπερβολικών.

6. Αν  $u$  υπερβατικός, τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του « $u$ » δεν είναι απαραίτητα υπερβατικοί, π.χ.  $\text{csc}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , ρητός,  $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , άρρητος,  $\text{csc}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , άρρητος,  $\epsilon\phi\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ , άρρητος,  $\sigma\phi\frac{\pi}{4} = 1$ ,  $\text{csc}(\pi+1) = \text{csc}\pi \cdot \text{csc}1 - \eta\mu\pi \cdot \eta\mu 1 = -\text{csc}1$ , υπερβατικός (csc1 υπερβατικός, αφού 1 αλγεβρικός),  $\epsilon\phi(\pi+1) = \epsilon\phi 1$ , υπερβατικός.

7. Αν  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , αλγεβρικός, τότε ο αριθμός  $\ln a = \beta$  είναι υπερβατικός. Γιατί αν ο  $\beta$  ήταν αλγεβρικός, τότε θα είχαμε την  $e^\beta = a \Leftrightarrow e^\beta - a = 0$  που ισχύει μόνον αν  $\beta = 0$  και  $a = 1$ . Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αν ο φυσικός λογάριθμος (ο λογάριθμος με βάση τον  $e$ ) ενός αριθμού  $\psi$  είναι αλγεβρικός, τότε ο  $\psi$  είναι υπερβατικός. Στον κατάλογο των υπερβατικών μπορούν επομένως να προστεθούν οι φυσικοί λογάριθμοι όλων των διαφορών του 1 αλγεβρικών αριθμών και όλοι οι αριθμοί που έχουν φυσικούς λογαρίθμους αλγεβρικούς αριθμούς.

**5.9.5.** Το 1900 στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών των Παρισίων, ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής, ο David Hilbert (1862-1943) διατύπωσε 23 προβλήματα τα οποία θεωρούσε ότι θα έδιναν ώθηση στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Το έβδομο από τα προβλήματα αυτά ήταν το εξής: **Αν  $a$ ,  $b$  αλγεβρικοί αριθμοί (πραγματικοί ή μιγαδικοί) με  $a \neq 0, 1$  και ο  $b$  δεν είναι πραγματικός ρητός, τότε οποιαδήποτε τιμή του  $a^b$  είναι υπερβατικός.** Τονίζουμε ότι ο  $b$  μπορεί να είναι «μιγαδικός ρητός αριθμός» π.χ.  $b = 2 + 3i$  και το «οποιαδήποτε τιμή του  $a^b$ » αναφέρεται στο ότι η  $a^b = e^{b \cdot \ln a}$  δεν έχει μοναδική τιμή, ο μιγαδικός λογάριθμος είναι «πλειότιμη» συνάρτηση. Για παράδειγμα η πολική μορφή του  $1+i$  είναι  $\sqrt{2} \left( \text{csc}\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4} \right)$  και επομένως, από τον ορισμό του λογαρίθμου μιγαδικού με μέτρο  $r$  και όρισμα  $\theta$ :  $\ln(r(\text{csc}\theta + i\eta\mu\theta)) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , θα έχουμε:  $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Επίσης  $\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi) = i(2k+1)\pi$ ,  $\ln i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $i^i = e^{i \ln i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ . Στην τελευταία ο  $e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$  είναι πραγματικός. Ο Euler έκανε τη φαντασία...πραγματικότητα και μας πρόσφερε την ανέλπιστα συμπεριφορά του  $i^i$ . Είναι κάτι ανάλογο με το  $(-)^* (-) = +$ . Το ενδιαφέρον της ζωής είναι στις εκπλήξεις.

Η πρώτη μερική λύση του 7<sup>ου</sup> προβλήματος του Hilbert δόθηκε το 1929 από έναν μεταπτυχιακό φοιτητή του Πανεπιστημίου της Μόσχας, τον Alexander Osipovich **Gelfond** (1906-1968), ο οποίος μεταξύ των άλλων απέδειξε και την υπερβατικότητα του  $e^\pi$ .

Ένα χρόνο αργότερα, ο σοβιετικός μαθηματικός R.O.Kuzmin απέδειξε με ορισμένες βελτιώσεις στη μέθοδο του Gelfond ότι οι αριθμοί  $a^b$ , με  $a \neq 0,1$  και  $b = \sqrt{d}$ , όπου  $d$  είναι φυσικός αριθμός, αλλά όχι τέλειο τετράγωνο, είναι υπερβατικοί. Ειδικότερα απέδειξε την υπερβατικότητα του  $2^{\sqrt{2}}$ . Η πλήρης λύση δόθηκε από τον Gelfond το 1934 με την βοήθεια μιας μεθόδου που είναι γνωστή σαν δεύτερη μέθοδος του Gelfond. Το έβδομο πρόβλημα αυτής της διάσημης λίστας του Hilbert ονομάστηκε πλέον: **Θεώρημα Gelfond** (απόδειξη στο: Irrational Numbers, του Ivan Niven). Ανεξάρτητα και με διαφορετική μέθοδο, δόθηκε η πλήρης λύση του έβδομου προβλήματος και από τον Th. Schneider (1935).

Μια από τις τιμές του  $i^{-2i} = e^{-2i \ln i} = e^{2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$  είναι η  $e^\pi$  και σύμφωνα με το θεώρημα είναι υπερβατικός, όπως και ο  $e^{-\pi}$ , αφού είναι μία από τις τιμές του  $i^{2i} = e^{2i \ln i} = e^{-2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ .

Αν ο  $x$  είναι υπερβατικός, τότε οι  $e^x, \ln x$  δεν είναι αναγκαστικά υπερβατικοί π.χ.  $e^{\ln 2} = 2$  (ο  $\ln 2$  είναι υπερβατικός, αφού 2 αλγεβρικός),  $e^{\ln \sqrt{7}} = \sqrt{7}$  (ο  $\ln \sqrt{7}$  είναι υπερβατικός, αφού  $\sqrt{7}$  αλγεβρικός),  $\ln e = 1$ ,  $\ln e^\pi = \pi$  ( $e, \pi$  υπερβατικοί).

**5.9.6.** Το Θεώρημα Gelfond έχει την εξής ισοδύναμη διατύπωση: Αν  $a, b$  είναι μη μηδενικοί αλγεβρικοί αριθμοί και  $a \neq 1$ , τότε ο αριθμός  $d = \frac{\ln b}{\ln a}$  είναι είτε ρητός, είτε υπερβατικός.

**Απόδειξη: Α.** Ισχύει το Θ. Gelfond. Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα του 5.9.6. τότε ο  $d$  είναι αλγεβρικός αλλά όχι ρητός. Τότε από την  $b = a^d$ , συμπεραίνουμε ότι ο  $b$  πρέπει να είναι υπερβατικός, άτοπον.

**Β.** Ισχύει το 5.9.6. Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Gelfond, τότε ο  $a^d$  θα είναι αλγεβρικός, οπότε ο  $b = \frac{\ln a^b}{\ln a}$  θα είναι είτε ρητός είτε υπερβατικός, άτοπον (στην υπόθεση του Θ. Gelfond ο  $b$  είναι αλγεβρικός, αλλά όχι ρητός).

Το πηλίκο φυσικών λογαρίθμων μπορεί να είναι ρητός, π.χ.  $\frac{\ln 8}{\ln 4} = \frac{3}{2}$ . Επειδή  $\log_{10} r = \frac{\ln r}{\ln 10}$ , **οι δεκαδικοί λογάριθμοι θετικών ρητών που δεν είναι δυνάμεις του 10 είναι υπερβατικοί αριθμοί.**

**5.9.7.** Για μια μακρά περίοδο της ιστορίας, τα μαθηματικά ασχολούνταν μόνο με αλγεβρικούς αριθμούς, όπως  $7/5$ ,  $\sqrt[3]{10}$ ,  $\sqrt{7} + \sqrt[3]{2}$  κλπ. Η επινόηση των υπερβατικών μετά την αξιοθαύμαστη προσπάθεια του Liouville δεν προκάλεσε την αναταραχή που είχαν προκαλέσει οι άρρητοι πριν 2500 χρόνια, οι συνέπειές της όμως ήταν το ίδιο σημαντικές. Αποδείχθηκε ότι πίσω από την φαινομενική απλότητα του συστήματος των πραγματικών υπάρχουν πολλές λεπτομέρειες, οι οποίες δεν γίνονται διακριτές με μια απλή παρατήρηση του δεκαδικού αναπτύγματος. Η μεγάλη έκπληξη ήρθε λίγο αργότερα. Με τις εργασίες του γερμανού μαθηματικού Georg Cantor (1845-1918) έγινε φανερό ότι οι αλγεβρικοί αριθμοί που συναντώνται σε κάθε βήμα στα μαθηματικά είναι εξαιρετικά σπάνιοι σε αντίθεση με τους υπερβατικούς, οι οποίοι, μολονότι κατασκευάζονται δύσκολα, είναι οι συνηθέστεροι (K8: το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών).

Ο Cantor απέδειξε (1873) ότι υπάρχουν περισσότεροι άρρητοι παρά ρητοί και από τους αρρήτους περισσότεροι υπερβατικοί παρά αλγεβρικοί, *χωρίς να προσθέσει ούτε έναν νέο υπερβατικό αριθμό στους υπάρχοντες γνωστούς.*

Χρησιμοποίησε τις έννοιες της αριθμησιμότητας και υπεραριθμησιμότητας και όχι κάποιες ειδικές ιδιότητες των αλγεβρικών αριθμών. Για να βρούμε ένα παράδειγμα υπερβατικού με τη μέθοδο του Cantor πρέπει να ακολουθήσουμε αρκετά μακρύ δρόμο: αρχικά θα πρέπει να απαριθμήσουμε τους αλγεβρικούς, μετά να τους γράψουμε σε δεκαδική μορφή και τέλος με χρήση της διαγώνιας μεθόδου να οδηγηθούμε στον υπερβατικό. Θα μας έπαιρνε «πρακτικά άπειρο» χρόνο για να βρούμε π.χ. το  $10^{100}$ -οστό ψηφίο του δεκαδικού αναπτύγματος αυτού του αριθμού. Αντίθετα η μέθοδος του Liouville μας επιτρέπει να σχηματίσουμε υπερβατικούς αριθμούς για τους οποίους ερωτήματα τέτοιου είδους μπορούν να απαντηθούν (ίσως με κάποια δυσκολία), π.χ. στο παράδειγμα 5.6.6., το δεύτερο «1» ακολουθείται από  $3!-2!-1$  μηδενικά, το  $3^{\circ}$  ένα ακολουθείται από  $4!-3!-1$  μηδενικά κλπ. Τα μειονεκτήματα των αποδείξεων μέσω γενικών μεθόδων είναι γνωστά: δεν παρέχουν βοήθεια όταν διερευνούμε συγκεκριμένα ερωτήματα.

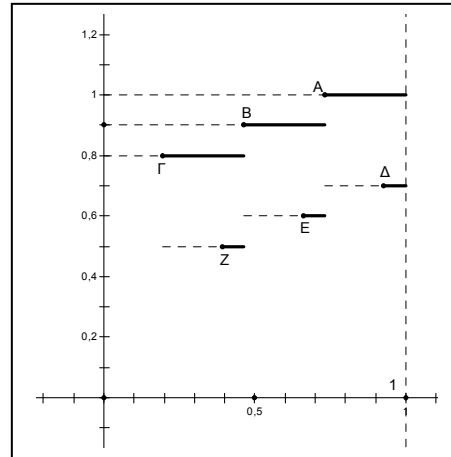
*\*Για το K5 την μεγαλύτερη συμμετοχή είχαν τα 4,25,32,66,76,99,104,117,129,135,136,137,139.*



### Τα κλασματικά μέρη των αρρήτων nξ κατανέμονται ομοιόμορφα στο (0,1)

Ας παρακολουθήσουμε την διαδικασία τοποθέτησης των κλασματικών μερών του  $n\sqrt{3}$ ,  $\{n\sqrt{3}\}=n\sqrt{3}-[n\sqrt{3}]$ , στο διάστημα (0,1) αγνοώντας τον χωρισμό σε κ υποδιαστήματα (5.1.9).

Αρχίζουμε με το  $\{\sqrt{3}\}=\sqrt{3}-[\sqrt{3}]$ : Α είναι το σημείο  $(\sqrt{3}-1,1)$ . Το Α χωρίζει το (0,1) σε δύο άνισα υποδιαστήματα. Το  $\{2\sqrt{3}\}=2\sqrt{3}-[2\sqrt{3}]$  βρίσκεται στο μεγαλύτερο. Ονομάζουμε Β το  $(2\sqrt{3}-3,0.9)$ .



Τα σημεία Α, Β χωρίζουν το (0,1) σε τρία υποδιαστήματα με δύο διαφορετικά μήκη:  $2\sqrt{3}-3$ ,  $\sqrt{3}-1-(2\sqrt{3}-3)=2-\sqrt{3}$ , και  $1-(\sqrt{3}-1)=2-\sqrt{3}$ .

Τοποθετούμε το  $\{3\sqrt{3}\}=3\sqrt{3}-[3\sqrt{3}]=3\sqrt{3}-5$ , σημείο Γ  $(3\sqrt{3}-5,0.8)$ . Το Γ βρίσκεται στο μεγαλύτερο από τα προηγούμενα υποδιαστήματα. Τώρα έχουν δημιουργηθεί 4 υποδιαστήματα με μήκη  $3\sqrt{3}-5$ ,  $2\sqrt{3}-3-(3\sqrt{3}-5)=2-\sqrt{3}$ ,  $2-\sqrt{3}$ ,  $2-\sqrt{3}$ . Τα τελευταία δύο δεν αλλάξαν, αφού το Γ «διάλεξε» το μεγαλύτερο από τα υπάρχοντα υποδιαστήματα για να τοποθετηθεί. Τα διαφορετικά μήκη είναι πάλι δύο και  $2-\sqrt{3} > 3\sqrt{3}-5$ . Συνεχίζουμε με το σημείο Δ  $(4\sqrt{3}-6,0.7)$ . Το Δ τοποθετείται σε ένα από τα τμήματα μήκους  $2-\sqrt{3}$  και τα 5 τμήματα έχουν τώρα τρία διαφορετικά μήκη:  $2-\sqrt{3} > 3\sqrt{3}-5 > 7-4\sqrt{3}$ . Το Ε  $(5\sqrt{3}-8,0.6)$  τοποθετείται σε ένα από τα μεγαλύτερα, τα τμήματα γίνονται 6 με διαφορετικά μήκη και πάλι τρία. Οι επόμενες τοποθετήσεις αλλάζουν φυσικά το πλήθος των υποδιαστημάτων του (0,1), αλλά δεν αλλάζουν το πλήθος των διαφορετικών μηκών αυτών των υποδιαστημάτων.

Είναι ένα παράδειγμα του παρακάτω θεωρήματος που διατύπωσε αρχικά ο Steinhaus και απέδειξε το 1958 ο Vera Turan Sós: Έστω ξ τυχαίος άρρητος. Όταν τα σημεία  $\{\xi\}$ ,  $\{2\xi\}, \dots, \{n\xi\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , τοποθετούνται στο (0,1), τα n+1 γραμμικά τμήματα που σχηματίζονται έχουν το πολύ τρία διαφορετικά μήκη. Επιπλέον, το επόμενο σημείο,  $\{(n+1)\xi\}$ , θα βρεθεί σε ένα από τα μεγαλύτερα υπάρχοντα τμήματα (Knuth, 2010: 616).

Τα σημεία  $\{\xi\}$ ,  $\{2\xi\}, \dots, \{n\xi\}$  διασκορπίζονται λοιπόν ομοιόμορφα στο (0,1) και η ιδιότητά τους αυτή χρησιμοποιείται για την ταχύτερη ανάκτηση πληροφοριών που έχουν αποθηκευθεί στη μνήμη του υπολογιστή με κάποιο δεδομένο αναγνωριστικό - κατακερματισμός ή διασκορπισμένη αποθήκευση (Knuth, 2010: Κεφ.6).

### Κ6: Δευτεροβάθμια ριζικά ή τετραγωνικοί άρρητοι

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα συνεχή κλάσματα των αριθμών της μορφής  $\frac{a + b\sqrt{d}}{c}$ , όπου  $a, b, c$  ακέραιοι με  $c \neq 0$ , και  $d$  θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Θα αποδείξουμε ότι το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα ενός αριθμού αυτής της μορφής είναι περιοδικό και επίσης ότι μόνον αυτοί οι αριθμοί έχουν περιοδικό ανάπτυγμα. Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ το σύμβολο «/» με την έννοια του «διαρεί ακριβώς», π.χ.  $5/20$ . Επίσης, όπως έχουμε τονίσει και στις εισαγωγικές επεξηγήσεις, χρησιμοποιούμε και την λέξη «διαρεί» με το ίδιο νόημα, του «διαρεί ακριβώς», π.χ. ο 5 διαρεί τον 20, ο 7 δεν διαρεί τον 20. Μερικές φορές γράφουμε και το κλάσμα  $\frac{5}{20}$  με το σχήμα:  $5/20$ . Σε κάθε περίπτωση, το νόημα θα είναι ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα.

#### 6.1. Ορισμός

**Τετραγωνικός άρρητος** (ή **δευτεροβάθμιο ριζικό**) είναι ένας πραγματικός άρρητος που είναι ρίζα ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές, δηλ. είναι λύση της εξίσωσης  $ax^2 + bx + c = 0$ , όπου οι  $a, b, c$  είναι ακέραιοι και  $a \neq 0$ .

Παραδείγματα: ο  $\sqrt{2}$  είναι ρίζα της  $x^2 - 2 = 0$ , ο  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  είναι ρίζα της  $x^2 - x - 1 = 0$ , ο  $\frac{4 - \sqrt{3}}{3}$  είναι ρίζα της  $9x^2 - 24x + 13 = 0$ . Οι αριθμοί αυτοί είναι και ρίζες ενός άπειρου συνόλου πολυωνύμων της μορφής  $P(x)Q(x)$ , όπου  $P(x)$  είναι τα πολυώνυμα των παραδειγμάτων. Δεν είναι ρίζες πρωτοβάθμιων πολυωνύμων, γιατί, αν  $\xi$  κάποιος από αυτούς είναι ρίζα του  $ax + b = 0$ ,  $a \neq 0$ , τότε θα ήταν ο ρητός  $-b/a$ . Ο αριθμός δύο είναι ο ελάχιστος του συνόλου των βαθμών των πολυωνύμων που έχουν τον  $\xi$  ρίζα. Οι  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $\frac{4 - \sqrt{3}}{3}$  είναι **αλγεβρικοί** αριθμοί βαθμού 2 (ενότητα 5.7).

#### 6.2. Παραδείγματα

##### ανάπτυξης τετραγωνικών αρρήτων σε συνεχή κλάσματα

ι. Έστω  $x = \frac{25 + \sqrt{53}}{22}$ . Τότε  $\left[ \frac{25 + \sqrt{53}}{22} \right] = 1$  ( $7 < \sqrt{53} < 8$ ) και για να θυμηθούμε την

διαδικασία ανάπτυξης, όπως περιγράφεται στο τμήμα 4.4, αλλά και τα σύμβολα του Κ4 έχουμε διαδοχικά:

Κ6: Τετραγωνικοί άρρητοι

$$x = z_0 = 1 + (z_0 - 1) = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{z_0 - a_0}} = a_0 + \frac{1}{z_1} = 1 + \frac{1}{z_1}. \text{ Δηλ. βρίσκουμε το } [x], \text{ την}$$

διαφορά  $x - [x]$  που είναι μικρότερη του 1, αντιστρέφουμε και βρίσκουμε το  $[z_1] = \left[ \frac{1}{x-1} \right]$ ,

που είναι 2 ( $= a_1$ ), γιατί:

$$z_1 = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{z_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{25 + \sqrt{53}}{22} - 1} = \frac{22}{3 + \sqrt{53}} = \frac{22(\sqrt{53} - 3)}{44} = \frac{\sqrt{53} - 3}{2} \quad \text{και } 7 < \sqrt{53} < 8.$$

$$\text{Οπότε } x = z_0 = 1 + \frac{1}{2 + (z_1 - [z_1])} = 1 + \frac{1}{2 + (z_1 - a_1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{z_1 - a_1}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{z_2}},$$

$$\text{όπου } z_1 - a_1 = \frac{\sqrt{53} - 3}{2} - 2 = \frac{\sqrt{53} - 7}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1 - [z_1]} = \frac{2}{\sqrt{53} - 7} = \frac{\sqrt{53} + 7}{2}.$$

$$\text{Επειδή } 7 < \sqrt{53} < 8, \text{ θα έχουμε: } [z_2] = \left[ \frac{\sqrt{53} + 7}{2} \right] = 7 = a_2.$$

Γνωρίζουμε από το Κ4, ότι ο άρρητος  $\frac{25 + \sqrt{53}}{22}$ , αναπτύσσεται σε άπειρο συνεχές

κλάσμα. Παρατηρούμε όμως ότι  $z_2 - a_2 = \frac{\sqrt{53} + 7}{2} - 7 = \frac{\sqrt{53} - 7}{2} = z_1 - a_1$ , και επειδή,

$$z_3 = \frac{1}{z_2 - [z_2]} = \frac{1}{z_1 - [z_1]} = \frac{\sqrt{53} + 7}{2} = z_2, \text{ θα έχουμε } a_3 = 7. \text{ Όπως καταλαβαίνουμε δεν}$$

χρειάζεται να συνεχίσουμε τη διαδικασία. Σε κάθε επόμενο βήμα θα έχουμε το ίδιο μερικό

πηλίκιο, το 7, και το ίδιο πλήρες πηλίκιο,  $\frac{\sqrt{53} + 7}{2}$  και τελικά:  $x = \frac{25 + \sqrt{53}}{22} = [1, 2, 7, 7, 7, \dots]$ .

Το μερικό πηλίκιο 7 που επαναλαμβάνεται συνεχώς είναι η **περίοδος** του συνεχούς

κλάσματος και γράφουμε:  $[1, 2, 7, 7, 7, \dots] = [1, 2, \overline{7}]$  (ορισμός 4.4.6).

Κατά την διαδικασία της ανάπτυξης του  $\frac{25 + \sqrt{53}}{22}$ , για την αντιστροφή των  $z_k - a_k$ , σε

κάθε βήμα, είναι απαραίτητος ο πολλαπλασιασμός επί την «συζυγή παράσταση» του  $z_k - a_k$ .



ii. Ας βρούμε και το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα της  $\sqrt{19}$ ,  $4 < \sqrt{19} < 5$ .

$$\sqrt{19} = 4 + (\sqrt{19} - 4) = a_0 + (z_0 - a_0) = 4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{19} - 4}} = a_0 + \frac{1}{z_0 - a_0} = a_0 + \frac{1}{z_1} = 4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{19} + 4}},$$

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{19} + 2}}, \text{ δηλ. } a_0 = 4, \quad z_1 = \frac{\sqrt{19} + 4}{3}, \quad a_1 = 2, \quad z_2 = \frac{1}{z_1 - a_1} = \frac{\sqrt{19} + 2}{5}, \text{ και}$$

συνεχίζουμε γράφοντας μόνο τα μερικά και πλήρη πηλίκα:  $a_2=1, a_3=3, a_4=1, a_5=2, a_6=8, a_7=2, z_3 = \frac{\sqrt{19} + 3}{2}, z_4 = \frac{\sqrt{19} + 3}{5}, z_5 = \frac{\sqrt{19} + 2}{3}, z_6 = \frac{\sqrt{19} + 4}{1}, z_7 = \frac{\sqrt{19} + 4}{3}$ .

Είναι πλέον φανερό, ότι αφού  $z_7 = z_1$ , τα μερικά πηλίκα  $a_1$  έως και το  $a_6$  (αλλά και τα πλήρη πηλίκα  $z_1$  έως και το  $z_6$ ) θα επαναλαμβάνονται συνεχώς, δηλ.  $\sqrt{19} = [4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$ .

Ακολουθώντας τα βήματα της ανάπτυξης, όπως περιγράφεται στο τμήμα 4.4, αν βρούμε πλήρες πηλίκο ίσο με κάποιο προηγούμενο, ίσως είναι φανερό ότι θα έχουμε επανάληψη των μερικών (και των πλήρων) πηλίκων. Αν βρούμε μερικό πηλίκο ίσο με κάποιο προηγούμενο δεν είναι απαραίτητο να έχουμε και ίσα πλήρη πηλίκα (γιατί διαφορετικοί άρρητοι, μπορούν να έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος, π.χ. για την  $\sqrt{19}$  οι διαφορετικοί άρρητοι  $z_1, z_5$  έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος 2). Στα θεωρήματα που ακολουθούν θα δώσουμε μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να αποφασίσουμε για την περιοδικότητα με χρήση μόνο της αριθμητικής των ακεραίων και θα αποδείξουμε ότι η περιοδικότητα των μερικών πηλίκων χαρακτηρίζει αποκλειστικά τους τετραγωνικούς αρρήτους.

### 6.3. Συζυγείς

Αν  $a, b, c$  ακέραιοι με  $c \neq 0$ , και  $d$  θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε ο **συζυγής** του αρρήτου  $\frac{a + b\sqrt{d}}{c}$  είναι ο  $\frac{a - b\sqrt{d}}{c}$ . Γράφουμε  $\left(\frac{a + b\sqrt{d}}{c}\right)' = \frac{a - b\sqrt{d}}{c}$ .

Αν έχουμε τον  $w = \frac{a + b\sqrt{d}}{c}$ , για να πάρουμε τον  $w'$  απλά αλλάζουμε το πρόσημο του συντελεστή της  $\sqrt{d}$ . Για τους συζυγείς των τετραγωνικών αρρήτων  $w, z$  ισχύουν οι ιδιότητες:

$$(w')' = w, (w + z)' = w' + z', (w - z)' = w' - z', (wz)' = w'z', \left(\frac{1}{w}\right)' = \frac{1}{w'}, \left(\frac{z}{w}\right)' = \frac{z'}{w'}.$$

Π.χ. αν  $w = \frac{a + b\sqrt{d}}{c}$ , για τον  $\left(\frac{1}{w}\right)'$  έχουμε:

$$\left(\frac{1}{w}\right)' = \left(\frac{1}{\frac{a + b\sqrt{d}}{c}}\right)' = \left(\frac{\frac{a - b\sqrt{d}}{c}}{\left(\frac{a + b\sqrt{d}}{c}\right)\left(\frac{a - b\sqrt{d}}{c}\right)}\right)' = \left(\frac{ca - cb\sqrt{d}}{a^2 - b^2d}\right)' = \frac{ca + cb\sqrt{d}}{a^2 - b^2d} \text{ και επίσης}$$

$$\frac{1}{w'} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{a - b\sqrt{d}}{c}}} = \frac{\frac{a + b\sqrt{d}}{c}}{\left(\frac{a - b\sqrt{d}}{c}\right)\left(\frac{a + b\sqrt{d}}{c}\right)} = \frac{ca + cb\sqrt{d}}{a^2 - b^2d}.$$

Οι  $a, b, c$  είναι ακέραιοι, άρα και οι  $ca, cb, a^2 - b^2d$  (έχουμε υποθέσει ότι ο  $w$  είναι τετραγωνικός άρρητος, οπότε δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για μηδενικούς παρονομαστές, αφού ο  $d$  δεν είναι τέλειο τετράγωνο και αν ο  $w$  είναι ρίζα της  $ax^2 + bx + c = 0$ , όπου οι  $a, b, c$  είναι ακέραιοι, ο  $a \neq 0$  και  $d = b^2 - 4ac$ , μπορούμε να παίρνουμε  $c = 2a \neq 0$ ).

#### 6.4. Προετοιμασία για εισαγωγή στον αλγόριθμο

**6.4.1. Θεώρημα.** Αν  $w$  είναι τετραγωνικός άρρητος, τότε ο  $w$  μπορεί να γραφεί στη μορφή  $w = \frac{r + \sqrt{d}}{s}$ , όπου  $d$  είναι ένας θετικός ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο, και  $r, s$  ακέραιοι, τέτοιοι ώστε  $s/d - r^2$  (ο  $s$  διαιρεί ακριβώς τον  $d - r^2$ ). Επιπλέον, αν δοθούν ακέραιοι με την ιδιότητα  $w = \frac{r + \sqrt{d}}{s}$ , αν ο  $s$  δεν διαιρεί την διαφορά  $d - r^2$ , τότε μπορούμε να βρούμε ακεραίους  $D, R, S$ , ώστε  $w = \frac{R + \sqrt{D}}{S}$  και  $S/D - R^2$ .

**Απόδειξη:** Αν  $w$  είναι τετραγωνικός άρρητος, τότε ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής  $ax^2 + bx + c = 0$ , με  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  και  $a \neq 0$ . Θα έχουμε:  $w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , με διακρίνουσα  $b^2 - 4ac$ , όχι τέλειο τετράγωνο. Θέτουμε  $d = b^2 - 4ac$ .

- Αν  $w = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , τότε  $r = -b$ ,  $s = 2a$ .
- Αν  $w = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , τότε  $r = b$ ,  $s = -2a$ .

ο Αν ο  $s$  δεν διαιρεί την διαφορά  $d - r^2$ , τότε  $w = \frac{r + \sqrt{d}}{s} = \frac{|s|r + |s|\sqrt{d}}{|s|s} = \frac{R + \sqrt{D}}{S}$ ,

όπου  $D = ds^2$ ,  $R = r|s|$ ,  $S = s|s|$ . Τότε  $D - R^2 = ds^2 - r^2s^2$  και  $S/D - R^2$ .

Σε κάθε περίπτωση  $s \neq 0$ , γιατί  $s = \pm 2a$  και  $a \neq 0$ .

#### 6.4.2. Παρατηρήσεις:

1. Οι  $r, s, d$  (ή οι  $R, S, D$  είναι ακέραιοι), γιατί οι  $a, b, c$  είναι ακέραιοι. Θα γράφουμε  $r, s, d$  για εκείνους που έχουν την ιδιότητα  $s/d - r^2$ .

2. Ένας αριθμός της μορφής  $\frac{r + \sqrt{d}}{s}$  είναι ρίζα της  $s^2x^2 - 2rsx + (r^2 - d) = 0$  (η άλλη ρίζα της δευτεροβάθμιας είναι η συζυγής της προηγούμενης, η  $\frac{r - \sqrt{d}}{s}$ ).

Αν έχουμε έναν αριθμό της μορφής  $\frac{r + \sqrt{d}}{s}$  με  $r, s$  ακεραίους,  $s \neq 0$ ,  $d$  θετικό ακέραιο, όχι τέλειο τετράγωνο, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει και τη μορφή  $X + Y\sqrt{d}$  με τους  $X, Y$  ρητούς,  $Y \neq 0$ . Για συγκεκριμένο  $d$ , η γραφή ενός άρρητου στη μορφή αυτή (εκτός της τετριμμένης περίπτωσης ισοδύναμων ρητών, π.χ.  $\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{6}{4} + \frac{2}{6}\sqrt{5}$ ) είναι μοναδική, γιατί από την  $X_1 + Y_1\sqrt{d} = X_2 + Y_2\sqrt{d}$ , αν  $Y_1 \neq Y_2$ , παίρνουμε  $\sqrt{d} = \frac{X_2 - X_1}{Y_1 - Y_2}$ , άρρητος = ρητό, άτοπον. Άρα  $Y_1 = Y_2$ , οπότε και  $X_1 = X_2$ .

Ένας άρρητος της μορφής  $X + Y\sqrt{d}$ , με τους  $X, Y$  ρητούς,  $Y \neq 0$  και  $d$  όχι τέλειο τετράγωνο, είναι ρίζα (μαζί με την συζυγή της:  $X - Y\sqrt{d}$ ) της δευτεροβάθμιας:  $z^2 - 2Xz + (X^2 - Y^2d) = 0$ ,  $(X \pm Y\sqrt{d})^2 - 2(X \pm Y\sqrt{d})X + (X^2 - Y^2d) = X^2 \pm 2XY\sqrt{d} + Y^2d - 2X^2 \mp 2XY\sqrt{d} + X^2 - Y^2d = 0$ .

Μπορούμε επίσης στην  $z^2 - 2Xz + (X^2 - Y^2d) = 0$  να πολ/σουμε επί το ΕΚΠ των παρονομαστών και να έχουμε μια ισοδύναμη με ακέραιους συντελεστές. Η διακρίνουσα της  $z^2 - 2Xz + (X^2 - Y^2d) = 0$  δεν είναι τέλειο τετράγωνο:  $4X^2 - 4X^2 + 4Y^2d = 4Y^2d$  (ο  $d$  δεν είναι τέλειο τετράγωνο). Η δευτεροβάθμια που ικανοποιεί ο  $X + Y\sqrt{d}$  είναι, εκτός ίσως μιας σταθεράς, μοναδική: αν είναι ρίζα των  $g_1(z) = a_1z^2 + b_1z + c_1$ ,  $g_2(z) = a_2z^2 + b_2z + c_2$ , τότε θα είναι και της  $a_2g_1(z) - a_1g_2(z) = (a_2b_1 - a_1b_2)z + a_2c_1 - a_1c_2$ .

Συμπεραίνουμε ότι  $a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0$ , αλλιώς ο  $X + Y\sqrt{d}$  θα ήταν ρητός, οπότε,

$$\text{αν } \frac{a_2}{a_1} = k, \text{ θα έχουμε } g_2(z) = k g_1(z).$$

3. Για τον  $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , ο 2 διαιρεί τον  $5-1=4$ , άρα  $d=5, r=1, s=2$ .

Για τον  $\sqrt{2}$ :  $d=2, r=0, s=1$ .

4. Για τον  $w = \frac{4-\sqrt{3}}{3} = \frac{-4+\sqrt{3}}{-3}$ , ο -3 δεν διαιρεί τον  $3-16 = -13$ . Πολλίζουμε λοιπόν

επί  $|-3|$  αριθμητή και παρονομαστή, και έχουμε  $w = \frac{-12+\sqrt{27}}{-9}$  με  $-9/(d-r^2), -9/-117$ , δηλ.

οι ζητούμενοι  $d, r, s$  για την συγκεκριμένη μορφή είναι  $d = 27, r = -12, s = -9$  (υπενθυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με μικρά  $r, s, d$  εκείνους τους ακεραίους που έχουν την ιδιότητα  $s/d - r^2$ ).

5. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον τετραγωνικό άρρητο  $z$ . Τον γράφουμε στη μορφή  $\frac{r+\sqrt{d}}{s}$  με  $s/d - r^2$ . Τότε το πρώτο μερικό πηλίκο του συνεχούς κλάσματος που παριστάνει

τον  $z$  θα είναι το  $\left[ \frac{r+\sqrt{d}}{s} \right]$ . Για να προχωρήσουμε στην διαδικασία του αναπτύγματος, ας

χρησιμοποιήσουμε τον δείκτη 0 για τα αρχικά  $r, s, a, z$ , δηλ.  $a_0 = \left[ \frac{r_0+\sqrt{d}}{s_0} \right] = [z_0]$ .

$$\text{Τότε } z_0 = a_0 + z_0 - a_0 = a_0 + \frac{r_0+\sqrt{d}}{s_0} - a_0 = a_0 + \frac{(r_0 - a_0 s_0) + \sqrt{d}}{s_0}.$$

Το επόμενο μερικό πηλίκο, το  $a_1$ , είναι το ακέραιο μέρος του  $z_1$ , όπου

$$z_1 = \frac{1}{z_0 - a_0} = \frac{s_0}{(r_0 - a_0 s_0) + \sqrt{d}} = \frac{s_0((r_0 - a_0 s_0) - \sqrt{d})}{(r_0 - a_0 s_0)^2 - d} = \frac{s_0(r_1 + \sqrt{d})}{d - r_1^2} \text{ και } r_1 = a_0 s_0 - r_0.$$

Αν η τύχη βοηθήσει και  $s_0/(d - r_1^2)$ , τότε, ονομάζουμε  $s_1$  το πηλίκο αυτής της διαίρεσης (που θα είναι ακέραιος, γιατί ο  $s_0$  διαιρεί - ακριβώς - τον  $d - r_1^2$ ) και οδηγούμαστε στην μορφή  $\frac{r_1 + \sqrt{d}}{s_1}$ . Αυτή είναι ίδια με την αρχική μορφή για τον  $z$ , την μορφή  $\frac{r + \sqrt{d}}{s}$  με

$s/d - r^2$ , αρκεί η τύχη να βοηθήσει και πάλι και ο  $s_1$ , δηλ. ο  $\frac{d - r_1^2}{s_0}$ , να διαιρεί τον  $d - r_1^2$ .

Αν όμως ο  $s_0$  διαιρεί τον  $d - r_1^2$ ,  $s_0 / (d - r_1^2)$ , τότε και ο  $\frac{d - r_1^2}{s_0}$  τον διαιρεί, γιατί

$$d - r_1^2 = s_0 \cdot \frac{d - r_1^2}{s_0} \text{ (η τύχη φθάνει να βοηθήσει μια φορά).}$$

Το επόμενο θεώρημα βεβαιώνει ότι αν ξεκινήσουμε τη διαδικασία της ανάπτυξης σε συνεχές κλάσμα ενός τετραγωνικού αρρήτου με τη μορφή του θεωρήματος 6.4.1, τότε σε κάθε βήμα παίρνουμε πλήρες πηλίκο που είναι τετραγωνικός άρρητος της ίδιας μορφής.

### 6.5. Ο Αλγόριθμος της ανάπτυξης σε συνεχές κλάσμα

Ο Αλγόριθμος για τους τετραγωνικούς αρρήτους, αποδίδεται στον Euler (1707-1783), αλλά ουσιαστικά είναι ο ίδιος με μια τεχνική που δόθηκε από τον William Brouncker (1620-1684) έναν αιώνα νωρίτερα. Ο αλγόριθμος είναι στενά συνδεδεμένος και με την «κυκλική μέθοδο» που χρησιμοποιούσε ο διάσημος Ινδός μαθηματικός Bhaskara Acharya (περίπου 1114-1185), περισσότερο από πέντε αιώνες πριν τον Brouncker (Adler, 1994: 278).

**6.5.1. Θεώρημα.** Έστω ο τετραγωνικός άρρητος  $z$ , γραμμένος στη μορφή:  $z = \frac{r + \sqrt{d}}{s}$ ,

όπου  $r, d, s$  είναι οι ακέραιοι που καθορίζονται στο θεώρημα 6.4.1, με την ιδιότητα  $s/d - r^2$ .

Αναπτύσσουμε τον  $z$  σε συνεχές κλάσμα,  $z = z_0 = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k, z_{k+1}]$ .

Υπενθυμίζουμε (τμήμα 4.4) ότι  $a_k = [z_k], z_{k+1} = \frac{1}{z_k - a_k}$ .

Θέτουμε:  $r_0 = r, s_0 = s, z_0 = z = (r_0 + \sqrt{d})/s_0, a_0 = [(r_0 + \sqrt{d})/s_0]$ .

Για  $k \geq 0$ , ορίζουμε τους αριθμούς:  $r_{k+1} = a_k s_k - r_k, s_{k+1} = \frac{d - r_{k+1}^2}{s_k}$ .

**Τότε** για κάθε  $k \geq 0$ , ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- Οι  $r_k, s_k$ , είναι ακέραιοι με  $s_k \neq 0$ .
- $s_k / (d - r_k^2)$ .
- $z_k = (r_k + \sqrt{d})/s_k$ , οπότε  $a_k = [(r_k + \sqrt{d})/s_k]$ .

Ιδιαίτερα:  $s_k s_{k+1} = d - r_{k+1}^2, s_k / (d - r_{k+1}^2)$ .

**Απόδειξη:** Για  $k=0$  οι  $r_0, s_0$ , είναι εκείνοι οι ακέραιοι  $r, s$  ( $s \neq 0$ ) που καθορίζονται από το προηγούμενο θεώρημα με την ιδιότητα  $s/d - r^2$ , άρα  $s_0 / (d - r_0^2)$ .

Επίσης, το μερικό πηλίκο  $a_0$  είναι το ακέραιο μέρος του πλήρους, του  $z_0 = (r_0 + \sqrt{d}) / s_0$ .

Υποθέτουμε ότι τα αποτελέσματα ισχύουν για τον θετικό ακέραιο  $k$ , δηλ. υποθέτουμε ότι οι  $s_k, r_k$ , είναι ακέραιοι με  $s_k \neq 0$ ,  $s_k / (d - r_k^2)$ , και ότι το πλήρες πηλίκο  $k$ -τάξης είναι το:

$$z_k = (r_k + \sqrt{d}) / s_k, \text{ οπότε για το μερικό θα έχουμε } a_k = [z_k].$$

Τότε για τον  $k+1$  θα έχουμε:  $r_{k+1} = a_k s_k - r_k$ ,  $s_{k+1} = \frac{d - r_{k+1}^2}{s_k}$ . Οι  $a_k, s_k, r_k$  είναι ακέραιοι,

άρα και ο  $r_{k+1}$ . Επίσης  $s_{k+1} \neq 0$ , γιατί ο  $d$  δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Από την υπόθεση επαγωγής έχουμε ότι  $s_k / (d - r_k^2)$ .

Για τον  $s_{k+1}$  θα έχουμε:  $s_{k+1} = \frac{d - r_{k+1}^2}{s_k} = \frac{d - r_k^2}{s_k} + 2a_k r_k - a_k^2 s_k$ , άρα  $s_{k+1}$  ακέραιος και

$s_k s_{k+1} = d - r_{k+1}^2$ , άρα  $s_{k+1} / (d - r_{k+1}^2)$  (από την μορφή του  $s_{k+1}$  μπορούμε να σκεφτούμε ότι ο

$\frac{d - r_{k+1}^2}{s_k}$  διαιρεί τον  $d - r_{k+1}^2$  μόνον αν και ο  $s_k$  τον διαιρεί).

\* Συμπεραίνουμε επίσης ότι και  $s_k / (d - r_{k+1}^2)$ .

Επειδή  $z_k = (r_k + \sqrt{d}) / s_k$ , για το πλήρες πηλίκο  $z_{k+1}$ , θα έχουμε:

$$z_{k+1} = \frac{1}{z_k - a_k} = \frac{s_k}{r_k + \sqrt{d} - a_k s_k} = \frac{s_k}{-r_{k+1} + \sqrt{d}} = \frac{s_k (r_{k+1} + \sqrt{d})}{d - r_{k+1}^2} = \frac{r_{k+1} + \sqrt{d}}{s_{k+1}}, \text{ άρα και } a_{k+1} = [z_{k+1}],$$

γιατί το μερικό πηλίκο είναι το ακέραιο μέρος του αντίστοιχου πλήρους πηλίκου.

Η διαδικασία περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα. Για την «εκκίνηση» του αλγορίθμου γράφουμε τον τετραγωνικό άρρητο στη μορφή  $\frac{r + \sqrt{d}}{s}$ , όπου  $r, s$  ακέραιοι

τέτοιιοι ώστε  $s/d - r^2$ . Οι αρχικές κατάλληλες τιμές είναι εκείνες με τον δείκτη 0.

### 6.5.2. Ο αλγόριθμος για την ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα του $\frac{r + \sqrt{d}}{s}$ , με $s/d - r^2$

k	Αρχικές τιμές, δείκτης 0	1	2	...	k+1
r	$\mathbf{r_0 = r}$	$r_1 = a_0 s_0 - r_0$	$r_2 = a_1 s_1 - r_1$	...	$r_{k+1} = a_k s_k - r_k$
s	$\mathbf{s_0 = s}$	$s_1 = (d - r_1^2) / s_0$	$s_2 = (d - r_2^2) / s_1$	...	$s_{k+1} = (d - r_{k+1}^2) / s_k$
a	$a_0 = \left[ (r_0 + \sqrt{d}) / s_0 \right]$	$a_1 = \left[ (r_1 + \sqrt{d}) / s_1 \right]$	$a_2 = \left[ (r_2 + \sqrt{d}) / s_2 \right]$	...	$a_{k+1} = \left[ (r_{k+1} + \sqrt{d}) / s_{k+1} \right]$

Ο αλγόριθμος παράγει σε κάθε βήμα τους ακεραίους  $r_k$ ,  $s_k$ , οι οποίοι μας οδηγούν στα αντίστοιχα πλήρη:  $z_k = \frac{r_k + \sqrt{d}}{s_k}$  και μερικά πηλίκα:  $a_k = [z_k]$ , και για την περίπτωση τετραγωνικού αρρήτου, αντικαθιστά την διαδικασία 4.4.1. Για  $r=0$ ,  $s=1$  βρίσκουμε το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα της  $\sqrt{d}$ ,  $d$  θετικός, όχι τέλειο τετράγωνο, αφού  $\sqrt{d} = \frac{0 + \sqrt{d}}{1}$  και φυσικά  $1/d$ , δηλ. για να «ξεκινήσει» ο αλγόριθμος, την παραγωγή των ακεραίων  $r$ ,  $s$ , στη θέση  $r_0$  θέτουμε 0, στη θέση  $s_0$  θέτουμε 1 και στη θέση  $a_0$  το ακέραιο μέρος της ρίζας.

### 6.5.3. Ο αλγόριθμος για την ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα της $\sqrt{d}$

κ	0	1	2	...	k+1
r	$\mathbf{r_0 = 0}$	$r_1 = a_0$	$r_2 = a_1 s_1 - r_1$		$r_{k+1} = a_k s_k - r_k$
s	$\mathbf{s_0 = 1}$	$s_1 = d - r_1^2$	$s_2 = (d - r_2^2) / s_1$	...	$s_{k+1} = (d - r_{k+1}^2) / s_k$
a	$a_0 = \left[ \sqrt{d} \right]$	$a_1 = \left[ (r_1 + \sqrt{d}) / s_1 \right]$	$a_2 = \left[ (r_2 + \sqrt{d}) / s_2 \right]$		$a_{k+1} = \left[ (r_{k+1} + \sqrt{d}) / s_{k+1} \right]$

### 6.5.4. Υπολογιστικές παρατηρήσεις:

**α.** Αν  $s_k \geq 1$  και  $a = \left[ \sqrt{d} \right]$ , τότε  $a_k = \left[ (r_k + a) / s_k \right]$

Υποθέτουμε ότι  $\kappa, \lambda$  είναι ακέραιοι και ο  $\mu$  θετικός ακέραιος. Αν  $\kappa < \chi < \kappa+1$ , τότε  $[(\chi+\lambda)/\mu] = [(\kappa+\lambda)/\mu]$ . Η απόδειξη γίνεται και πάλι με την βοήθεια της διαιρετότητας:

Έστω  $\kappa+\lambda = \pi\mu+\nu$ ,  $0 \leq \nu \leq \mu-1$ . Τότε  $\left[ \frac{\kappa+\lambda}{\mu} \right] = \left[ \pi + \frac{\nu}{\mu} \right] = \pi$ .

Επίσης:  $\kappa+\lambda = \pi\mu+\nu < \chi+\lambda < \kappa+1+\lambda = \kappa+\lambda+1 = \pi\mu+\nu+1$ ,  $\pi \leq \pi+\nu/\mu < (\chi+\lambda)/\mu < \pi+(\nu+1)/\mu \leq \pi+1$ , αφού  $0 \leq \nu < \mu$ . Άρα  $[(\chi+\lambda)/\mu] = \pi = [(\kappa+\lambda)/\mu]$  (παράρτημα Α.14).

**β.**

Αν υπολογίσουμε τους  $s_0, s_1$  τότε οι  $s_{k+1}$ , υπολογίζονται και από την  $s_{k+1} = s_{k-1} + a_k (r_k - r_{k+1})$ :

Αν  $\left\{ \begin{matrix} s_k s_{k+1} = d - r_{k+1}^2 \\ s_{k-1} s_k = d - r_k^2 \end{matrix} \right\}$ , τότε  $s_k (s_{k+1} - s_{k-1}) = r_k^2 - r_{k+1}^2 = (r_k - r_{k+1})(r_k + r_{k+1}) = a_k s_k (r_k - r_{k+1})$  και

διαιρούμε δια  $s_k (s_k \neq 0)$  την  $s_k (s_{k+1} - s_{k-1}) = a_k s_k (r_k - r_{k+1})$ .

**6.5.5. Παραδείγματα:**

i) αν  $w = \frac{4 - \sqrt{3}}{3}$ , τότε  $w = \frac{-4 + \sqrt{3}}{-3}$ , αλλά ο -3 δεν διαιρεί τον  $3-16 = -13$ .

Πολ/ζουμε λοιπόν επί  $|-3|$  αριθμητή και παρονομαστή, και έχουμε:

$w = \frac{-12 + \sqrt{27}}{-9}$  (παρατηρήσεις 6.4.2: 4).

Αρχίζουμε τον αλγόριθμο με  $r_0 = -12$ ,  $s_0 = -9$ ,  $a_0 = 0$ :

k	0	1	2	3	4	5	6	...
r	<b>r<sub>0</sub> = -12</b>	12	1	<b>5</b>	5	<b>5</b>	5	...
s	<b>s<sub>0</sub> = -9</b>	13	2	<b>1</b>	2	<b>1</b>	2	...
a	0	1	3	<b>10</b>	5	<b>10</b>	5	...

Είναι πλέον φανερό, ότι οι αριθμοί 10,5 θα επαναλαμβάνονται συνεχώς, είναι η περίοδος του συνεχούς κλάσματος.

Μπορούμε να σταματήσουμε στο 6<sup>ο</sup> βήμα, όταν εμφανίζονται οι αριθμοί  $(r_5, s_5) = (5, 1) = (r_3, s_3)$  που είχαν βρεθεί και στο 4<sup>ο</sup> βήμα (ενοχλητική λεπτομέρεια: η αρίθμηση αρχίζει από το 0).

Το συνεχές κλάσμα που παριστάνει αυτόν τον τετραγωνικό άρρητο είναι  $[0, 1, 3, 10, 5, 10, 5, 10, 5, \dots]$ , δηλ είναι περιοδικό, με περίοδο «10,5»:  $[0, 1, 3, \overline{10, 5}]$ . Για τους υπολογισμούς των  $a_k$ , για  $k \geq 1$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την 6.5.4.α, π.χ.

$a_2 = \left[ \frac{1 + \sqrt{27}}{2} \right] = \left[ \frac{1 + 5}{2} \right] = 3$ ,  $a_3 = \left[ \frac{5 + \sqrt{27}}{1} \right] = [5 + 5] = 10$  κλπ.

Επίσης θα έχουμε:  $z_k = \frac{r_k + \sqrt{d}}{s_k} = [a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$ , δηλαδή:



$$z_1 = \frac{r_1 + \sqrt{d}}{s_1} = \frac{12 + \sqrt{27}}{13} = [1, 3, \overline{10, 5}], \quad z_2 = \frac{r_2 + \sqrt{d}}{s_2} = \frac{1 + \sqrt{27}}{2} = [3, \overline{10, 5}], \quad z_3 = 5 + \sqrt{27} = [\overline{10, 5}],$$

$$z_4 = \frac{r_4 + \sqrt{d}}{s_4} = \frac{5 + \sqrt{27}}{2} = [\overline{5, 10}] \text{ κλπ.}$$

ii. Για τον  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  έχουμε  $r = 1, d = 5, s = 2$ , ο 2 διαιρεί τον  $5 - 1 = 4$  και

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, \dots]$$

k	0	1	2	3	4	5	6	...
r	<b>r<sub>0</sub>=1</b>	1	1	1	1	1	1	...
s	<b>s<sub>0</sub>=2</b>	2	2	2	2	2	2	...
a	1	1	1	1	1	1	1	...

Είναι ο αριθμός  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Το συνεχές κλάσμα είναι πολύ απλό, όλα τα μερικά πηλίκα είναι ίσα με 1.

Εδώ μπορούμε να σταματήσουμε τον αλγόριθμο άμεσα, γιατί:  $(r_1, s_1) = (1, 2) = (r_0, s_0)$ .

iii. Για τον  $\sqrt{389}$  θα έχουμε  $r = 0, d = 389, s = 1$ , ο 1 διαιρεί τον 389 και :

$$\sqrt{389} = [19, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 38, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 38, \dots]$$

κ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
r	0	19	9	13	7	10	7	13	9	19	19	9	13	7	10	7	13	9	19	...
s	1	28	11	20	17	17	20	11	28	1	28	11	20	17	17	20	11	28	1	...
a	19	1	2	1	1	1	1	2	1	38	1	2	1	1	1	2	1	38	...	

iv) Για τον  $-\sqrt{19}$  έχουμε  $r = 0, d = 19, s = -1$  και  $-\sqrt{19} = [-5, 1, 1, \overline{3, 1, 2, 8, 2}]$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
r	0	5	1	<b>2</b>	3	3	2	4	4	<b>2</b>	3	3	2	4	4	<b>2</b>	...
s	-1	6	3	<b>5</b>	2	5	3	1	3	<b>5</b>	2	5	3	1	3	<b>5</b>	...
a	-5	1	1	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>8</b>	<b>2</b>	1	3	1	2	8	2	1	...

\*Για τον  $-\sqrt{19}$  θα μπορούσαμε να βρούμε το ανάπτυγμα του αρρήτου  $\sqrt{19}$ ,  $[4, 2, 1, 3, 1, 2, 8]$  (6.2), και να χρησιμοποιήσουμε και τα αποτελέσματα του τμήματος 4.4.5. (παρατήρηση 5), όπου έχουμε το θεώρημα για το ανάπτυγμα του  $-\xi$ :  $-\xi = [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots]$  (επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση:  $a_1 = 2 > 1$ ).

$$\text{Θα έχουμε } -\sqrt{19} : [-4-1, 1, 2-1, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, \dots] = [-5, 1, 1, \overline{1, 3, 1, 2, 8, 2}]$$

## 6.6. Η περιοδικότητα του αναπτύγματος είναι προνόμιο των τετραγωνικών αρρήτων

**6.6.1.Θεώρημα (Lagrange):** Το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα ενός δευτεροβάθμιου ριζικού (τετραγωνικού αρρήτου) είναι περιοδικό.

**Απόδειξη.** Ας υποθέσουμε ότι δίνεται ο τετραγωνικός άρρητος  $\xi = z_0$ . Από το

Θ.4.4.3., έχουμε:  $\xi - \frac{p_k}{q_k} = z_0 - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k(z_{k+1}q_k + q_{k-1})}$ . Για τον συζυγή του  $z_0 - \frac{p_k}{q_k}$  θα έχουμε :

$$\left(z_0 - \frac{p_k}{q_k}\right)' = z_0' - \frac{p_k}{q_k} \quad \text{και} \quad z_0' - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k(z_{k+1}'q_k + q_{k-1})}. \quad \text{Με πολλαπλασιασμό των } z_0 - \frac{p_k}{q_k},$$

$$\left(z_0 - \frac{p_k}{q_k}\right)' = z_0' - \frac{p_k}{q_k} \quad \text{βρίσκουμε:} \quad \left(z_0 - \frac{p_k}{q_k}\right)\left(z_0' - \frac{p_k}{q_k}\right) = \frac{1}{q_k^2(z_{k+1}q_k + q_{k-1})(z_{k+1}'q_k + q_{k-1})} \quad [1].$$

Επειδή  $z_0 \neq z_0'$  και η ακολουθία των αναγωγημάτων συγκλίνει στον  $z_0$ , για τον θετικό

$$|z_0 - z_0'| \quad \text{θα υπάρχει φυσικός } \lambda \quad \text{ώστε για κάθε } n \geq \lambda \quad \text{να ισχύει:} \quad \left|z_0 - \frac{p_n}{q_n}\right| < |z_0 - z_0'|.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι οι όροι της ακολουθίας  $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$  των αναγωγημάτων του  $z_0$  είναι εναλλάξ

μικρότεροι και μεγαλύτεροι του ορίου, του  $z_0$  ( $\lim_n \frac{p_n}{q_n} = z_0$ ). Αν για κάποιον φυσικό  $\lambda$ ,

ισχύει:  $\left|z_0 - \frac{p_\lambda}{q_\lambda}\right| < |z_0 - z_0'|$  και το αναγώγημα  $p_\lambda/q_\lambda$  δεν βρίσκεται μεταξύ των  $z_0, z_0'$ , τότε θα

βρίσκεται μεταξύ των  $z_0, z_0'$  το αναγώγημα με δείκτη  $\lambda+1$ . Υπάρχει λοιπόν φυσικός  $k$ , ώστε

το  $k$ -τάξης αναγώγημα, το  $\frac{p_k}{q_k}$ , να βρίσκεται μεταξύ των  $z_0, z_0'$ .

**\*\*Για την συγκεκριμένη τιμή του  $k$  το αριστερό μέλος της ισότητας [1] γίνεται αρνητικό, άρα η παράσταση  $q_k^2(z_{k+1}q_k + q_{k-1})(z_{k+1}'q_k + q_{k-1})$  είναι αρνητική, και λόγω του ορισμού των  $q_i, z_i$  ( $q_i \geq 1$ , για  $i \geq 0$ ,  $z_i > 1$ , για  $i \geq 1$ ) θα είναι αρνητικός ο αριθμός  $z_{k+1}'$ .**

Θέτουμε  $m=k+1$ , οπότε  $z_m' < 0$ .

Αν όμως  $z'_m < 0$  για κάποιον  $m > 0$ , τότε για οποιονδήποτε φυσικό  $n > m=k+1$ , θα έχουμε  $-1 < z'_n < 0$  (αρκεί να ισχύει για τον  $z_{m+1}$  : έχουμε διαδοχικά:  $z_{m+1} = \frac{1}{z_m - a_m}$ ,  $-1 < z'_{m+1} = \frac{1}{z'_m - a_m} < 0$ , γιατί  $z'_m < 0$  και  $a_m \geq 1$ , για  $m \geq 1$ ).

Από τον αλγόριθμο 6.5., για τα πλήρη πηλικά  $z_k$  παίρνουμε:  $z_k = \frac{r_k + \sqrt{d}}{s_k}$ .

Αν λοιπόν  $k \geq 1$  είναι κατάλληλα μεγάλος φυσικός ώστε  $-1 < z'_k < 0$ ,

τότε :  $1 < z_k - z'_k = \frac{2\sqrt{d}}{s_k}$  και για τον ακέραιο  $s_k$  θα πρέπει  $1 \leq s_k < 2\sqrt{d}$  ( $k \geq 1$  άρα  $z_k > 1$ ).

Επίσης για τον  $k$  αυτόν,  $z_k = \frac{r_k + \sqrt{d}}{s_k}$ , και  $z_k \cdot z'_k = \left(\frac{r_k + \sqrt{d}}{s_k}\right)\left(\frac{r_k - \sqrt{d}}{s_k}\right) = \frac{r_k^2 - d}{s_k^2} < 0$ ,

άρα  $-\sqrt{d} < r_k < \sqrt{d}$ . Αλλά  $0 < z_k + z'_k = \frac{2r_k}{s_k}$ , γιατί  $z_k > 1$  και  $-1 < z'_k < 0$  και λόγω και της

$1 \leq s_k < 2\sqrt{d}$ , θα έχουμε  $r_k$  θετικό, με  $0 < r_k < \sqrt{d}$ , δηλ.  $1 \leq r_k < \sqrt{d}$ .

Σύμφωνα με την \*\* οι ανισότητες  $1 \leq s_k < 2\sqrt{d}$ ,  $1 \leq r_k < \sqrt{d}$  θα ισχύουν «τελικά για όλους τους δείκτες». Από τις  $1 \leq s_k < 2\sqrt{d}$ ,  $1 \leq r_k < \sqrt{d}$ , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, για μεγάλα  $k$ , οι δυνατές διαφορετικές τιμές για τα ζεύγη  $r_k, s_k$  είναι το πολύ  $2d$ .

Για καθορισμένο  $d$ , και αρχικούς ακεραίους  $(r_0, s_0)$ , ο αλγόριθμος παράγει συνεχώς ζεύγη  $(r_k, s_k)$ . Άρα υπάρχουν ακέραιοι  $m, n$  με  $m < n$ , ώστε  $r_n = r_m$ , και  $s_n = s_m$ , οπότε και  $z_n = z_m$ ,  $a_n = a_m$  και επίσης  $z_{n+r} = z_{m+r}$ ,  $a_{n+r} = a_{m+r}$  για κάθε  $r \geq 0$ . Τα μερικά πηλικά που επαναλαμβάνονται, τα  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}$ , είναι η περίοδος του τετραγωνικού αρρήτου. Το πλήθος των μερικών πηλίκων της περιόδου είναι  $n - m$ .

**Παραδείγματα:**

1. Αν θέλουμε το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα του  $z = \frac{7-\sqrt{11}}{3}$ . Γράφουμε  $\frac{7-\sqrt{11}}{3} = \frac{-7+\sqrt{11}}{-3}$ , αλλά ο -3 δεν διαιρεί τον  $11-7^2$ . Για να «ξεκινήσει» ο αλγόριθμος

k	0	1	2	3	4	5	6
r	-21	12	<b>8</b>	6	3	7	<b>8</b>
s	-9	5	7	9	10	5	7
a	1	4	2	1	1	3	...

την παραγωγή των  $r_k, s_k, a_k$ , πολ/ζουμε επί 3 και παίρνουμε  $\frac{-7+\sqrt{11}}{-3} = \frac{-21+\sqrt{99}}{-9}$ .

Αρχίζουμε λοιπόν με  $r_0 = -21, d=99, s_0 = -9$ . Παρατηρούμε ότι  $r_6=8=r_2, s_6=7=s_2$ . Άρα δεν χρειάζεται να συνεχίσουμε τους υπολογισμούς. Θα έχουμε  $z = [1, 4, \overline{2, 1, 1, 3}]$ . Περίοδος είναι τα  $(6-2 =) 4$  μερικά πηλίκια: 2,1,1,3.

Από τον πίνακα του αλγορίθμου παίρνουμε «δώρο» αρκετά αναπτύγματα,

$$\text{π.χ. των } \frac{r_1 + \sqrt{d}}{s_1} = \frac{12 + \sqrt{99}}{5} = [4, \overline{2, 1, 1, 3}], \frac{r_2 + \sqrt{d}}{s_2} = \frac{8 + \sqrt{99}}{7} = [\overline{2, 1, 1, 3}],$$

$$\text{ή του } \frac{r_4 + \sqrt{d}}{s_4} = \frac{3 + \sqrt{99}}{10} = [\overline{1, 3, 2, 1}] \text{ κλπ.}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.4.6 το ανάπτυγμα του  $z = \frac{7-\sqrt{11}}{3}$  έχει **σύνθετη** περίοδο (η περίοδος δεν αρχίζει από το πρώτο μερικό πηλίκιο), θα το ονομάζουμε **σύνθετο περιοδικό** συνεχές κλάσμα.

Για τον συζυγή του  $z_1 = \frac{r_1 + \sqrt{d}}{s_1} = \frac{12 + \sqrt{99}}{5}$ , έχουμε:  $z'_1 = \frac{12 - \sqrt{99}}{5} > 0$ . Για τον συζυγή του  $z_2 = \frac{r_2 + \sqrt{d}}{s_2} = \frac{8 + \sqrt{99}}{7}$ , παρατηρούμε ότι  $-1 < z'_2 = \frac{8 - \sqrt{99}}{7} < 0$ , οπότε

σύμφωνα με το τμήμα \*\* (πλάγια γράμματα) της απόδειξης του θεωρήματος 6.6.1., θα έχουμε  $-1 < z'_k < 0$  και για όλα τα επόμενα πλήρη πηλίκια  $z_k$ . Από τον πίνακα του αλγορίθμου παρατηρούμε επίσης ότι για τους αρρήτους  $z_k, k \geq 2$ , θα έχουμε συνεχή κλάσματα με περίοδο που αρχίζει από το πρώτο μερικό πηλίκιο και, όπως έχουμε δει και στον ορισμό 4.4.6, θα τα ονομάζουμε **απλά** περιοδικά (ή καθαρώς περιοδικά) συνεχή κλάσματα, (δεν υπάρχει σύγχυση με τον ορισμό του συνεχούς κλάσματος που δόθηκε στο τμήμα 2.2, εδώ το «απλό-καθαρώς περιοδικό» ή «σύνθετο-μεικτό» αναφέρεται στην περίοδο).

2.  $\sqrt{n^2+1} = [n, \overline{2n}]$ ,  $n \geq 1$ ,  $\sqrt{n^2+2} = [n, \overline{n, 2n}]$ ,  $n \geq 1$ ,  $\sqrt{n^2-1} = [n-1, \overline{1, 2n-2}]$ ,  $n \geq 2$ .

Αρχίζουμε τον αλγόριθμο με  $r_0=0$ ,  $s_0=1$  και  $d=n^2+1$  ή  $d=n^2+2$ , ή  $d=n^2-1$

(οπότε για  $[\sqrt{d}]$  θα έχουμε:  $n, n, n-1$  αντίστοιχα).

k	0	1	2	3
r	0	<b>n</b>	<b>n</b>	...
s	1	<b>1</b>	<b>1</b>	...
a	n	2n	...	...

k	0	1	2	3
r	0	<b>n</b>	n	<b>n</b>
s	1	<b>2</b>	1	<b>2</b>
a	n	n	2n	...

k	0	1	2	3
r	0	n-1	n-1	n-1
s	1	2n-2	1	2n-2
a	n-1	1	2n-2	...

Π.χ.  $\sqrt{17} = [4, \overline{8}]$ ,  $\sqrt{37} = [6, \overline{12}]$ ,  $\sqrt{18} = [4, \overline{4, 8}]$ ,  $\sqrt{27} = [5, \overline{5, 10}]$ ,

$\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$ ,  $\sqrt{15} = [3, \overline{1, 6}]$ .

3.  $\sqrt{n^2+1+n^2} = [n^2+n, \overline{2n}]$ ,  $n \geq 1$ .

Από την  $\sqrt{n^2+1} = [n, \overline{2n}]$  παίρνουμε  $\sqrt{n^2+1+n^2} = n^2 + [n, \overline{2n}] = [n^2+n, \overline{2n}]$

4. Για τον  $\frac{\sqrt{6}-4}{2}$ , καλύτερα  $\frac{-4+\sqrt{6}}{2}$  έχουμε  $r = -4$ ,  $d = 6$ ,

$s = 2$ , ο 2 διαιρεί τον  $6-16=-10$  και  $\frac{-4+\sqrt{6}}{2} = [-1, \overline{4, 2}]$ .

k	0	1	2	3
r	-4	2	2	2
s	2	1	2	1
a	-1	4	2	

Τα αρχικά αναγωγίματα του  $\frac{-4+\sqrt{6}}{2}$  είναι  $\frac{-1}{1}, \frac{-3}{4}, \frac{-7}{9}, \frac{-31}{40}, \frac{-69}{89}, \frac{-307}{396}, \dots$

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της ενότητας 5.4.4, ο ρητός  $\frac{-307}{396}$  είναι η βέλτιστη προσέγγιση

του  $\frac{-4+\sqrt{6}}{2}$  μεταξύ όλων των ρητών με παρονομαστή που δεν υπερβαίνει τον 396.

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
p	0	1	-1	-3	-7	-31	-69	-307	...	
a			-1	4	2	4	2	4	2	
q	1	0	1	4	9	40	89	396	...	

### 6.6.2. Θεώρημα (αντίστροφο του Θ.6.6.1):

Η τιμή ενός περιοδικού συνεχούς κλάσματος είναι τετραγωνικός άρρητος.

**Απόδειξη:** Ας Υποθέσουμε ότι

$$z = [c_0, c_1, c_2, \dots] = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, \overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}] = [b_0, b_1, \dots, b_k, a_0, a_1, \dots, a_n, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots].$$

**A. Θέτουμε**

$$y = [\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, y]. \text{ Από τον}$$

αλγόριθμο των αναγωγμάτων (2.6.) έχουμε:

$$y = \frac{y p_n^a + p_{n-1}^a}{y q_n^a + q_{n-1}^a} \Leftrightarrow q_n^a y^2 + (q_{n-1}^a - p_n^a) y - p_{n-1}^a = 0 \quad [1], \text{ όπου τα } p_i^a / q_i^a \text{ είναι αναγωγήματα}$$

του  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι μη μηδενικός, γιατί ο  $y$  είναι άρρητος (4.3.2.) και οι αριθμοί  $q_i$  θετικοί ακέραιοι.

Η διακρίνουσα  $(q_{n-1}^a - p_n^a)^2 + 4q_n^a p_{n-1}^a$  αυτής της δευτεροβάθμιας δεν είναι τέλειο τετράγωνο, γιατί ο  $y$  αναπτύσσεται σε άπειρο συνεχές κλάσμα, άρα δεν είναι ρητός. Ο  $y$  είναι λύση της δευτεροβάθμιας [1], οι συντελεστές είναι ακέραιοι,  $q_n^a \neq 0$  ( $q_n \geq 1$ ), άρα ο  $y$  είναι τετραγωνικός άρρητος.

Ήδη αποδείξαμε ότι : Ένα άπειρο περιοδικό συνεχές κλάσμα με **απλή** περίοδο συγκλίνει σε τετραγωνικό άρρητο.

**B. Για τον  $z$  έχουμε:**  $z = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, \overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}] = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, y]$ , άρα

$$z = \frac{y p_k^b + p_{k-1}^b}{y q_k^b + q_{k-1}^b} \Leftrightarrow y(z q_k^b - p_k^b) = p_{k-1}^b - z q_{k-1}^b \Leftrightarrow y = \frac{p_{k-1}^b - z q_{k-1}^b}{z q_k^b - p_k^b}, \text{ όπου τα } p_i^b / q_i^b \text{ είναι}$$

αναγωγήματα του  $[b_0, b_1, b_2, \dots, b_k]$  (και εδώ έχουμε μη μηδενικό παρονομαστή,  $z$  άρρητος).

Αν αντικαταστήσουμε το  $y$  στην [1], παίρνουμε

$$q_n^a \left( \frac{p_{k-1}^b - z q_{k-1}^b}{z q_k^b - p_k^b} \right)^2 + (q_{n-1}^a - p_n^a) \left( \frac{p_{k-1}^b - z q_{k-1}^b}{z q_k^b - p_k^b} \right) - p_{n-1}^a = 0, \text{ και μετά τις απαραίτητες πράξεις,}$$

καταλήγουμε σε μια δευτεροβάθμια ως προς  $z$  με συντελεστή του  $z^2$  :

$$q_n^a (q_{k-1}^b)^2 - q_{k-1}^b q_k^b (q_{n-1}^a - p_n^a) - p_{n-1}^a (q_k^b)^2.$$

Αν ο συντελεστής αυτός ήταν 0,

τότε διαιρώντας δια  $(q_k^b)^2$ , θα βρίσκαμε την  $\frac{q_{k-1}^b}{q_k^b}$ , ρητή ρίζα για την δευτεροβάθμια :

$$q_n^a x^2 - (q_{n-1}^a - p_n^a)x - p_{n-1}^a = 0 [2].$$

Όμως αυτή η δευτεροβάθμια έχει διακρίνουσα  $(q_{n-1}^a - p_n^a)^2 + 4q_n^a p_{n-1}^a$ , όπως και η [1], και αποδείξαμε ήδη ότι αυτή η διακρίνουσα δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Άρα η [2] δεν έχει ρητή ρίζα, και επομένως ισχύει:  $q_n^a (q_{k-1}^b)^2 - q_{k-1}^b q_k^b (q_{n-1}^a - p_n^a) - p_{n-1}^a (q_k^b)^2 \neq 0$ . Ο  $z$  λοιπόν είναι ρίζα δευτεροβάθμιας εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές και δεν μπορεί να είναι ρητός, αφού είναι η τιμή ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος (4.3.2), άρα είναι τετραγωνικός άρρητος.

**6.6.3. Για να βρούμε την τιμή ενός περιοδικού συνεχούς κλάσματος εργαζόμαστε όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν:**

i. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το  $[1, 2, 7, 7, 7, \dots]$ . Μπορούμε να γράψουμε την

$$\text{ισότητα ορίων } [1, 2, 7, 7, 7, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{[7, 7, 7, \dots]}} [3]. \text{ Αν } y = [7, 7, 7, \dots], \text{ δηλ.}$$

$$y = 7 + \frac{1}{7 + \frac{1}{7 + \dots}}, \text{ τότε, πάλι από την ισότητα ορίων } y = 7 + \frac{1}{y} \text{ και τις απαραίτητες πράξεις,}$$

$$\text{συμπεραίνουμε ότι ο } y \text{ είναι η θετική (αφού } y > 1) \text{ ρίζα της } y^2 - 7y - 1 = 0, \text{ δηλ. } y = \frac{7 + \sqrt{53}}{2}.$$

Αντικαθιστώντας στην [3], βρίσκουμε

$$[1, 2, 7, 7, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{53} + 7}} = \dots = \frac{2\sqrt{53} + 50}{44} = \frac{25 + \sqrt{53}}{22}.$$

ii. Αν  $w = [1, 2]$ , τότε  $w = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{w}} = \frac{3w + 1}{2w + 1}$ . Ο άρρητος  $w$  είναι η θετική ρίζα

$$\text{της δευτεροβάθμιας: } 2w^2 - 2w - 1 = 0, \text{ δηλ. } w = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του  $z = [1, 3, \overline{1, 2}]$ , τότε έχουμε διαδοχικά:

$$z = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{w}}, \quad z = 1 + \frac{w}{3w + 1}, \quad z = \frac{4w + 1}{3w + 1}. \quad \text{Αντικαθιστούμε την τιμή του } w \text{ και τελικά:}$$

$$z = \frac{4w + 1}{3w + 1} = \frac{4 \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + 1}{3 \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + 1} = \dots = 3 - \sqrt{3}. \quad \text{Για τον αντίστροφο του } 3 - \sqrt{3}, \text{ τον}$$

$$\frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \quad \text{θα έχουμε } \frac{3 + \sqrt{3}}{6} = [0, 1, 3, \overline{1, 2}] \text{ (από την παρατήρηση 4.3.4).}$$

Για τον αντίθετο του  $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$  βρίσκουμε:  $\frac{3 + \sqrt{3}}{-6} = [-1, 4, \overline{1, 2}]$  (από την παρατήρηση 5 του τμήματος 4.4.5, γιατί το δεύτερο μερικό πηλίκο – το μερικό πηλίκο πρώτης τάξης – του  $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$  είναι  $a_1 = 1$ , ή από τον αλγόριθμο 6.5. με αρχικές τιμές  $r_0 = 3, s_0 = -6, a_0 = -1$ ).

## 6.7. Ανηγμένα δευτεροβάθμια ριζικά και απλή περίοδος

### 6.7.1. Ορισμός.

Ένα δευτεροβάθμιο ριζικό  $z = \frac{r + \sqrt{d}}{s}$  ονομάζεται **ανηγμένο**

(ή ανηγμένος τετραγωνικός άρρητος) αν  $z > 1$  και ο συζυγής του  $z$ , ο  $z'$ , ικανοποιεί την  $-1 < z' = \frac{r - \sqrt{d}}{s} < 0$ .

Π.χ. ο  $1 + \sqrt{2}$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό, γιατί  $1 + \sqrt{2} > 1$  και  $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0$ .

Αλλά και για κάθε θετικό ακέραιο  $d$  που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ο  $\sqrt{d} + [\sqrt{d}]$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό, αφού  $\sqrt{d} + [\sqrt{d}] > 1$  και  $-1 < [\sqrt{d}] - \sqrt{d} < 0$ .

### 6.7.2. Παρατηρήσεις:

i. η  $-1 < z' < 0$  μπορεί να ικανοποιείται και αν  $z < 1$ , π.χ.  $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{3 + \sqrt{11}}{7}$ .

ii. Μπορούμε να διαπιστώνουμε με «μια ματιά» αν ισχύουν οι  $z > 1$  και  $-1 < z' < 0$ , εξετάζοντας τις ισοδύναμες:  $0 < r < \sqrt{d}$  και  $\sqrt{d} - r < s < \sqrt{d} + r$ .



**Πράγματι:** Αν  $z = \frac{r + \sqrt{d}}{s} > 1$  και  $-1 < z' = \frac{r - \sqrt{d}}{s} < 0$ , τότε  $1 < z - z' = \frac{2\sqrt{d}}{s}$ , οπότε  $s > 0$  και  $s < 2\sqrt{d}$ . Από την  $0 < z + z' = \frac{2r}{s}$ , συμπεραίνουμε ότι και  $r > 0$  και από την  $-1 < z' = \frac{r - \sqrt{d}}{s} < 0$ , ότι  $r < \sqrt{d}$ , τελικά:  $0 < r < \sqrt{d}$ .

Από τις  $\frac{r + \sqrt{d}}{s} > 1$ ,  $-1 < \frac{r - \sqrt{d}}{s} < 0$  καταλήγουμε και στην  $\sqrt{d} - r < s < \sqrt{d} + r$  (η τελευταία και οι  $s > 0$ ,  $r < \sqrt{d}$  δίνουν για τον  $s$  και την  $0 < s < 2\sqrt{d}$ ).

Αντίστροφα, αν  $0 < r < \sqrt{d}$  και  $\sqrt{d} - r < s < \sqrt{d} + r$ , τότε συμπεραίνουμε αμέσως ότι  $s > 0$  και  $z = \frac{r + \sqrt{d}}{s} > 1$ . Η  $s > 0$  και η  $0 < r < \sqrt{d}$  δίνουν την  $z' = \frac{r - \sqrt{d}}{s} < 0$ . Από την  $\sqrt{d} - r < s$  παίρνουμε  $-s < r - \sqrt{d}$  και τελικά την  $-1 < \frac{r - \sqrt{d}}{s} = z'$ , δηλ. ο  $z$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό. Π.χ. ο  $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό, ενώ ο  $\frac{3 + \sqrt{11}}{7}$  δεν είναι ( $3 < \sqrt{11}$ ,  $7 > 3 + \sqrt{11}$ ).

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χαρακτηριστικό των αρρήτων που αναπτύσσονται σε περιοδικά κλάσματα με απλή περίοδο. Η πρώτη απόδειξη δόθηκε από τον Evarist Galois (1811-1832) το 1828 αν και το αποτέλεσμα φαίνεται (από εργασία του) να ήταν γνωστό αρκετά νωρίτερα στον Lagrange.

### 6.7.3. Θεώρημα.

**A.** Αν ένα δευτεροβάθμιο ριζικό είναι ανηγμένο, τότε αναπτύσσεται σε συνεχές κλάσμα με απλή περίοδο.

**B.** (αντίστροφο): Αν ένα δευτεροβάθμιο ριζικό αναπτύσσεται σε περιοδικό συνεχές κλάσμα με απλή περίοδο, τότε είναι ανηγμένο.

Ιδιαίτερα, αν  $z = [\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}}]$ , τότε  $-\frac{1}{z'} = [\overline{a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_2, a_1, a_0}]$

( $z'$  είναι ο συζυγής του  $z$ ).

**Απόδειξη.** **A.** Υποθέτουμε ότι ο  $z$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό και αναπτύσσεται στο (άπειρο, αφού είναι άρρητος) συνεχές κλάσμα  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  με την μέθοδο που περιγράφεται στο τμήμα 4.4.1.

Από την  $z_{k+1} = \frac{1}{z_k - a_k}$  παίρνουμε  $z'_{k+1} = \frac{1}{z'_k - a_k}$ . Για τα μερικά πηλίκα θα ισχύει

$a_k \geq 1$  για κάθε  $k \geq 0$  (αφού  $z > 1$  θα είναι και το  $a_0 \geq 1$ ). Αν  $z'_k < 0$ , τότε από την  $z'_{k+1} = \frac{1}{z'_k - a_k}$

συμπεραίνουμε ότι  $-1 < z'_{k+1} < 0$  ( $z'_k - a_k < -1$ , γιατί  $-a_k \leq -1$  και  $z'_k < 0$ ). Ιδιαίτερα, αν το  $z_k$  είναι ανηγμένο, το ίδιο θα είναι και το  $z_{k+1}$ . Αλλά το  $z = z_0$  είναι από την υπόθεση ανηγμένο, άρα όλα τα πλήρη πηλίκα που προκύπτουν από την διαδικασία ανάπτυξης του  $z$  σε συνεχές κλάσμα είναι ανηγμένα δευτεροβάθμια ριζικά.

*Παρατήρηση: Από το τμήμα \*\* (πλάγια γράμματα) της απόδειξης του Θ.6.6.1. και την διαδικασία ανάπτυξης ενός τετραγωνικού αρρήτου σε συνεχές κλάσμα συμπεραίνουμε ότι μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων βρίσκουμε ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό και ότι «τελικά» τα πλήρη πηλίκα ενός τετραγωνικού αρρήτου είναι ανηγμένα. Εδώ αρχίζουμε με ανηγμένο, οπότε κάθε πλήρες πηλίκο είναι ανηγμένο.*

Από την ισότητα  $z'_{k+1} = \frac{1}{z'_k - a_k}$ , παίρνουμε  $z'_k = a_k + \frac{1}{z'_{k+1}}$ .

Από την  $-1 < z'_{k+1} < 0$ , έχουμε ότι  $-\frac{1}{z'_{k+1}} > 1$

**Θέτουμε**  $y_k = -\frac{1}{z'_k}$  [1].

Τότε η  $z'_k = a_k + \frac{1}{z'_{k+1}}$  γίνεται  $y_{k+1} = a_k + \frac{1}{y_k}$  με  $y_k > 1$  (αφού τα πλήρη πηλίκα  $z_k$  είναι

ανηγμένα δευτεροβάθμια ριζικά, θα ισχύει  $-1 < z'_k < 0$ , άρα  $y_k = -\frac{1}{z'_k} > 1$ ). Το ακέραιο μέρος

του  $y_{k+1}$  θα είναι το  $a_k$ , γιατί  $a_k < y_{k+1} = a_k + \frac{1}{y_k} < a_k + 1$ .

Το ανάπτυγμα του  $z$  σε συνεχές κλάσμα,  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , θα είναι περιοδικό, σύμφωνα με το Θ.6.6.1, ας υποθέσουμε με πλήθος μερικών πηλίκων περιόδου  $m$ , οπότε για κάποιον δείκτη  $j$ , θα επαναλαμβάνονται τα  $r_k, s_k, a_k$  του αλγορίθμου 6.5.2, δηλ.  $z = [a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, \overline{a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+m-1}}]$ .

Επομένως  $z_{m+j} = z_j$ , και παίρνοντας συζυγείς,  $y_{m+j} = y_j$  (από την [1]).

Αν  $j > 0$ , τότε  $y_j = a_{j-1} + \frac{1}{y_{j-1}}$  και  $y_{m+j} = a_{m+j-1} + \frac{1}{y_{m+j-1}}$ , με  $[y_j] = a_{j-1}$ ,  $[y_{m+j}] = a_{m+j-1}$ ,

και επειδή  $y_{m+j} = y_j$  θα έχουμε  $a_{j-1} = a_{m+j-1}$  και  $\frac{1}{y_{j-1}} = \frac{1}{y_{m+j-1}}$ .

Αντιστρέφουμε :  $y_{m+j-1} = y_{j-1}$  και παίρνουμε συζυγείς:  $z_{m+j-1} = z_{j-1}$  ( $y_k' = -\frac{1}{z_k}$ ).

Αν  $j-1 > 0$ , τότε  $y_{j-1} = a_{j-2} + \frac{1}{y_{j-2}}$  και  $y_{m+j-1} = a_{m+j-2} + \frac{1}{y_{m+j-2}}$ ,

με  $[y_{j-1}] = a_{j-2}$ ,  $[y_{m+j-1}] = a_{m+j-2}$ , οπότε θα έχουμε  $a_{j-2} = a_{m+j-2}$  και  $\frac{1}{y_{j-2}} = \frac{1}{y_{m+j-2}}$ .

Αντιστρέφουμε :  $y_{m+j-2} = y_{j-2}$  και επίσης:  $z_{m+j-2} = z_{j-2}$ .

Συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι  $a_{j-j} = a_{m+j-j}$ , δηλ.  $a_0 = a_m$  και η περίοδος αρχίζει από το πρώτο μερικό πηλίκιο, άρα το συνεχές κλάσμα είναι απλό περιοδικό,  $z = [\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}}]$ .

## B.

**B1.** Αν  $z = [a_0, a_1, a_2, \dots] = [\overline{a_0}]$ , τότε  $a_0 \geq 1$  και  $z = a_0 + \frac{1}{z}$ . Οδηγούμαστε στην

δευτεροβάθμια  $z^2 - a_0 z - 1 = 0$ , με θετική ρίζα την  $\frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2}$ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1, αφού  $\sqrt{a_0^2 + 4} > a_0$ .

Η συζυγής της είναι η  $\frac{a_0 - \sqrt{a_0^2 + 4}}{2}$ , που ικανοποιεί την  $-1 < \frac{a_0 - \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} < 0$ , γιατί

$$\sqrt{a_0^2 + 4} > a_0 \text{ και } \sqrt{a_0^2 + 4} < a_0 + 2 \Leftrightarrow a_0^2 + 4 < (a_0 + 2)^2 = a_0^2 + 4 + 2a_0 \Leftrightarrow 0 < 2a_0$$

(ισχύει γιατί  $a_0 \geq 1$ ), άρα ο  $z$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό.

$$\text{Επίσης } -\frac{1}{z'} = [\overline{a_0}], \text{ γιατί: } -\frac{1}{\frac{a_0 - \sqrt{a_0^2 + 4}}{2}} = \frac{-2(a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4})}{-4} = \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2}.$$

*Παρατήρηση:* Συμπεραίνουμε ότι  $[n, n, n, n, n, \dots] = [\bar{n}] = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ ,  $n \geq 1$ , π.χ.

$$[1, 1, 1, 1, 1, \dots] = [\bar{1}] = \frac{1 + \sqrt{1^2 + 4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad [2, 2, 2, 2, \dots] = [\bar{2}] = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Επίσης, αν π.χ. ο  $\xi$  παριστάνει κάποιον από τους  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $1 + \sqrt{2}$ ,

$$\text{τότε } -\frac{1}{\xi'} = \xi, \text{ δηλ. } \frac{2}{\sqrt{5}-1} = [\bar{1}], \quad \frac{1}{\sqrt{2}-1} = [\bar{2}]$$

**B2.** Αν  $z = [\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}}]$  με  $m > 1$ , τότε  $a_m = a_0$ , επομένως  $a_0 \geq 1$  και όλα τα μερικά πηλίκα είναι θετικοί ακέραιοι.

$$\text{Θα έχουμε: } z = [\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}}] = [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, z] = \frac{z p_{m-1} + p_{m-2}}{z q_{m-1} + q_{m-2}}, \text{ όπου τα}$$

$$\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}, \frac{p_{m-2}}{q_{m-2}} \text{ είναι τα αναγωγήματα } (m-1) \text{ και } (m-2) \text{ τάξης του } z = [\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}}].$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση που ικανοποιεί ο  $z$  (όπως και στο Θ.6.6.2.A), είναι η  $q_{m-1}z^2 + (q_{m-2} - p_{m-1})z - p_{m-2} = 0 \Leftrightarrow q_{m-1}z^2 - (p_{m-1} - q_{m-2})z - p_{m-2} = 0$  [2].

Άρα ο  $z$  είναι τετραγωνικός άρρητος και επειδή  $a_0 \geq 1$ , θα έχουμε και  $z > 1$ .

Αναστρέφοντας την περίοδο στον  $z$  παίρνουμε:

$$y = [\overline{a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0}] = [a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0, y] = [b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, y] = \frac{y p'_{m-1} + p'_{m-2}}{y q'_{m-1} + q'_{m-2}},$$

όπου  $b_k = a_{m-1-k}$ , και  $p'_{m-1} / q'_{m-1}$ ,  $p'_{m-2} / q'_{m-2}$  είναι τα αναγωγήματα  $(m-1)$  και  $(m-2)$  τάξης του  $[a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0]$ . Σύμφωνα με την **παρατήρηση 3.1.5**, το τελευταίο αναγωγήμα του  $[a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0]$  θα έχει όρους τους αριθμητές και το προτελευταίο τους παρονομαστές των δυο τελευταίων αναγωγημάτων του  $[a_0, a_1, \dots, a_{m-1}]$ , δηλ.  $\frac{p_{m-1}}{p_{m-2}} = \frac{p'_{m-1}}{q'_{m-1}}$ ,  $\frac{q_{m-1}}{q_{m-2}} = \frac{p'_{m-2}}{q'_{m-2}}$ .

Τα αναγωγήματα όμως είναι κλάσματα ανάγωγα, οι παρονομαστές είναι θετικοί, άρα θα έχουμε ισότητα αριθμητών και παρονομαστών (παράρτημα A11), οπότε

$$y = \frac{y p'_{m-1} + p'_{m-2}}{y q'_{m-1} + q'_{m-2}} = \frac{y p_{m-1} + q_{m-1}}{y p_{m-2} + q_{m-2}}, \text{ και μετά τις πράξεις, } p_{m-2} y^2 - (p_{m-1} - q_{m-2}) y - q_{m-1} = 0.$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} p_{m-2}y^2 - (p_{m-1} - q_{m-2})y - q_{m-1} = 0 &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{y}\right)^2 (p_{m-2}y^2 - (p_{m-1} - q_{m-2})y - q_{m-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow p_{m-2} - (p_{m-1} - q_{m-2})\left(\frac{1}{y}\right) - q_{m-1}\left(-\frac{1}{y}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow q_{m-1}\left(-\frac{1}{y}\right)^2 - (p_{m-1} - q_{m-2})\left(-\frac{1}{y}\right) - p_{m-2} = 0 \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν τον  $z$  (από την [2]) ρίζα της  $q_{m-1}z^2 - (p_{m-1} - q_{m-2})z - p_{m-2} = 0$  και τον

$$-\frac{1}{y} \text{ ρίζα της } q_{m-1}\left(-\frac{1}{y}\right)^2 - (p_{m-1} - q_{m-2})\left(-\frac{1}{y}\right) - p_{m-2} = 0.$$

Άρα η δευτεροβάθμια εξίσωση  $q_{m-1}x^2 - (p_{m-1} - q_{m-2})x - p_{m-2} = 0$  έχει ρίζες τις  $z$  και  $-\frac{1}{y}$  και η  $-\frac{1}{y}$  θα είναι η συζυγής της  $z$ .

Επειδή  $a_k \geq 1$  για  $k \geq 0$ , και  $y = \overline{a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0}$ , θα έχουμε  $y > 1$ , άρα  $0 < (1/y) < 1$  και  $-1 < (-1/y) < 0$ , δηλ.  $-1 < z' < 0$ , οπότε ο  $z$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό.

$$\text{Η } -\frac{1}{y} = z' \text{ δίνει } -\frac{1}{z'} = y \text{ και άρα } -\frac{1}{z'} = y = \overline{a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0}$$

Παρατήρηση: Αν ο  $z$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό, τότε και ο  $-\frac{1}{z'}$  είναι, γιατί, η  $-1 < z' < 0$  δίνει  $-\frac{1}{z'} > 1$  και ο συζυγής του  $-\frac{1}{z'}$ , είναι ο  $-\frac{1}{z}$  που ικανοποιεί την  $-1 < -\frac{1}{z} < 0$ , αφού  $z > 1$ .

**Παραδείγματα:**

1. Επειδή ο  $4 + \sqrt{19}$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό, θα έχουμε περίοδο από το πρώτο μερικό πηλίκο. Πράγματι από τον αλγόριθμο, με  $r_0 = 4$ ,  $s_0 = 1$ ,  $a_0 = 8$ , βρίσκουμε:  $4 + \sqrt{19} = [8, 2, 1, 3, 1, 2]$ . Για τον αντίθετο του αντίστροφου τού συζυγούς του  $4 + \sqrt{19}$ , είναι  $-\frac{1}{4 - \sqrt{19}} = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$ . Αρχίζουμε τον αλγόριθμο 6.5.2. με  $r_0 = 4$ ,  $s_0 = 3$ ,  $a_0 = 2$ , αφού  $3/(19-16)$ ,

και βρίσκουμε, όπως θα περιμέναμε,  $\frac{4 + \sqrt{19}}{3} = [2, 1, 3, 1, 2, 8]$ , δηλ. την περίοδο του  $4 + \sqrt{19}$ , αναστραμμένη. Αν έχουμε το  $4 + \sqrt{19} = [8, 2, 1, 3, 1, 2]$ , για να βρούμε το ανάπτυγμα της  $\sqrt{19}$ , αφαιρούμε τον 4 και από τα δύο μέλη:  $\sqrt{19} = [4, 2, 1, 3, 1, 2, 8]$  (ιδιότητες ορίων).

2. Αν  $x = [\overline{b, a}] = [b, a, b, a, b, a, \dots]$  και ο  $a$  διαιρεί τον  $b$ , τότε  $b = ac$  για κάποιον ακέραιο  $c$ . Ο  $x$  θα είναι η θετική ρίζα της :

$$x = b + \frac{1}{a + \frac{1}{x}}, \quad ax^2 - bax - b = 0, \quad x^2 - bx - \frac{b}{a} = x^2 - bx - c = 0, \quad \text{άρα } x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

$$\text{Αν } a=b=1, \text{ τότε, } c=1 \text{ και } x = \frac{1 + \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ δηλ. } [1] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Αν } a=b=2, \text{ τότε, } c=1 \text{ και } x = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \text{ δηλ. } [2] = 1 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Αν } a=b=n, \text{ τότε } [n, n, n, n, n, \dots] = [\overline{n}] = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}, \quad n \geq 1 \text{ (όπως είδαμε και στο } \Theta.6.7.3:B1).$$

$$\text{Αν } a=1, b=2, \text{ τότε, } c=2 \text{ και } x = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 2}}{2} = 1 + \sqrt{3}, \text{ δηλ. } [2, 1] = 1 + \sqrt{3}. \text{ Ομοίως}$$

$$[4, 2] = \frac{4 + \sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}, \quad [10, 5] = 5 + \sqrt{27}.$$

$$\text{Αν } a=n, b=2n, \text{ τότε } [2n, n, 2n, n, \dots] = [2n, n] = \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 4 \cdot 2}}{2} = n + \sqrt{n^2 + 2}, \quad n \geq 1.$$

### 6.8. Μια εικόνα για την περιοδικότητα των αναπτυγμάτων

Ας δούμε τον αλγόριθμο της ανάπτυξης ενός αρρήτου σε συνεχές κλάσμα (4.4.1). Σε κάθε βήμα αν  $z_k$   $k \geq 0$ , είναι το τρέχον πλήρες πηλίκο, βρίσκουμε το ακέραιο μέρος του  $z_k$ , το ονομάζουμε  $a_k$ , αφαιρούμε το  $a_k$  από το  $z_k$  και βρίσκουμε τον  $z_k - a_k$ , που είναι αριθμός μεταξύ 0 και 1. Ονομάζουμε  $z_{k+1}$  τον αντίστροφο του  $z_k - a_k$ , θα είναι  $z_{k+1} > 1$  και συνεχίζουμε όπως και για το  $z_k$ . Αν έχουμε περιοδικό συνεχές κλάσμα, μετά από κάποιο δείκτη  $k$ , τα πλήρη πηλίκια θα επαναλαμβάνονται.

Μια εικόνα της περιοδικότητας μπορεί να δοθεί με την εξής διαδικασία:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $F(x) = x - [x]$ ,  $G(x) = \frac{1}{x}$ .

Τότε  $F(z_0) = z_0 - [z_0] = z_0 - a_0$ . Τοποθετούμε τον τετραγωνικό άρρητο  $z_0$  στον άξονα των τετμημένων (κατασκευάζεται), στο σημείο  $(z_0, 0)$ .

Η κατακόρυφη  $x = z_0$  θα τέμνει την  $F(x)$  στο σημείο,  $(z_0, z_0 - [z_0]) = (z_0, z_0 - a_0)$ .

Από το σημείο αυτό φέρνουμε την ευθεία  $y = z_0 - a_0$  η οποία θα τέμνει την γνήσια φθίνουσα

συνάρτηση  $G$  στο σημείο  $(z_1, z_0 - a_0)$ , γιατί  $z_1 = \frac{1}{z_0 - a_0} \Leftrightarrow z_0 - a_0 = \frac{1}{z_1}$ .

Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για το τρέχον πλήρες πηλίκο  $z_k$ .

Φέρνουμε την κατακόρυφη στο  $(z_k, 0)$ , αυτή τέμνει την  $F$  στο  $(z_k, z_k - a_k)$ .

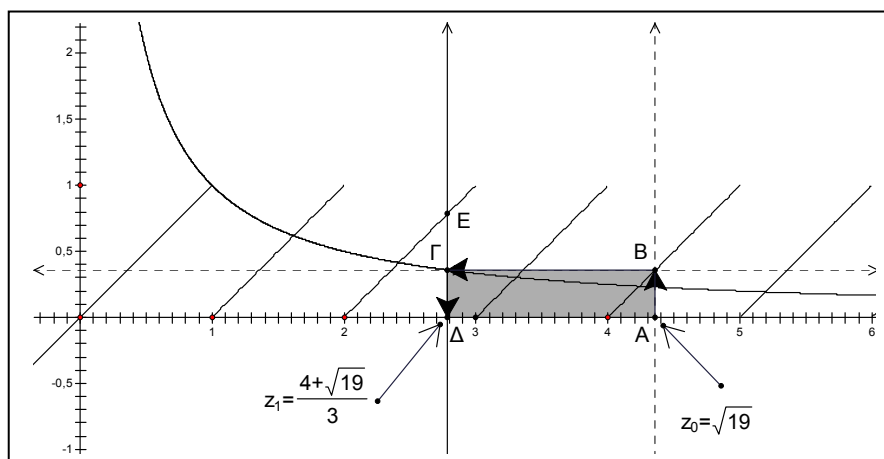
Από το σημείο αυτό φέρνουμε την  $y = z_k - a_k$ , η οποία τέμνει την  $G$  στο  $(z_{k+1}, z_k - a_k)$ . Η προβολή του σημείου αυτού στον  $x'x$  είναι το επόμενο πλήρες πηλίκο.

Δημιουργείται έτσι ένας «δρόμος» που ξεκινά από το  $(z_0, 0)$  και οδηγεί διαδοχικά στα επόμενα πλήρη πηλίκια.

Αφού το συνεχές κλάσμα είναι περιοδικό, θα υπάρχουν  $m, n$ , ώστε  $z_m = z_n$ , οπότε τα μονοπάτια του δρόμου θα επαναλαμβάνονται (Olds, 1963: 109).

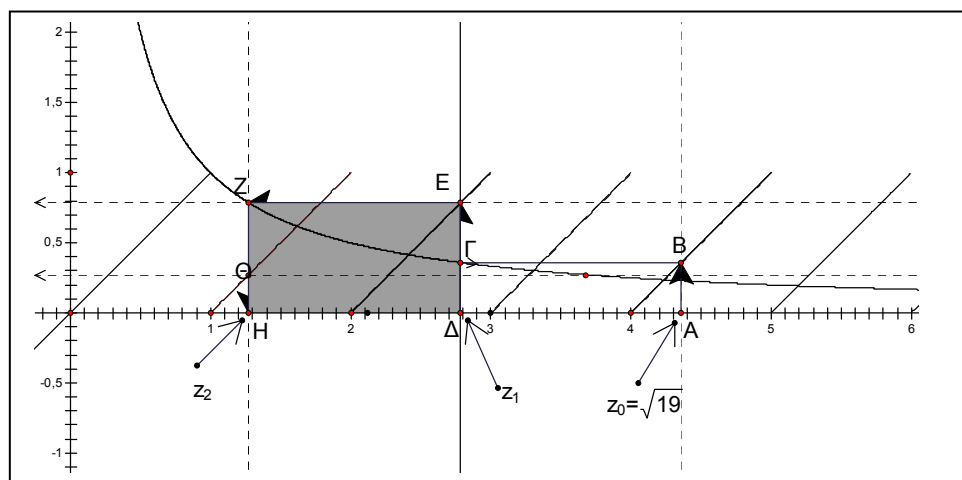
Ας δούμε π.χ. το παράδειγμα ii του τμήματος 6.2. για την ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα της  $\sqrt{19}$ . Αρχίζουμε με το  $A(\sqrt{19}, 0)$ .

Φέρνουμε την κατακόρυφη,  $x = z_0$  βρίσκουμε το B, το σημείο τομής της  $x = z_0$  με την  $F(x) = x - [x]$ . Συνεχίζουμε με την οριζόντια  $y = \sqrt{19} - 4$  βρίσκουμε το Γ, το σημείο τομής της  $y$  με την  $G(x) = \frac{1}{x}$ . Προβάλλουμε το Γ στον οριζόντιο άξονα, βρίσκουμε το Δ, το σημείο  $\Delta(z_1, 0)$ , πού είναι το παραστατικό σημείο του  $z_1$ . Δημιουργείται το μονοπάτι ABΓΔ.



Η κατακόρυφη στο Δ μας δίνει το E, το σημείο τομής της  $x = z_1$  και της  $F(z_1)$ . Συνεχίζουμε με παράλληλη από το E στον  $x'$  κλπ, δημιουργείται το δεύτερο μονοπάτι ΔΕΖΗ, με το σημείο H να είναι το παραστατικό σημείο του  $z_2$ .

Η κατακόρυφη στο H τέμνει την  $F[x]$  στο Θ κλπ.

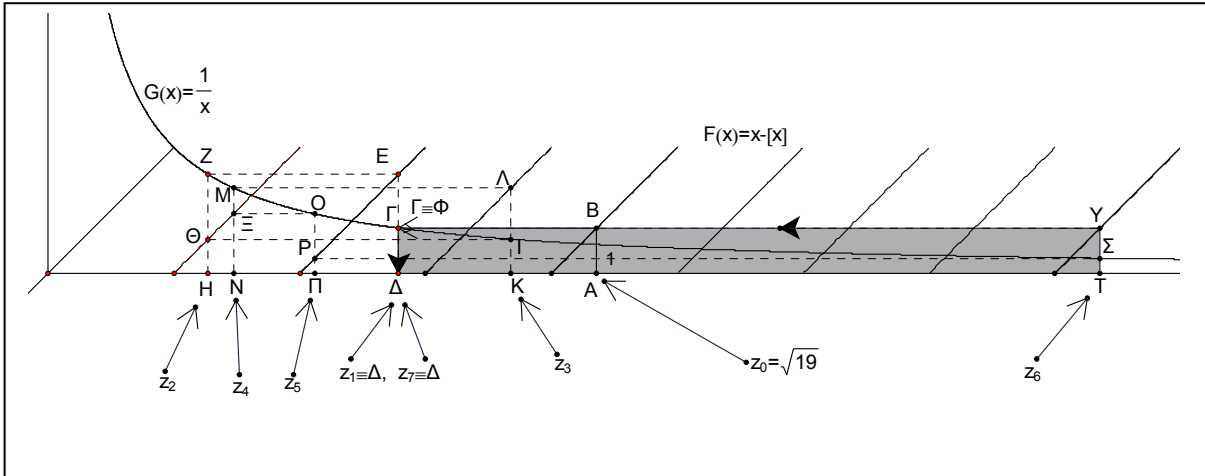




Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, δημιουργούνται τα ΗΘΙΚ, Κ είναι το παραστατικό σημείο του  $z_3$ , ΚΛΜΝ, Ν(z<sub>4</sub>), ΝΞΟΠ, Π(z<sub>5</sub>), ΠΡΣΤ, Τ(z<sub>6</sub>), ΤΥΦΔ (σκιασμένο).

Παρατηρούμε ότι τα σημεία Γ, Φ ταυτίζονται, οπότε το Δ, το παραστατικό σημείο του  $z_1$ , θα είναι και παραστατικό σημείο του  $z_7$ .

Αν συνεχίσουμε, θα βαδίσουμε πάνω στα ίδια μονοπάτια, ΔΕΖΗ, ΗΘΙΚ κλπ.



### 6.9. Γνωστά και άγνωστα

Έχουμε βρει στο Κ3 ότι οι ρητοί χαρακτηρίζονται από αναπτύγματα σε πεπερασμένα συνεχή κλάσματα. Στο τμήμα 6.6 είδαμε ότι τα άπειρα περιοδικά συνεχή κλάσματα χαρακτηρίζουν τους τετραγωνικούς αρρήτους, δηλ. τις άρρητες ρίζες δευτεροβαθμίων πολυωνύμων. Όμως, δεν είναι γνωστή κάποια άλλη χαρακτηριστική ιδιότητα για τις ρίζες πολυωνύμων με βαθμό μεγαλύτερο του δύο. Δεν έχουμε ικανοποιητικές πληροφορίες για το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα για έστω και έναν αλγεβρικό αριθμό (ενότητα 5.7.) που δεν είναι δευτεροβάθμιο ριζικό.

Δεν γνωρίζουμε ακόμη και για τον  $\sqrt[3]{2}$  π.χ. αν έχει ή όχι φραγμένη ακολουθία μερικών πηλίκων. Με την βοήθεια υπολογιστή έχουν υπολογιστεί αρκετές χιλιάδες από τους αρχικούς όρους του αναπτύγματος (ο διπλανός πίνακας περιέχει τα 100 πρώτα μερικά πηλίκια), φαίνονται λίγες «υπερβάσεις», π.χ. 534, 121, 186, αλλά, απόδειξη για το φραγμένο ή όχι δεν έχει δοθεί.

$\sqrt[3]{2} = [1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 15, 3, 1, 4, 534, 1, 1, 5, 1, 1, 121, 1, 2, 2, 4, 10, 3, 2, 2, 41, 1, 1, 1, 3, 7, 2, 2, 9, 4, 1, 3, 7, 6, 1, 1, 2, 2, 9, 3, 1, 1, 69, 4, 4, 5, 12, 1, 1, 5, 15, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 89, 1, 22, 186, 6, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 1, \dots]$
--

Τα συνεχή κλάσματα κάποιων υπερβατικών αριθμών (5.9) είναι όμως γνωστά.

Π.χ. τα αναπτύγματα που βρήκε ο Euler το 1737 :

$$e-1 = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots], \frac{e-1}{2} = [0, 1, 6, 10, 14, 18, 22, \dots], \frac{e+1}{e-1} = [2, 6, 10, 14, \dots],$$

$$\frac{e^2-1}{e^2+1} = [0, 1, 3, 5, 7, 9, \dots], e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots].$$

Τα μερικά πηλικά του αναπτύγματος του  $e$  είναι:  $a_0=2, a_1=1, a_2=2, a_3=1, a_4=1, a_5=4, \dots, a_{3m}=a_{3m+1}=1, a_{3m-1}=2m, m=1, 2, 3, \dots$ .

Εκπλήσσει η απλότητα αυτών των συνεχών κλασμάτων, αν σκεφτούμε ότι

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240\dots$$

Το ανάπτυγμα του  $\pi$ , που έδωσε ο Lambert το 1770, δεν φαίνεται να έχει κάποια κανονικότητα :  $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, \dots]$ .

Ο Lambert (το 1766) βρήκε επίσης ότι :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{6}{x} + \frac{1}{\frac{10}{x} + \frac{1}{\frac{14}{x} + \dots}}}} \quad \text{και} \quad \operatorname{erf} x = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \frac{1}{\frac{7}{x} - \dots}}}}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποίησε αυτά τα αναπτύγματα για να συμπεράνει ότι:

α) Αν  $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ , τότε ο  $e^x$  δεν μπορεί να είναι ρητός.

β) Αν  $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ , τότε η  $\operatorname{erf} x$  δεν μπορεί να είναι ρητός. Από το αποτέλεσμα αυτό

απέδειξε την αρρητότητα του  $\pi$  ως εξής: Γνωρίζουμε ότι  $\operatorname{erf} \frac{\pi}{4} = 1$ , ρητός, άρα ούτε ο  $\frac{\pi}{4}$ ,

αλλά ούτε και ο  $\pi$  μπορούν να είναι ρητοί (υπερβατικότητες: 5.9). Κάποιες αδυναμίες στην απόδειξη του Lambert (απέδειξε την β μόνο για ρητούς της μορφής  $1/n$  και δέχθηκε, χωρίς απόδειξη, ότι ισχύει και η αντίστροφη πρόταση: αν  $\operatorname{erf} x$  ρητός, τότε  $x$  άρρητος) διορθώθηκαν από τον Legendre και δημοσιεύθηκαν στο βιβλίο του: Elements de geometrie, το 1794.

Ο Srinivasa Ramanujan (1887-1920) δημοσίευσε πολλά προβλήματα με συνεχή κλάσματα στο the Journal of the Indian Mathematical Society και στις σημειώσεις του βρέθηκαν περίπου 200 αποτελέσματα πάνω σε τέτοια κλάσματα.

Μεταξύ αυτών που εντυπωσίασαν περισσότερο τον Hardy (συνδέει τους  $\pi$ ,  $e$  και  $\varphi$ ) είναι και αυτό που απεικονίζεται στο διπλανό πλαίσιο (Burton, 1997: 320). Αν και οι περισσότερες αποδείξεις έχουν γίνει, δεν είναι ακόμα γνωστό πως ο Ramanujan έφτασε στα συγκεκριμένα αναπτύγματα. Ίσως δεν περιέγραψε τις διαδικασίες επινόησης, ή ανακάλυψης, ή ανάμνησης (κατά τον Πλάτωνα) γιατί συμφωνούσε με τον Schopenhauer: «οι σκέψεις πεθαίνουν τη στιγμή που ενσαρκώνονται με λέξεις».

$$e^{\frac{2\pi}{5}} \left( \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \dots}}}}$$

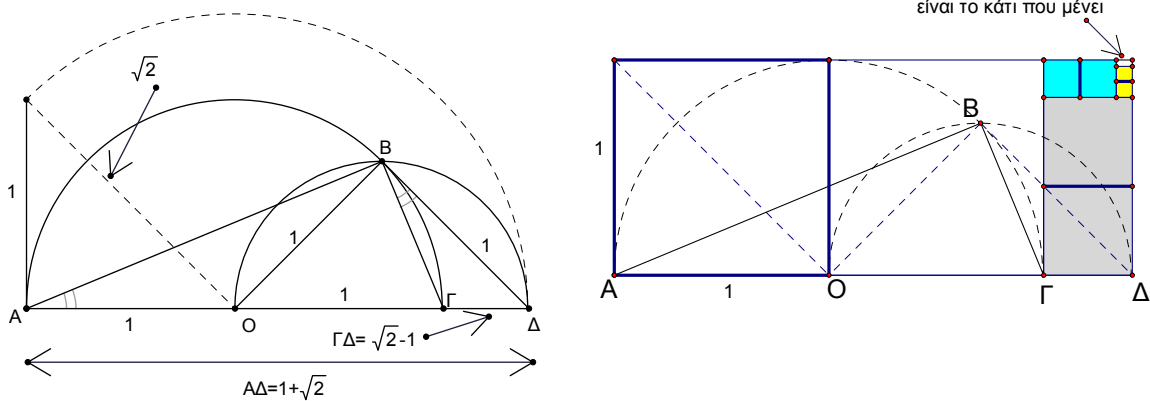
Πιθανόν να είχε την άποψη που πολύ γλαφυρά εξέφρασε ο διάσημος ζωγράφος και γλύπτης Thomas Schutte (1954 - ): «Όταν μετά από εντατική διανοητική δραστηριότητα φτάνω σε ένα όμορφο αποτέλεσμα που με ενθουσιάζει, παρατηρώ μια σιωπή ή μια απώλεια. Αυτό είναι το πιο ενδιαφέρον στην δημιουργία, το να φτάσει κανείς σε αυτόν τον βαθμό σιωπής, μιας τόσο εκκωφαντικής σιωπής και όχι στη μάζα των λέξεων... Κάποιες απαντήσεις δεν μπορούν να ειπωθούν...» (Πορταλάκη, 2010).

Φυσικά δεν σκέφτονται όλοι με τον ίδιο τρόπο. Σε μερικούς ανθρώπους είναι αδιανόητη η σκέψη χωρίς λέξεις. Όμως, «Αν έχουμε μια μικρή πείρα σε σοβαρή μαθηματική εργασία, θα ξέρουμε ότι μπορούμε να κάνουμε αρκετά προχωρημένες σκέψεις, απλώς κοιτάζοντας γεωμετρικά σχήματα ή χειριζόμενοι αλγεβρικά σύμβολα» (Polya, 1991: 251). Ο Αριστοτέλης θεωρούσε απαραίτητες τις «νοητικές εικόνες» (5.6.8). Οι νόμοι της έντονης σκέψης δεν είναι ίδιοι για όλους και οπωσδήποτε είναι πολύ διαφορετικοί από τους νόμους του κοινού σχηματισμού ιδεών, που είναι και ο μοναδικός που απαντάται συχνά στους μέσους ανθρώπους, και συνήθως είναι αυτός που ελέγχεται από ψυχολογικές έρευνες. Η εσωτερική σκέψη, ειδικά όταν είναι δημιουργική, χρησιμοποιεί ηθελημένα άλλα συστήματα σημείων που είναι περισσότερο ευέλικτα, λιγότερο τυποποιημένα από ότι η γλώσσα και προσφέρουν μεγαλύτερη ελευθερία και περισσότερο δυναμισμό (π.χ. ασαφείς εικόνες μπορεί να αναπαριστούν περισσότερο ακριβείς ιδέες). Σε πολλούς ανθρώπους συμβαίνει κάτι πολύ απλό: η σκέψη τους δεν συνοδεύεται ποτέ από λέξεις. Αυτό είναι ακατανόητο για κάποιον (πιθανόν και διάσημο φιλόλογο π.χ. Max Muller) που πιστεύει ότι είναι αδύνατον να φέρει στο νου του την αστραπή, χωρίς πρώτα να σκεφτεί το όνομά της (Hadamard, 1995: 78).



## Παραλληλισμοί

### Ανθυφαίρεση-Συνεχή κλάσματα



Θέλουμε να μετρήσουμε το  $A\Delta$  με το μοναδιαίο τμήμα,  $OA = OB = O\Gamma = B\Delta$ .

Παρατηρούμε ότι :  $A\Delta = 2OA + \Gamma\Delta$  .Με διαφορετικά σύμβολα:  $1 + \sqrt{2} = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}}$  [1]

Αν υπάρχει κοινό μέτρο, κ.μ., των  $A\Delta$  και  $OA$ , αυτό θα είναι κοινό και της διαφοράς τους:  $\kappa.μ.(A\Delta, OA) = \kappa.μ.(A\Delta - OA, OA)$ . Μπορούμε να αφαιρέσουμε ακόμα ένα τμήμα  $OA$ , και το αναζητούμενο κοινό μέτρο του  $A\Delta$  και του μοναδιαίου τμήματος θα είναι κοινό του μοναδιαίου και του  $\Gamma\Delta$ .

Η σχέση όμως του  $\Gamma\Delta$  με το μοναδιαίο, είναι όπως του μοναδιαίου με το  $A\Delta$ :

τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι όμοια,  $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Delta}{B\Delta}$ , ή  $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1}$ .

Η [1] γίνεται:  $1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$  και η προσπάθεια εύρεσης κοινού

μέτρου του μοναδιαίου τμήματος  $OA$  και του τμήματος  $A\Delta$  συνεχίζεται αιώνια. Η πρόταση X.2 των Στοιχείων (βλ. 2.8) μας βεβαιώνει ότι τα συγκεκριμένα τμήματα είναι ασύμμετρα.

Με τη βοήθεια των εμβαδών: από το ορθογώνιο με διαστάσεις  $1 + \sqrt{2}$  και  $1$ , αφαιρούμε δύο τετράγωνα πλευράς  $1$ , από το ορθογώνιο με διαστάσεις  $1, \sqrt{2} - 1$ , αφαιρούμε δύο τετράγωνα πλευράς  $\sqrt{2} - 1$ , από το ορθογώνιο με διαστάσεις  $\sqrt{2} - 1, 3 - 2\sqrt{2}$  αφαιρούμε δύο τετράγωνα πλευράς  $3 - 2\sqrt{2}$ , από το ορθογώνιο με διαστάσεις  $3 - 2\sqrt{2}, 5\sqrt{2} - 7$ , αφαιρούμε δύο τετράγωνα πλευράς  $5\sqrt{2} - 7$ , από το ορθογώνιο...

Ο αριθμός  $1 + \sqrt{2}$  είναι «ανηγμένο» δευτεροβάθμιο ριζικό.

Αναπτύσσεται σε άπειρο συνεχές κλάσμα με απλή περίοδο.

**Κ7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$**

**7.0.**

Στο κεφάλαιο αυτό ο  $d$  είναι τυχαίος θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Θα αναφερόμαστε συχνά στον αλγόριθμο 6.5.3, για την ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα της  $\sqrt{d}$ , και επίσης στον αλγόριθμο 2.6, των αναγωγημάτων του συνεχούς κλάσματος. Ας τους υπενθυμίσουμε:

Ο αλγόριθμος για την ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα της  $\sqrt{d}$  (6.5.3).

$\kappa$	0	1	2	...	$k+1$
$r$	$r_0=0$	$r_1=a_0$	$r_2=a_1s_1-r_1$		$r_{k+1}=a_k s_k-r_k$
$s$	$s_0=1$	$s_1=d-r_1^2$	$s_2=(d-r_2^2)/s_1$	...	$s_{k+1}=(d-r_{k+1}^2)/s_k$
$a$	$a_0=\lfloor\sqrt{d}\rfloor$	$a_1=\lfloor(r_1+\sqrt{d})/s_1\rfloor$	$a_2=\lfloor(r_2+\sqrt{d})/s_2\rfloor$		$a_{k+1}=\lfloor(r_{k+1}+\sqrt{d})/s_{k+1}\rfloor$

Ο αλγόριθμος των αναγωγημάτων (2.6).

δείκτης	-2	-1	0	1	2	...
Αριθμητές: $p_i, i=0,1,2,3,\dots$	0	1	$p_0=a_0$	$p_1$	...	$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$
Μερικά πηλικά: $a_i, i=0,1,2,3,\dots$			$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_i$
Παρονομαστές: $q_i, i=0,1,2,3,\dots$	1	0	$1=q_0$	$q_1$	...	$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$
Αναγωγήματα : $c_i, i=0,1,2,3,\dots$			$\frac{p_0}{q_0}$	$\frac{p_1}{q_1}$		$\frac{p_i}{q_i}$

Θα συμβολίζουμε, όπως συνηθίζουμε, το πρώτο μερικό πηλίκο με  $a_0$ ,  $a_0 = \lfloor\sqrt{d}\rfloor$ .

Επειδή  $d > 1$ , για το  $a_0$  θα ισχύει:  $a_0 \geq 1$ . Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι με το « \ » δηλώνουμε ότι τα δεκαδικά ψηφία, ή τα μερικά πηλικά συνεχίζονται και στην επόμενη γραμμή.

### 7.1. Περιοδικότητα και συμμετρία του αναπτύγματος της $\sqrt{d}$

#### 7.1.1. Θεώρημα.

Το ανάπτυγμα της  $\sqrt{d}$  έχει τη μορφή:  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$ , όπου  $a_0 = [\sqrt{d}]$

**Απόδειξη:** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον θετικό ακέραιο  $d$  (που δεν είναι τέλειο τετράγωνο). Τότε  $\sqrt{d} > 1$  και  $-\sqrt{d} < -1$ , έτσι ο αριθμός  $\sqrt{d}$  δεν είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό. Το συνεχές κλάσμα στο οποίο αναπτύσσεται δεν είναι απλό περιοδικό, αλλά σίγουρα θα είναι σύνθετο περιοδικό (6.6). Αν  $a_0$  είναι το ακέραιο μέρος της  $\sqrt{d}$ ,  $a_0 = [\sqrt{d}]$ , τότε  $\sqrt{d} + a_0 > 1$  και  $0 < \sqrt{d} - a_0 < 1$ , δηλ.  $-1 < a_0 - \sqrt{d} < 0$  και το δευτεροβάθμιο ριζικό  $\sqrt{d} + a_0 = \sqrt{d} + [\sqrt{d}]$  είναι πλέον ανηγμένο, άρα αναπτύσσεται σε απλό περιοδικό συνεχές κλάσμα (6.7).

Για την  $\sqrt{d}$  αρχίζουμε τον αλγόριθμο 6.5.3. για τον υπολογισμό των μερικών πηλίκων με  $r_0=0$ ,  $s_0 = 1$  και  $a_0$  το ακέραιο μέρος της ρίζας. Στη συνέχεια θα έχουμε:  $r_1 = a_0 s_0 - r_0 = a_0$ ,

$$s_1 = d - (r_1)^2 = d - (a_0)^2 \text{ (αφού } s_0 = 1), \text{ και } a_1 = \left[ \frac{r_1 + \sqrt{d}}{s_1} \right] = \left[ \frac{2a_0}{d - [\sqrt{d}]^2} \right] \text{ (Παρατήρηση 6.5.4.α).}$$

Ο αλγόριθμος για την ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα του  $\sqrt{d}$ , και του  $[\sqrt{d}] + \sqrt{d} = a_0 + \sqrt{d}$

$\sqrt{d}$			$[\sqrt{d}] + \sqrt{d} = a_0 + \sqrt{d}$		
κ	0	1	κ	0	1
r	$r_0 = 0$	$r_1 = a_0 s_0 - r_0 = [\sqrt{d}] = a_0$	r	$r_0 = a_0$	$r_1 = 2a_0 s_0 - a_0 = a_0 = [\sqrt{d}]$
s	$s_0 = 1$	$s_1 = (d - r_1^2) / s_0 = d - [\sqrt{d}]^2$	s	$s_0 = 1$	$s_1 = (d - r_1^2) / s_0 = d - [\sqrt{d}]^2$
a	$a_0 = [\sqrt{d}]$	$a_1 = [(a_0 + \sqrt{d}) / s_1]$	a	$[a_0 + \sqrt{d}] = 2a_0$	$a_1 = [(a_0 + \sqrt{d}) / s_1]$

Για τον  $\sqrt{d} + a_0$  θα αρχίσουμε με  $r_0 = a_0$ ,  $s_0 = 1$ , αλλά τώρα το πρώτο μερικό πηλίκο θα είναι  $2a_0$ , το ακέραιο μέρος του  $\sqrt{d} + a_0$  (6.5.4).

Στη συνέχεια θα έχουμε:  $r_1=2a_0s_0-r_0 = a_0$ ,  $s_1= d-(r_1)^2= d-(a_0)^2$ . Αφού τα  $r_1$ ,  $s_1$  στον αλγόριθμο είναι ίσα με τα αντίστοιχα της ανάπτυξης της  $\sqrt{d}$ , και επίσης ίδια και η υπόριζος ποσότητα  $d$ , θα είναι ίδιο και το μερικό πηλίκο  $a_1$ , γιατί,  $a_1 = \left[ \frac{r_1 + \sqrt{d}}{s_1} \right]$ . Γίνονται λοιπόν τα  $r_1$ ,  $s_1$ ,  $a_1$  κοινά, οπότε στα αναπτύγματα των  $\sqrt{d}$ ,  $\sqrt{d} + a_0$  θα έχουμε διαφορετικό μόνο τον πρώτο όρο.

$$\text{Αν λοιπόν } \sqrt{d} + a_0 = \left[ \overline{2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n} \right], \text{ τότε } \sqrt{d} = \left[ \overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0} \right].$$

### Παρατηρήσεις:

1. Για την απόδειξη του θεωρήματος μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής: από το ανάπτυγμα της  $\sqrt{d} + a_0 = \left[ \overline{2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n} \right] = \left[ \overline{2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}} \right]$  αφαιρούμε το  $a_0 = \left[ \sqrt{d} \right]$  και από τα δύο μέλη, οπότε προκύπτει το ανάπτυγμα της  $\sqrt{d}$ ,  $\sqrt{d} = \left[ \overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0} \right]$  (όρια).

2. Στα παραδείγματα του Θ.6.6.1, είδαμε ότι  $\sqrt{n^2+1} = \left[ \overline{n, 2n} \right]$ ,  $n \geq 1$ . Αλλά και αντίστροφα, αν η περίοδος του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$  αποτελείται από ένα μόνο μερικό πηλίκο, τότε ο θετικός ακέραιος  $d$  έχει τη μορφή  $n^2+1$ .

**Απόδειξη:** Από το θεώρημα 7.1.1. συμπεραίνουμε ότι το μερικό πηλίκο που επαναλαμβάνεται θα είναι το  $2a_0$ , δηλ. το ανάπτυγμα της  $\sqrt{d}$  θα είναι:  $\sqrt{d} = \left[ \overline{a_0, 2a_0} \right] = \left[ \overline{n, 2n} \right]$ , όπου  $n = \left[ \sqrt{d} \right]$

$$\text{Θέτουμε: } w = \left[ \overline{2n} \right], \text{ οπότε } w = 2n + \frac{1}{w}, \text{ και ο } w \text{ είναι η θετική λύση της}$$

δευτεροβάθμιας:  $w^2 - 2nw - 1 = 0$ , δηλ.  $w = n + \sqrt{n^2+1}$ . Για την  $\sqrt{d}$  θα έχουμε:

$$\sqrt{d} = \left[ \overline{n, 2n} \right] = n + \frac{1}{w} = n + \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}} = n + \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n^2+1 - n^2} = \sqrt{n^2+1}.$$

**7.1.2.Θεώρημα:** Τα μερικά πηλίκα  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$  στο ανάπτυγμα της  $\sqrt{d}$ ,  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$ , είναι συμμετρικά, δηλ.  $a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}, \dots, a_n = a_1$ .

**Απόδειξη:**

Έστω  $a_0 = [\sqrt{d}]$ . Αν  $\sqrt{d} + a_0 = [2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ , τότε σύμφωνα με το θεώρημα 6.7.3(αν  $z'$  ο συζυγής του  $z$  και  $z = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}]$ , τότε  $-\frac{1}{z'} = [\overline{a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_2, a_1, a_0}]$ ),

θα έχουμε  $-\frac{1}{(a_0 + \sqrt{d})'} = [\overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, 2a_0}] = \frac{1}{\sqrt{d} - a_0}$ , με  $0 < \sqrt{d} - a_0 < 1$  [1].

Από την  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$ , παίρνουμε  $\sqrt{d} - a_0 = [0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$ , οπότε για τον αντίστροφο θα έχουμε (Παρατήρηση 4.3.4.):  $\frac{1}{\sqrt{d} - a_0} = [\overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$  [2].

Από τις [1], [2] και την μοναδικότητα του αναπτύγματος, έχουμε:  $[\overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, 2a_0}] = [\overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$ , δηλ.  $a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}, \dots, a_n = a_1$ .

Αν το πλήθος των μερικών πηλίκων της περιόδου  $(a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0)$  είναι άρτιο, τότε τα μερικά πηλίκα  $a_1, a_2, \dots, a_n$  είναι περιττού πλήθους, άρα έχουν μοναδικό μεσαίο όρο με δείκτη  $t = \frac{n+1}{2}$ :  $a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_t, a_{t+1} = a_{t-1}, \dots, a_n = a_1$ . Αν το πλήθος των  $a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0$

είναι περιττό, τότε τα  $a_1, a_2, \dots, a_n$  είναι αρτίου πλήθους και ο όρος με δείκτη  $t = \frac{n}{2}$  επαναλαμβάνεται:  $a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_t, a_{t+1} = a_t, \dots, a_n = a_1$  (αν  $n=0$ , επαναλαμβάνεται ο  $2a_0$ ).

**Παραδείγματα:**

1. Τα μερικά πηλίκα του αναπτύγματος της  $\sqrt{2011}$  είναι:  $[a_0 = 44, a_1 = 1, a_2 = 5, \dots, a_{46} = 1, a_{47} = 43, a_{48} = 1, \dots, a_{92} = 5, a_{93} = 1, a_{94} = 88]$ , πιο αναλυτικά: **44**, 1, 5, 2, 2, 1, 1, 8, 2, 1, 1, 1, 1, 29, 3, 1, 1, 4, 6, 1, 2, 7, 1, 4, 9, 1, 3, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 14, 3, 3, 1, 17, 5, 1, \ 11, 1, **43**, 1, 11, 1, 5, 17, 1, 3, 3, 14, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 5, 3, 1, 9, 4, 1, 7, 2, 1, 6, 4, 1, 1, 3, 29, 1, 1, 1, 1, 2, 8, 1, 1, \ 2, 2, 5, 1, **88**, ...]. Το μήκος της περιόδου είναι 94, τα μερικά πηλίκα  $a_1=1, a_2=5, \dots, a_{46}=1$  είναι ίσα με τα συμμετρικά τους ως προς το  $a_{47}=43$ :  $a_{93}=a_1=1, a_{92}=a_2=5, \dots, a_{48}=a_{46}=1$ . Το μερικό πηλίκο 43 δεν επαναλαμβάνεται γιατί το μήκος της περιόδου είναι άρτιο.

2. Για την  $\sqrt{89}$  έχουμε:  $\sqrt{89} = [9, \overline{2, 3, 3, 2, 18}]$ , μήκος περιόδου 5, το μερικό πηλίκο 3 επαναλαμβάνεται. Επίσης  $\sqrt{61} = [7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}]$ , μήκος 11, επαναλαμβάνεται το 2.



### 7.1.3.

Ένα συνεχές κλάσμα της μορφής  $\left[ a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0} \right]$  είναι το ανάπτυγμα ενός τετραγωνικού αρρήτου (Θ.6.6.2), αλλά δεν είναι απαραίτητα το ανάπτυγμα μιας  $\sqrt{d}$ , όπου  $d$  θετικός ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο, π.χ.  $\sqrt{\frac{13}{2}} = \left[ 2, \overline{1, 1, 4} \right]$  (αρχικές τιμές για τον αλγόριθμο 6.5.2:  $r_0=0, d=26, s_0=2$ ),  $\sqrt{\frac{56}{3}} = \left[ 4, \overline{3, 8} \right]$  (εδώ αρχίζουμε με  $r_0=0, d=168, s_0=3$ ).

Ισχύει όμως το παρακάτω :

**Θεώρημα:** Ένα συνεχές κλάσμα της μορφής  $\left[ a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0} \right]$  είναι το ανάπτυγμα της  $\sqrt{r}$ , για κάποιον ρητό  $r > 1$ .

Και αντιστρόφως, αν  $r$  ρητός,  $r > 1$  και ο  $r$  δεν είναι τετράγωνο ρητού, τότε  $\sqrt{r} = \left[ a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0} \right]$ .

**Απόδειξη: Α.** Αν έχουμε το συνεχές κλάσμα  $\left[ a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0} \right]$ , επειδή είναι περιοδικό, θα είναι το ανάπτυγμα ενός τετραγωνικού αρρήτου (6.6), π.χ. του  $w = \frac{r + \sqrt{d}}{s}$ . Τότε  $w = a_0 + \frac{1}{z} \Leftrightarrow -\frac{1}{z} = a_0 - w$ , όπου  $z = \left[ a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0 \right]$ , δηλ. ο  $z$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό (αφού έχει απλή περίοδο).

Από το Θ.6.7.3. συμπεραίνουμε ότι  $-\frac{1}{z'} = \overline{\left[ 2a_0, a_1, a_2, \dots, a_2, a_1 \right]}$ , οπότε έχουμε:

$$a_0 - w' = -\frac{1}{z'} = \overline{\left[ 2a_0, a_1, a_2, \dots, a_2, a_1 \right]} = a_0 + \overline{\left[ a_0, a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0 \right]} = a_0 + w.$$

Από την  $a_0 - w' = a_0 + w$  παίρνουμε διαδοχικά:  $w + w' = 0, r = 0, w = \frac{\sqrt{d}}{s}, w' = \sqrt{\frac{d}{s^2}}$ .

Ο  $w$  γίνεται τελικά το ανάπτυγμα της τετραγωνικής ρίζας του ρητού  $d/s^2$ , με  $2a_0$  θετικό ακέραιο, άρα για τον ακέραιο  $a_0$  θα έχουμε:  $a_0 \geq 1$ , επομένως  $w > 1$ .

**Β.** Αντιστρόφως:

Έστω  $r$  ρητός,  $r > 1$  και ο  $r$  δεν είναι τετράγωνο ρητού. Αν  $r = \frac{m}{n}$ ,  $m > n$ , τότε γράφουμε τον  $\sqrt{r}$ , στην μορφή  $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{mn}}{n}$ . Το  $\frac{\sqrt{mn}}{n} + \left[ \frac{\sqrt{mn}}{n} \right]$  είναι ανηγμένο, οπότε για να πάρουμε το ανάπτυγμα της  $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{mn}}{n}$ , αφαιρούμε το  $\left[ \frac{\sqrt{mn}}{n} \right]$  και από τα δύο μέλη του αναπτύγματος του  $\frac{\sqrt{mn}}{n} + \left[ \frac{\sqrt{mn}}{n} \right]$ .

K7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$

Τελικά η απόδειξη ολοκληρώνεται αν αντικαταστήσουμε τον άρρητο  $\sqrt{d}$  με τον  $\frac{\sqrt{mn}}{n}$  και τον ακέραιο  $a_0 = [\sqrt{d}]$  με τον  $a_0 = \left[ \frac{\sqrt{mn}}{n} \right]$  στις αποδείξεις των θεωρημάτων

7.1.1. και 7.1.2. Π.χ. για τον  $\sqrt{\frac{13}{2}}$  βρίσκουμε το ανάπτυγμα του  $\frac{\sqrt{26}}{2} + \left[ \frac{\sqrt{26}}{2} \right]$ :

$$\frac{\sqrt{26}}{2} + \left[ \frac{\sqrt{26}}{2} \right] = \frac{\sqrt{26}}{2} + 2 = \frac{4 + \sqrt{26}}{2} = [4, 1, 1] \text{ και αφαιρούμε το } 2: \frac{\sqrt{26}}{2} = [2, 1, 1, 4].$$

$$\text{Για τον } \sqrt{\frac{56}{3}} \text{ βρίσκουμε το } \frac{\sqrt{168}}{3} + 4 = [8, 3] \text{ και αφαιρούμε το } 4: \frac{\sqrt{168}}{3} = [4, 3, 8].$$

## 7.2. Ο αλγόριθμος της ανάπτυξης σε συνεχές κλάσμα και τα αναγωγίματα της $\sqrt{d}$

**7.2.1. Θεώρημα.** Αν  $\frac{p_k}{q_k}$  είναι το  $k$ -τάξης αναγωγήμα της  $\sqrt{d}$  και  $r_k, s_k$  ακέραιοι όπως

$$\text{ορίστηκαν στον αλγόριθμο 6.5, τότε για κάθε } k \geq 0, \text{ ισχύει: } \frac{p_k + q_k \sqrt{d}}{p_{k-1} + q_{k-1} \sqrt{d}} = \frac{r_{k+1} + \sqrt{d}}{s_k}.$$

**Απόδειξη:**

Για  $k=0$ :  $r_0=0, s_0=1, p_0=a_0=[\sqrt{d}], p_{-1}=1, q_0=1, q_{-1}=0, r_1 = a_0 s_0 - r_0 = a_0 = [\sqrt{d}]$ , έχουμε και τα δύο μέλη ίσα με  $[\sqrt{d}] + \sqrt{d}$  και η ισότητα επαληθεύεται (αλγόριθμος αναγωγμάτων: 2.6, αλγόριθμος για την ανάπτυξη της  $\sqrt{d}$ : 6.5.3).

$$\begin{aligned} \text{Για } k=1: \frac{p_1 + q_1 \sqrt{d}}{p_0 + q_0 \sqrt{d}} &= \frac{a_1 p_0 + p_{-1} + (a_1 q_0 + q_{-1}) \sqrt{d}}{p_0 + q_0 \sqrt{d}} = \frac{a_1 (p_0 + q_0 \sqrt{d}) + p_{-1} + q_{-1} \sqrt{d}}{p_0 + q_0 \sqrt{d}} = \\ &= a_1 + \frac{1}{p_0 + q_0 \sqrt{d}} = a_1 + \frac{1}{a_0 + \sqrt{d}} = a_1 + \frac{\sqrt{d} - a_0}{d - a_0^2} = a_1 + \frac{\sqrt{d} - a_0}{d - r_1^2} = \\ &= a_1 + \frac{\sqrt{d} - r_1}{s_1} = \frac{a_1 s_1 - r_1 + \sqrt{d}}{s_1} = \frac{r_2 + \sqrt{d}}{s_1} \end{aligned}$$

Την ίδια διαδικασία θα ακολουθήσουμε για την μετάβαση από τον  $k$ , στον  $k+1$ : Υποθέτουμε ότι η ισότητα επαληθεύεται για τον τυχαίο θετικό ακέραιο  $k$ , δηλ. υποθέτουμε

$$\text{ότι ισχύει: } \frac{p_k + q_k \sqrt{d}}{p_{k-1} + q_{k-1} \sqrt{d}} = \frac{r_{k+1} + \sqrt{d}}{s_k}. \text{ Τότε για τον επόμενο θετικό ακέραιο, } k+1, \text{ θα}$$

$$\text{αποδείξουμε ότι: } \frac{p_{k+1} + q_{k+1} \sqrt{d}}{p_k + q_k \sqrt{d}} = \frac{r_{k+2} + \sqrt{d}}{s_{k+1}}.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \frac{p_{k+1} + q_{k+1}\sqrt{d}}{p_k + q_k\sqrt{d}} &= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1} + (a_{k+1}q_k + q_{k-1})\sqrt{d}}{p_k + q_k\sqrt{d}} = a_{k+1} + \frac{p_{k-1} + q_{k-1}\sqrt{d}}{p_k + q_k\sqrt{d}} = a_{k+1} + \frac{s_k}{r_{k+1} + \sqrt{d}} \\ &= a_{k+1} + s_k \frac{\sqrt{d} - r_{k+1}}{d - r_{k+1}^2} = a_{k+1} + \frac{\sqrt{d} - r_{k+1}}{\frac{d - r_{k+1}^2}{s_k}} = a_{k+1} + \frac{\sqrt{d} - r_{k+1}}{s_{k+1}} = \frac{a_{k+1}s_{k+1} - r_{k+1} + \sqrt{d}}{s_{k+1}} = \frac{r_{k+2} + \sqrt{d}}{s_{k+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα για κάθε } k \geq 0, \text{ ισχύει: } \frac{p_k + q_k\sqrt{d}}{p_{k-1} + q_{k-1}\sqrt{d}} = \frac{r_{k+1} + \sqrt{d}}{s_k}.$$

### 7.2.2. Θεώρημα.

**Αν**  $\frac{p_k}{q_k}$  είναι το  $k$ -τάξης αναγώγημα του συνεχούς κλάσματος στο οποίο αναπτύσσεται η

$\sqrt{d}$ ,  $m$  το πλήθος των μερικών πηλίκων της περιόδου (το μήκος της περιόδου), και  $r_k, s_k$  οι ακέραιοι που ορίστηκαν στον αλγόριθμο 6.5, τότε για κάθε  $k \geq 0$  ισχύουν:

- i.  $\frac{p_k^2 - dq_k^2}{p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2} = \frac{r_{k+1}^2 - d}{s_k^2} = -\frac{s_k s_{k+1}}{s_k^2} = -\frac{s_{k+1}}{s_k}.$
- ii.  $p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2 = (-1)^k s_k.$
- iii.  $s_k > 0.$
- iv.  $s_k=1$ , μόνον όταν ο  $k$  είναι πολλαπλάσιο του  $m$ .

**Απόδειξη:**

i. Από το θεώρημα 7.2.1. έχουμε ότι για κάθε  $k \geq 0$ , ισχύει:  $\frac{p_k + q_k\sqrt{d}}{p_{k-1} + q_{k-1}\sqrt{d}} = \frac{r_{k+1} + \sqrt{d}}{s_k}$

Για τους συζυγείς η ισότητα γίνεται:  $\frac{p_k - q_k\sqrt{d}}{p_{k-1} - q_{k-1}\sqrt{d}} = \frac{r_{k+1} - \sqrt{d}}{s_k}$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και παίρνουμε :

$$\frac{p_k^2 - dq_k^2}{p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2} = \frac{r_{k+1}^2 - d}{s_k^2} = -\frac{s_k s_{k+1}}{s_k^2} = -\frac{s_{k+1}}{s_k}. \quad (\text{Από το θεώρημα 6.5.1. έχουμε : } s_k s_{k+1} = d - r_{k+1}^2).$$

K7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$

ii. Πολ/ζουμε κατά μέλη τις  $k$  ισότητες:

$$\frac{p_0^2 - dq_0^2}{p_{-1}^2 - dq_{-1}^2} = -\frac{s_1}{s_0}, \quad \frac{p_1^2 - dq_1^2}{p_0^2 - dq_0^2} = -\frac{s_2}{s_1}, \quad \frac{p_2^2 - dq_2^2}{p_1^2 - dq_1^2} = -\frac{s_3}{s_2}, \quad \dots, \quad \frac{p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2}{p_{k-2}^2 - dq_{k-2}^2} = -\frac{s_k}{s_{k-1}}$$

και παίρνουμε την:  $\frac{p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2}{p_{-1}^2 - dq_{-1}^2} = (-1)^k \frac{s_k}{s_0}$ . Από τον αλγόριθμο 2.6 έχουμε ότι

$$p_{-1} = 1, q_{-1} = 0 \text{ και από τον αλγόριθμο 6.5.3. ότι } s_0 = 1. \text{ Άρα } p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2 = (-1)^k s_k.$$

iii. Από την μέθοδο ανάπτυξης σε συνεχές κλάσμα, συμπεραίνουμε ότι κάθε αναγωγήμα περιττής τάξης είναι μεγαλύτερο από την  $\sqrt{d}$  και κάθε αναγωγήμα άρτιας τάξης μικρότερο από αυτήν. Άρα ο αριθμός  $\frac{p_k^2 - dq_k^2}{p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2}$  είναι αρνητικός (ισχύει και για  $k = 0$ , εξάλλου

μπορούμε να φανταζόμαστε το « τεχνητό» αναγωγήμα  $\frac{1}{0} = \frac{p_{-1}}{q_{-1}} (-1)$  -τάξης, περιττής, ότι

είναι τοποθετημένο στον άξονα δεξιότερα από κάθε αναγωγήμα, στο  $\infty$ ) και επομένως, από την (i), ο αριθμός  $\frac{s_{k+1}}{s_k}$  είναι πάντα θετικός. Αλλά  $s_0 = 1$ , οπότε  $s_k > 0$ , για κάθε  $k \geq 0$ .

iv. Έστω  $\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}, a_{2m+1}, \dots] = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}, 2a_0}]$ . Τότε

θα έχουμε την ισότητα πλήρων πηλίκων  $z_1 = z_{m+1} = z_{2m+1} = \dots$ , δηλ.  $z_1 = z_{mn+1}$ ,  $n=0,1,2,3,\dots$

και επομένως:  $\frac{r_1 + \sqrt{d}}{s_1} = \frac{r_{mn+1} + \sqrt{d}}{s_{mn+1}} \Leftrightarrow \sqrt{d}(s_{mn+1} - s_1) = r_{mn+1}s_1 - r_1s_{mn+1}$ . Αλλά  $\sqrt{d}$  άρρητος,

άρα:  $s_{mn+1} = s_1$  και  $r_{mn+1} = r_1$  (από το Θ.6.5.1. έχουμε:  $z_k = \frac{r_k + \sqrt{d}}{s_k}$ ).

Επειδή και  $a_{mn+1} = a_1$  συμπεραίνουμε ότι επαναλαμβάνονται και οι ακέραιοι  $r_k, s_k$  του αλγορίθμου 6.5.3. ανά  $m$  δείκτες, όπως και τα μερικά πηλικά  $a_k$ .

Από το θεώρημα 6.5.1. έχουμε:  $s_{mn+1}s_{mn} = d - r_{mn+1}^2$ .

Αυτή η ισότητα, μαζί με την  $s_{mn+1} = s_1$  δίνουν:  $s_1 = \frac{d - r_1^2}{s_0} = d - r_1^2 = d - r_{mn+1}^2 = s_{mn+1}s_{mn} = s_{mn}s_1$ ,

δηλ.  $s_1 = s_{mn}s_1$ , άρα  $s_{mn} = 1$ .

Αποδείξαμε ήδη ότι για τους αριθμούς  $s_k$ , όπου ο δείκτης  $k$  είναι πολλαπλάσιο του μήκους  $m$  της περιόδου ισχύει  $s_k = 1$ .

Υποθέτουμε τώρα ότι  $s_k=1$  για κάποιο  $k \geq 1$  (ο  $s_0$  είναι 1) και ότι το συνεχές κλάσμα για την  $\sqrt{d}$  είναι  $z_0 = \sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}, 2a_0}]$ . Τότε  $z_k = \frac{r_k + \sqrt{d}}{s_k} = r_k + \sqrt{d}$  και  $z_k - r_k = \sqrt{d}$  [1]. Επίσης  $a_k = [z_k] = [r_k + \sqrt{d}] = r_k + [\sqrt{d}] = r_k + a_0$  (6.5.4). Για το επόμενο πλήρες πηλίκο, το  $z_{k+1}$ , θα έχουμε (4.4.1)  $z_{k+1} = \frac{1}{z_k - a_k}$ ,  $z_k = a_k + \frac{1}{z_{k+1}} = r_k + a_0 + \frac{1}{z_{k+1}}$ , και  $z_k - r_k = a_0 + \frac{1}{z_{k+1}}$  [2].

Από τις [1] και [2] παίρνουμε:  $\sqrt{d} = z_k - r_k = a_0 + \frac{1}{z_{k+1}}$ . Αλλά  $\sqrt{d} = z_0 = a_0 + \frac{1}{z_1}$ , οπότε έχουμε την ισότητα των πλήρων πηλίκων :  $z_1 = z_{k+1}$ . Αυτό σημαίνει ότι η ομάδα των μερικών πηλίκων « $a_1, \dots, a_k$ » επαναλαμβάνεται στο ανάπτυγμα της  $\sqrt{d}$ . Άρα ο δείκτης  $k$  είναι πολλαπλάσιο του μήκους της περιόδου, του  $m$  (ορισμός 4.4.6).

### 7.2.3.Υπολογιστικές παρατηρήσεις για τα αναγωγήματα της $\sqrt{d}$

**Α.** Μπορούμε να υπολογίσουμε οποιοδήποτε αναγωγήμα της  $\sqrt{d}$ ,  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}, 2a_0}]$ , αν γνωρίζουμε τα αναγωγήματα της πρώτης περιόδου.

**Απόδειξη:** Από το θεώρημα 7.2.1. και την περιοδικότητα των  $r, s$  έχουμε

$$\frac{p_k + q_k \sqrt{d}}{p_{k-1} + q_{k-1} \sqrt{d}} = \frac{r_{k+1} + \sqrt{d}}{s_k} = \frac{r_{m+k+1} + \sqrt{d}}{s_{m+k}} = \frac{p_{m+k} + q_{m+k} \sqrt{d}}{p_{m+k-1} + q_{m+k-1} \sqrt{d}}.$$

Εναλλάσσοντας τους άκρους όρους του πρώτου και τελευταίου λόγου παίρνουμε:

$$\frac{p_{m+k} + q_{m+k} \sqrt{d}}{p_k + q_k \sqrt{d}} = \frac{p_{m+k-1} + q_{m+k-1} \sqrt{d}}{p_{k-1} + q_{k-1} \sqrt{d}}.$$

Συνεχίζουμε  $\frac{p_{m+k} + q_{m+k} \sqrt{d}}{p_k + q_k \sqrt{d}} = \dots = \frac{p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d}}{p_{-1} + q_{-1} \sqrt{d}} = p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d}$  (έχουμε ορίσει

$p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ ). Αν λοιπόν  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}, 2a_0}]$  και γνωρίζουμε τα αναγωγήματα μέχρι την  $m$ -τάξη, τότε  $p_{m+k} + q_{m+k} \sqrt{d} = (p_k + q_k \sqrt{d})(p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d})$ .

Κ7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$

$$\text{Π.χ. } \sqrt{12} = [3, \overline{2, 6}], \text{ μήκος περιόδου } 2, \text{ αναγωγήματα } \frac{p_0}{q_0} = 3, \frac{p_1}{q_1} = \frac{7}{2}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{45}{13}.$$

Για το αναγώγημα  $4^{\text{ης}}$  τάξης θα έχουμε ( $d = 12, m = 2$ ) :

$$p_4 + q_4 \sqrt{d} = p_{2+2} + q_{2+2} \sqrt{d} = (p_2 + q_2 \sqrt{d})(p_1 + q_1 \sqrt{d}) = (45 + 13\sqrt{12})(7 + 2\sqrt{12}) = 627 + 181\sqrt{12}$$

Άρα  $p_4/q_4 = 627 / 181$ . Για το αναγώγημα  $10^{\text{ης}}$  τάξης :

$$\begin{aligned} p_{10} + q_{10} \sqrt{d} &= p_{2+8} + q_{2+8} \sqrt{d} = (p_8 + q_8 \sqrt{d})(p_1 + q_1 \sqrt{d}) = (p_6 + q_6 \sqrt{d})(p_1 + q_1 \sqrt{d})^2 = \\ &= (p_4 + q_4 \sqrt{d})(p_1 + q_1 \sqrt{d})^3 = (p_2 + q_2 \sqrt{d})(p_1 + q_1 \sqrt{d})^4 = (45 + 13\sqrt{12})(7 + 2\sqrt{12})^4 = \\ &= 1694157 + 489061\sqrt{12} \quad \text{δηλ. } p_{10}/q_{10} = 1694157 / 489061 \text{ (παράρτημα } \Delta). \end{aligned}$$

**B.** Αν  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}, 2a_0}]$ , τότε θέτοντας  $k = jm-1$  στην

$$p_{m+k} + q_{m+k} \sqrt{d} = (p_k + q_k \sqrt{d})(p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d}) \text{ παίρνουμε}$$

$$p_{(j+1)m-1} + q_{(j+1)m-1} \sqrt{d} = (p_{jm-1} + q_{jm-1} \sqrt{d})(p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d}).$$

Η  $p_{jm-1} + q_{jm-1} \sqrt{d} = (p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d})^j$  ισχύει προφανώς για  $j = 1$ .

Για  $j = 2$ , έχουμε:

$$p_{2m-1} + q_{2m-1} \sqrt{d} = p_{m-1+m} + q_{m-1+m} \sqrt{d} = (p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d})(p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d}) = (p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d})^2.$$

Αν ισχύει η  $p_{jm-1} + q_{jm-1} \sqrt{d} = (p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d})^j$ , τότε (και πάλι από την 7.2.3.A):

$$p_{(j+1)m-1} + q_{(j+1)m-1} \sqrt{d} = p_{jm-1+m} + q_{jm-1+m} \sqrt{d} = (p_{jm-1} + q_{jm-1} \sqrt{d})(p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d}) = (p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d})^{j+1}$$

Τελικά:  $p_{km-1} + q_{km-1} \sqrt{d} = (p_{m-1} + q_{m-1} \sqrt{d})^k$  για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ .

Π.χ. Για το αναγώγημα  $11^{\text{ης}}$  τάξης του αναπτύγματος της  $\sqrt{12} = [3, \overline{2, 6}]$ :

$$p_{11} + q_{11} \sqrt{12} = p_{6*2-1} + q_{6*2-1} \sqrt{12} = (p_1 + q_1 \sqrt{d})^6 = (7 + 2\sqrt{12})^6 = 3650401 + 1053780\sqrt{12}$$

### 7.3. Το μήκος της περιόδου του αναπτύγματος της $\sqrt{d}$

#### 7.3.1. Θεώρημα:

Αν  $r_k, s_k$  οι ακέραιοι που ορίστηκαν στον αλγόριθμο 6.5.3, τότε για κάθε  $k \geq 1$  θα έχουμε  $0 < r_k < \sqrt{d}$ ,  $0 < s_k < 2\sqrt{d}$ . Για το μήκος  $m$  της περιόδου θα ισχύει:  $m < 2d$ .

**Απόδειξη:** Από το θεώρημα 7.2.2, έχουμε  $s_k \geq 1$  για όλους τους δείκτες  $k$ . Αλλά  $s_k = \frac{d - r_k^2}{s_{k-1}}$  (6.5), άρα  $r_k < \sqrt{d}$ , για  $k \geq 1$ . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει δείκτης  $k$ ,  $k \geq 1$ , με  $r_k \leq 0$ . Από τον αλγόριθμο 6.5. και πάλι, γνωρίζουμε ότι  $r_k = a_{k-1}s_{k-1} - r_{k-1}$ . Τα μερικά πηλίκα της  $\sqrt{d}$  (και το  $a_0$ ) είναι θετικοί ακέραιοι. Οι  $r_k \leq 0$ ,  $r_k < \sqrt{d}$  και  $r_k = a_{k-1}s_{k-1} - r_{k-1}$  μας δίνουν:  $s_{k-1} \leq a_{k-1}s_{k-1} \leq r_{k-1} < \sqrt{d}$ . Από τον αλγόριθμο της ανάπτυξης ενός αρρήτου, 4.4.1, γνωρίζουμε ότι  $z_k = \frac{1}{z_{k-1} - a_{k-1}} > 1$ . Καταλήγουμε στο άτοπο:

$$1 > z_{k-1} - a_{k-1} = \frac{1}{z_k} = \frac{s_k}{r_k + \sqrt{d}} = \frac{s_k(\sqrt{d} - r_k)}{d - r_k^2} = \frac{\sqrt{d} - r_k}{s_{k-1}} \geq \frac{\sqrt{d}}{s_{k-1}} > 1$$

Συμπεραίνουμε ότι  $r_k > 0$ . Από την  $r_{k+1} = a_k s_k - r_k$  έχουμε και  $s_k = \frac{r_k + r_{k+1}}{a_k} \leq r_k + r_{k+1} < 2\sqrt{d}$ .

Υπάρχουν το πολύ  $[\sqrt{d}]$  τιμές για τον ακέραιο  $r_k$  και  $[2\sqrt{d}]$  τιμές για τον ακέραιο  $s_k$ . Τα διακριτά ζεύγη  $(r_k, s_k)$  είναι λοιπόν το πολύ  $[2\sqrt{d}][\sqrt{d}] < 2d$ . Υπάρχουν λοιπόν θετικοί ακέραιοι  $i, j$  με  $i < j < 2d$  ώστε  $r_i = r_j$  και  $s_i = s_j$  άρα  $a_i = a_j$  και  $a_{i+t} = a_{j+t}$ ,  $t \geq 0$  (6.5). Τα μερικά πηλίκα του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$  επαναλαμβάνονται και για την περίοδο  $m$  ισχύει:  $m < 2d$ .

**7.3.2. Θεώρημα:** Αν  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}}, 2a_0]$ , τότε  $a_k \leq a_0$ , για  $1 \leq k \leq m-1$ .

**Απόδειξη:** Από τον αλγόριθμο 6.5, για τα πλήρη και μερικά πηλίκα θα έχουμε:  $z_k = (r_k + \sqrt{d})/s_k$ ,  $a_k = [(r_k + \sqrt{d})/s_k]$ . Από το θεώρημα 7.2.2, αφού ο δείκτης δεν είναι πολλαπλάσιο της περιόδου, έχουμε  $s_k \geq 2$  και από το Θ. 7.3.1:  $0 < r_k < \sqrt{d}$ . Άρα  $z_k = \frac{r_k + \sqrt{d}}{s_k} < \frac{2\sqrt{d}}{2} = \sqrt{d}$  και επομένως  $a_k = [z_k] \leq [\sqrt{d}] = a_0$ .

**7.3.3.** Ας γράψουμε τα αναπτύγματα μερικών ριζών:

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{19}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{54}$
$[1, \overline{2}]$	$[1, \overline{1, 2}]$	$[2, \overline{4}]$	$[3, \overline{1, 2, 1, 6}]$	$[4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$	$[5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$	$[7, \overline{2, 1, 6, 1, 2, 14}]$

Η περίοδος του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$ , αρχίζει μετά το πρώτο μερικό πηλίκο, που είναι το ακέραιο μέρος της ρίζας, και τελειώνει με τον όρο που είναι διπλάσιος του αρχικού. Σύμφωνα με το Θ.7.3.2, αν  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}}, 2a_0]$ , τότε  $a_k \leq a_0$ , για  $1 \leq k \leq m-1$ .





Ορίζουμε τον  $w = \left[ n, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 2n} \right]$ , όπου  $a_k = 2, k=1, 2, \dots, m-1$ . Το  $n$  θα το καθορίσουμε αργότερα. Έχουμε λοιπόν:  $w = \left[ n, \overline{2, 2, \dots, 2, 2n} \right]$  Άρα:

$$w = n + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots \frac{1}{2 + \frac{1}{2n + \frac{1}{2 + \dots}}}}} = n + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots \frac{1}{2 + \frac{1}{n + n + \frac{1}{2 + \dots}}}}} = n + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots \frac{1}{n + w}}}$$

Αφαιρούμε το  $n$  και από τα δύο μέλη:  $w - n = [0, 2, 2, \dots, 2, n + w]$ , το πλήθος των 2 είναι  $m-1$ .

Θεωρούμε το συνεχές κλάσμα:  $v = [2, 2, \dots, 2, 2]$  με πλήθος μερικών πηλίκων  $m$ , άρα οι δείκτες των  $a_k, p_k, q_k$  θα είναι από 0 έως  $m-1$ . Για τα αναγωγήματα του  $v$ , από τον αλγόριθμο 2.6, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

δείκτες	-2	-1	0	1	2	3	...	m-3	m-2	m-1
p	0	1	2	5	12	29	...	$p_{m-3}$	$p_{m-2}$	$p_{m-1}$
Μερικά πηλίκια			2	2	2	2	...	2	2	2
q	1	0	1	2	5	12	...	$q_{m-2}$	$q_{m-2}$	$q_{m-1}$

Αφού όλα τα μερικά πηλίκια είναι ίσα, η γραμμή των  $q$  από τον  $q_{-1}$  και μετά, θα έχει τους αριθμούς της γραμμής των  $p$  από τον  $p_{-2}$  και μετά, δηλ.  $q_k = p_{k-1}$  ( $q_{-1} = 0 = p_{-2}$ ,  $q_0 = 1 = p_{-1}$ ,  $q_1 = 2q_0 + q_{-1} = 2p_{-1} + p_{-2} = p_0$ ,  $q_2 = 2q_1 + q_0 = 2p_0 + p_{-1} = p_1$ , επαγωγή).[1]

Αντικαθιστούμε το  $(m-1)$ -τάξης μερικό πηλίκιο 2 στο  $v$  με  $n+w$ , και σχηματίζουμε το  $v' = [2, 2, \dots, 2, n + w]$ , οπότε τα  $p'_k, q'_k$  θα είναι ίσα με τα  $p_k, q_k$  του  $v$  για  $k=1, 2, \dots, m-2$ .

Αν λοιπόν  $\frac{p_k}{q_k}$  είναι τα αναγωγήματα του  $v = [2, 2, \dots, 2]$  (το πλήθος των «2» είναι  $m$ ) θα

$$\text{έχουμε για το } v' \text{ (το πλήθος των «2» είναι } m-1\text{): } v' = [2, 2, \dots, 2, n + w] = \frac{(n + w)p_{m-2} + p_{m-3}}{(n + w)q_{m-2} + q_{m-3}}$$

Από την τελευταία, την

$w - n = [0, 2, 2, \dots, 2, n + w]$  (με πλήθος

των «2»  $m-1$ ,  $w - n = \frac{1}{v'}$ ) και την [1],

έχουμε:

δείκτες	-2	-1	0	1	2	...	m-2	m-1
p	0	1	2	5	12	...	$p_{m-2}$	$p'_{m-1}$
$a_k$			2	2	2	...	2	$n+w$
q	1	0	1	2	5	...	$q_{m-2}$	$q'_{m-1}$

Αναγωγήματα του  $v' = [2, 2, \dots, 2, n + w]$

K7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$

$$w - n = \frac{(n + w)q_{m-2} + q_{m-3}}{(n + w)p_{m-2} + p_{m-3}} = \frac{(n + w)q_{m-2} + q_{m-3}}{(n + w)q_{m-1} + q_{m-2}}, \text{ πράξεις:}$$

$$(w - n)((n + w)q_{m-1} + q_{m-2}) = (n + w)q_{m-2} + q_{m-3} \Leftrightarrow (w^2 - n^2)q_{m-1} = 2nq_{m-2} + q_{m-3} \text{ [2]}$$

\*Αν πάρουμε  $n = q_{m-1} + 1$ , τότε

$$2(q_{m-1} + 1)q_{m-2} + q_{m-3} = 2q_{m-1}q_{m-2} + (2q_{m-2} + q_{m-3}) = 2q_{m-1}q_{m-2} + q_{m-1}. \text{ Απλοποιώντας στην [2] καταλήγουμε στον } w^2 = (q_{m-1} + 1)^2 + 2q_{m-2} + 1 \text{ και ο } \sqrt{d} = w \text{ έχει μήκος περιόδου } m.$$

**Παράδειγμα:** Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ρίζα με μήκος περιόδου 10. Θεωρούμε το  $[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$  με πλήθος μερικών πηλίκων 10. Τα αναγωγήματα είναι :

δείκτες	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	
a <sub>k</sub> .			2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
q	1	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	

Ο τετραγωνικός άρρητος με μήκος περιόδου 10 που προκύπτει με την μέθοδο αυτή θα είναι η ρίζα του :  $w^2 = (q_{m-1} + 1)^2 + 2q_{m-2} + 1 = 2379^2 + 2 * 985 + 1 = 5661612$ ,

$$w = \left[ n, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 2n} \right], \text{ δηλ. } \sqrt{5661612} = [2379, \overline{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4758}].$$

**Αν δεν θέλουμε «2», μπορούμε να πάρουμε μερικά πηλικά ίσα με «4».**

Τροποποιώντας την [\*] βρίσκουμε ότι το κατάλληλο n είναι  $n = 2q_{m-1} + 2$ .

Ο τετραγωνικός άρρητος με μήκος περιόδου 10 που βρίσκεται με την συγκεκριμένη μέθοδο είναι η ρίζα του :

$$w^2 = (2q_{m-1} + 2)^2 + 4q_{m-2} + 1 = (2 * 416020 + 2)^2 + 4 * 98209 + 1 = 692294282601 :$$

$$\sqrt{692294282601} = \left[ 832042, \overline{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1664084} \right],$$

$$\text{δηλ. } a_0 = 2q_{m-1} + 2 = 832042, a_1 = a_2 = \dots = a_9 = 4 \text{ και } a_{10} = 1664084.$$

δείκτης	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020	1762289	
a			4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
q	1	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020	



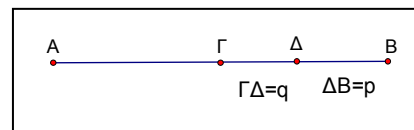
Η εξίσωση  $x^2 - dy^2 = \pm 1$  είναι μια **Διοφαντική εξίσωση**, δηλαδή μια αλγεβρική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές που θέλουμε να λύσουμε στο σύνολο των ακεραίων. Αναζητούμε **δυνάδες ακεραίων** αριθμών που ικανοποιούν την  $x^2 - dy^2 = \pm 1$ .

*Πώς μπορεί να λυθεί μια εξίσωση της μορφής  $x^2 - dy^2 = \pm 1$ ;*

Αρχίζουμε με δοκιμές, π.χ. για την  $x^2 - dy^2 = +1$ , λύνουμε ως προς  $y$ ,  $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{d}}$  (ας αποφύγουμε αρχικά τις λεπτομέρειες) και αντικαθιστούμε το  $x$  με  $1, 2, 3, \dots$ , μέχρι να βρούμε τέλειο τετράγωνο. Αν  $d=2$ , τότε η  $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{2}}$  για  $x=1$ , δίνει  $y=0$ , για  $x=2$ , δεν έχουμε παραδεκτό  $y$ , για  $x=3$ , παίρνουμε  $y=2$  και έως τώρα, για την  $x^2 - 2y^2 = 1$ , εκτός από την τετριμμένη,  $(x, y) = (\pm 1, 0)$ , βρίσκουμε (αρκετά γρήγορα) και τις «μικρές» λύσεις:  $(\pm 3, \pm 2)$ .

Μπορούμε να βρούμε και άλλες λύσεις, άπειρες, της  $x^2 - 2y^2 = 1$ , αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα  $p^2 - 2q^2 = 2(p+q)^2 - (p+2q)^2$ . Παρατηρούμε ότι αν οι αριθμοί  $p, q$  ικανοποιούν μια από τις  $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ , τότε οι  $p+2q$ ,  $p+q$  ικανοποιούν την άλλη, οπότε αναζητώντας λύσεις για την  $x^2 - 2y^2 = 1$  μας προσφέρονται «δώρο» και λύσεις για την  $x^2 - 2y^2 = -1$ . Από την  $(3, 2)$  που είναι λύση της  $x^2 - 2y^2 = 1$  παίρνουμε την  $(3+2*2, 3+2)=(7, 5)$  που είναι λύση της  $x^2 - 2y^2 = -1$ , από αυτήν παίρνουμε την  $(17, 12)$  που είναι λύση της  $x^2 - 2y^2 = 1$  και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, παίρνοντας τις λύσεις  $(41, 29)$ ,  $(99, 70)$ ,  $(239, 169)$ ,  $(577, 408)$  ... , εναλλάξ για τις  $x^2 - 2y^2 = -1$ ,  $x^2 - 2y^2 = 1$ , μέχρι να απέλθουμε από αυτόν τον όμορφο κόσμο.

Οι αριθμοί είναι γνωστοί: είναι όροι των αναγωγημάτων του αναπτύγματος της  $\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$  σε συνεχές κλάσμα, αναγωγήματα:  $\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \dots\}$ . Αξίζει να αναφέρουμε ότι η ταυτότητα  $p^2 - 2q^2 = 2(p+q)^2 - (p+2q)^2$  είναι η αλγεβρική διατύπωση της πρότασης II.9 των Στοιχείων: Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῆ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. Αν  $\Gamma$  μέσον του τμήματος  $AB$  και  $\Delta$  σημείο του  $\Gamma B$ , τότε  $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$ . Αν  $\Gamma\Delta = q$ ,  $\Delta B = p$ , τότε  $A\Gamma = p+q$ ,  $A\Delta = p+2q$ , και η  $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$  «μεταφράζεται αλγεβρικά» στην:  $p^2 - 2q^2 = 2(p+q)^2 - (p+2q)^2$ .



Παρατηρούμε ότι για την  $x^2 - 2y^2 = 1$  οι λύσεις κατευθύνονται προς τα αναγωγήματα της  $\sqrt{2}$ , τα οποία είναι ρητές προσεγγίσεις της  $\sqrt{2}$ . Το πρόβλημα της αναζήτησης ρητών προσεγγίσεων της  $\sqrt{d}$ , όπου  $d$  θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, συνδέεται άμεσα με τις λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ , γιατί, αν το ζεύγος ακεραίων  $(x,y)$  με  $y \neq 0$ , είναι λύση αυτής της εξίσωσης, τότε  $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = d + \frac{1}{y^2}$  και αν  $y$  είναι μεγάλος, ο ρητός  $\frac{x}{y}$  είναι καλή προσέγγιση για τον άρρητο  $\sqrt{d}$ . Σε μερικές περιπτώσεις «μαντεύουμε» κάποια λύση, π.χ. για την  $x^2 - 63y^2 = 1$ , γράφουμε ισοδύναμα  $x^2 = 63y^2 + 1$  και αναζητούμε  $y$  ώστε η  $63y^2 + 1$  να είναι τέλειο τετράγωνο. Μπορούμε να δούμε αμέσως την  $(x,y) = (8,1)$ , η οποία διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί και για την  $x^2 - 65y^2 = -1$ .

Με λίγη άλγεβρα μπορούμε να βρούμε λύσεις και για κάποιες άλλες εξισώσεις αυτής της μορφής, π.χ. για την  $x^2 - 17y^2 = 1$  τη λύση:  $(x,y) = (33,8)$ , για την  $x^2 - 65y^2 = 1$ , την λύση  $(129,16)$  και γενικά, αν  $d = n^2 + 1$ , για την  $x^2 - dy^2 = 1$ , βρίσκουμε τη λύση  $(x,y) = (2n^2 + 1, 2n)$ , γιατί ισχύει η:  $(2n^2 + 1)^2 - (n^2 + 1)(2n)^2 = 1$ .

Όμως αυτή η προσέγγιση δεν είναι πάντα εφαρμόσιμη. Αν και ο 61 είναι πολύ κοντά στον 63 και στον 65, είναι κάπως δύσκολο να προσδιορίσουμε με δοκιμές την μικρότερη θετική λύση της:  $x^2 - 61y^2 = 1$  που είναι η  $(x,y) = (1\ 766\ 319\ 049, 226\ 153\ 980)$ . Δυσκολία θα έχουμε επίσης και για την  $x^2 - 109y^2 = 1$  που έχει ελάχιστη θετική λύση:  $(x=158\ 070\ 671\ 986\ 249, y=15\ 140\ 424\ 455\ 100)$ .

Με τις  $x^2 - 61y^2 = 1$  και  $x^2 - 109y^2 = 1$  «προκάλεσε» ο Fermat τον John Wallis (1616-1703), τον διασημότερο Άγγλο μαθηματικό πριν τον Isaac Newton, όπως επίσης και τον W.Brouncker (1620-1684). Ο Brouncker απάντησε στον Fermat με μια μέθοδο, που όπως παρατήρησε ο Euler το 1759, προερχόταν από το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα της  $\sqrt{d}$ . Ουσιαστικά η μέθοδος ήταν αυτή που εφάρμοσε πέντε αιώνες νωρίτερα ο Bhaskara.

Η  $x^2 - 151y^2 = 1$  έχει ελάχιστη θετική λύση την:  $(x,y) = (1728148040, 140634693)$ .

Η  $x^2 - 313y^2 = 1$  έχει την  $(32188120829134849, 1819380158564160)$ .

Για την  $x^2 - 991y^2 = 1$  η μικρότερη θετική λύση είναι η  $(x=379\ 516\ 400\ 906\ 811\ 930\ 638\ 014\ 896\ 080, y=12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767)$ , και αν δοκιμάζουμε τιμές πιθανόν να υποθέσουμε (λανθασμένα) ότι αυτή η εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Για την  $x^2 - 3y^2 = -1$ , αν και με μικρό «d», οι δοκιμές δεν θα δώσουν λύση και πιθανόν να υποθέσουμε (σωστά) ότι δεν έχει ακέραιες λύσεις.

*Θα αποδείξουμε ότι η  $x^2 - 3y^2 = -1$  δεν έχει ακέραιες λύσεις:*

Οι  $x, y$  δεν μπορεί να είναι και οι δυο άρτιοι, γιατί τότε τα τετράγωνά τους θα είναι επίσης άρτιοι, όπως και η διαφορά αρτίων, ενώ ο  $-1$  είναι περιττός.

Οι  $x, y$  δεν μπορεί να είναι και οι δυο περιττοί, γιατί τότε τα τετράγωνά τους θα είναι επίσης περιττοί, ο  $3$  περιττός, το γινόμενο περιττών περιττός, αλλά η διαφορά περιττών είναι άρτιος και ο  $-1$  δεν είναι.

$$\begin{aligned} \text{Αν } x \text{ άρτιος και } y \text{ περιττός, } x=2a, y=2b+1, \text{ τότε: } x^2 - 3y^2 &= 4a^2 - 3(4b^2 + 4b + 1) = \\ &= 4(a^2 - 3b^2 - 3b) + 1 - 4 = 4(a^2 - 3b^2 - 3b - 1) + 1 = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Αλλά αν  $4k + 1 = -1$ , τότε,  $4k = -2$ , άρα  $k \notin \mathbb{Z}$ , άτοπον.

$$\text{Αν } x \text{ περιττός και } y \text{ άρτιος, } x=2a+1, y=2b, \text{ τότε: } x^2 - 3y^2 = 4a^2 + 4a + 1 - 3 \cdot 4b^2 =$$

$$= 4(a^2 + a - 3b^2) + 4 - 3 = 4(a^2 + a - 3b^2 + 1) - 3 = 4z - 3, z \in \mathbb{Z}.$$

Αλλά αν  $4z - 3 = -1$ , τότε,  $4z = +2$ , άρα  $z \notin \mathbb{Z}$ , άτοπον.

Οι περιπτώσεις είναι «εξαντλητικές» για τους ακεραίους  $x, y$ , άρα η  $x^2 - 3y^2 = -1$  δεν έχει ακέραιες λύσεις.

**B.** Γενικά μια Διοφαντική εξίσωση της μορφής  $x^2 - dy^2 = \pm 1$ , όπου  $d$  θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο ονομάζεται **εξίσωση Pell**. Το όνομα του άγγλου μαθηματικού J. Pell (1610-1685), συνδέθηκε με την εξίσωση από ένα λάθος του Euler, ο οποίος του απέδωσε τις εξισώσεις αυτής της μορφής σε μια επιστολή προς τον Goldbach στις 10 Αυγούστου 1730. Ο Pell δεν φαίνεται να έχει κάποια συνεισφορά στην λύση αυτής της εξίσωσης. Πριν από τον Pell την εξίσωση είχαν μελετήσει οι John Wallis (1616-1703), W.Brouncker(1620-1684), B.Frenicle de Bessy (1602-1675) και ιδιαίτερα ο Pierre de Fermat (1601-1665). Ίσως θα έπρεπε να ονομαστούν **εξισώσεις Fermat**, αλλά η διασημότητα του Euler οδηγούσε πολλούς να υιοθετούν τις συνήθειές του. Ο Fermat ήταν ο πρώτος Ευρωπαίος μαθηματικός που έκανε μια σοβαρή διερεύνηση αυτών των εξισώσεων. Λεπτομερής διαπραγμάτευση των «εξισώσεων Pell» εμφανίζεται στις εργασίες του Ινδού μαθηματικού **Brahmagupta** (7<sup>ος</sup> μ.Χ.αιώνας) ο οποίος είχε ένα συστηματικό τρόπο για να βρίσκει άπειρες λύσεις από μια ειδική λύση. Οι συμπατριώτες του Jayadeva και Bhaskara II τον 12<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα είχαν βρει αλγορίθμους για τον προσδιορισμό μιας μερικής λύσης.

Ο Euler είχε παρατηρήσει ότι ένα εξυπηρετικό εργαλείο για την επίλυση της εξίσωσης Pell προσφέρουν τα συνεχή κλάσματα. Οι Fermat και Wallis υπέθεσαν, σωστά, ότι, αν υπάρχει μια λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε υπάρχουν άπειρες. Ο Lagrange, το 1768, παρουσίασε την πρώτη πλήρη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος και επίσης ότι κάθε λύση «παρέχεται» από το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα της  $\sqrt{d}$ .

#### 7.4.2.

Για οποιονδήποτε ακέραιο  $D$ , η εξίσωση  $x^2 - Dy^2 = 1$  ικανοποιείται προφανώς από τα ζεύγη  $(x, y) = (\pm 1, 0)$ . Αν  $D < -1$ , τότε  $x^2 - Dy^2 \geq 1$  (εκτός αν  $x = y = 0$ ) και ακέραιες λύσεις είναι οι  $(x, y) = (\pm 1, 0)$ .

Αν  $D = -1$ , τότε για την  $x^2 + y^2 = 1$  έχουμε επιπλέον και τις λύσεις  $(x, y) = (0, \pm 1)$ .

Αν  $m$  είναι τέλειο τετράγωνο,  $m = n^2$ , τότε έχουμε διαδοχικά:

$x^2 - my^2 = 1 \Leftrightarrow (x - ny)(x + ny) = 1 \Leftrightarrow (x - ny = 1 \text{ και } x + ny = 1)$  ή  $(x - ny = -1 \text{ και } x + ny = -1)$  και επομένως οδηγούμαστε ξανά στις τετριμμένες λύσεις  $(x, y) = (\pm 1, 0)$ .

Θα ασχοληθούμε λοιπόν με τις εξισώσεις  $x^2 - dy^2 = \pm 1$ , όπου ο  $d$  είναι θετικός ακέραιος αλλά όχι τέλειο τετράγωνο.

#### 7.4.3. Ορισμοί:

Μια λύση  $(u, v)$  της  $x^2 - dy^2 = 1$  είναι **θετική**, αν  $u > 0$ ,  $v > 0$ . Αν βρούμε μια θετική λύση  $(u, v)$ , τότε και οι  $(\pm u, \pm v)$  είναι λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ . Έτσι θα ασχοληθούμε με την αναζήτηση των θετικών λύσεων.

Αν  $(r, s)$  και  $(p, q)$  είναι **θετικές** λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε από τις  $r^2 - ds^2 = 1 = p^2 - dq^2$ ,  $r^2 - p^2 = ds^2 - dq^2$  συμπεραίνουμε ότι:  $r < p \Leftrightarrow s < q$ .

Αν λοιπόν υπάρχουν θετικές (ακέραιες) λύσεις για την  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε υπάρχει και λύση με την ελάχιστη θετική τιμή για το « $x$ ».

Η **ελάχιστη θετική λύση**  $(x_1, y_1)$ , την οποία θα ονομάζουμε **βασική λύση**, είναι εκείνη η θετική λύση για την οποία ισχύει  $x_1 < u$ ,  $y_1 < v$  για οποιαδήποτε άλλη θετική λύση  $(u, v)$  της  $x^2 - dy^2 = 1$ .

Αν οι θετικές λύσεις διαταχθούν έτσι ώστε οι  $x$ -τιμές (ή οι  $y$ -τιμές) να σχηματίζουν αύξουσα ακολουθία τότε η επόμενη μικρότερη  $x$ -τιμή ορίζει την **δεύτερη θετική λύση**, η επόμενη την **τρίτη** θετική λύση κλπ.

K7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$

**7.4.4.Θεώρημα:** Αν  $(p, q)$  είναι μια τυχαία θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε  $\frac{p}{q}$  είναι κάποιο από τα αναγωγήματα του συνεχούς κλάσματος στο οποίο αναπτύσσεται η  $\sqrt{d}$ .

**Απόδειξη:** Έχουμε :  $p - dq^2 = 1 \Leftrightarrow (p + q\sqrt{d})(p - q\sqrt{d}) = 1 \Leftrightarrow p - q\sqrt{d} = \frac{1}{p + q\sqrt{d}}$ .

Συμπεραίνουμε ότι:  $p > q\sqrt{d}$ ,  $pq > q^2\sqrt{d}$  και  $\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q(p + q\sqrt{d})}$ ,  $\frac{p}{q} > \sqrt{d}$ . Οπότε:

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q(p + q\sqrt{d})} < \frac{1}{2q^2\sqrt{d}} < \frac{1}{2q^2}$$
 και το συμπέρασμα προκύπτει από το Θ.5.5.5.

**Παρατηρήσεις:**

1. Αν  $(p, q)$  είναι μια τυχαία θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε  $p^2 = dq^2 + 1$ ,  $\frac{p}{q} > \sqrt{d}$  και το  $\frac{p}{q}$  είναι περιττής τάξης αναγωγήμα του συνεχούς κλάσματος της  $\sqrt{d}$ .

2. Η αντίστροφη πρόταση είναι ψευδής. Δεν παρέχουν όλα τα αναγωγήματα λύσεις για την εξίσωση  $x^2 - dy^2 = 1$ , αλλά ούτε και όλα τα περιττής τάξης αναγωγήματα. Π.χ.  $\sqrt{61} = [7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14] = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{11}}]$ , πλήθος μερικών πηλίκων περιόδου 11.

Τα αναγωγήματα είναι :

$$\left\{ 7, 8, \frac{39}{5}, \frac{125}{16}, \frac{164}{21}, \frac{453}{58}, \frac{1070}{137}, \frac{1523}{195}, \frac{5639}{722}, \frac{24079}{3083}, \frac{29718}{3805}, \frac{440131}{56353}, \frac{469849}{60158}, \frac{2319527}{296985}, \frac{7428430}{951113}, \right.$$

$$\left. \frac{9747957}{1248098}, \frac{26924344}{3447309}, \frac{63596645}{8142716}, \frac{90520989}{11590025}, \frac{335159612}{42912791}, \frac{1431159437}{183241189}, \frac{1766319049}{226153980}, \dots \right\}$$

Αν αρχίσουμε τις δοκιμές,  $7^2 - 61 \cdot 1^2 \neq 1$ ,  $8^2 - 61 \cdot 1^2 \neq 1$ ,  $39^2 - 61 \cdot 5^2 \neq 1$ , ... το πρώτο αναγωγήμα που επαληθεύει την  $x^2 - 61y^2 = 1$  είναι το  $(p_{21}, q_{21}) = (1766319049, 226153980)$ . Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι  $1766319049^2 = 3119882982860264401$  και όχι  $3119882982860260000$ , όπως δίνουν μερικές αριθμομηχανές και το excel (βλ. και 9.7).

Το τετράγωνο θα πρέπει να έχει τελευταίο ψηφίο 1 και στην οθόνη 19 ψηφία, αφού  $17 \cdot 10^8 < 1766319049 < 18 \cdot 10^8 \Leftrightarrow 289 \cdot 10^{16} < 1766319049^2 < 324 \cdot 10^{16}$ .



### 7.4.5. Η $x^2 - dy^2 = 1$ έχει άπειρες θετικές λύσεις.

#### Θεώρημα:

Υποθέτουμε ότι το μήκος της περιόδου της  $\sqrt{d}$  είναι  $m$ ,  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}, 2a_0}]$

Αν  $m$  άρτιος, τότε όλες οι θετικές λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ , είναι οι  $(x, y) = (p_{jm-1}, q_{jm-1})$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

Αν  $m$  περιττός, τότε όλες οι θετικές λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ , είναι οι  $(x, y) = (p_{2jm-1}, q_{2jm-1})$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

#### Απόδειξη:

Έχουμε δει στο Θ.7.4.4. ότι αν  $(p, q)$  είναι μια τυχαία θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε  $\frac{p}{q}$  είναι κάποιο από τα αναγωγήματα περιττής τάξης του συνεχούς κλάσματος στο

οποίο αναπτύσσεται η  $\sqrt{d}$ . Για το  $k$ -τάξης αναγωγήμα  $\frac{p_k}{q_k}$ , έχουμε βρει ότι

$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1} s_{k+1}$  και επίσης  $s_k = 1$ , μόνον όταν ο  $k$  είναι πολλαπλάσιο του μήκους  $m$  της περιόδου (Θ.7.2.2).

Αν λοιπόν  $\frac{p_k}{q_k}$  αναγωγήμα και  $(p_k, q_k)$  είναι θετική λύση, τότε ο  $k$  πρέπει να είναι περιττός και  $s_{k+1} = 1$ , δηλ.  $m/k+1$ , άρα  $k+1 = jm$ , και  $k = jm-1$ , για  $j \geq 1$  και αυτές είναι όλες οι θετικές λύσεις.

- Αν  $m$  άρτιος, τότε ο  $k = jm-1$  είναι περιττός, και έχουμε θετικές λύσεις για κάθε  $j \geq 1$ .  
Λύσεις είναι οι  $(p_{m-1}, q_{m-1}), (p_{2m-1}, q_{2m-1}), (p_{3m-1}, q_{3m-1}), \dots, (p_{mj-1}, q_{mj-1})$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$
- Αν  $m$  περιττός, τότε ο  $j$  πρέπει να είναι άρτιος και λύσεις είναι οι  $(p_{2m-1}, q_{2m-1}), (p_{4m-1}, q_{4m-1}), (p_{6m-1}, q_{6m-1}), \dots, (p_{2mj-1}, q_{2mj-1})$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

#### Συμπέρασμα:

Η εξίσωση  $x^2 - dy^2 = 1$  έχει άπειρες θετικές λύσεις.

Η βασική λύση είναι η  $(p_{m-1}, q_{m-1})$ , αν το πλήθος των μερικών πηλίκων της περιόδου  $m$  της  $\sqrt{d}$  είναι άρτιος αριθμός. Οι  $p_{m-1}, q_{m-1}$  είναι οι όροι του  $c_{m-1}$ , του αναγωγήματος που αντιστοιχεί στο μερικό πηλίκο πριν το πρώτο  $2a_0$ .

Αν το μήκος  $m$  της περιόδου είναι περιττός αριθμός, η βασική λύση είναι η  $(p_{2m-1}, q_{2m-1})$ . Οι  $p_{2m-1}, q_{2m-1}$  είναι οι όροι του  $c_{2m-1}$ , του αναγωγήματος που αντιστοιχεί στο μερικό πηλίκο πριν το δεύτερο  $2a_0$ .

Τελικά η βασική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$  μπορεί να βρεθεί σε  $m$ , ή  $2m$  βήματα, όπου  $m$  το μήκος της περιόδου της  $\sqrt{d}$ , χωρίς αυτό να είναι πάντα εύκολη υπόθεση.

Για την  $\sqrt{d}$  το πρώτο μερικό πηλίκο είναι το  $a_0 = \lceil \sqrt{d} \rceil > 1$ , άρα η ακολουθία  $(p_n)$  είναι γνήσια αύξουσα, οπότε, αν  $m$  άρτιος, η  $(p_{nm-1}, q_{nm-1})$  είναι η  $n$ -οστή θετική λύση (7.4.3), ενώ αν  $m$  περιττός, η  $n$ -οστή θετική λύση είναι η  $(p_{2nm-1}, q_{2nm-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### Παρατηρήσεις:

**1.** Αν η  $(a,b)$  είναι λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε είναι θετική **μόνον όταν**  $a + b\sqrt{d} > 1$ .

#### Απόδειξη:

Αν η  $(a,b)$  είναι θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε  $a + b\sqrt{d} > 1$ , αφού  $a + b\sqrt{d} \geq 1 + \sqrt{d} > 1$

Αν η  $(a,b)$  είναι λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , με  $a + b\sqrt{d} > 1$ , τότε δεν είναι δυνατόν οι  $a,b$  να είναι ταυτόχρονα αρνητικοί.

Αν ακριβώς ένας από τους δύο είναι  $\leq 0$ , τότε  $|a - b\sqrt{d}| \geq |a + b\sqrt{d}|$  και καταλήγουμε στο άτοπο:  $1 = |a^2 - db^2| = |a - b\sqrt{d}| |a + b\sqrt{d}| \geq |a + b\sqrt{d}| |a + b\sqrt{d}| > 1$ .

**2.** Αν η  $(a,b)$  είναι η **βασική λύση** της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε  $0 < a - b\sqrt{d} < \sqrt{2} - 1$ .

**Απόδειξη:** Για την θετική λύση  $(a,b)$  με  $a^2 = db^2 + 1$ , έχουμε διαδοχικά  $a > b$ ,  $a + b\sqrt{d} > 1 + \sqrt{d} \geq 1 + \sqrt{2}$  και  $0 < a - b\sqrt{d} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} < \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ .

**3.** Αν το μήκος της περιόδου της  $\sqrt{d}$  είναι  $m$ , και η  $(a,b)$  είναι η **βασική λύση** της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε:

**α.** Αν  $m$  άρτιος, τότε  $0 < a - b\sqrt{d} < \frac{1}{m}$ , **β.** Αν  $m$  περιττός, τότε  $0 < a - b\sqrt{d} < \frac{1}{2m}$ .

**Απόδειξη:** Αν  $m$  άρτιος, τότε  $(a, b) = (p_{m-1}, q_{m-1})$ . Από το Θ.4.5.1 ( $|\xi - c_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ ),

και τις ιδιότητες της ακολουθίας  $q_k$  ( $q_0 = 1, q_1 \geq 1, q_2 \geq 2$  και για  $k > 3: q_k > k, 2.6.2.$  )

$$\text{παίρνουμε: } a - b\sqrt{d} = b \left| \sqrt{d} - \frac{a}{b} \right| = q_{m-1} \left| \sqrt{d} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} \right| < \frac{q_{m-1}}{q_m q_{m-1}} = \frac{1}{q_m} \leq \frac{1}{m}.$$

Αν  $m$  περιττός, τότε  $(a, b) = (p_{2m-1}, q_{2m-1})$  οπότε:

$$a - b\sqrt{d} = b \left| \sqrt{d} - \frac{a}{b} \right| = q_{2m-1} \left| \sqrt{d} - \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} \right| < \frac{q_{2m-1}}{q_{2m} q_{2m-1}} = \frac{1}{q_{2m}} \leq \frac{1}{2m}.$$

### Παραδείγματα:

1. Θεωρούμε την εξίσωση:  $x^2 - 7y^2 = 1$ .

Αναπτύσσουμε την  $\sqrt{7}$  σε συνεχές κλάσμα:  $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 4}]$ , πλήθος ψηφίων περιόδου 4,

άρτιος. Τα αναγωγήματα είναι  $\{c_0 = 2, c_1 = 3, c_2 = \frac{5}{2}, c_3 = \frac{8}{3}, c_4 = \frac{37}{14}, \dots, c_7 = \frac{127}{48}, \dots\}$  και

βασική λύση η  $(p_3, q_3) = (8, 3)$ . Η επόμενη θετική λύση είναι η  $(p_7, q_7) = (127, 48)$ .

2. Η βασική λύση της  $x^2 - 29y^2 = 1$  παρέχεται από το 9<sup>ο</sup> αναγώγημα,

$(p_9, q_9) = (9801, 1820)$  γιατί  $\sqrt{29} = [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}] = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}]$ , πλήθος ψηφίων

περιόδου 5, περιττός (τα μερικά πηλικά τα βρίσκουμε με τη βοήθεια του αλγορίθμου 6.5.3, αρχίζουμε με  $r_0 = 0, s_0 = 1, a_0 = 5$ ).

Η επόμενη ακέραια λύση είναι η  $(p_{19}, q_{19}) = (192119201, 35675640)$ . Τα 20 πρώτα

αναγωγήματα της  $\sqrt{29}$  είναι:

$$\left\{ 5, \frac{11}{2}, \frac{16}{3}, \frac{27}{5}, \frac{70}{13}, \frac{727}{135}, \frac{1524}{283}, \frac{2251}{418}, \frac{3775}{701}, \frac{9801}{1820}, \frac{101785}{18901}, \frac{213371}{39622}, \frac{315156}{58523}, \frac{528527}{98145}, \frac{1372210}{254813}, \frac{14250627}{2646275}, \right.$$

$$\left. \frac{29873464}{5547363}, \frac{44124091}{8193638}, \frac{73997555}{13741001}, \frac{192119201}{35675640}, \dots \right\}. \text{ Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι οι δείκτες αρχίζουν}$$

από τον 0, οπότε το 10<sup>ο</sup> αναγώγημα είναι το αναγώγημα 9<sup>ης</sup> τάξης, αυτό που έχει δείκτη 9, το 20<sup>ο</sup> είναι το  $c_{19}$  κλπ. Ίσως είναι λίγο ενοχλητικό, αλλά διευκολύνει στο πλήθος των ψηφίων της περιόδου: είναι  $m$  (στο συγκεκριμένο παράδειγμα 5), από 1 έως και  $m$ , όπου  $a_m = 2a_0$ .

*\*Για οποιαδήποτε επαλήθευση καλό θα είναι να είμαστε αρκετά προσεκτικοί στη χρήση αριθμομηχανών (ή excel) και να σκεφτόμαστε το είδος των αποτελεσμάτων. Π.χ. ο αριθμός  $192119201^2$  θα πρέπει να τελειώνει σε 1 και πιθανόν η αριθμομηχανή να δίνει  $36909787392878400$ , αντί του σωστού  $36909787392878401$ . Επίσης ενώ  $p_9^2 - 29q_9^2 = 1$ , η  $p_{19}^2 - 29q_{19}^2$  σε πολλές αριθμομηχανές (και στο excel) δίνει αποτέλεσμα 0 (βλ. και τμήμα 9.7).*

3. Η βασική λύση της  $x^2 - 151y^2 = 1$  δίνεται από το 19<sup>ο</sup> αναγωγήμα,  $(p_{19}, q_{19}) = (1728148040, 140634693)$ , γιατί η  $\sqrt{151} = [12, \overline{3, 2, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 3, 1, 7, 2, 3, 24}]$  έχει πλήθος μερικών πηλίκων περιόδου 20.

4. Υπάρχουν τρίγωνα με πλευρές αρρήτους και **εμβαδόν φυσικό**, π.χ. το (ορθογώνιο) τρίγωνο με πλευρές  $3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$  (εμβαδόν 12), υπάρχουν τρίγωνα με πλευρές φυσικούς και εμβαδόν άρρητο αριθμό, π.χ. το «3,5,6» με εμβαδόν  $\sqrt{896}/4$ , όπως επίσης υπάρχουν τρίγωνα με πλευρές φυσικούς και εμβαδόν φυσικό, π.χ. το «693, 1924, 2045» (ορθογώνιο) με εμβαδόν 666666 (Θωμαΐδης-Πούλος, 2000: 279).

Υπάρχουν τρίγωνα με **πλευρές διαδοχικούς φυσικούς** και εμβαδόν φυσικό, π.χ. τα «3,4,5», «13,14,15». Θα προσδιορίσουμε αυτά τα τρίγωνα με τη βοήθεια των αναγωγημάτων του αναπτύγματος της  $\sqrt{3}$  και του τύπου του Ήρωνα: Αν a,b,c οι πλευρές τριγώνου, τότε το εμβαδόν του είναι  $E = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$ .

Για διαδοχικούς φυσικούς,  $a = n-1, b = n, c = n+1$  ( $n > 1$ ) ο τύπος του Ήρωνα γίνεται  $E = \frac{n}{4}\sqrt{3(n^2 - 4)}$ . Αν θέλουμε εμβαδόν φυσικό, τότε ο n πρέπει να είναι άρτιος και η υπόρριζος ποσότητα τέλειο τετράγωνο. Αντικαθιστούμε:  $n = 2x, \frac{E}{x} = m$  και από την  $E = \frac{n}{4}\sqrt{3(n^2 - 4)}$  παίρνουμε την  $3x^2 - 3 = m^2$ . Από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής συμπεραίνουμε ότι ο m θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3, ας πούμε  $m = 3y$ , οπότε έχουμε να λύσουμε την  $x^2 - 3y^2 = 1$ .

Για την  $\sqrt{3}$  το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα είναι  $\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$ , με αναγωγήματα:  $\{1, 2, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \dots\}$ . Οι λύσεις της  $x^2 - 3y^2 = 1$  είναι οι  $(p_1, q_1), (p_3, q_3), (p_5, q_5), \dots$ , όπου  $\frac{p_i}{q_i}$  είναι αναγωγήματα της  $\sqrt{3}$ . Αν  $(x, y)$  είναι θετική λύση, τότε οι διαδοχικοί φυσικοί που είναι πλευρές τριγώνων με εμβαδόν φυσικό θα είναι  $2x-1, 2x, 2x+1$ . Τελικά τα «x» είναι οι αριθμητές των περιττής τάξης αναγωγημάτων του αναπτύγματος της  $\sqrt{3}$ . Παραδείγματα τριάδων: (3,4,5), (13,14,15), (51,52,53), (193,194,195), (723,724,725). Τα αντίστοιχα εμβαδά είναι: 6, 84, 1170, 16296, 226974.

### 7.4.6. Η χρήση των συζυγών για να δαμάσουμε τους άρρητους αριθμούς.

1. Αν  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$  είναι τυχαίες (όχι απαραίτητα θετικές) λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε είναι λύση και η  $(r, s)$ , όπου οι  $r, s$  ορίζονται από την  $(a_1 + b_1\sqrt{d})(a_2 + b_2\sqrt{d}) = r + s\sqrt{d}$ .  
Αν οι  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$  είναι θετικές λύσεις, τότε θετική λύση είναι και η  $(r, s)$ .

**Απόδειξη:**

Από την  $(a_1 + b_1\sqrt{d})(a_2 + b_2\sqrt{d}) = r + s\sqrt{d}$ , έχουμε ότι:  $r = a_1a_2 + b_1b_2d$ ,  $s = a_1b_2 + a_2b_1$ .

Για το γινόμενο των συζυγών θα έχουμε:  $(a_1 - b_1\sqrt{d})(a_2 - b_2\sqrt{d}) = r - s\sqrt{d}$ .

$$\begin{aligned} \text{Τελικά: } r^2 - ds^2 &= (r + s\sqrt{d})(r - s\sqrt{d}) = \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{d})(a_2 + b_2\sqrt{d})(a_1 - b_1\sqrt{d})(a_2 - b_2\sqrt{d}) = (a_1^2 - db_1^2)(a_2^2 - db_2^2) = 1. \end{aligned}$$

Αν οι  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$  είναι θετικές λύσεις, τότε οι  $r = a_1a_2 + b_1b_2d$ ,  $s = a_1b_2 + a_2b_1$  είναι θετικοί αριθμοί, άρα και η  $(r, s)$  είναι θετική λύση.

2. Αν  $(a_1, b_1)$  είναι θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε θετική είναι και η  $(a_2, b_2)$  που καθορίζεται από την  $a_2 + b_2\sqrt{d} = (a_1 + b_1\sqrt{d})^2$ . Επαγωγικά και η  $(a_n, b_n)$  είναι θετική λύση, όπου:  $a_n + b_n\sqrt{d} = (a_1 + b_1\sqrt{d})^n$  (ή όπως στην παράγραφο 4).

3. Αν  $p, q, d$  ακέραιοι και  $d > 0$  όχι τέλειο τετράγωνο, τότε για κάθε  $v \in \mathbb{N}$  θα έχουμε:

$(p + q\sqrt{d})^v = \sum_{\kappa=0}^v \binom{v}{\kappa} p^{v-\kappa} (q\sqrt{d})^\kappa = K + \Lambda\sqrt{d}$ , όπου  $K$  είναι το άθροισμα των όρων με  $\kappa$  άρτιο  $(0, 2, 4, \dots)$  και  $\Lambda$  το άθροισμα των όρων με  $\kappa$  περιττό  $(K, \Lambda \in \mathbb{Z})$ , π.χ.  $(p + q\sqrt{z})^3 = (p^3 + 3pq^2z) + (3p^2q + q^3z)\sqrt{z}$ . Για την συζυγή της παράστασης  $(p + q\sqrt{d})^v$  θα έχουμε:  $(p - q\sqrt{z})^v = (p + (-q\sqrt{z}))^v = \sum_{\kappa=0}^v \binom{v}{\kappa} p^{v-\kappa} (-q\sqrt{z})^\kappa = K - \Lambda\sqrt{z}$ , γιατί για  $\kappa$  άρτιο έχουμε  $(-q\sqrt{z})^\kappa = (q\sqrt{z})^\kappa$ , ενώ για  $\kappa$  περιττό:  $(-q\sqrt{z})^\kappa = -(q\sqrt{z})^\kappa$ .

K7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$

4. Η βασική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , η  $(x_1, y_1)$ , είναι θετική (7.4.3).

Για το ζεύγος ακεραίων  $(x_n, y_n)$  που καθορίζεται από την  $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{θα έχουμε: } x_n^2 - dy_n^2 &= (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n (x_1 - y_1\sqrt{d})^n = \\ &= \left( (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) \right)^n = (x_1^2 - dy_1^2)^n = 1 \end{aligned}$$

Η  $(x_n, y_n)$  είναι λοιπόν λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$  με τους  $x_n, y_n$  θετικούς ακεραίους, γιατί οι  $x_1,$

$$y_1 \text{ είναι θετικοί ακέραιοι και : } (x_1 + y_1\sqrt{d})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^{n-k} (y_1\sqrt{d})^k = x_n + y_n\sqrt{d} \text{ (βλ. και 2)}$$

5. Στα K4, K5, K6 είδαμε την σημαντική βοήθεια που προσφέρει η συζυγής παράσταση της  $a + b\sqrt{d}$  στη διαχείριση των αρρήτων. Οι  $a, b$  είτε είναι ακέραιοι, είτε ρητοί, η συζυγής παράσταση της  $a + b\sqrt{d}$  προκύπτει με απλή αλλαγή του προσήμου του όρου που περιέχει την ρίζα:  $a - b\sqrt{d}$ . Μερικές φορές οι συζυγείς μας δίνουν απαντήσεις με μια ματιά:

$$\text{π.χ. το άθροισμα : } \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \text{ για } m < n \text{ είναι } \sqrt{n} - \sqrt{m},$$

η εξίσωση  $(x + y\sqrt{5})^4 + (z + t\sqrt{5})^4 = 2 + \sqrt{5}$  με  $x, y, z, t$  ρητούς είναι αδύνατη, γιατί αν πάρουμε συζυγείς, τότε ο αριθμός αριστερά του « = » είναι θετικός, ενώ δεξιά αρνητικός.

6. Από αλγεβρική σκοπιά, αφού π.χ. η  $x^2 - d = 0$  δεν έχει λύση στο σώμα των ρητών, επεκτείνουμε το  $\mathbb{Q}$  επινοώντας ένα «αντικείμενο»  $\sqrt{d}$ , που είναι υποχρεωμένο να δίνει «d» όταν πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του. Στη συνέχεια θεωρούμε όλες τις παραστάσεις της μορφής  $p + q\sqrt{d}$ , με  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Το νέο σύνολο, ας το ονομάσουμε  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  είναι σώμα (πολ/μός:  $(p + q\sqrt{d})(p' + q'\sqrt{d}) = (pp' + qq'd) + (pq' + qp')\sqrt{d}$ ). Το νέο σώμα,  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , που ονομάζεται τετραγωνική επέκταση του  $\mathbb{Q}$ , περιέχει ένα αντίγραφο του  $\mathbb{Q}$ : τα στοιχεία της μορφής  $p + 0\sqrt{d}$ . Το  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  είναι εφοδιασμένο με την «συζυγή απεικόνιση»:  $w = p + q\sqrt{d} \rightarrow w' = p - q\sqrt{d}$  που έχει, μεταξύ των άλλων, τις ιδιότητες: (α). Όλα τα στοιχεία του  $\mathbb{Q}$  απεικονίζονται στον εαυτό τους. (β). Όλες οι εξισώσεις που περιλαμβάνουν αριθμητικές πράξεις διατηρούνται:  $(w + b)' = w' + b'$ ,  $(w \cdot b)' = w' \cdot b'$ . Η απεικόνιση αυτή είναι ειδική περίπτωση των αυτομορφισμών Galois της επέκτασης  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  του σώματος  $\mathbb{Q}$ .

### 7.4.7. Θεώρημα.

Αν  $(x_1, y_1)$  είναι η βασική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε :

- ο όλες οι θετικές λύσεις είναι οι  $(x_n, y_n)$  όπου οι ακέραιοι  $x_n, y_n$  καθορίζονται από την  $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- η  $(x_n, y_n)$  είναι η n-οστή θετική λύση.
- Όλες οι λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ , ανεξάρτητα από το πρόσημο, έχουν τη μορφή  $(x_z, y_z)$  ή  $(-x_z, -y_z)$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ .

#### Απόδειξη.

Α. Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι το ζεύγος ακεραίων  $(x_n, y_n)$  που καθορίζεται από την  $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  είναι θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ .

Έστω ότι υπάρχει θετική λύση,  $(u, v)$ , που δεν παρέχεται, για κάποιον φυσικό n, από την  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ . Επειδή  $x_1 + y_1\sqrt{d} > 1$  (παρατήρηση 1 του Θ.7.4.5), οι δυνάμεις  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$  αυξάνονται απεριόριστα και επίσης  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1} > (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ .

Τότε, για κάποιο n, ο αριθμός  $u + v\sqrt{d}$  θα βρίσκεται μεταξύ των  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ ,  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1}$  (υποθέσαμε ότι δεν είναι κάποιος από αυτούς) δηλ. ,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n < u + v\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1} = (x_n + y_n\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d}).$$

Για την θετική λύση  $(x_n, y_n)$  θα έχουμε  $1 = x_n^2 - dy_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d})$ . Συμπεραίνουμε ότι  $x_n - y_n\sqrt{d} > 0$ , και επειδή  $x_n + y_n\sqrt{d} > 1$ , για την συζυγή της θα έχουμε:

$$x_n - y_n\sqrt{d} = \frac{(x_n - y_n\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d})}{x_n + y_n\sqrt{d}} = \frac{x_n^2 - dy_n^2}{x_n + y_n\sqrt{d}} = \frac{1}{x_n + y_n\sqrt{d}} < 1$$

Πολλαπλασιάζουμε την  $x_n + y_n\sqrt{d} < u + v\sqrt{d} < (x_n + y_n\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})$  επί τον θετικό αριθμό  $x_n - y_n\sqrt{d}$  και παίρνουμε  $1 < (x_n - y_n\sqrt{d})(u + v\sqrt{d}) = r + s\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ , με  $r = x_n u - y_n v d$ ,  $s = x_n v - y_n u$ .

Επειδή  $(x_n, -y_n)$ ,  $(u, v)$  είναι λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ , θα είναι λύση και η  $(r, s)$ . Από την  $1 < r + s\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$  και την  $r^2 - ds^2 = 1$ , συμπεραίνουμε ότι  $0 < r - s\sqrt{d} < 1$ .

Συνδυάζοντας τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε:  $2r = (r - s\sqrt{d}) + (r + s\sqrt{d}) > 1 + 0 > 1$  και  $2s\sqrt{d} = (r + s\sqrt{d}) - (r - s\sqrt{d}) > 1 - 0 = 1$ , οπότε η  $(r, s)$  είναι θετική λύση.

Η βασική λύση, η μικρότερη θετική λύση είναι η  $(x_1, y_1)$ , η  $(r, s)$  είναι θετική λύση, άρα θα πρέπει  $x_1 \leq r$  και  $y_1 \leq s$ , δηλ.  $x_1 + y_1\sqrt{d} \leq r + s\sqrt{d}$ , ανισότητα αντίθετη με την  $r + s\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ . Οδηγηθήκαμε στο άτοπο υποθέτοντας ότι υπάρχει θετική λύση που δεν εκφράζεται από την  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ , για κάποιον  $n$ . Για να άρουμε το άτοπο, θα πρέπει να άρουμε αυτή την υπόθεση.

### B.

Αν  $(x_1, y_1)$  είναι η βασική, τότε για την  $(x_2, y_2)$  θα έχουμε  $x_2 + y_2\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^2$  με  $x_2 + y_2\sqrt{d} = x_1^2 + dy_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{d}$ , άρα  $x_1 < x_2 = x_1^2 + dy_1^2$ ,  $y_1 < y_2 = 2x_1y_1$ . Από τον ορισμό των  $(x_n, y_n)$  συμπεραίνουμε ότι  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  και  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$ . Όλες οι θετικές λύσεις  $(x_n, y_n)$  δίνονται από την  $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Άρα η  $(x_2, y_2)$  είναι η δεύτερη θετική, η  $(x_3, y_3)$  που δίνεται από την  $x_3 + y_3\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^3$  είναι η τρίτη θετική, ..., η  $(x_n, y_n)$  είναι η  $n$ -οστή θετική λύση (ορισμός 7.4.3).

*Ο εκθέτης  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$  καθορίζει και την τάξη της θετικής λύσης.*

*Από το Θ.7.4.5. συμπεραίνουμε ότι  $(x_n, y_n) = (p_{nm-1}, q_{nm-1})$  αν το μήκος  $m$  της περιόδου της  $\sqrt{d}$  είναι άρτιο και  $(x_n, y_n) = (p_{2nm-1}, q_{2nm-1})$  αν είναι περιττό. Επειδή το πρώτο μερικό πηλίκο  $a_0$  του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$  είναι μεγαλύτερο του μηδενός, η ακολουθία  $(p_k)$  είναι γνήσια αύξουσα (2.6.2), οπότε διαπιστώνουμε και πάλι ότι, αρχίζοντας από την βασική, οι διαδοχικές λύσεις είναι «διατεταγμένες».*

Γ. Για  $n = 0$ , έχουμε  $x_0 + y_0\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^0 = 1$  και προκύπτει η  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ . Η άλλη τετριμμένη λύση είναι η  $(-x_0, -y_0) = (-1, 0)$ .

Έστω  $(r, s)$  τυχαία θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ .

Τότε λύσεις θα είναι και  $(-r, -s)$ ,  $(r, -s)$ ,  $(-r, s)$ .

Για κάποιον φυσικό  $n$  θα έχουμε  $r + s\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}$  με  $r = x_n$ ,  $s = y_n$  ( $\sqrt{d}$  άρρητος) και μαζί με την  $(r, s) = (x_n, y_n)$  έχουμε και την  $(-r, -s) = (-x_n, -y_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .



Επειδή  $(x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) = 1$ , είναι  $x_1 - y_1\sqrt{d} = \frac{1}{x_1 + y_1\sqrt{d}} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-1}$   
 και επίσης  $x_n - y_n\sqrt{d} = \frac{1}{x_n + y_n\sqrt{d}} = \frac{1}{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n}$ .

Άρα η  $(r, -s)$  είναι η  $(x_{-n}, y_{-n})$  και επομένως η  $(-r, s)$  είναι η  $(-x_{-n}, -y_{-n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

\* Πολλές φορές, αντί της « η  $(x_n, y_n)$  είναι λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$  » χρησιμοποιούμε την έκφραση: « η  $x_n + y_n\sqrt{d}$  είναι λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$  ».

### 7.4.8. Υπολογιστικές Παρατηρήσεις.

**A.** Αν θέσουμε  $w = x_1 + y_1\sqrt{d}$ , τότε η συζυγής παράσταση είναι η  $w' = x_1 - y_1\sqrt{d}$ .

Θα έχουμε λοιπόν  $x_1 = \frac{w+w'}{2}$ ,  $y_1 = \frac{w-w'}{2\sqrt{d}}$  και γενικά  $x_z = \frac{w^z + (w')^z}{2}$ ,  $y_z = \frac{w^z - (w')^z}{2\sqrt{d}}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ .

Παράδειγμα: Η βασική λύση της  $x^2 - 2y^2 = 1$  είναι η  $(3, 2)$ . Για τυχαία λύση  $(r, s)$ , υπάρχει ακέραιος  $z$ , ώστε  $r + s\sqrt{2} = \pm(3 + 2\sqrt{2})^z$ . Οι  $r, s$  υπολογίζονται και από τις

$$r = \frac{(3+2\sqrt{2})^z + (3-2\sqrt{2})^z}{2} \text{ και } s = \frac{(3+2\sqrt{2})^z - (3-2\sqrt{2})^z}{2\sqrt{2}}.$$

Για  $r + s\sqrt{2} = +(3 + 2\sqrt{2})^z$  έχουμε:

z	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	...
r	1	3	3	17	17	99	99	577	577	3363	3363	...
s	0	2	-2	12	-12	70	-70	408	-408	2378	-2378	...

**B.** Αν έχουμε βρει την n-τάξης θετική λύση, την  $(x_n, y_n)$ , τότε η  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  είναι η  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1}$  και μπορεί να προκύψει με πολ/σμό της βασικής επί την n-οστή:

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1} &= (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^n = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = \\ &= (x_1x_n + y_1y_nd) + (x_1y_n + y_1x_n)\sqrt{d} \end{aligned}$$

δηλ.  $x_{n+1} = x_1x_n + y_1y_nd$  και  $y_{n+1} = x_1y_n + y_1x_n$ .

Παράδειγμα: Για την  $x^2 - 29y^2 = 1$  με  $\sqrt{29} = [5, 2, 1, 1, 2, 10]$  έχουμε βρει την βασική λύση:  $(x_1, y_1) = (p_9, q_9) = (9801, 1820)$ . Η επόμενη ακέραια θετική λύση είναι η  $(x_2, y_2) = (x_1^2 + 29y_1^2, x_1y_1 + y_1x_1) = (9801^2 + 29*1820^2, 9801*1820 + 1820*9801)$ , είναι η  $(p_{19}, q_{19}) = (192119201, 35675640)$ , όπως έχουμε βρει και στο παράδειγμα 2 του Θ.7.4.5. Δεν υπάρχει λύση με « x » μεταξύ των 9801 και 192119201.

K7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$

Η 3<sup>η</sup> θετική λύση είναι η  $(x_3, y_3) = (x_1x_2 + 29y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) =$   
 $= (9801 * 192119201 + 29 * 1820 * 35675640, 9801 * 35675640 + 1820 * 192119201) =$   
 $= (3\ 765\ 920\ 568\ 201, 699\ 313\ 893\ 460)$ . Είναι η λύση που δίνεται από το αναγώγημα  
 $29^{15}$  τάξης, το  $(p_{29}, q_{29})$ .

Γ. Αν διαθέτουμε αριθμομηχανή που έχει την συνάρτηση «ακέραιο μέρος», τότε

υπολογίζουμε τους ακεραίους  $x_n, y_n$  από τις  $x_n = \left[ \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n}{2} + \frac{1}{2} \right]$  και  $y_n = \left[ \frac{x_n}{\sqrt{d}} + \frac{1}{2} \right]$ .

**Απόδειξη:**

Από τις παρατηρήσεις του Θ.7.4.5. συμπεραίνουμε ότι για την βασική λύση  $(x_1, y_1)$  ισχύει  $|x_1 - y_1\sqrt{d}| < \frac{1}{2}$ . Από την υπολογιστική παρατήρηση Α έχουμε για τον  $x_n$ :

$$x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n + (x_1 - y_1\sqrt{d})^n}{2}. \text{ Έτσι}$$

$$\left| x_n - \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n}{2} \right| = \left| \frac{(x_1 - y_1\sqrt{d})^n}{2} \right| < \frac{1}{4}.$$

Ας ονομάσουμε  $\beta$  τον αριθμό  $\beta = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n}{2}$ . Η απόσταση του

ακεραίου  $x_n$  από τον άρρητο  $\beta$  είναι μικρότερη του  $1/4$ . Τα σημεία E και Z

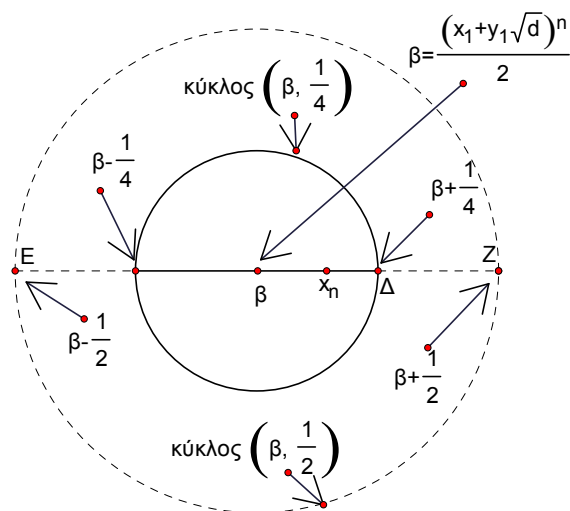
στο παραπάνω σχήμα, δεν είναι παραστατικά σημεία ακεραίων ( $\beta$  άρρητος). Στο διάστημα EZ, μοναδιαίου μήκους, υπάρχει μοναδικός ακέραιος.

Αυτός είναι το **ακέραιο μέρος** του  $\beta + \frac{1}{2}$ .

Επομένως  $x_n = \left[ \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n}{2} + \frac{1}{2} \right]$ , δηλ. ο  $x_n$  είναι ο πλησιέστερος ακέραιος στον  $\beta$ .

$$\text{Από την } |x_n - y_n\sqrt{d}| = |(x_1 - y_1\sqrt{d})^n| < \frac{1}{2} \text{ παίρνουμε } \left| y_n - \frac{x_n}{\sqrt{d}} \right| < \frac{1}{2\sqrt{d}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}.$$

Επομένως ο  $y_n$  είναι ο πλησιέστερος ακέραιος στον  $\frac{x_n}{\sqrt{d}}$ , δηλ.  $y_n = \left[ \frac{x_n}{\sqrt{d}} + \frac{1}{2} \right]$ .



Π.χ. Για την δεύτερη θετική λύση της  $x^2 - 29y^2 = 1$  του παραδείγματος **B**, θα έχουμε

$$x_2 = \left[ \frac{(9801 + 1820\sqrt{29})^2}{2} + \frac{1}{2} \right] \text{ και } y_2 = \left[ \frac{x_2}{\sqrt{29}} + \frac{1}{2} \right]$$

Δ. Αν με κάποιον τρόπο μαντέψουμε την βασική λύση, την  $(x_1, y_1)$ , το Θ.7.4.7. μας προσφέρει ανεξαρτησία από τα αναγωγήματα της  $\sqrt{d}$ . Βρίσκουμε όλες της λύσεις από την  $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ . Π.χ. για την  $x^2 - 63y^2 = 1$ , αν δούμε την  $(x_1, y_1) = (8, 1)$ , τότε η  $(x_2, y_2)$  είναι η  $(x_2, y_2) = (x_1^2 + 63y_1^2, x_1y_1 + y_1x_1) = (8^2 + 63 \cdot 1^2, 8 \cdot 1 + 1 \cdot 8) = (127, 16)$ . Η 5<sup>η</sup> θετική λύση προκύπτει από το ανάπτυγμα του  $(8 + \sqrt{63})^5$  και είναι η (514088, 64769). Η λύση αυτή δίνεται και από το 9<sup>ο</sup> αναγωγήμα του αναπτύγματος της  $\sqrt{63} = [7, 1, 14]$ , περίοδος 2.

Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο υπολογισμού που περιγράφεται στο Α, για τυχαία λύση  $(r, s)$  θα υπάρχει ακέραιος  $z$ , ώστε:  $r + s\sqrt{63} = \pm(8 + \sqrt{63})^z$ . Οι  $r, s$

υπολογίζονται από τις  $r = \frac{(8 + \sqrt{63})^z + (8 - \sqrt{63})^z}{2}$  και  $s = \frac{(8 + \sqrt{63})^z - (8 - \sqrt{63})^z}{2\sqrt{63}}$ .

Για  $r + s\sqrt{63} = +(8 + \sqrt{63})^z$  έχουμε:

z	0	1	-2	3	-3	4	-4	-13	...
r	1	8	127	2024	2024	32257	32257	2139663144659048	...
s	0	1	-16	255	-255	4064	-4064	-269572217629441	...

**Ε.** Η προσπάθεια για τον υπολογισμό των αναγωγημάτων αμείβεται, όχι μόνο με λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , αλλά και με λύση κάποιας από τις  $x^2 - dy^2 = k$ , όπου  $|k| < 1 + 2\sqrt{d}$ :

Αν  $p/q$  είναι αναγωγήμα, τότε από τις ανισότητες του Θ.4.5.1. θα έχουμε:  $\left| \sqrt{d} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$  και άρα  $|q\sqrt{d} - p| < \frac{1}{q}$  [1]. Τότε:  $|p + q\sqrt{d}| = |p - q\sqrt{d} + 2q\sqrt{d}| \leq |p - q\sqrt{d}| + 2q\sqrt{d} < \frac{1}{q} + 2q\sqrt{d}$ .

Ο παρονομαστής  $q$  κάθε αναγωγήματος είναι φυσικός, οπότε  $|p + q\sqrt{d}| < \frac{1}{q} + 2q\sqrt{d} \leq (1 + 2\sqrt{d})q$ . Η τελευταία **επί την [1]** δίνει  $p^2 - dq^2 < 1 + 2\sqrt{d}$ .

Π.χ. από τα αναγωγήματα της  $\sqrt{61}$  ( $k=15$ ) παίρνουμε την (8,1) λύση για την  $x^2 - 61y^2 = 3$ , την (125,16) λύση για την  $x^2 - 61y^2 = 9$ , την (164,21) λύση για την  $x^2 - 61y^2 = -5$ , την (24079, 3083) λύση για την  $x^2 - 61y^2 = 12$ , κλπ.

**Z.** Από το προηγούμενα παραδείγματα **E**, η  $(8, 1)$  είναι λύση για την  $x^2 - 61y^2 = 3$ , η  $(125, 16)$  λύση για την  $x^2 - 61y^2 = 9$ . Τότε έχουμε βρει λύση και της  $x^2 - 61y^2 = 27$ . Το γεγονός αυτό προκύπτει από την ταυτότητα  $:(r^2 - ds^2)(u^2 - dv^2) = (ru \pm svd)^2 - d(rv \pm su)^2$ , που χρησιμοποίησε ο Brahmagurta τον 7<sup>ο</sup> μ. Χ. αιώνα για να διερευνήσει τις λύσεις της  $x^2 - dy^2 = N$  (Ονομάζεται ταυτότητα Brahmagurta. Υπενθύμιση για τις ταυτότητες: απλά διαπιστώνουμε την ισχύ τους).

**Αν  $(r, s)$  είναι λύση της  $x^2 - dy^2 = N$  και  $(u, v)$  λύση της  $x^2 - dy^2 = M$ , τότε η  $(ru \pm svd, rv \pm su) = (r, s) @ (u, v)$  [1] είναι λύση της  $x^2 - dy^2 = N \cdot M$ .**

Αν χρησιμοποιήσουμε λοιπόν την ταυτότητα Brahmagurta βρίσκουμε για την  $x^2 - 61y^2 = 27$  την λύση:  $(8*125+1*16*61, 8*16+1*125) = (1976, 253)$ , όπως επίσης και την  $(8*125-1*16*61, 8*16-1*125) = (24, 3)$ . Με την βοήθεια της ταυτότητας, μπορούμε, αν βρούμε μια λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , να παράγουμε άπειρες, πολλαπλασιάζοντας (με τον πολ/μό @) την πρώτη επί την ίδια και μετά οποιεσδήποτε από τις ήδη υπάρχουσες λύσεις.

Π.χ. για την  $x^2 - 99y^2 = 1$  δεν είναι απαραίτητο το ανάπτυγμα της  $\sqrt{99}$  για να βρούμε την λύση  $(10, 1)$ . Αν χρησιμοποιήσουμε το «+» μόνο στην [1], παίρνουμε την  $(10, 1)@ (10, 1) = (199, 20)$ . Πολ/ζοντας και πάλι παίρνουμε την  $(199, 20) @ (10, 1) = (3970, 399)$ , την  $(3970, 399)@(10, 1)=(79201, 7960)$  κλπ. Από την ταυτότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι, αν υπάρχει μια λύση της  $x^2 - dy^2 = N$ , για κάποιον μη μηδενικό **ακέραιο**  $N$ , τότε υπάρχουν άπειρες, που προκύπτουν από τον συνδυασμό αυτής και των άπειρων της  $x^2 - dy^2 = 1$ . Η αναζήτηση λύσεων για την  $x^2 - dy^2 = N$  είναι λίγο πολυπλοκότερη από την διαδικασία για την  $x^2 - dy^2 = 1$ , εκτός φυσικά αν διαλέγουμε «N».

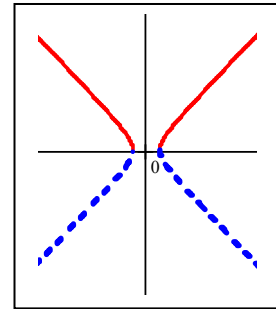
Αλλά ο ενθουσιασμός που προσφέρουν τα Μαθηματικά, η πραγματική μάθηση και η βαθιά γνώση, εξαρτώνται από την αντιπαράθεση με το άγνωστο. Όπως και στα υπόλοιπα θέματα της ζωής, η καλή γνωριμία εξασθενίζει το ενδιαφέρον.

Για δοσμένη τιμή του  $N$ , η λύση, όταν υπάρχει, δεν είναι απαραίτητο να βρίσκεται με τη βοήθεια των αναγωγμάτων της  $\sqrt{d}$ . Αν όμως  $|N| < \sqrt{d}$  και  $(r, s)$  είναι θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = N$ , τότε αποδεικνύεται ότι ο ρητός  $r/s$  είναι κάποιο από τα αναγωγήματα της  $\sqrt{d}$ .

### 7.4.9. Υπερβολική Παρατήρηση.

Οι λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$  μας δίνουν τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες πάνω στην υπερβολή. Αν  $(x_k, y_k)$  ακέραιοι που καθορίζονται από το Θ.7.4.7. και  $m, n$  φυσικοί, τότε

$$\begin{aligned} x_{m+n} + y_{m+n}\sqrt{d} &= (x_1 + y_1\sqrt{d})^{m+n} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^m (x_1 + y_1\sqrt{d})^n = \\ &= (x_m + y_m\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = x_mx_n + y_my_nd + (x_my_n + y_mx_n)\sqrt{d} \end{aligned}$$



Οπότε:  $x_{m+n} = x_mx_n + y_my_nd$ ,  $y_{m+n} = x_my_n + y_mx_n$  [Y]

Οι «τύπου» είναι σε πλήρη αναλογία με τους  $\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$ ,  $\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$ , που ισχύουν για το υπερβολικό συνημίτονο,  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  και το υπερβολικό ημίτονο,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Αν θέλουμε λύσεις για την  $x^2 - dy^2 = 1$  στους ρητούς (φυσικά δεν μας χρειάζεται η προηγούμενη θεωρία), τότε  $x = \frac{dt^2 + 1}{dt^2 - 1}$ ,  $y = \frac{2t}{dt^2 - 1}$ ,  $t \in \mathbb{Q}$ . Για την απόδειξη ακολουθούμε την γνωστή (από την αναζήτηση ρητών σημείων κύκλου) διαδικασία. Συνοπτικά: η  $(1, 0)$  είναι λύση. Για  $x \neq 1$ , έχουμε  $x^2 - 1 = dy^2$ ,  $(x+1)(x-1) = dy^2$ , οπότε  $d\left(\frac{y}{x-1}\right) = \frac{x+1}{y}$ .

Θέτουμε  $t = \frac{y}{x-1} \in \mathbb{Q}$  και έχουμε διαδοχικά:  $t(x-1) = y$ ,  $t^2(x-1)^2 = y^2$ ,  $dt^2(x-1)^2 = dy^2$ ,  $x^2 - 1 = dt^2(x-1)^2$ ,  $x+1 = dt^2(x-1)$ ,  $dt^2 + 1 = (dt^2 - 1)x$ .

Π.χ. αν  $d = 2$  τότε για  $t=3$ , παίρνουμε το σημείο  $(x, y) = \left(\frac{19}{17}, \frac{6}{17}\right)$ , για  $t = -0.5$  το σημείο  $(-3, 2)$ , για  $t = 1.5$  το  $(x, y) = \left(\frac{11}{7}, \frac{6}{7}\right)$ , για  $t=5$ , το  $(x, y) = \left(\frac{51}{49}, \frac{10}{49}\right)$ . Φυσικά από κάθε σημείο παίρνουμε και τα συμμετρικά του ως προς τους άξονες και ως προς την αρχή.

Ο Fermat είδε αμέσως ότι αν διαιρέσει την  $(r^2 + d)^2 - d(2r)^2 = (r^2 - d)^2$  δια  $(r^2 - d)^2$  προκύπτουν οι λύσεις  $(x, y) = \left(\frac{r^2 + d}{r^2 - d}, \frac{2r}{r^2 - d}\right)$  για την  $x^2 - dy^2 = 1$  και έτσι δήλωσε ότι «δεν τον ικανοποιούν» οι ρητές λύσεις. Οδήγησε λοιπόν το ενδιαφέρον των Μαθηματικών στην αναζήτηση ακεραίων λύσεων.

#### 7.4.10. Παρατήρηση Αριθμητικής Ανάλυσης.

Από την 7.4.9 [Y] συμπεραίνουμε ότι αν η  $(x_k, y_k)$  είναι η k-οστή θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = 1$ , τότε  $x_{2k} = (x_k)^2 + (y_k)^2 d$ ,  $y_{2k} = 2x_k y_k$ . Διαιρώντας παίρνουμε την:

$$\frac{x_{2k}}{y_{2k}} = \frac{(x_k)^2 + (y_k)^2 d}{2x_k y_k}. \text{ Συνήθως προτιμούμε το σχήμα : } \frac{x_{2k}}{y_{2k}} = 0.5 \left( \frac{x_k}{y_k} + \frac{d}{\frac{x_k}{y_k}} \right) [1], \text{ που είναι}$$

οικονομικότερο σε πράξεις : ένας πολ/μος, μια πρόσθεση και μια διαίρεση, αρχίζουμε με  $\frac{x_1}{y_1}$ ,

την βασική λύση. Ορίζουμε τους αριθμούς:  $r_0 = \frac{x_1}{y_1}$ ,  $r_1 = \frac{x_2}{y_2}$ ,  $r_2 = \frac{x_4}{y_4}$ ,  $r_3 = \frac{x_8}{y_8}$  κλπ.

Τότε η [1] γίνεται  $r_{n+1} = 0.5 \left( r_n + \frac{d}{r_n} \right)$  και εκφράζει τον αλγόριθμο των **Newton-Raphson**

για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας του d με αρχική προσέγγιση την  $x_1/y_1$  που είναι το αναγώγημα (m-1)-τάξης ή (2m-1)-τάξης, ανάλογα με την περίοδο m του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$ .

\*Ο αλγόριθμος των Newton-Raphson είναι ο :  $r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)}$  και συγκλίνει στην

ρίζα της  $f(x)=0$ , όπου  $r_0$  κατάλληλη αρχική προσέγγιση από την περιοχή της ρίζας. Για την  $\sqrt{d}$ , έχουμε  $f(x) = x^2 - d$  και αποδεικνύεται ότι η ακολουθία που παράγεται από τον αλγόριθμο συγκλίνει στην  $\sqrt{d}$  για κάθε  $r_0 > 0$  (Χατζηδήμος, 1978, I: Κεφ.7).

**7.4.11.** Μπορούμε να διαπραγματευθούμε την «εξίσωση Pell» με τη βοήθεια των πινάκων (χωρίς τη θεωρία των συνεχών κλασμάτων), αλλά είναι αδύνατον να αποφύγουμε την αριθμητική των ακεραίων (Wildberger, 2008)

#### 7.5. Η εξίσωση $x^2 - dy^2 = -1$

Στο τμήμα 7.4, είδαμε ότι η  $x^2 - dy^2 = +1$  έχει άπειρες λύσεις για οποιαδήποτε τιμή του d. Όμως δεν ισχύει το ίδιο για την  $x^2 - dy^2 = -1$ .

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η  $x^2 - 3y^2 = -1$  δεν έχει ακέραιες λύσεις. Στην περίπτωση όμως που η  $x^2 - dy^2 = -1$  έχει μια ακέραια λύση, θα αποδείξουμε ότι έχει άπειρες που και εδώ δίνονται με τη βοήθεια των αναγωγημάτων της  $\sqrt{d}$ .

Έχουμε και για την  $x^2 - dy^2 = -1$  **θετική** και **βασική** λύση, όπως στον ορισμό 7.4.3.

**7.5.1. Θεώρημα:**

Αν  $(p, q)$  είναι μια τυχαία θετική λύση της  $x^2 - dy^2 = -1$ , τότε  $\frac{p}{q}$  είναι κάποιο

άρτιας τάξης αναγωγήμα του συνεχούς κλάσματος στο οποίο αναπτύσσεται η  $\sqrt{d}$ .

**Απόδειξη:**

Έχουμε :  $p^2 - dq^2 = -1 \Leftrightarrow (p + q\sqrt{d})(p - q\sqrt{d}) = -1 \Leftrightarrow p - q\sqrt{d} = \frac{-1}{p + q\sqrt{d}}$  και τελικά:

$\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{-1}{q(p + q\sqrt{d})} < 0$ . Από τις  $p^2 = -1 + dq^2 \geq -1 + 2q^2$ , παίρνουμε την  $p \geq q$ , άρα και

τις  $p + q\sqrt{d} \geq q + q\sqrt{d} > 2q$ . Αν συνδυάσουμε την τελευταία με την  $\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{-1}{q(p + q\sqrt{d})}$

βρίσκουμε:  $\left| \frac{p}{q} - \sqrt{d} \right| = \frac{1}{q(p + q\sqrt{d})} < \frac{1}{q(2q)} = \frac{1}{2q^2}$  και το συμπέρασμα προκύπτει και πάλι

από το Θ.5.5.5. Επειδή  $\frac{p}{q} < \sqrt{d}$ , ο ρητός  $\frac{p}{q}$  είναι άρτιας τάξης αναγωγήμα της  $\sqrt{d}$ .

**7.5.2. Θεώρημα:** Υποθέτουμε ότι  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}, 2a_0}]$ , μήκος περιόδου  $m$ .

Αν  $m$  άρτιος, τότε η  $x^2 - dy^2 = -1$  δεν έχει λύσεις

Αν  $m$  περιττός, τότε οι θετικές λύσεις της  $x^2 - dy^2 = 1$ , είναι οι  $(x, y) = (p_{jm-1}, q_{jm-1})$ ,  $j = 1, 3, 5, \dots$

**Απόδειξη:**

Από το Θ.7.5.1. και το Θ.7.2.2, όπως και στο Θ.7.4.5, συμπεραίνουμε ότι αν  $\frac{p_k}{q_k}$  αναγωγήμα και  $(p_k, q_k)$  είναι θετική λύση, τότε ο  $k$  πρέπει να είναι άρτιος και  $s_{k+1} = 1$ , δηλ.  $m/k + 1$ , άρα  $k + 1 = jm$ , και  $k = jm - 1$ , για  $j \geq 1$  και αυτές είναι όλες οι θετικές λύσεις.

Αν όμως ο  $m$  είναι άρτιος, τότε  $mj$  επίσης άρτιος και ο  $k = jm - 1$  είναι περιττός, οπότε η  $x^2 - dy^2 = -1$  δεν έχει λύσεις.

Αν  $m$  περιττός, τότε ο  $mj - 1$  είναι άρτιος μόνο για  $j$  περιττό, οπότε λύσεις είναι οι  $(p_{m-1}, q_{m-1}), (p_{3m-1}, q_{3m-1}), (p_{5m-1}, q_{5m-1}), \dots$ , δηλ. οι  $(p_{jm-1}, q_{jm-1})$ ,  $j = 1, 3, 5, 7, \dots$ .

**7.5.3.** Αναδιατυπώνουμε τα συμπεράσματα για τις λύσεις της  $x^2 - dy^2 = \pm 1$  :

Υποθέτουμε ότι το μήκος της περιόδου της  $\sqrt{d}$  είναι  $m$ ,  $\sqrt{d} = \left[ a_0, \overline{a_1, \dots, a_{m-1}, 2a_0} \right]$

**Αν  $m$  άρτιος, τότε**

για την  $x^2 - dy^2 = 1$ , όλες οι θετικές λύσεις είναι οι  $(p_{m-1}, q_{m-1}), (p_{2m-1}, q_{2m-1}), (p_{3m-1}, q_{3m-1}), (p_{4m-1}, q_{4m-1}), (p_{jm-1}, q_{jm-1}), \dots, j \in \mathbb{N}$ . Η βασική λύση είναι η  $(p_{m-1}, q_{m-1})$ .

για την  $x^2 - dy^2 = -1$ , δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις.

**Αν  $m$  περιττός, τότε**

για την  $x^2 - dy^2 = 1$ , όλες οι θετικές λύσεις είναι οι  $(p_{2m-1}, q_{2m-1}), (p_{4m-1}, q_{4m-1}), (p_{6m-1}, q_{6m-1}), \dots, (p_{jm-1}, q_{jm-1}), \dots, j = 2, 4, 6, 8, \dots$ . Η βασική λύση είναι η  $(p_{2m-1}, q_{2m-1})$

για την  $x^2 - dy^2 = -1$ , όλες οι θετικές λύσεις είναι οι  $(p_{m-1}, q_{m-1}), (p_{3m-1}, q_{3m-1}), (p_{5m-1}, q_{5m-1}), \dots, (p_{jm-1}, q_{jm-1}), j = 1, 3, 5, 7, \dots$ . Η βασική λύση είναι η  $(p_{m-1}, q_{m-1})$ .

## 7.6. Άθροισμα δύο τετραγώνων

### 7.6.1.

Υπάρχουν ακέραιοι που γράφονται σαν άθροισμα τετραγώνων δύο άλλων ακεραίων, π.χ.  $13 = 2^2 + 3^2$ ,  $41 = 4^2 + 5^2$ ,  $543841220 = 626^2 + 23312^2$ . Μερικές φορές ο τρόπος δεν είναι μοναδικός, π.χ. για το τελευταίο παράδειγμα έχουμε και την παράσταση:  $543841220 = 3554^2 + 23048^2$ . Γενικά ισχύει ότι το γινόμενο δυο αθροισμάτων δυο τετραγώνων μπορεί να γραφεί με δύο διαφορετικούς τρόπους σαν άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων:  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a + ib)(a - ib)(c + id)(c - id) = [(a + ib)(c + id)][(a - ib)(c - id)]$ .

Οι παραστάσεις στις αγκύλες είναι συζυγείς μιγαδικοί, άρα το γινόμενο είναι άθροισμα τετραγώνων. Αλλά μπορούμε να ομαδοποιήσουμε και διαφορετικά:  $[(a + ib)(c - id)][(a - ib)(c + id)]$ . Π.χ.  $13 \cdot 41 = 533 = (2^2 + 3^2)(4^2 + 5^2) = 7^2 + 22^2 = 23^2 + 2^2$ .

Από τα αναγωγήματα της  $\sqrt{2}$  μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες **διαδοχικών** ακεραίων **καθένας** από τους οποίους είναι άθροισμα δύο τετραγώνων: Έστω  $(a, b)$  τυχαία θετική λύση της  $x^2 - 2y^2 = 1$  (έχει άπειρες θετικές) και έστω  $n = a^2$ . Τότε ο  $n+1$  είναι άθροισμα δύο τετραγώνων,  $a^2 + 1 = a^2 + 1^2$ , όπως και ο  $n-1 = a^2 - 1 = 2b^2$ .

Παραδείγματα: Από την  $(3, 2)$  θετική λύση της  $x^2 - 2y^2 = 1$ , παίρνουμε την τριάδα «8, 9, 10». Από την  $(17, 12)$  παίρνουμε την τριάδα «288, 289, 290». Από την  $(99, 70)$  την τριάδα «9800, 9801, 9802», από την  $(577, 408)$  την «332928, 332929, 332930» κλπ.



Δεν γράφονται όμως όλοι οι ακέραιοι σαν άθροισμα τετραγώνων. Π.χ. δεν υπάρχουν ακέραιοι  $m, n$  ώστε  $3 = m^2 + n^2$ . Αυτό ισχύει για όλους τους πρώτους της μορφής  $4k+3$ : Τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης ακεραίου  $m$  δια 4 είναι 0,1,2,3. Τα υπόλοιπα της διαίρεσης του  $m^2$  δια 4 είναι 0 ή 1. Τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του αθροίσματος των τετραγώνων δύο ακεραίων  $m^2 + n^2$  δια 4 είναι 0 ή 1 ή 2. Άρα ο  $4k+3$  δεν είναι δυνατόν να γραφεί σαν άθροισμα δύο τετραγώνων, αφού διαιρούμενος δια 4 αφήνει υπόλοιπο 3.

Το 1640 ο Fermat διατύπωσε την εικασία ότι κάθε πρώτος της μορφής  $4k+1$  μπορεί να εκφραστεί (κατά μοναδικό τρόπο) σαν άθροισμα δύο τετραγώνων,  $4k+1 = a^2 + b^2$ . Το γεγονός αυτό αποδείχθηκε από τον Euler το 1754. Όταν έγινε γνωστό το θεώρημα οι μαθηματικοί προσπάθησαν να ανακαλύψουν τρόπους για τον προσδιορισμό των αριθμών  $a, b$ . Δόθηκαν μέθοδοι από τους Legendre (1808), Gauss (1825), Serret (1848) κλπ. Θα περιγράψουμε στην ενότητα αυτή την κατασκευή του Legendre, που έχει άμεση σχέση με το ανάπτυγμα της  $\sqrt{p}$  σε συνεχές κλάσμα και δίνει τη μέθοδο προσδιορισμού των  $a, b$  για οποιονδήποτε  $d$  με περίοδο της  $\sqrt{d}$  περιττή.

\*Πρώτοι της μορφής  $4k+1$  υπάρχουν άπειροι. Ισχύει το θεώρημα του Dirichlet (1805-1859): Για κάθε ζεύγος μη μηδενικών ακεραίων  $a, \beta$  με  $\text{MKΔ}(a, \beta) = 1$ , άπειροι σε πλήθος όροι της ακολουθίας  $a + k\beta$ , ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) είναι πρώτοι αριθμοί (Καζαντζίδης, 1977:38).

Είδαμε ότι η  $x^2 - dy^2 = -1$  δεν έχει πάντα λύση. Η ύπαρξη λύσης εξαρτάται από το μήκος της περιόδου του συνεχούς κλάσματος στο οποίο αναπτύσσεται η  $\sqrt{d}$ , θα πρέπει να είναι περιττό. Το 1785 ο Legendre απέδειξε ότι η περίοδος της  $\sqrt{p}$  είναι περιττός αριθμός για κάθε πρώτο  $p$  της μορφής  $4k+1$ . Μόνο πρόσφατα, το 1980, ο (ελληνικής καταγωγής) αμερικανός μαθηματικός Jeffrey C. Lagarias (University of Michigan) ανακάλυψε έναν αλγόριθμο που μπορεί να καθορίσει κατά πόσον η εξίσωση  $x^2 - dy^2 = -1$  έχει ακέραιες λύσεις ή ισοδύναμα αν η περίοδος του συνεχούς κλάσματος της  $\sqrt{d}$  είναι περιττή, έπειτα από περίπου  $(\ln d)^{5+\epsilon}$  πράξεις.

### 7.6.2. Θεώρημα.

Έστω  $p$  πρώτος της μορφής  $4k+1$ . Τότε η  $x^2 - py^2 = -1$  έχει λύση. Το μήκος της περιόδου της  $\sqrt{p}$  είναι περιττός αριθμός.

#### Απόδειξη:

Ονομάζουμε  $(u, v)$  την βασική λύση (η ελάχιστη θετική λύση,  $u > 0, v > 0$ ) της  $x^2 - py^2 = 1$  (αυτή έχει άπειρες θετικές λύσεις, Θ.7.4.5).

K7: Ιδιότητες και εφαρμογές του αναπτύγματος της  $\sqrt{d}$

$$\text{Τότε } u^2 - pv^2 = 1, u^2 - (4k+1)v^2 = 1, u^2 - v^2 = 1 + 4kv^2.$$

Οι  $u, v$  δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα είτε άρτιοι, είτε περιττοί γιατί τότε η διαφορά τετραγώνων τους θα έπρεπε να είναι άρτιος, ενώ είναι περιττός.

Αν  $u=2m$  και  $v = 2t+1$ , τότε:  $u^2 - v^2 = 4m^2 - 4t^2 - 4t - 1 = 1 + 4k(2t+1)^2$ . Από αυτήν παίρνουμε την αδύνατη για  $m, k, t$  ακεραίους:  $4(m^2 - t^2 - t - k(2t+1)^2) = 2$ .

Άρα ο  $u$  είναι περιττός και ο  $v$  άρτιος,  $v=2b$ .

Από την  $u^2 - pv^2 = 1$  παίρνουμε:  $(u+1)(u-1) = pv^2$ . Ο  $u$  περιττός, άρα οι  $u+1, u-1$  είναι άρτιοι με διαφορά 2 και επειδή ο ΜΚΔ  $(u+1, u-1)$  είναι υποχρεωμένος να διαιρεί και την διαφορά:  $(u+1) - (u-1) = 2$ , θα είναι ο 2. Ας υποθέσουμε ότι  $u+1=2a$ .

$$\text{Από την } (u+1)(u-1) = pv^2 \text{ παίρνουμε } 4a(a-1) = p \cdot 4 \cdot b^2. \text{ Άρα } a(a-1) = pb^2.$$

Ο ΜΚΔ διαδοχικών ακεραίων είναι 1. Άρα ο πρώτος  $p$  διαιρεί μόνο τον  $a-1$ , ή μόνο τον  $a$  (διαφορετικά θα έπρεπε ο πρώτος  $p$  να διαιρεί και τον 1). Στην πρωτογενή ανάλυση του  $b^2$  περιέχονται οι πρώτοι της πρωτογενούς ανάλυσης του  $b$  σε άρτιους εκθέτες (παράρτ.Α6).

Αν ο  $p$  διαιρεί τον  $a-1$ , τότε ο  $a-1$  θα είναι της μορφής  $ps^2$  και ο  $a = r^2$ , όπου οι  $s, r$  περιέχουν μόνο τους πρώτους της ανάλυσης του  $b$ . Θα έχουμε:  $r^2 - ps^2 = a - (a-1) = 1$ , δηλ. η  $(r, s)$  είναι θετική λύση της  $x^2 - py^2 = 1$ , με  $u+1=2a=2r^2$ . Αλλά τότε  $r < u$ , που είναι αδύνατον, αφού  $(u, v)$  είναι η βασική λύση.

Επομένως, ο  $p$  διαιρεί τον  $a$ , ο  $a$  θα είναι της μορφής  $ps^2$  και ο  $a-1 = r^2$ , όπου και πάλι οι  $s, r$  περιέχουν μόνο τους πρώτους της ανάλυσης του  $b$ .

$$\text{Τότε όμως } r^2 - ps^2 = a - 1 - a = -1 \text{ και η } (r, s) \text{ είναι θετική λύση της } x^2 - py^2 = -1.$$

$$\text{Η } x^2 - py^2 = -1 \text{ έχει λύση,}$$

άρα το μήκος της περιόδου της  $\sqrt{p}$  δεν είναι δυνατόν να είναι άρτιο.

**7.6.3.Θεώρημα:** Αν το μήκος της περιόδου της  $\sqrt{d}$  είναι περιττό, τότε ο  $d$  γράφεται σαν άθροισμα τετραγώνων σχετικά πρώτων ακεραίων.

**Απόδειξη:**

**A.** Το μήκος περιττό, άρα το ανάπτυγμα της  $\sqrt{d}$  θα έχει τη μορφή  $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_k, a_k, \dots, a_2, a_1}, 2a_0] (7.1.2.)$ .

$$\text{Για το πλήρες πηλίκιο } (k+1)\text{-τάξης θα έχουμε } z_{k+1} = \left[ \overline{a_k, \dots, a_2, a_1, 2a_0, a_1, a_2, \dots, a_k} \right].$$

Από το Θ. 6.7.3. συμπεραίνουμε ότι ο άρρητος  $z_{k+1}$  είναι ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό και ότι ο αντίθετος του αντιστρόφου του συζυγούς του  $z_{k+1}$  είναι επίσης ανηγμένο ριζικό με ανεστραμμένη την περίοδο του  $z_{k+1}$  (αν  $z = [\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}}]$ , τότε  $-\frac{1}{z'} = [\overline{a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_2, a_1, a_0}]$ ). Η περίοδος όμως του  $z_{k+1}$  δεν μεταβάλλεται με την αναστροφή. Άρα  $z_{k+1} = -\frac{1}{z'_{k+1}}$ , οπότε  $z_{k+1} \cdot z'_{k+1} = -1$ .

Από τον αλγόριθμο 6.5.3. για τον  $z_{k+1}$  θα υπάρχουν ακέραιοι  $r_{k+1}, s_{k+1}$  με  $z_{k+1} = \frac{r_{k+1} + \sqrt{d}}{s_{k+1}}$ , οπότε  $z'_{k+1} = \frac{r_{k+1} - \sqrt{d}}{s_{k+1}}$  και η  $z_{k+1} \cdot z'_{k+1} = -1$  δίνει την παράσταση του  $d$  σαν άθροισμα τετραγώνων:  $d = r_{k+1}^2 + s_{k+1}^2$ .

**B.** Αν  $p$  πρώτος παράγοντας των  $s_{k+1}, r_{k+1}$ . Από το Θ.6.5.1. έχουμε ότι  $s_{k+1}s_k = d - r_{k+1}^2$ , η οποία σε συνδυασμό με την  $d = r_{k+1}^2 + s_{k+1}^2$  δίνει:  $s_{k+1} = s_k$ . **Γίνεται ο  $p$  πρώτος παράγοντας των  $d, s_k, s_{k+1}$ .** Από το Θ.7.2.2. έχουμε:  $p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2 = (-1)^k s_k$ , άρα ο  $p$  είναι πρώτος παράγοντας και του  $p_{k-1}^2$ , οπότε ο  $p$  διαιρεί και τον  $p_{k-1}$ . Από την  $p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1} s_{k+1}$ , ο  $p$  θα είναι πρώτος παράγοντας και του  $p_k$ . Η θεμελιώδης ιδιότητα των αναγωγημάτων  $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$  μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο  $p$  διαιρεί τον  $\pm 1$ , που είναι αδύνατον για οποιονδήποτε πρώτο. Άρα  $\text{ΜΚΔ}(r_{k+1}, s_{k+1}) = 1$ .

\*Το αντίστροφο δεν αληθεύει:  $34 = 3^2 + 5^2$ ,  $\text{ΜΚΔ}(3,5)=1$ , αλλά  $\sqrt{34} = [5, \overline{1, 4, 1, 10}]$ , το πλήθος των μερικών πηλίκων της περιόδου είναι άρτιο.

#### 7.6.4.

**Συνέπεια των Θ.7.6.2. και Θ.7.6.3. είναι ότι κάθε πρώτος της μορφής  $4k+1$  γράφεται σαν άθροισμα τετραγώνων σχετικά πρώτων ακεραίων.**

Ο Euler το 1754 (όπως έχουμε αναφέρει και στο τμήμα 7.6.1) απέδειξε ότι από τους πρώτους, μόνον εκείνοι της μορφής  $p = 4k+1$  εκφράζονται σαν άθροισμα τετραγώνων και επιπλέον απέδειξε και την μοναδικότητα αυτής της έκφρασης (Burton, 1997: 265).

Αν το μήκος της  $\sqrt{d}$  είναι  $m$ , περιττός, τότε ο δείκτης  $k+1$  που μας ενδιαφέρει για την παράσταση του  $d$  ( $d = r_{k+1}^2 + s_{k+1}^2$ ) είναι ο  $\frac{m-1}{2} + 1$  (ή  $\frac{m+1}{2}$ ).

### 7.6.5. Παραδείγματα:

1. Για την  $\sqrt{13}$  ( $13=4*3+1$ ), από τον αλγόριθμο  
6.5.3. για  $r_0 = 0$ ,  $s_0 = 1$ ,  $a_0 = 3$ , παίρνουμε:

κ	0	1	2	3	4	5
r	0	3	1	2	1	3
s	1	4	3	3	4	1
a	3	1	1	1	1	6

$$\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}] = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}] =$$

$$= [a_0, \overline{a_1, a_2, a_2, a_1, a_5}], \text{ οπότε } z_3 = [a_3, a_4, a_5] = [1, 1, 6], -\frac{1}{z_3} = [\overline{a_5, a_4, a_3}], z_3 z_3' = -1.$$

Από τον αλγόριθμο και πάλι έχουμε:  $z_3 = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$ , άρα  $z_3' = \frac{2-\sqrt{13}}{3}$  και η

$$z_3 z_3' = -1, \text{ δίνει την } \left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right) = -1. \text{ Τελικά } 13 = 4+9 = 2^2+3^2 \text{ με } \text{MK}\Delta(2,3) = 1.$$

Μπορούμε να γράφουμε κατευθείαν την παράσταση βρίσκοντας τους ακεραίους  $r_3=2$ ,  $s_3=3$  από τον πίνακα του αλγορίθμου. Επίσης, η  $(18,5)$  είναι η βασική λύση της  $x^2 - 13y^2 = -1$  και παρέχεται από το 4<sup>ο</sup> αναγώγημα,  $(p_4, q_4) = (18, 5)$ . Η επόμενη θετική λύση είναι η  $(p_{14}, q_{14}) = (23382, 6485)$ , η μεθεπόμενη η  $(p_{24}, q_{24}) = (30349828, 8417525)$  κλπ (Θ.7.5.2).

2. Η  $\sqrt{1009}$  (ο 1009 είναι πρώτος,  $1009=4*252+1$ ) έχει μήκος περιόδου 5:  $\sqrt{1009} = [31, \overline{1, 3, 3, 1, 62}]$ . Τα r,s που μας ενδιαφέρουν είναι εκείνα με δείκτη 3, άρα  $1009 = 28^2+15^2$ .

κ	0	1	2	3
r	0	31	17	28
s	1	48	15	15
a	31	1	3	3

3. Για την προσεγγιστική κατασκευή του  $\pi$ , στο τμήμα 4.5.2. χρησιμοποιήθηκε η  $113 = 7^2 + 8^2$ . Η παράσταση αυτή του 113 σαν άθροισμα δύο τετραγώνων προκύπτει από τον αλγόριθμο για την ανάπτυξη της

κ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	0	10	3	5	6	8	6	5	3	10
s	1	13	8	11	7	7	11	8	13	1
a	10	1	1	1	2	2	1	1	1	20

$\sqrt{113}$  σε συνεχές κλάσμα. Οι κατάλληλοι ακέραιοι είναι οι  $r_5=8$ ,  $s_5=7$ :  $\sqrt{113} = [10, \overline{1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 20}] =$

$$= [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_4, a_3, a_2, a_1, 2a_0}], m = 9, k+1 = 5 = \frac{m+1}{2}.$$

4. Για την  $\sqrt{115202} = [339, \overline{2, 2, 2, 2, 2, 2, 678}] = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, a_3, a_2, a_1, 2a_0}]$  οι

ακέραιοι που μας ενδιαφέρουν είναι οι r, s του αλγορίθμου που έχουν δείκτη 4 ( $m = 7$ ,  $k+1 = 4$ ), άρα  $115202 = 239^2 + 241^2$ . Ο 115202 δεν

κ	0	1	2	3	4	5	6	7
r	0	339	223	243	239	243	223	339
s	1	281	233	241	241	233	281	1
a	339	2	2	2	2	2	2	678

είναι πρώτος, αλλά έχει περίοδο με περιττό πλήθος μερικών πηλίκων.

5. Ο 57601 είναι πρώτος της μορφής  $4k+1$ ,  $57601 = 4 \cdot 14400 + 1$ , άρα η  $\sqrt{57601}$  έχει περιττή περίοδο και επομένως γράφεται σαν άθροισμα τετραγώνων.

Πράγματι:  $\sqrt{57601} = [240, \overline{480}]$  ( $m=1, k+1=1$ ) και οι αναζητούμενοι ακέραιοι είναι οι  $r_1, s_1$  που προκύπτουν από τον αλγόριθμο 6.5.3. Εδώ φυσικά, δεν μας χρειάζεται η θεωρία των συνεχών κλασμάτων, γιατί ο 576 είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε μπορούμε να γράψουμε αμέσως  $57601 = 57600 + 1 = 240^2 + 1^2$ .

## 7.7. Ορθογώνια τρίγωνα

### 7.7.1. Πυθαγόρειες τριάδες.

1. Όπως γνωρίζουμε, Πυθαγόρεια είναι μια τριάδα φυσικών  $\alpha, \beta, \gamma$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ . Αν  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ , η τριάδα ονομάζεται **αρχική** (πρωταρχική, βασική). Οι  $\alpha, \beta$  π.χ. παριστάνουν τις κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου και η  $\gamma$  την αντίστοιχη υποτείνουσα. Το τρίγωνο λέγεται και Πυθαγόρειο (για τις κατασκευαστικές λεπτομέρειες αρκεί  $\alpha \leq \beta \leq \gamma < \alpha + \beta$ , συνθήκες που είναι ισοδύναμες με την τριγωνική ανισότητα).

Αν  $(\alpha, \beta, \gamma)$  αρχική Πυθαγόρεια τριάδα, τότε οι  $\alpha, \beta$  δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άρτιοι ή ταυτόχρονα περιττοί.

**Απόδειξη:** Αν  $\alpha, \beta$  άρτιοι, τότε και τα τετράγωνά τους θα είναι άρτιοι, άρα και το άθροισμα των τετραγώνων, άρα και ο  $\gamma^2$ , άρα και ο  $\gamma$ , άτοπον, διότι  $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$  ενώ βρέθηκε ήδη κοινός διαιρέτης ο 2. Αν  $\alpha, \beta$  περιττοί, τότε και τα τετράγωνα θα είναι περιττοί, άρα ο  $\gamma^2$  θα είναι της μορφής  $4\lambda + 2$ , άτοπον, γιατί τα τετράγωνα ακεραίων είναι της μορφής  $4\lambda$  ή  $4\lambda + 1$ .

2. Αν  $(\alpha, \beta, \gamma)$  αρχική Πυθαγόρεια τριάδα, υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $\alpha$  άρτιος και  $\beta$  περιττός, οπότε και ο  $\gamma$  περιττός.

3. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  αρχική πυθαγόρεια τριάδα, με  $\alpha$  άρτιο και  $\beta$  περιττό, τότε θα υπάρχουν δύο φυσικοί αριθμοί  $\kappa, \lambda$ , που δεν είναι ταυτόχρονα περιττοί, με  $\text{ΜΚΔ}(\kappa, \lambda) = 1, \kappa > \lambda$  και τέτοιοι ώστε  $\alpha = 2\kappa\lambda, \beta = \kappa^2 - \lambda^2, \gamma = \kappa^2 + \lambda^2$ , και αντίστροφα.

**Απόδειξη:**

$$\text{Α. Αν } \alpha = 2\tau, \text{ τότε } (2\tau)^2 + \beta^2 = \gamma^2 \text{ και } \tau^2 = \frac{(\gamma + \beta)(\gamma - \beta)}{2 \cdot 2} \quad [1]$$

Οι παράγοντες  $\frac{(\gamma + \beta)}{2}, \frac{(\gamma - \beta)}{2}$  του  $\tau^2$  είναι ακέραιοι, γιατί  $\beta, \gamma$  περιττοί και επομένως το άθροισμα και η διαφορά τους είναι άρτιοι.

$$\text{Επιπλέον } \text{ΜΚΔ}\left(\frac{\gamma + \beta}{2}, \frac{\gamma - \beta}{2}\right) = 1, \text{ διαφορετικά, αν } \delta \text{ κοινός διαιρέτης αυτών, τότε ο } \delta$$

θα διαιρούσε και το άθροισμα και την διαφορά τους, δηλ. τα  $\beta, \gamma$ , άρα και τα  $\beta^2, \gamma^2$ , επομένως και τον  $\alpha^2$ , άρα και τον  $\alpha$ , άτοπο, γιατί  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$  (παράρτημα Α).

Στη σχέση [1] το αριστερό μέλος είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή οι παράγοντες του δεξιού μέλους είναι πρώτοι μεταξύ τους, δεν υπάρχει κοινός πρώτος στην πρωτογενή μορφή καθενός από τους  $\frac{(\gamma + \beta)}{2}, \frac{(\gamma - \beta)}{2}$ . Άρα κάθε πρώτος παράγοντας των  $\frac{(\gamma + \beta)}{2}, \frac{(\gamma - \beta)}{2}$  είναι σε άρτιο εκθέτη, επομένως καθένας είναι τέλειο τετράγωνο, έστω  $\kappa^2 = \frac{\gamma + \beta}{2}, \lambda^2 = \frac{\gamma - \beta}{2}$  με  $\text{ΜΚΔ}(\kappa^2, \lambda^2) = 1, \text{ΜΚΔ}(\kappa, \lambda) = 1$  (άρα οι  $\kappa, \lambda$  δεν είναι άρτιοι) και επίσης  $\kappa > \lambda$ .

Προσθέτοντας και αφαιρώντας έχουμε ότι  $\gamma = \kappa^2 + \lambda^2, \beta = \kappa^2 - \lambda^2$ . Επειδή  $\beta, \gamma$  περιττοί, οι  $\kappa, \lambda$  αποκλείεται να είναι ταυτόχρονα περιττοί. Αντικαθιστώντας στην [1] έχουμε  $\tau^2 = \kappa^2 \lambda^2$ , άρα  $\tau = \kappa \lambda$ , οπότε  $\alpha = 2\kappa \lambda$ .

**Β.** Έστω  $\kappa, \lambda$  φυσικοί με  $\kappa > \lambda, \text{ΜΚΔ}(\kappa, \lambda) = 1$  και όχι ταυτόχρονα περιττοί.

Τότε η τριάδα  $\alpha = 2\kappa \lambda, \beta = \kappa^2 - \lambda^2$  και  $\gamma = \kappa^2 + \lambda^2$  ικανοποιεί την εξίσωση  $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ , γιατί  $\alpha^2 + \beta^2 = 4\kappa^2 \lambda^2 + \kappa^4 + \lambda^4 - 2\kappa^2 \lambda^2 = (\kappa^2 + \lambda^2)^2 = \gamma^2$ . Επιπλέον, επειδή αν κάποιος αριθμός διαιρεί δυο άλλους θα διαιρεί και το άθροισμα και την διαφορά τους, θα έχουμε  $\text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma) / \text{ΜΚΔ}(\beta + \gamma, \beta - \gamma)$ , δηλ.  $\text{ΜΚΔ}(\kappa^2 - \lambda^2, \kappa^2 + \lambda^2) / \text{ΜΚΔ}(2\kappa^2, 2\lambda^2) = 2 * \text{ΜΚΔ}(\kappa^2, \lambda^2) = 2$ . (Υποθέσαμε ότι  $\text{ΜΚΔ}(\kappa, \lambda) = 1$ , άρα οι  $\kappa, \lambda$  δεν έχουν κοινό πρώτο παράγοντα, άρα και τα τετράγωνα τους δεν θα έχουν, αφού στην πρωτογενή μορφή των τετραγώνων περιέχονται τα τετράγωνα των πρώτων της πρωτογενούς μορφής των  $\kappa, \lambda$ ). Ο  $\text{ΜΚΔ}(\kappa^2 - \lambda^2, \kappa^2 + \lambda^2)$  θα είναι επομένως 1 ή 2. Αποκλείεται όμως ο 2 γιατί οι  $\kappa^2 - \lambda^2, \kappa^2 + \lambda^2$  είναι και οι δυο περιττοί, αφού ο ένας από αυτούς είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Άρα  $\text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma) = 1$  και επομένως  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$  και η τριάδα  $(\alpha, \beta, \gamma)$  είναι αρχική.

Η πρόταση δίνει όλες τις αρχικές, π.χ. (3,4,5), (5,12,13) κλπ. Αν βρεθεί μια αρχική τριάδα  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , τότε έχουμε βρει άπειρες Πυθαγόρειες, αφού και οι  $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$  αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα. Η λύση του προβλήματος ήταν γνωστή στον Ευκλείδη: Εύρεϊν δύο τετραγώνους αριθμούς, ώστε και τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον. (Στοιχεία, X28, Λήμμα α).

Παραδείγματα:

Για  $\kappa = 37$  και  $\lambda = 26$ , προκύπτει η αρχική Πυθαγόρεια τριάδα «693, 1924, 2045».

Για  $\kappa = 43, \lambda = 14$ , παίρνουμε την 1204, 1653, 2045.

Η ίδια υποτείνουσα προέκυψε από την πρωτογενή ανάλυση του  $2045 = 5 * 409$ . Ο 2045 γράφεται σαν άθροισμα τετραγώνων κατά δύο τρόπους, αφού είναι γινόμενο αθροισμάτων τετραγώνων:  $(2+i)(2-i)(20+3i)(20-3i), i = (0,1)$ .

4.Ο Πρόκλος στα σχόλια στο πρώτο βιβλίο του Ευκλείδη για την κατασκευή Πυθαγόρειων τριάδων (TLG: σελ. 428-429), αναφέρει την Πυθαγορική και την Πλατωνική μέθοδο (Proclus, σελ.428-429).

«παραδέδονται δε και μέθοδοί τινες τῆς εὐρέσεως τῶν τοιούτων τριγώνων, ὧν τὴν μὲν εἰς Πλάτωνα ἀναπέμπουσι, τὴν δὲ εἰς Πυθαγόραν. [καὶ ἡ μὲν **Πυθαγορική**] ἀπὸ τῶν περιττῶν ἐστὶν ἀριθμῶν. τίθησι γὰρ τὸν δοθέντα περιττὸν ὡς ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ λαβοῦσα τὸν ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον καὶ τούτου μονάδα ἀφελοῦσα τοῦ λοιποῦ τὸ ἥμισυ τίθησι τῶν περὶ τὴν ὀρθήν τὸν μείζονα· προσθεῖσα δεκαὶ τούτῳ μονάδα τὴν λοιπὴν ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν· οἷον τὸν τρία λαβοῦσα καὶ τετραγωνίσασα καὶ ἀφελοῦσα τοῦ ἐννέα μονάδα τοῦ ἡ λαμβάνει τὸ ἥμισυ τὸν δ, καὶ τούτῳ προστίθησι πάλιν μονάδα καὶ ποιεῖ τὸν ε, καὶ εὐρηται τρίγωνον ὀρθογώνιον ἔχον τὴν μὲν τριῶν, τὴν δὲ τεσσάρων, τὴν δὲ πέντε.

«ἡ δὲ **Πλατωνική** ἀπὸ τῶν ἀρτίων ἐπιχειρεῖ. λαβοῦσα γὰρ τὸν δοθέντα ἄρτιον τίθησιν αὐτὸν ὡς μίαν πλευρὰν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦτον διελοῦσα δίχα καὶ τετραγωνίσασα τὸ ἥμισυ, μονάδα μὲν τῷ τετραγώνῳ προσθεῖσα ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν, μονάδα δ ἀφελοῦσα τοῦ τετραγώνου ποιεῖ τὴν ἑτέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν· οἷον τὸν τέσσαρα λαβοῦσα καὶ τούτου τὸ ἥμισυ τὸν β τετραγωνίσασα καὶ ποιήσασα αὐτὸν δ. ἀφελοῦσα μὲν μονάδα ποιεῖ τὸν γ, προσθεῖσα δὲ ποιεῖ τὸν ε, καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ γενόμενον τρίγωνον, ὃ καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας ἀπετελεῖτο μεθόδου. τὸ γὰρ ἀπὸ τούτου ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ γ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ δ συντεθεῖσιν».

Χρησιμοποιώντας σύμβολα έχουμε:

**Πυθαγορική:** Αρχίζουμε με περιττό,  $\mu$ ,  $\mu > 1$ , και δημιουργούμε τους αριθμούς  $\frac{\mu^2 - 1}{2}$  και  $\frac{\mu^2 + 1}{2}$ . Τότε οι δύο μικρότεροι αριθμοί,  $\mu$  και  $\frac{\mu^2 - 1}{2}$  εκφράζουν κάθετες πλευρές και ο μεγαλύτερος την υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου, γιατί  $\mu^2 + \left(\frac{\mu^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu^2 + 1}{2}\right)^2$ .

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι αν πάρουμε ως  $\mu$  τον τρία, προκύπτει η τριάδα (3,4,5). Φυσικά, η μέθοδος δίνει Πυθαγόρειες τριάδες με  $\mu$  οποιονδήποτε περιττό, π.χ. (5,12,13), (7,24,25) κλπ.

**Πλατωνική:** Η πρόταση του Πλάτωνα, κατά τον Πρόκλο, είναι να ξεκινήσουμε από ἄρτιο,  $\beta$ , ( $\beta \geq 4$ ) και να δημιουργήσουμε τους  $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 1$  και  $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + 1$ . Τότε  $\beta^2 + \left(\frac{\beta^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{\beta^2}{4} + 1\right)^2$ . Παράδειγμα για  $\beta = 4$ , έχουμε την τριάδα (4,3,5), για  $\beta = 6$ , την (6,8,10), αν ξεκινήσουμε με τον 8 την (8,15,17) κλπ.

### 7.7.2. Πυθαγόρειες τριάδες με δύο διαδοχικούς φυσικούς.

Θα αναζητήσουμε διαδοχικούς φυσικούς  $x, y$  ώστε  $x^2 + y^2 = z^2$ .

Αν  $x, y$  διαδοχικοί φυσικοί, τότε  $\text{ΜΚΔ}(x, y, z) = 1$ . Αν ισχύει και η  $x^2 + y^2 = z^2$ , τότε σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, θα υπάρχουν δύο σχετικά πρώτοι φυσικοί αριθμοί  $\kappa > \lambda$ , τέτοιοι ώστε  $x = 2\kappa\lambda$ ,  $y = \kappa^2 - \lambda^2$ ,  $z = \kappa^2 + \lambda^2$ .

Επειδή οι  $x, y$  είναι διαδοχικοί, θα έχουμε:  $y - x = \kappa^2 - \lambda^2 - 2\kappa\lambda = (\kappa - \lambda)^2 - 2\lambda^2 = \pm 1$

Θέτουμε  $u = \kappa - \lambda$ ,  $v = \lambda$  και οδηγούμαστε στην αναζήτηση λύσεων της  $u^2 - 2v^2 = \pm 1$ .

Το συνεχές κλάσμα της  $\sqrt{2}$  είναι το:  $\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$ .

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα 7.5.3, αφού η περίοδος του συνεχούς κλάσματος της  $\sqrt{2}$  είναι 1, οι  $u^2 - 2v^2 = \pm 1$  έχουν άπειρες λύσεις και ιδιαίτερα, τα άρτιας τάξης αναγωγήματα της  $\sqrt{2}$  δίνουν τις λύσεις της  $u^2 - 2v^2 = -1$  και τα περιττής τάξης αναγωγήματα τις λύσεις της  $u^2 - 2v^2 = +1$ . Τα αναγωγήματα της  $\sqrt{2}$  είναι:  $\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \frac{8119}{5741}, \dots\}$ .

Η βασική λύση της  $u^2 - 2v^2 = -1$  είναι η  $(1, 1)$ , ενώ της  $u^2 - 2v^2 = +1$  είναι η  $(3, 2)$ .

Παραδείγματα:

Λύσεις των $u^2 - 2v^2 = \pm 1$				Κάθετες πλευρές		Υποτείνουσα
u	v	$\lambda=v$	$\kappa=u+\lambda$	$x=2\kappa\lambda$	$y=\kappa^2-\lambda^2$	$z=\kappa^2+\lambda^2$
1	1	1	2	4	3	5
3	2	2	5	20	21	29
7	5	5	12	120	119	169
17	12	12	29	696	697	985
41	29	29	70	4060	4059	5741
...	...	...	...	...	...	...
3363	2378	2378	5741	27304196	27304197	38613965

\*Το μεγαλύτερο μέρος της ανάπτυξης του K7 στηρίχθηκε κυρίως στα 25, 32, 66, 76, 129, 137, 139.





## K8: Το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών

### 8.1. Ισοδύναμα Σύνολα

**8.1.1.** Αν έχουμε πεπερασμένα σύνολα, όσο διαφορετικά και να είναι μεταξύ τους, π.χ.  $\{5\sqrt{2}, i^i, \pi\}$ ,  $\{i, 2i, 3i, 4i, 5i\}$ ,  $\{\aleph, \omega, \aleph, \neq, \odot, \iota, \otimes, \alpha, \mathcal{H}, \mathcal{H}, \Psi\}$ , μπορούμε πάντα να πούμε ποιο περιλαμβάνει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων. Δεν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο που έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του. Το πρόβλημα γίνεται κάπως πολύπλοκο όταν θέλουμε να καθορίσουμε το μέγεθος των απειροσυνόλων.

Για παράδειγμα, ποιο είναι μεγαλύτερο, το σύνολο των φυσικών ή το σύνολο των ακεραίων; Το σύνολο των ρητών ή το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών; Το σύνολο των υπερβατικών ή το σύνολο των πραγματικών; Υπάρχουν περισσότερα σημεία σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους μίας μονάδας ή σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους δύο μονάδων ή σε μια ευθεία; Υπάρχουν περισσότερα σημεία σε μια ευθεία ή σε ένα τετράγωνο; Τα ερωτήματα μπορεί να φαίνονται απλοϊκά και πολλές απαντήσεις είναι διαισθητικά προφανείς.

Το σύνολο των φυσικών είναι ένα μέρος του συνόλου των ρητών, το ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα μέρος μιας ευθείας και πιθανόν να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι οι φυσικοί είναι λιγότεροι από τους ρητούς ή τα σημεία ενός ευθ. τμήματος λιγότερα από τα σημεία μιας ευθείας. Στα μαθηματικά όμως αυτό που φαίνεται «φυσικό συμπέρασμα» συχνά αποδεικνύεται λανθασμένο, η διαίσθηση οπωσδήποτε είναι απαραίτητη και βοηθά στην μαθηματική ανακάλυψη και δημιουργία (Euler, Ramanujan, Hermite), αλλά, πολλές φορές οι αποδείξεις οδηγούν σε αποτελέσματα αντίθετα προς αυτήν. Όταν μεταβαίνουμε από τα πεπερασμένα σύνολα στα απειροσύνολα, οι νόμοι που ισχύουν στα πεπερασμένα (π.χ. το «μέρος» είναι μικρότερο από το «όλον») δεν είναι απαραίτητο να διατηρούνται.

Οι συναρτήσεις μας παρέχουν τη δυνατότητα να συγκρίνουμε δύο σύνολα, στοιχείο προς στοιχείο. Για δύο πεπερασμένα σύνολα,  $A, B$ , οι εκφράσεις «υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$ » και «τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων» είναι εννοιολογικά ταυτόσημες. Η αποφασιστική στροφή στη θεωρία συνόλων έγινε όταν ο Cantor (1845-1918) αποφάσισε να συγκρίνει με τον ίδιο τρόπο και τα απειροσύνολα. Η ύπαρξη 1-1 (αμφιμονοσήμαντης, ένα προς ένα) και επί συνάρτησης του  $A$  επί του  $B$  είναι απαραίτητη για να εξαφανίσει την ασάφεια στο «ίδιο πλήθος στοιχείων» των απειροσυνόλων.

Συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε την έκφραση «τα σύνολα  $A$  και  $B$  έχουν τον ίδιο πληθάριθμο» ή «τα  $A$  και  $B$  έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό», αντί της «τα  $A$  και  $B$  έχουν το ίδιο πλήθος, ή τον ίδιο αριθμό, στοιχείων».

### 8.1.2.Ορισμοί.

Λέμε ότι δύο σύνολα έχουν την ίδια ισχύ, ή ότι είναι ισοδύναμα, ή ότι έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό (ισοπληθικά) και γράφουμε  $A \approx B$ , όταν υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$ . Για τυχαία σύνολα  $A, B, \Gamma$  ισχύουν οι:

- $A \approx A$  (ταυτοτική συνάρτηση)
- $A \approx B \Leftrightarrow B \approx A$  (αν υπάρχει η  $f: A \rightarrow B$  και είναι 1-1 και επί, τότε για την  $B \approx A$  παίρνουμε την  $f^{-1}$ )
- Αν  $A \approx B$  και  $B \approx \Gamma$ , τότε  $A \approx \Gamma$  (αν  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow \Gamma$ , παίρνουμε την  $g \circ f$ )

Ένα σύνολο  $A$  ονομάζεται **πεπερασμένο** αν  $A = \emptyset$  ή αν υπάρχει φυσικός αριθμός  $n \in \mathbb{N}$  και μια συνάρτηση  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ , 1-1 και επί. Τότε το πλήθος των στοιχείων του  $A$  είναι  $n$ , ο  $n$  ονομάζεται **πληθικός αριθμός** (cardinal number) του συνόλου  $A$  και γράφουμε:  $\text{card}(A) = n$ .

Διαφορετικά το σύνολο λέγεται **άπειρο**. Αν  $\{1, 2, 3, \dots, n\} \approx \{1, 2, 3, \dots, m\}$ , τότε  $n=m$ , οπότε ο πληθικός αριθμός συνόλου είναι καλά ορισμένος. Τα σύνολα  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  ονομάζονται **τμήματα** των φυσικών. Το κενό σύνολο, που θεωρούμε πεπερασμένο, **ορίζουμε** να έχει πληθικό αριθμό τον 0.

Ένα σύνολο  $\Sigma$  που είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών  $\mathbb{N}$ , ονομάζεται **αριθμήσιμο**. Αν  $\Sigma \approx \mathbb{N}$ , και  $f: \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$  η κατάλληλη συνάρτηση, τότε τα στοιχεία του  $\Sigma$  παρουσιάζονται ως εξής:  $\{f(1), f(2), f(3), \dots\}$  ή καλύτερα με τον καθιερωμένο συμβολισμό με δείκτες,  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots\}$ , δηλ. χρησιμοποιούμε τους φυσικούς σαν ετικέτες που δείχνουν την «τάξη» των στοιχείων του  $\Sigma$  (πρώτο, δεύτερο, τρίτο κλπ.). Μια συνάρτηση αναφέρεται συχνά και με το όνομα **οικογένεια**, το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο των **δεικτών** της οικογένειας και οι τιμές της είναι τα **μέλη** της οικογένειας. Αυτό γίνεται συνήθως όταν ενδιαφερόμαστε κυρίως για τις τιμές της συνάρτησης, δηλ. για τα μέλη της οικογένειας. Αν το σύνολο δεικτών είναι το  $I$ , γράφουμε για το σύνολο τιμών της συνάρτησης, δηλ. για τα μέλη της οικογένειας:  $\{\sigma_i, i \in I\}$ . Οικογένειες με σύνολο δεικτών το  $\mathbb{N}$  ονομάζονται **ακολουθίες** (γενικά, αν η ακολουθία δεν είναι 1-1, δεν είναι απαραίτητο τα μέλη της να είναι διακεκριμένα). Έτσι προκύπτει και ο **συμβολισμός**  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots\}$  και λέμε ότι **έχουμε πετύχει μια αρίθμηση των στοιχείων του  $\Sigma$** . Τα μέλη μιας οικογένειας μπορεί να είναι σύνολα:  $\{A_i, i \in I\}$ . Η οικογένεια  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$  ονομάζεται ακολουθία συνόλων.

Ένα σύνολο που είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο ονομάζεται **το πολύ αριθμήσιμο**, διαφορετικά λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

### 8.1.3. Παραδείγματα:

1. Το σύνολο των φυσικών,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ , είναι ισοδύναμο με το υποσύνολο των άρτιων φυσικών,  $f(n) = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , με το υποσύνολο των περιττών,  $f(n) = 2n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , με το υποσύνολο των τετραγώνων των φυσικών,  $f(n) = n^2$ , με το υποσύνολο των κύβων των φυσικών,  $f(n) = n^3$ , με το υποσύνολο των πολλαπλασίων του 26,  $f(n) = 26n$ , με το υποσύνολο των δυνάμεων του 2,  $f(n) = 2^n$ , με το υποσύνολο των δυνάμεων του 10,  $f(n) = 10^n$ , με το υποσύνολο  $\{2, 3, \dots\}$ ,  $f(n) = n + 1$ , κλπ. (γενικά μπορούμε να ορίσουμε μια 1-1 και επί συνάρτηση μεταξύ του συνόλου των φυσικών και οποιουδήποτε άπειρου υποσυνόλου του).

2. Η  $f(x) = a + (\beta - \alpha)x$  (ή στη μορφή  $\rho(x) = (1 - x)\alpha + x\beta$ ) είναι συνάρτηση 1-1 του  $[0, 1]$  επί οπουδήποτε κλειστού διαστήματος  $[\alpha, \beta]$  ή του  $(0, 1)$  επί του  $(\alpha, \beta)$ . Το διάστημα  $[0, 1]$  είναι ισοδύναμο με κάθε κλειστό διάστημα και το  $(0, 1)$  ισοδύναμο με κάθε ανοιχτό. Έτσι μπορούμε να περιγράψουμε όλα τα κλειστά π.χ. διαστήματα με τη βοήθεια του  $[0, 1]$ .

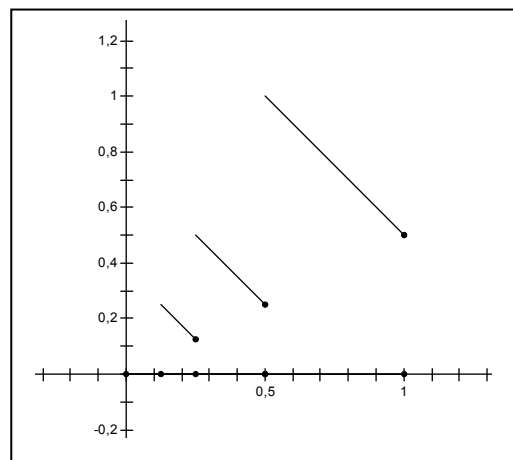
Μπορούμε να αποδείξουμε την ισοδυναμία και των τεσσάρων τύπων διαστημάτων. Για παράδειγμα ορίζουμε την 1-1 και επί συνάρτηση μεταξύ των  $(0, 1]$  και  $(0, 1)$  ως εξής:

$$\text{αν } \frac{1}{2} < x \leq 1, \text{ τότε } y = \frac{3}{2} - x, \text{ άρα } \frac{1}{2} \leq y < 1$$

$$\text{αν } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \text{ τότε } y = \frac{3}{4} - x, \text{ άρα } \frac{1}{4} \leq y < \frac{1}{2}$$

$$\text{αν } \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4}, \text{ τότε } y = \frac{3}{8} - x, \text{ άρα } \frac{1}{8} \leq y < \frac{1}{4} \text{ κλπ.}$$

Έτσι καταλήγουμε στην  $(0, 1] \approx (0, 1)$  και ανάλογα αποδεικνύεται και η  $[0, 1) \approx (0, 1)$ . Για

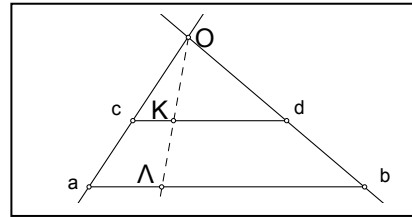


την  $[0, 1) \approx [0, 1]$  αντιστοιχίζουμε το 0 του πρώτου με το 0 του δεύτερου διαστήματος και χρησιμοποιούμε την προηγούμενη διαδικασία αντιστοίχησης.

Κ8: Το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών

3. Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$  είναι 1-1 και επί μεταξύ των διαστημάτων

$(a,b)$  και  $(c,d)$  και ως είναι το ένα υποδιάστημα του άλλου. Την ισοδυναμία των  $(a,b)$  και  $(c,d)$  μπορούμε να πάρουμε και από τις  $(a,b) \approx (0,1)$  και  $(c,d) \approx (0,1)$ . Συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των σημείων όλων των ευθ. τμημάτων είναι το ίδιο.



4.  $\mathbb{R} \approx (0,1)$ . Η πραγματική ευθεία έχει το ίδιο πλήθος σημείων με το διάστημα  $(0,1)$ .

Θεωρούμε την συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{1+|x|} \right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Επειδή  $x < 1+|x|$ , θα έχουμε  $0 < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{1+|x|} \right) < 1$ .

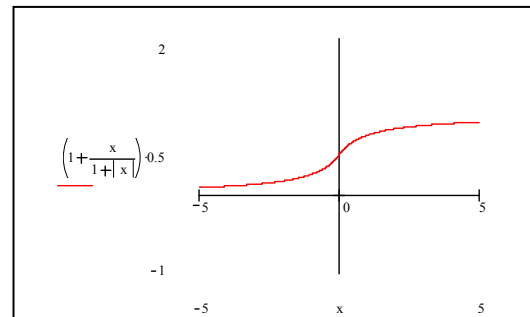
Αν  $f(x) = f(y)$ , τότε  $\frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$ , από την οποία συμπεραίνουμε ότι

$(xy \geq 0$  και  $x(1+|y|) = y(1+|x|)$ ) και

$(xy \geq 0$  και  $x - y = y|x| - x|y|)$ .

Οι  $x, y$  είναι ομόσημοι, άρα  $x-y=0$  και τελικά  $x=y$ , δηλ. η  $f$  είναι αμφιμονοσήμαντη.

Θεωρούμε τυχαίο  $y \in (0,1)$ .



Αν  $y \geq 0.5$  και  $y = f(x)$ , τότε  $(x \geq 0$  και  $y = f(x))$ , δηλ.  $\left( x \geq 0$  και  $y = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{1+x} \right) \right)$  από

την οποία παίρνουμε  $x = \frac{2y-1}{2(1-y)}$ , π.χ. (αν  $y=0.6$ , τότε  $x=0.25$ ), (αν  $y=0.9$ , τότε  $x=4$ ).

Αν  $y < 0.5$  και  $y = f(x)$ , τότε  $(x < 0$  και  $y = f(x))$ , δηλ.  $\left( x < 0$  και  $y = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{1-x} \right) \right)$  από

την οποία παίρνουμε  $x = \frac{2y-1}{2y}$ , π.χ. (αν  $y=0.4$ , τότε  $x=-0.25$ ), (αν  $y = 0.1$ , τότε  $x = -4$ ).

Επομένως, για οποιοδήποτε  $y \in (0,1)$ , υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$ , ώστε  $f(x) = y$ .

Μπορούμε φυσικά να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία της ανάλυσης και να διαπιστώσουμε ότι η συνεχής συνάρτηση  $f$  έχει θετική παράγωγο στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$ , και  $(0, \infty)$ ,  $\frac{0.5}{(-1+x)^2} > 0$ ,  $\frac{0.5}{(1+x)^2} > 0$ , άρα η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $(-\infty, +\infty)$ , επομένως και 1-1, με σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{1+|x|} \right), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{1+|x|} \right) \right) = (0, 1).$$

Για το ότι το διάστημα  $(0, 1)$  είναι ισοδύναμο με το  $\mathbb{R}$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τις συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$  με  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ , ή  $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $g(x) = \frac{2x-1}{1-|2x-1|}$ ,  $x \in (0, 1)$ .

5. Το διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι ισοδύναμο με το  $\mathbb{R} : h(x) = \tan x$ . Το  $(-1, 1)$  είναι ισοδύναμο με το  $\mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ . Με τη βοήθεια της σύνθεσης ή των ισοδυναμιών  $\mathbb{R} \approx (0, 1)$  και  $(a, b) \approx (0, 1)$  αποδεικνύουμε ότι και κάθε ανοιχτό, μη κενό, διάστημα  $(a, b)$  έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το  $\mathbb{R}$ .

#### 8.1.4.

Οι αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις βεβαιώνουν για την ισοπληθικότητα των γνησίων υποσυνόλων με τα σύνολα. Ίσως είναι αναπάντεχο αλλά, αφού το αποδείξαμε, πρέπει να το πιστέψουμε, ακόμα κι αν δεν μπορούμε να κατανοήσουμε τι σημαίνει. Ο ίδιος ο Cantor που επί τρία χρόνια (1871-1874) προσπαθούσε να αποδείξει ότι είναι αδύνατον να οριστεί 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της πλευράς ενός τετραγώνου (δηλ. ενός ευθ. τμήματος) και των σημείων του τετραγώνου, όταν τελικά όρισε την αντιστοιχία που θεωρούσε αδύνατη, έγραψε στον φίλο του Dedekind: «το βλέπω, αλλά δεν το πιστεύω». Η αντίθεση μεταξύ του τυπικά σωστού και του διαισθητικά παράδοξου σε όλη της τη μεγαλοπρέπεια! Σημειώνουμε ότι εκτός από το τετράγωνο, ο κύβος έχει ακριβώς τόσα σημεία όσα και το ευθ. τμήμα και γενικότερα κάθε γεωμετρικό σχήμα που περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει τόσα σημεία όσα και το ευθ. τμήμα.

Η θεωρία του Cantor ήταν τόσο αντίθετη με τη διαίσθηση που ανάγκασε τον μεγάλο Poincare να την χαρακτηρίσει σαν μία «αρρώστια» από την οποία τα μαθηματικά κάποια μέρα θα θεραπευθούν. Σκληρή αλλά και αντιδεοντολογική επίθεση δέχτηκε ο Cantor και από τον πρώην δάσκαλό του L.Kronecker, βασικό στέλεχος του τότε γερμανικού μαθηματικού κατεστημένου. Είναι όμως γνωστή η «ρήση» του Schopenhauer: «η αλήθεια περνά από τρία στάδια: πρώτον χλευάζεται, δεύτερον συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο και τρίτον γίνεται αποδεκτή σαν αυτονόητη».

Η ισοδυναμία ενός συνόλου με ένα γνήσιο υποσύνολό του αποτελεί χαρακτηρισμό της απειρίας ενός συνόλου. Ο Dedekind **όρισε απειροσύνολα** εκείνα που είναι **ισοδύναμα με ένα γνήσιο υποσύνολό τους**. Κάθε υπερσύνολο απείρου συνόλου είναι απειροσύνολο. Ένα υποσύνολο  $M$  του συνόλου των φυσικών είναι άπειρο όταν για κάθε φυσικό  $n$  υπάρχει στοιχείο  $m$  του  $M$  μεγαλύτερο του  $n$ . Τα σύνολα  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  είναι απειροσύνολα.

## 8.2. Αριθμήσιμα σύνολα

**8.2.1.** Η ισοδυναμία συνόλων, όπως έχει ορισθεί, μας δίνει ένα μέσον για να συγκρίνουμε δύο απειροσύνολα. Π.χ. αν αποδείξουμε ότι ένα σύνολο  $\Sigma$  είναι αριθμήσιμο, τότε έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των φυσικών, αφού υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση του  $\mathbb{N}$  επί του  $\Sigma$ . Μερικές φορές είναι ευκολότερο να δείξουμε την ύπαρξη συνάρτησης  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ , αντί της  $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ .

Είδαμε σε προηγούμενα παραδείγματα ότι το πλήθος των αρτίων, των περιττών, των δυνάμεων του 2 κλπ. είναι το ίδιο με το πλήθος των φυσικών. Αυτά τα γνήσια υποσύνολα του  $\mathbb{N}$  είναι ισοπληθικά με το  $\mathbb{N}$  (είναι αριθμήσιμα απειροσύνολα, όπως και το  $\mathbb{N}$ ).

Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο  $\Sigma$  είναι αριθμήσιμο, δεν είναι απαραίτητο να βρούμε τον «τύπο» της συνάρτησης, να δείξουμε με ποιό τρόπο βρίσκεται το  $n$ -οστό στοιχείο της ακολουθίας συναρτήσεως του  $n$ . Αρκεί να δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να γράψουμε τα στοιχεία του συνόλου σε μια σειρά (όχι ως προς το μέγεθος), να υποδείξουμε τον τρόπο «αρίθμησης» των στοιχείων του  $\Sigma$ , οπότε μπορούμε να τα **αριθμήσουμε** π.χ. το σύνολο των πρώτων αριθμών  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$  είναι αριθμήσιμο (οι μαθηματικοί δεν έχουν βρει ακόμα τον τύπο της συνάρτησης η οποία περιγράφει την αρίθμηση των στοιχείων του).

Ένα αριθμήσιμο σύνολο λέμε ότι έχει πληθικό αριθμό τον **άλεφ μηδέν**, σύμβολο  $\aleph_0$  (το επέλεξε ο Cantor, είναι το πρώτο γράμμα του Εβραϊκού αλφαβήτου), δηλ  $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ .

**8.2.2. Θεώρημα: Κάθε υποσύνολο αριθμήσιμου είναι το πολύ αριθμήσιμο.**

Έστω  $A$  υποσύνολο του αριθμήσιμου  $\Sigma$ . Αν  $A$  είναι πεπερασμένο, η πρόταση ισχύει. Έστω ότι  $A$  είναι απειροσύνολο, οπότε και το  $\Sigma$  και έστω  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$  η αρίθμηση του  $\Sigma$ , με τα  $\sigma_k$  διακριτά. Θεωρούμε  $\mu = \lambda(1)$  τον ελάχιστο φυσικό, ώστε  $\sigma_\mu$  να είναι στοιχείο του  $A$ . Ορίζουμε τον  $\kappa = \lambda(2) > \lambda(1)$ , να είναι ο ελάχιστος φυσικός ώστε  $\sigma_\kappa$  να είναι στοιχείο του  $A$ . Αν έχουν ορισθεί οι  $\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \dots, \lambda(n-1)$ , ορίζουμε τον  $\lambda(n)$  να είναι ο ελάχιστος φυσικός  $n > \lambda(n-1)$ , ώστε ο  $\sigma_n$  να είναι στοιχείο του  $A$ . Τότε η σύνθεση των  $\lambda$  και  $\sigma$ ,  $\sigma \circ \lambda$ , είναι μια 1-1 απεικόνιση του  $\mathbb{N}$  επί του  $A$ . Αν λοιπόν έχουμε απειροσύνολο, υποσύνολο αριθμήσιμου, τότε είναι και αυτό αριθμήσιμο. Αν  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$  η αρίθμηση του  $\Sigma$ , τότε η αρίθμηση του υποσυνόλου του θα είναι  $\sigma_{\lambda_1}, \sigma_{\lambda_2}, \sigma_{\lambda_3}, \dots$ .

Τονίζουμε ότι οι δείκτες δηλώνουν την τάξη, η διάταξη μπορεί και να μην είναι δυνατή, π.χ.  $\{5i, 10i, 15i, \dots\} \subset \{i, 2i, 3i, 4i, 5i, \dots\}$ ,  $i=(0,1)$ .

Συμπεραίνουμε ότι **κάθε άπειρο υποσύνολο αριθμήσιμου είναι αριθμήσιμο** και επίσης ότι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο αριθμήσιμου.

**8.2.3. Το καρτεσιανό γινόμενο  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$  είναι αριθμήσιμο σύνολο.**

Θεωρούμε την  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow$  επί ενός υποσυνόλου του  $\mathbb{N}$ , που ορίζεται ως έξης:  $f(m, n) = 2^m 3^n$  (Apostol, 1974: 40). Η συνάρτηση είναι 1-1, γιατί η ανάλυση οποιουδήποτε φυσικού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι μοναδική. Το σύνολο  $\{2^m 3^n, m, n \in \mathbb{N}\}$  είναι απειροσύνολο, γιατί δεν είναι άνω φραγμένο.

**Παρατήρηση:** το καρτεσιανό γινόμενο δύο πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο σύνολο, το καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας πεπερασμένων συνόλων με πεπερασμένο σύνολο δεικτών είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο.

**8.2.4. Το σύνολο των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.**

Μπορούμε να αριθμήσουμε τους θετικούς με τους άρτιους φυσικούς, τους αρνητικούς με τους περιττούς φυσικούς που είναι μεγαλύτεροι του 1 και να κρατήσουμε τον 1 για τον αριθμό 0.

ακέραιοι	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	...
Φυσικοί, αρίθμηση	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

K8: Το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών

Η συνάρτηση  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ , όπου  $f(0) = 1$ ,  $f(v) = 2v$ , αν  $v$  θετικός και  $f(v) = -2v+1$ , αν ο  $v$  είναι αρνητικός ακέραιος, καθορίζει αυτή την αρίθμηση.

### 8.2.5.

Αν έχουμε τα σύνολα  $\{2, 4\}$  και  $\{1, 3, 5\}$  που είναι ξένα και έχουν πληθικούς αριθμούς 2 και 3, τότε η ένωσή τους  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  είναι φανερό ότι έχει πληθικό αριθμό 5, το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Παρατηρούμε όμως ότι αυτό δεν συμβαίνει στα απειροσύνολα, π.χ. μεταξύ των άλλων, τον πληθάριθμο  $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$  έχουν τα σύνολα των άρτιων φυσικών  $\{2, 4, 6, \dots\}$ , των περιττών φυσικών  $\{1, 3, 5, \dots\}$ , τα οποία είναι ξένα, αλλά η ένωσή τους, το σύνολο των φυσικών  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ , έχει τον ίδιο πληθάριθμο με αυτά, δηλ.  $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ .

**8.2.6. Θεώρημα: Η ένωση δύο ξένων το πολύ αριθμήσιμων συνόλων είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.**

**Απόδειξη:**  $A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots\}$ ,  $A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots\}$  και  $S = \bigcup_{n=1}^2 A_n$ . Αν  $x$

στοιχείο της ένωσης, επειδή είναι ξένα, ανήκει σε ένα μόνον από τα  $A_1, A_2$ , άρα υπάρχει μοναδικό ζεύγος φυσικών  $(n, m)$ , ώστε  $x = a_{n,m}$  με  $n=1$ , ή  $n=2$  και  $m$  φυσικό. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = f(a_{n,m}) = 2^n 3^m$ . Η  $f$  είναι 1-1 του  $S$  επί ενός απείρου υποσυνόλου του αριθμήσιμου  $\mathbb{N}$ , άρα  $S$  αριθμήσιμο σύνολο (η ένωση είναι πεπερασμένο σύνολο μόνο αν και τα δυο σύνολα  $A_1, A_2$  είναι πεπερασμένα, αν το ένα είναι αριθμήσιμο, τότε η ένωση, ως υπερσύνολο, είναι απειροσύνολο). Πιο απλά μπορούμε να σχηματίσουμε την ακολουθία  $a_{1,1}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{1,3}, a_{2,3}, \dots$  και να χρησιμοποιήσουμε τους περιττούς φυσικούς για τα στοιχεία του πρώτου συνόλου και τους άρτιους για τα στοιχεία του δεύτερου.

**8.2.7. Θεώρημα: Η αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο το πολύ αριθμήσιμων συνόλων είναι επίσης το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.**

**Απόδειξη:**

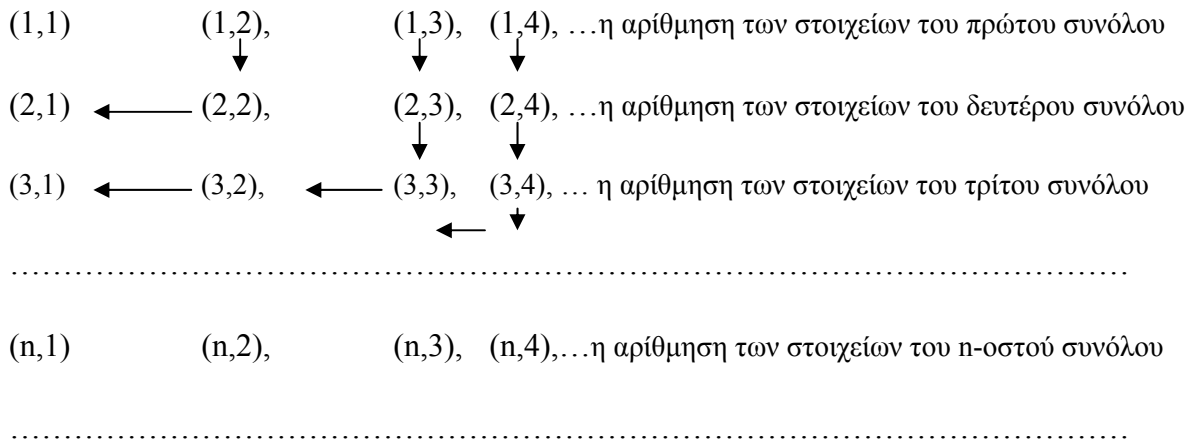
Έστω  $A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots\}$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ , η αρίθμηση του τυχαίου  $A_n$  και  $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Αν  $x$  στοιχείο της ένωσης, επειδή είναι ξένα, ανήκει σε μοναδικό  $A_n$ , άρα υπάρχει μοναδικό ζεύγος φυσικών  $(n, m)$ , ώστε  $x = a_{n,m}$ .



Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x)=(n,m)$ , εκείνα τα  $n,m$  για τα οποία  $x = a_{n,m}$ . Η  $f$  είναι 1-1 του  $S$  επί ενός υποσυνόλου του αριθμήσιμου  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , άρα  $S$  αριθμήσιμο σύνολο (κάποιο από τα  $A_k$  πιθανόν να είναι πεπερασμένο, αν έστω και ένα σύνολο της ένωσης είναι αριθμήσιμο, η ένωση είναι απειροσύνολο).

Σχηματικά η αρίθμηση μπορεί να περιγραφεί ως εξής (γράφουμε μόνο τους δείκτες):



Η αρίθμηση της ένωσης, αρχίζοντας από το (1,1) επιτυγχάνεται με βάση τους (περιττούς) γνόμενες, όπως δείχνουν τα βέλη: (1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1), (1,4),... δηλ. το πρώτο στοιχείο  $s_1$ , της ακολουθίας της ένωσης,  $s_1, s_2, s_3, \dots$ , θα είναι το πρώτο στοιχείο του πρώτου συνόλου,... το έβδομο στοιχείο της ακολουθίας θα είναι το τρίτο στοιχείο του τρίτου συνόλου κλπ.

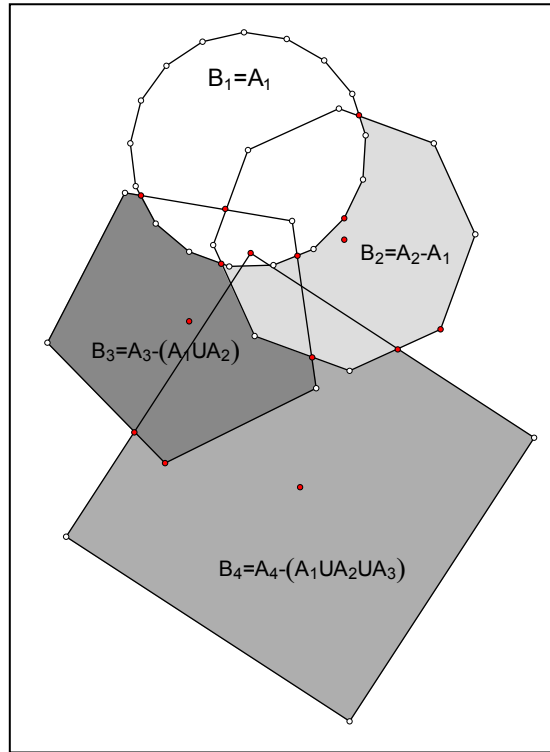
Αν  $m \geq n$ , τότε το  $m$ -οστό στοιχείο του  $n$ -οστού συνόλου θα έχει δείκτη τον φυσικό  $(m-1)^2+n$ , γιατί θα έχουν προηγηθεί  $m-1$  γνόμενες (το άθροισμα διαδοχικών περιττών είναι το τετράγωνο του πλήθους τους).

Αν  $m < n$ , τότε ο δείκτης του  $(n,m)$  θα είναι  $n^2-m+1$ , αφού από τον συνολικό αριθμό των στοιχείων των  $n$  γνωμόνων, θα πρέπει να αφαιρέσουμε  $0,1,2,\dots, m-1$  για να φτάσουμε στην «γωνία» του γνόμονα (που έχει το στοιχείο με ίσους δείκτες).

### 8.2.8.Θεώρημα:

**Η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.**

**Απόδειξη:** Έστω  $F = \{A_1, A_2, \dots\}$  αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων. Θεωρούμε την οικογένεια  $G = \{B_1, B_2, \dots\}$ , όπου τα σύνολα  $B_k$  ορίζονται ως εξής:  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = A_2 - A_1$ ,  $B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$ , ...,  $B_n = A_n - \bigcup_1^{n-1} A_k$ . Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η εφαρμογή για  $n=4$ , αν υποθέσουμε ότι  $A_1$  είναι το 17-γωνο,  $A_2$  το 8-γωνο,  $A_3$  το πεντάγωνο,  $A_4$  το τετράγωνο. Τα σύνολα  $B_k$  είναι ξένα ανά δύο, έτσι κατασκευάστηκαν άρα η  $G$  είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δυο συνόλων.



Θα αποδείξουμε ότι :  $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$ .

Κάθε  $B_k$  είναι υποσύνολο του  $A_k$ , οπότε  $\bigcup_n B_n \subseteq \bigcup_n A_n$ .

Αντίστροφα: Αν  $x \in \bigcup_n A_n$  τότε υπάρχουν σύνολα  $A_k$  στα οποία ανήκει το  $x$ .

Θεωρούμε το σύνολο των δεικτών  $\{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\}$  και έστω  $n_0$  το ελάχιστο στοιχείο του.

Άρα  $x \in A_{n_0}$  &  $x \notin \bigcup_1^{n_0-1} A_k$ .

Τότε  $x \in B_{n_0}$ , από τον ορισμό των  $B_k$ , άρα  $x \in \bigcup_n B_n$  και  $\bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_n B_n$

Από τις [1] και [2] έχουμε  $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$ .

Αν έχουμε μια ακολουθία αριθμήσιμων συνόλων, μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτή τη μέθοδο, μια ακολουθία ξένων ανά δυο αριθμήσιμων συνόλων, με την ίδια ένωση, οπότε, σύμφωνα με την 8.2.7, η ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Παρατήρηση: η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο σύνολο, η ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο σύνολο.

### 8.3. Ρητοί και Αλγεβρικοί

#### 8.3.1. Το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο.

Η αρίθμηση των ακεραίων έγινε κάπως εύκολα. Οι ρητοί είναι πυκνά κατανεμημένοι: μεταξύ δυο ρητών υπάρχουν άπειροι άλλοι, π.χ. μεταξύ του 1 και του 2 υπάρχει ένα απειροσύνολο που πρέπει επίσης να αριθμήσουμε. Ο Cantor ανέμενε ότι ο πληθάριθμος των ρητών θα ήταν μεγαλύτερος του  $\aleph_0$ , αλλά η παρακάτω τυπική απόδειξη διέψευσε και πάλι τη διαίσθησή του.

**A.** Ας θεωρήσουμε το σύνολο  $A_n$ ,  $n$  φυσικός, των θετικών ρητών που έχουν παρονομαστή  $n$ . Τότε  $\bigcup_n A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι το σύνολο των θετικών ρητών, άρα αριθμήσιμο, αφού κάθε  $A_n$  είναι αριθμήσιμο.

$$\text{Π.χ. } A_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots \right\}, A_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right\}, A_3 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots \right\}, A_4 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots \right\} \text{ κλπ.}$$

Θεωρούμε επίσης το σύνολο  $B_n$  των αρνητικών ρητών με παρονομαστή  $n$ . Τότε  $\bigcup_n B_n$

αριθμήσιμο, αφού είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων. Π.χ.  $B_1 = \left\{ \frac{-1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-3}{1}, \dots \right\}$ ,

$$B_2 = \left\{ \frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \dots \right\}, B_3 = \left\{ \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{3}, \dots \right\}, B_4 = \left\{ \frac{-1}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-3}{4}, \dots \right\} \text{ κλπ.}$$

Γίνεται λοιπόν το σύνολο των ρητών:  $\mathbb{Q} = \left( \bigcup_n A_n \right) \cup \left( \bigcup_n B_n \right) \cup \{0\}$ , επομένως

αριθμήσιμο (το  $\mathbb{Q}$  είναι υπερσύνολο των φυσικών άρα απειροσύνολο).

K8: Το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών

Οι ίδιοι ρητοί εμφανίζονται πολλές φορές στα θεωρούμενα σύνολα, σύμφωνα όμως με το Θ.8.2.8. δεν είναι απαραίτητο να είναι ξένα ανά δύο για να αριθμήσουμε τα στοιχεία της ένωσης.

**B.** Μπορούμε να ορίσουμε και την 1-1 αντιστοιχία  $q: \mathbb{Q} \rightarrow$  επί του  $M$ , όπου  $M$  υποσύνολο των φυσικών ως εξής:  $q\left(\frac{m}{n}\right) = 2^{z_m} 3^{z_n}$ , όπου  $z_m, z_n$  οι φυσικοί που καθορίζονται από την αρίθμηση του συνόλου των ακεραίων, π.χ.  $q\left(\frac{-2}{3}\right) = 2^5 3^6 = 23328$ , οι 5 και 6 είναι οι «φυσικές ετικέτες» που αναρτήθηκαν στους ακεραίους -2 και 3 κατά την αρίθμησή τους. Οι ρητοί  $\frac{m}{n}$  είναι το σύνολο των ζευγών ακεραίων  $(m, n)$  με  $n \neq 0$ .

**Γ.** Το σύνολο  $\mathbf{R}_1$  των ριζών των πρωτοβάθμιων εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμο, αφού αυτό είναι το σύνολο των ρητών, π.χ. η ρίζα της εξίσωσης  $3x+2=0$  είναι ο  $\frac{-2}{3}$  και οποιοσδήποτε ρητός,  $\mu/\nu$ ,  $\nu \neq 0$ , είναι ρίζα της  $\nu x - \mu = 0$ .

**Δ.** Το σύνολο όλων των διαστημάτων με ρητά άκρα είναι αριθμήσιμο: Αν  $\{q_1, q_2, q_3, \dots\}$  είναι η αρίθμηση των ρητών, θεωρούμε το σύνολο  $A_n = \{(q_n, \text{δεξιό άκρο ρητός})\}$ , δηλ.  $A_n$  είναι όλα τα διαστήματα με αριστερό άκρο το  $q_n$  και δεξιό ένα ρητό, άρα  $A_n$  αριθμήσιμο. Τότε το σύνολο όλων των διαστημάτων με ρητά άκρα είναι η  $\bigcup_1^\infty A_n$ , αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων, άρα αριθμήσιμο.

### 8.3.2.

**A. Το σύνολο των 3-άδων ακεραίων  $(\alpha, \beta, \gamma)$  είναι αριθμήσιμο.**

Ορίζουμε την απεικόνιση  $\phi$  με  $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = 2^{z_\alpha} 3^{z_\beta} 5^{z_\gamma}$ , όπου  $z_\alpha, z_\beta, z_\gamma$  είναι οι φυσικοί τους οποίους χρησιμοποιήσαμε στην αρίθμηση του συνόλου των ακεραίων(8.2.4.), π.χ.  $\phi(3, -5, 2) = 2^6 3^{11} 5^4$ .

**B.** Το σύνολο των δευτεροβαθμίων εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμο.

Στην  $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$  αντιστοιχίζουμε τον αριθμό  $\phi(\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma) = 2^{z_\alpha} 3^{z_\beta} 5^{z_\gamma}$ , π.χ. στην  $3\chi^2 - 5\chi + 2 = 0$ , αντιστοιχίζουμε τον  $2^6 3^{11} 5^4 = 7085880000$  (οι εκθέτες είναι από την αρίθμηση των ακεραίων, 8.2.4). Φυσικά για τις δευτεροβάθμιες θεωρούμε ότι  $a \neq 0$ .

Γ. Το σύνολο των ριζών των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Ας είναι  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots$ , η αρίθμηση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Κάθε δευτεροβάθμια έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Για την εξίσωση  $\kappa_1$ , γράφουμε  $\kappa_{1,1}$  για την πρώτη,  $\kappa_{1,2}$  για την δεύτερη. Αν οι ρίζες είναι λιγότερες από 2, βάζουμε μηδενικά στις κενές θέσεις των ριζών. Το σύνολο  $\mathbf{R}_2$  των πραγματικών ριζών των δευτεροβαθμίων περιέχεται στην αριθμήσιμη ένωση  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\kappa_{i,1}, \kappa_{i,2}\}$ , άρα είναι το πολύ αριθμήσιμο.

### 8.3.3. Το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Α. Το σύνολο  $E_n$  όλων των πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού  $n$  με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμο.

Σε κάθε πολυωνυμική εξίσωση βαθμού  $n$ :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x + a_1 x + a_0$  ( $a_n \neq 0$ ), αντιστοιχίζουμε την  $(n+1)$ -άδα των ακεραίων  $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  και σ' αυτήν τον αριθμό  $2^{z_{a_0}} 3^{z_{a_1}} 5^{z_{a_2}} \dots p_{n+1}^{z_{a_n}}$ , όπου  $p_{n+1}$  είναι ο  $n+1$ -οστός πρώτος αριθμός και  $z_{a_0}, z_{a_1}, \dots, z_{a_n}$  οι μοναδικοί φυσικοί που προέκυψαν από την αρίθμηση των ακεραίων.

Β. Το σύνολο  $\mathbf{R}_n$  των ριζών όλων των πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού  $n$  με ακέραιους συντελεστές είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Έστω  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$  η αρίθμηση των  $n$ -βαθμίων εξισώσεων. Επειδή κάθε μία έχει το πολύ  $n$  ρίζες, θεωρούμε ακριβώς  $n$ , συμπληρώνοντας με μηδενικά, μπορούμε να κατατάξουμε σε μια σειρά τις ρίζες ως εξής:  $\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \pi_{1,3}, \dots, \pi_{1,n}, \pi_{2,1}, \pi_{2,2}, \dots, \pi_{2,n}, \pi_{3,1}, \pi_{3,2}, \pi_{3,3}, \dots, \pi_{3,n} \dots$  κλπ. Επομένως, το σύνολο  $\mathbf{R}_n$  των πραγματικών ριζών των  $n$ -βαθμίων εξισώσεων περιέχεται στην αριθμήσιμη ένωση  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\pi_{i,1}, \pi_{i,2}, \dots, \pi_{i,n}\}$ .

Γ. Η αριθμήσιμη ένωση  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{R}_k$  των  $\mathbf{R}_k$ , είναι το σύνολο των αλγεβρικών. Είναι απειροσύνολο, ως υπερσύνολο των ρητών (που είναι το αριθμήσιμο σύνολο των ριζών των πρωτοβάθμιων εξισώσεων), άρα είναι αριθμήσιμο σύνολο.

## 8.4. Υπερβατικοί και Πραγματικοί

**8.4.1.** Μέχρι τώρα είδαμε απειροσύνολα που είναι αριθμήσιμα. Όλα τα αριθμήσιμα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, τον  $\aleph_0$ . Ευτυχώς για τους Μαθηματικούς, όχι μόνον υπάρχουν και υπεραριθμήσιμα σύνολα αλλά η κατάσταση είναι ακόμα πιο περίπλοκη: υπάρχουν υπεραριθμήσιμα σύνολα που δεν έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό. Ο Cantor έδειξε την μέθοδο με την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν αριθμό που παραλείπεται, σε οποιαδήποτε διαδικασία αρίθμησης των πραγματικών. Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε το διάσημο πλέον «διαγώνιο επιχείρημα» του Cantor για την απόδειξη της υπεραριθμησιμότητας των πραγματικών αριθμών και θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις για το μέγεθος των απειροσυνόλων.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι κατορθώσαμε να απαριθμήσουμε με κάποιον τρόπο τους πραγματικούς, δηλ. όλοι οι πραγματικοί είναι όροι μιας ακολουθίας,  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , π.χ. ας υποθέσουμε ότι οι τρεις πρώτοι όροι είναι οι 5.2818..., -5.7318..., 2011.1111,... .Στη συνέχεια γράφουμε ένα μηδενικό που ακολουθείται από μια τελεία και θεωρούμε τον πρώτο αριθμό της ακολουθίας αυτής. Εξετάζουμε το ψηφίο που βρίσκεται στη θέση των δεκάτων (στο παράδειγμα είναι το 2). Αν είναι διαφορετικό από το 1 γράφουμε μετά την τελεία 1, αν είναι 1 γράφουμε το ψηφίο 2 (έχουμε μέχρι τώρα : 0.1). Για τη θέση των εκατοστών ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο (οπότε για το παράδειγμα θα έχουμε 0.112...). Ο αριθμός που κατασκευάζεται δεν περιλαμβάνεται στην ακολουθία  $(r_n)$ .

Διαφέρει από τον  $n$ -οστό όρο της ακολουθίας κατά το  $n$ -οστό δεκαδικό ψηφίο. Φυσικά μπορούμε να περιοριστούμε στο  $(0,1)$  αφού αυτό είναι ισοπληθικό με το  $\mathbb{R}$ .

Το σύμβολο που επιλέχθηκε για τον πληθικό αριθμό του  $\mathbb{R}$  είναι το  $c$ ,  $c = \text{card}(\mathbb{R})$ , από το αρχικό γράμμα της λέξης continuum. Το σύνολο των σημείων ενός οποιοδήποτε διαστήματος ή ευθ. τμήματος, έχει πληθάρημο  $c$ . Λέμε ότι τέτοια σύνολα έχουν τον πληθικό αριθμό του συνεχούς.

### 8.4.2.

Το σύνολο των αλγεβρικών είναι αριθμήσιμο, των πραγματικών υπεραριθμήσιμο. Επομένως **το σύνολο των υπερβατικών είναι υπεραριθμήσιμο**, διαφορετικά, θα ήταν αριθμήσιμο και το  $\mathbb{R}$  ως ένωση των αριθμήσιμων συνόλων των αλγεβρικών και υπερβατικών αριθμών.

**8.4.3.** Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι κάθε άπειρο σύνολο έχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο, ότι ο πληθικός αριθμός ενός απειροσυνόλου δεν μεταβάλλεται αν προσθέσουμε σ' αυτό τα στοιχεία ενός αριθμήσιμου συνόλου και ότι ο πληθικός αριθμός ενός μη αριθμήσιμου συνόλου δεν μεταβάλλεται αν αφαιρέσουμε από αυτό ένα αριθμήσιμο υποσύνολό του. Αν ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ ενός συνόλου  $A$  και ενός υποσυνόλου του συνόλου  $B$ , τότε, όπως έχουμε δει και στα παραδείγματα, δεν μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο  $A$  έχει λιγότερα στοιχεία από το  $B$ , αλλά σίγουρα μπορούμε να πούμε ότι το  $B$  δεν έχει λιγότερα στοιχεία από το  $A$ . Ο δεκαεννιάχρονος γερμανός μαθηματικός Felix Bernstein (1878-1956), φοιτητής του Cantor, απέδειξε ότι αν το  $A$  δεν έχει λιγότερα στοιχεία από το  $B$  και το  $B$  δεν έχει λιγότερα από το  $A$ , τότε τα δυο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου  $A$  και ενός υποσυνόλου του  $B$ , χωρίς να υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του  $A$  και ολόκληρου του  $B$ , τότε λέμε ότι το  $B$  έχει περισσότερα στοιχεία από το  $A$  ή ισοδύναμα ότι ο πληθάριθμος του  $B$  είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο του  $A$ .

**8.4.4.** Από την προηγούμενη παράγραφο, επειδή κάθε άπειρο σύνολο έχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο, συμπεραίνουμε ότι ο πληθικός αριθμός ενός αριθμήσιμου δεν είναι μεγαλύτερος από τον πληθικό αριθμό ενός απειροσυνόλου. Τα αριθμήσιμα σύνολα παριστάνουν την «μικρότερη τάξη» απειρίας. Το  $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$  είναι ο μικρότερος άπειρος πληθάριθμος. Ο Cantor απέδειξε ότι και το δυναμοσύνολο του  $\mathbb{N}$ , το  $P(\mathbb{N})$ , είναι ένα μη αριθμήσιμο απειροσύνολο και επειδή για τα πεπερασμένα σύνολα  $n$  στοιχείων, το πλήθος των στοιχείων του δυναμοσυνόλου είναι  $2^n$ ,  $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}$ , επέλεξε για τον  $\text{card}(P(\mathbb{N}))$  το σύμβολο  $2^{\aleph_0}$  και απέδειξε ότι  $2^{\aleph_0} = c$  ( $c$ : ο πληθικός αριθμός του συνεχούς).

Κατάφερε επίσης να αποδείξει ότι και για κάθε σύνολο  $A$  ισχύει  $\text{card}(A) < \text{card}(P(A))$ . Έπεται ότι  $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots$  και προκύπτει το περίφημο ερώτημα (**υπόθεση του συνεχούς**): είναι ο  $2^{\aleph_0}$  ο πρώτος μη αριθμήσιμος πληθάριθμος ή όχι; Η υπόθεση του συνεχούς μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: κάθε άπειρο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  έχει πληθάριθμο ή  $\aleph_0$ , ή  $2^{\aleph_0} = c$ .

Ο Paul Cohen το 1963 απέδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι ανεξάρτητο αξίωμα και η άρνησή του οδηγεί στις μη Καντοριανές Θεωρίες Συνόλων, όπως ακριβώς και η άρνηση του πέμπτου αιτήματος οδήγησε στις Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

## 8.5. Κάλυψη Συνόλου

### 8.5.1.

Ο γάλλος μαθηματικός Henri Leon Lebesgue (1875-1941), στο φημισμένο σύγγραμμά του: *Lecons sur l' integration et la recherche des fonctions primitives* (1904) πραγματοποίησε το μεγάλο βήμα της θεμελίωσης της σύγχρονης θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης. Η εργασία του απείχε πολύ από τις επικρατούσες μαθηματικές θεωρίες και, ένα από τα σπουδαιότερα επιτεύγματα της Ανάλυσης δέχτηκε αρχικά οξεία κριτική, όπως γίνεται συνήθως με ιδέες που για να κατανοηθούν απαιτείται ριζική αναθεώρηση της υπάρχουσας «πνευματικής επιβολής».

Την εποχή λοιπόν του Cantor δεν είχε ακόμα αναπτυχθεί η σύγχρονη θεωρία μέτρου, που ίσως προσφέρει περισσότερη κατανόηση (από τα μυστήρια των πληθαρικών των απειροσυνόλων) για την συντριπτική υπεροχή των αρρήτων και ιδιαίτερα των υπερβατικών έναντι των ρητών ή ακόμα και των αλγεβρικών αριθμών. Για να συγκρίνουμε αυτά τα σύνολα σκεφτόμαστε τους πραγματικούς σαν σημεία μιας ευθείας, ενός άξονα. Κάθε διάστημα αυτής της ευθείας π.χ. το  $[0,1]$  περιέχει ρητά και άρρητα σημεία. Θα αποδείξουμε ότι όχι μόνον τα ρητά, αλλά και τα αλγεβρικά σημεία αυτής της ευθείας μπορούν να καλυφθούν από ένα σύνολο διαστημάτων με τυχαία μικρό συνολικό μήκος.

### 8.5.2.

Βασικό σύνολο είναι το  $\mathbb{R}$ , όλα τα θεωρούμενα παρακάτω σύνολα είναι υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ .

Μια  **$\varepsilon$ -περιοχή**,  $\varepsilon > 0$ , του σημείου  $a$  είναι το σύνολο πραγματικών  $\pi(a, \varepsilon) = \{x: a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$ . Γενικότερα, **περιοχή** του σημείου  $a$ ,  $\pi(a)$ , ονομάζεται κάθε υποσύνολο  $E$  του  $\mathbb{R}$  που περιέχει μια  $\varepsilon$ -περιοχή του  $a$ . Το σημείο  $a$  του συνόλου  $A$  ονομάζεται **εσωτερικό** σημείο του  $A$ , μόνον αν υπάρχει περιοχή του  $a$  που να περιέχεται στο  $A$ . Ένα **σύνολο**  $A$  ονομάζεται **ανοιχτό** όταν αποτελείται μόνο από εσωτερικά σημεία, δηλ. όταν για κάθε σημείο  $a \in A$ , υπάρχει  $\pi(a) \subseteq A$ .

Για ένα **ανοιχτό διάστημα**  $(\alpha, \beta)$  και  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ , έχουμε  $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon) \subseteq (\alpha, \beta)$ , αρκεί να πάρουμε  $\varepsilon > 0$  με την ιδιότητα  $0 < \varepsilon < \min\{\gamma - \alpha, \beta - \gamma\}$ . Για τα διαστήματα  $(\alpha, +\infty)$ ,  $(-\infty, \beta)$  και  $\gamma$  σημείο τους, μπορούμε να πάρουμε  $\varepsilon < \gamma - \alpha$ , ή  $\varepsilon < \beta - \gamma$ . Επομένως, ένα ανοιχτό διάστημα, φραγμένο ή όχι, είναι ανοιχτό σύνολο.



**α. Η ένωση οσωνδήποτε ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο:** Αν  $a$  σημείο της ένωσης, τότε υπάρχει σύνολο  $A$  της ένωσης με  $a \in A$ ,  $A$  όμως ανοιχτό, άρα υπάρχει  $\pi(a)$  που περιέχεται στο  $A$ , άρα και στην ένωση.

**β. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο:** Αν  $a$  σημείο της τομής, τότε για κάθε σύνολο  $A$  της τομής  $a \in A$ ,  $A$  ανοιχτό, άρα υπάρχει  $\pi(a)$  που περιέχεται στο  $A$ , άρα και στην τομή. Η συγκεκριμένη ιδιότητα δεν ισχύει για άπειρες τομές, π.χ.  $\bigcap_1^\infty \left(-\frac{1}{v}, \frac{1}{v}\right) = \{0\}$  και δεν υπάρχει  $\pi(0)$  που να περιέχεται στο  $\{0\}$ . Το  $\{0\}$  δεν είναι ανοιχτό σύνολο.

**γ. Το  $\mathbb{R}$  είναι ανοιχτό σύνολο,** γιατί για κάθε  $\varepsilon > 0$  και  $\alpha \in \mathbb{R} : (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ .

**δ. Το  $\emptyset$  είναι ανοιχτό σύνολο,** γιατί η συνεπαγωγή:

άν  $\alpha \in \emptyset$ , τότε  $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subseteq \emptyset$  είναι αληθινή, αφού η υπόθεση είναι ψευδής πρόταση.

Λέμε ότι το σύνολο των ανοιχτών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$  πού ικανοποιεί τις ιδιότητες  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ορίζει μια **τοπολογία** στο  $\mathbb{R}$ .

### 8.5.3. Αναπαράσταση ανοιχτού συνόλου .

Έστω  $A$  μη κενό ανοιχτό σύνολο του  $\mathbb{R}$ . Για τυχαίο  $x \in A$ , υπάρχει  $\pi(x)$  που περιέχεται στο  $A$ , τουλάχιστον μία. Αυτή είναι, από τον ορισμό της, ανοιχτό διάστημα. Δηλ. το  $A$  περιέχει ανοιχτά διαστήματα. **Συστατικό διάστημα** (component interval, Apostol, 1974:51) ονομάζεται το «μεγαλύτερο» ανοιχτό διάστημα του  $A$ , δηλ. αν  $I$  είναι συστατικό διάστημα, τότε δεν υπάρχει ανοιχτό διάστημα  $J \neq I$ , ώστε  $I \subseteq J \subseteq A$ . Ένα συστατικό διάστημα του  $A$  δεν είναι γνήσιο υποσύνολο κάποιου ανοιχτού διαστήματος του  $A$ .

**Κάθε σημείο  $x$  ενός ανοιχτού συνόλου  $A$  ανήκει σε μοναδικό συστατικό διάστημα.**

#### Απόδειξη

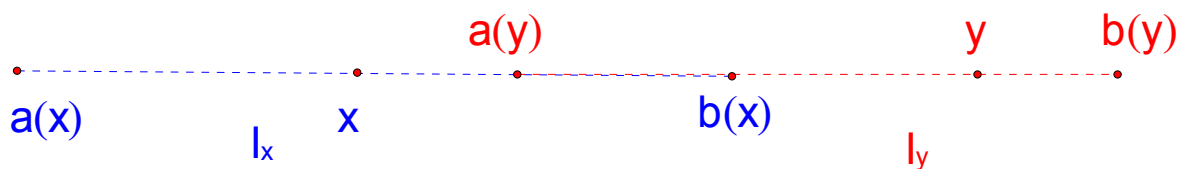
Έστω  $x \in A$ . Τότε υπάρχει περιοχή του  $x$  που περιέχεται στο  $A$ , τουλάχιστον μία. Π.χ.  $\pi(x, \varepsilon_1), \pi(x, \varepsilon_2), \dots$ . Ας θεωρήσουμε τα:  $a(x) = \inf \{ \alpha : (\alpha, x) \subseteq A \}$ ,  $b(x) = \sup \{ \beta : (x, \beta) \subseteq A \}$  και το σύνολο  $I_x = (a(x), b(x))$  [Τα  $\inf, \sup$  μπορεί να είναι και  $-\infty, +\infty$ ]. Τότε δεν υπάρχει  $J \neq I_x$  ανοιχτό διάστημα του  $A$ , με  $I_x \subseteq J \subseteq A$ , έτσι αυτό το  $I_x$  είναι ένα συστατικό διάστημα του  $A$  που περιέχει το  $x$ .

K8: Το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών

Αν  $J_x$  είναι άλλο συστατικό διάστημα, υποσύνολο του  $A$ , που περιέχει το  $x$ , τότε η ένωσή τους θα είναι ανοιχτό σύνολο, υποσύνολο του  $A$  και θα βρίσκεται «μεταξύ» των  $I_x, A$ ,  $I_x \subseteq I_x \cup J_x \subseteq A$  όπως και των  $J_x, A$ ,  $J_x \subseteq I_x \cup J_x \subseteq A$  άρα  $I_x = J_x = I_x \cup J_x$ .

**Θεώρημα:** κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}$  μπορεί να παρασταθεί σαν ένωση μιας αριθμήσιμης οικογένειας ξένων μεταξύ τους, συστατικών διαστημάτων του  $A$ .

Έστω  $x \in A$  και  $I_x = (a(x), b(x))$  το συστατικό διάστημα που περιέχει το  $x$ . Η ένωση όλων αυτών είναι το  $A$ . Αν δύο από αυτά έχουν μη κενή τομή, τότε θα περικλείονται στην ένωσή τους, που είναι ανοιχτό σύνολο και άρα θα ταυτίζονται. Δεν είναι δυνατή η παρακάτω εικόνα:



Άρα τα διαστήματα που ορίστηκαν με αυτή τη μέθοδο, τα συστατικά διαστήματα-component intervals- αποτελούν διαμέριση του  $A$ .

Τα συστατικά διαστήματα, περιέχουν ρητούς (συνέπεια της πυκνότητας των ρητών στο  $\mathbb{R}$ ). Το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο, ας είναι  $\{q_1, q_2, q_3, \dots\}$  η αρίθμηση. Τότε αντιστοιχίζουμε στο  $I_x$  τον ελάχιστο δείκτη από τους ρητούς  $q_i$  που περιέχονται σ' αυτό.

Επειδή τα συστατικά διαστήματα είναι ξένα, η συνάρτηση που καθορίζεται με αυτή τη μέθοδο είναι 1-1. Οπότε καθορίσαμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των  $I_x$  και ενός υποσυνόλου  $K$  των φυσικών. Αριθμούμε τα στοιχεία του  $K$  ως εξής:  $k(1)$  είναι το μικρότερο,  $k(2)$  είναι το μικρότερο από αυτά που έμειναν, δηλ. το  $\min\{K - \{k(1)\}\}$ ,  $k(3)$  το μικρότερο από τα υπόλοιπα κλπ. Και η συνάρτηση  $k$  που καθορίζεται με αυτή τη μέθοδο είναι 1-1, αφού το μικρότερο στοιχείο υποσυνόλου των φυσικών είναι μοναδικό. Η σύνθεση των δυο αυτών δίνει την συνάρτηση που απαριθμεί τα σύνολα  $I_x$ .

**8.5.4.**

Ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}$  ονομάζεται **κλειστό**, όταν το συμπλήρωμά του στο  $\mathbb{R}$  είναι ανοιχτό. Ισχύουν οι προτάσεις: κάθε κλειστό διάστημα, φραγμένο ή όχι, είναι κλειστό σύνολο ( π.χ. το  $[\alpha, \beta]$  με συμπλήρωμα ένωση ανοιχτών, άρα ανοιχτό:  $[\alpha, \beta]^c = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ ), η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, η τομή οσωνδήποτε κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, κάθε μονοσύνολο  $\{a\}$ , είναι κλειστό σύνολο (αφού έχει συμπλήρωμα:  $\{a\}^c = [\alpha, \alpha]^c = (-\infty, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$ ), κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κλειστό (γιατί είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων, τόσων μονοσυνόλων, όσο είναι το πλήθος των στοιχείων του), το  $\mathbb{R}$  είναι κλειστό, το  $\emptyset$  είναι κλειστό (τα συμπληρώματά τους είναι ανοιχτά).

**8.5.5.** Ένα σύνολο δεν είναι απαραίτητο να είναι ανοιχτό ή κλειστό, π.χ. το  $[\alpha, \beta)$ , δεν είναι ανοιχτό, αφού δεν περιέχει κάποια περιοχή του  $a$ , αλλά ούτε κλειστό, γιατί το συμπλήρωμά του  $[\alpha, \beta)^c = (-\infty, \alpha) \cup [\beta, +\infty)$  δεν είναι ανοιχτό.

**8.5.6.** Η οικογένεια  $\Phi$  των συνόλων  $(A_k)_{k \in K}$  αποτελεί μια κάλυψη του συνόλου  $X$ , όταν  $X \subseteq \bigcup_{k \in K} A_k$ . Λέμε επίσης ότι η οικογένεια  $\Phi$  καλύπτει το  $X$ .

Αν τα σύνολα της  $\Phi$  είναι ανοιχτά, τότε η  $\Phi$  είναι μια ανοιχτή κάλυψη του  $X$ .

Ισχύουν τα παρακάτω δύο θεωρήματα:

**Θεώρημα Lindelof:** Αν  $\Phi$  μια ανοιχτή κάλυψη του  $X$ , τότε υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο της  $\Phi$ , που καλύπτει επίσης το  $X$ .

**Θεώρημα Heine-Borel:** Αν η οικογένεια των ανοιχτών διαστημάτων  $(I_k)_{k \in K}$  με  $I_k = (a_k, b_k)$  αποτελεί μια κάλυψη του κλειστού διαστήματος  $[a, b]$ , τότε αρκούν πεπερασμένου πλήθους  $I_k$  για να καλύψουν το  $[a, b]$ , δηλ. Αν  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  και  $\varepsilon > 0$ , τότε υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ανοιχτά διαστήματα της μορφής  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ,  $x \in [a, b]$ , που καλύπτουν το  $[a, b]$ .

K8: Το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών

### Παραδείγματα:

Η οικογένεια όλων των ανοιχτών διαστημάτων  $(\alpha, \beta)$  είναι μια μη αριθμήσιμη κάλυψη του  $\mathbb{R}$ . Περιέχει όμως την αριθμήσιμη κάλυψη  $(k, k+2)$ , δηλ.  $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+2)$ .

Η οικογένεια των διαστημάτων  $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$  για  $n \geq 2$  αποτελεί μια αριθμήσιμη ανοιχτή κάλυψη του  $(0,1)$ :  $(0,1) \subseteq \bigcup_2^\infty \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ .

Επίσης:  $[a, b] = \bigcup_1^\infty \left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right)$ ,  $(a, b) = \bigcup_1^\infty \left(a, b + \frac{1}{n}\right)$ ,  $\mathbb{R} = \bigcup_1^\infty (-n, n)$ .

## 8.6. Μέτρο

### 8.6.1.

Μια οικογένεια  $\mathcal{A}$  υποσυνόλων ενός συνόλου  $X \neq \emptyset$  λέγεται **άλγεβρα στο X** αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες: (i) περιέχει το κενό σύνολο, (ii) Αν  $A \in \mathcal{A}$ , τότε  $X-A = A^c \in \mathcal{A}$ , δηλ. κλειστή ως προς τα συμπληρώματα, (iii) Αν  $A, B \in \mathcal{A}$ , τότε  $A \cup B \in \mathcal{A}$ , (κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις). Π.χ. το δυναμοσύνολο ενός συνόλου  $X$ ,  $P(X)$  είναι η «μεγαλύτερη» άλγεβρα και η τετριμμένη  $\{\emptyset, X\}$  είναι η μικρότερη. Για κάθε άλγεβρα  $B$  στο  $X$ , ισχύει:  $\{\emptyset, X\} \subseteq B \subseteq P(X)$ .

Μια οικογένεια  $\mathcal{A}$  υποσυνόλων ενός συνόλου  $X \neq \emptyset$  λέγεται  **$\sigma$ -άλγεβρα στο X** αν ικανοποιεί τις ιδιότητες: (i) περιέχει το κενό σύνολο, (ii) Αν  $A \in \mathcal{A}$ , τότε  $X-A = A^c \in \mathcal{A}$ , (iii) Αν  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ , τότε  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ , όπου  $A_n$  αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων της  $\mathcal{A}$ . Στα πεπερασμένα σύνολα, άλγεβρες και  $\sigma$ -άλγεβρες ταυτίζονται.

Έστω  $X$  το βασικό σύνολο και  $E$  μια οικογένεια υποσυνόλων του  $X$ . Υπάρχει  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει την  $E$ , τουλάχιστον η  $P(X)$ . Εύκολα αποδεικνύεται ότι η τομή οποιουδήποτε πλήθους  $\sigma$ -αλγεβρών είναι  $\sigma$ -άλγεβρα. Η τομή όλων των  $\sigma$ -αλγεβρών που περιέχουν την  $E$ , είναι  $\sigma$ -άλγεβρα, η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια συνόλων  $E$  και συμβολίζεται με  $\sigma(E)$ . Αν μια  $\sigma$ -άλγεβρα π.χ. η  $\Omega$ , περιέχει την  $E$ , τότε επειδή περιέχει την  $E$  και είναι  $\sigma$ -άλγεβρα, θα περιέχει και τα σύνολα που ανήκουν στην  $\sigma(E)$ .

Έστω  $F$  το σύνολο όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ ,

$F = \{G : G \subseteq \mathbb{R}, \text{ ανοιχτό}\}$ , και  $\sigma(F)$  η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

Αυτή η  $\sigma$ -άλγεβρα λέγεται Borel  $\sigma$ -άλγεβρα του  $\mathbb{R}$  και συμβολίζεται  $B(\mathbb{R}) = \sigma(F)$ .

Τα στοιχεία αυτής της  $\sigma$ -άλγεβρας λέγονται σύνολα Borel του  $\mathbb{R}$ .

Αν  $F_1 = \{K : K \subseteq \mathbb{R}, \text{ κλειστό}\}$ ,  $F_2 = \{(-\infty, b], b \in \mathbb{R}\}$ ,  $F_3 = \{(a, b], a < b \in \mathbb{R}\}$ ,

$F_4 = \{(a, b) : a < b, \text{ με } a, b \in \mathbb{R}\}$ , τότε αποδεικνύεται ότι :  $B(\mathbb{R}) = \sigma(F) = \sigma(F_1)$  και  $\sigma(F_1) \supseteq \sigma(F_2) \supseteq \sigma(F_3) \supseteq \sigma(F_4) \supseteq \sigma(F)$ . Επομένως τα **σύνολα Borel** είναι τα διαστήματα κάθε είδους, τα ανοιχτά και κλειστά σύνολα και οι αριθμήσιμες ενώσεις και τομές αυτών.

Από το τμήμα 8.5. γίνεται φανερό ότι τυχαίο σύνολο  $A$ , υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  μπορεί να καλυφθεί από την ένωση μιας ακολουθίας ανοιχτών διαστημάτων,  $(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}$ .

Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (b_n - a_n)$  συγκλίνει είτε σε κάποιο πραγματικό είτε στο  $+\infty$ , αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα. Το σύνολο  $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n) \right\}$  είναι λοιπόν μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0, επομένως υπάρχει το  $\inf$ . Αν το σύνολο είναι το  $\{+\infty\}$ , τότε το  $\inf$  θα είναι  $+\infty$ , αν υπάρχει στο σύνολο κάποιος πραγματικός, τότε το  $\inf$  θα ανήκει στο  $[0, +\infty)$ . Κάποια από τα διαστήματα της ένωσης μπορεί να είναι κενά, οπότε αποφεύγουμε και την ανησυχία για το αν το  $A$  καλύπτεται από άπειρα ή πεπερασμένα ανοιχτά διαστήματα. Τα διαστήματα που καλύπτουν το  $A$  δεν είναι απαραίτητο να είναι ξένα.

Αν  $A$  υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , τότε το **μέτρο** του  $A$  ορίζεται ως έξης:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n), a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n < b_n, n=1,2,\dots \right\}.$$

Ακριβέστερα  $\lambda^*(A)$  είναι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue του  $A$ . Η  $\lambda^*$  είναι συνολοσυνάρτηση,  $\lambda^* : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ . Ο περιορισμός της συνάρτησης  $\lambda^*$  σε μια  $\sigma$ -Άλγεβρα που συμβολίζεται με  $M_{\lambda^*}$ , καθορίστηκε από τον Καραθεοδωρή (1873-1950) και **περιέχει** την  $\sigma$ -άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ , την  $B(\mathbb{R})$ , συμβολίζεται συνήθως με  $\lambda$  και λέγεται μέτρο Lebesgue του  $\mathbb{R}$ .

K8: Το πλήθος των διαφόρων ειδών αριθμών

Τα «Lebesgue μετρήσιμα σύνολα», είναι τα στοιχεία της  $M_\lambda$ . Πολλές φορές συμβολίζουμε με  $\lambda$  τον περιορισμό της  $\lambda^*$  σ' αυτήν την μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα  $B(\mathbb{R})$ .

Αποδεικνύεται ότι το μέτρο του κενού συνόλου είναι 0 και ότι το μέτρο έχει τις

ιδιότητες της μονοτονίας : αν  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ , τότε  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$  και

της αριθμήςιμης υποπροσθετικότητας: αν  $(A_n)$  ακολουθία υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ , τότε

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{A_n\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \quad (\text{τα σύνολα } A_n \text{ δεν είναι απαραίτητο να είναι ξένα, αν γνωρίζουμε}$$

ότι είναι ξένα, τότε ισχύει η ισότητα, λέμε ότι «το μέτρο είναι  $\sigma$ -προσθετικό»).

Επίσης αποδεικνύεται ότι **το μέτρο κάθε διαστήματος είναι ίσο με το μήκος του**,

δηλ. 
$$\lambda^*([a,b]) = \lambda^*((a,b)) = \lambda^*([a,b)) = \lambda^*(a,b]) = b - a.$$

### 8.6.2.

Αν  $\lambda^*(A) = 0$ , τότε το μέτρο του συνόλου  $A$  είναι μηδέν. Από τον ορισμό του μέτρου συμπεραίνουμε ότι ένα υποσύνολο των πραγματικών έχει **μέτρο μηδέν**, όταν είναι δυνατόν να καλύψουμε τα σημεία του με ένα σύνολο διαστημάτων αυθαίρετα μικρού συνολικού μήκους και αυτό θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως στην εργασία αυτή. Από την

$$\lambda^*\left(\bigcup_n \{A_n\}\right) \leq \sum_1^{\infty} \lambda^*(A_n) \text{ συμπεραίνουμε ότι αν } (A_n) \text{ είναι ακολουθία υποσυνόλων του } \mathbb{R},$$

μηδενικού μέτρου, τότε και η αριθμήςιμη ένωση  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{A_n\}$  είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.

## 8.7. Σύνολα μηδενικού μέτρου

### 8.7.1. Τα μονοσύνολα είναι μηδενικού μέτρου.

Ένα σύνολο με ένα στοιχείο  $\{x\}$  μπορεί να καλυφτεί από την ακολουθία διαστημάτων

$$I_n \text{ με } I_1 = \left(x - \frac{\varepsilon}{4}, x + \frac{\varepsilon}{4}\right), I_n = (0,0) = \emptyset \text{ για } n \geq 2, \{x\} \subseteq \bigcup_1^{\infty} I_n. \text{ Το συνολικό μήκος αυτών}$$

των διαστημάτων είναι  $\sum_1^{\infty} \lambda^*(I_n) = \lambda^*(I_1) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$  για κάθε θετικό  $\varepsilon$ , και από τον ορισμό του

μέτρου, είναι  $\lambda^*(\{x\}) \geq 0$ , άρα  $0 \leq \lambda^*(\{x\}) < \varepsilon$ , τελικά,  $\lambda^*(\{x\}) = 0$ . Θα μπορούσαμε επίσης να

θεωρήσουμε την ακολουθία  $I_n = \left(x - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) = (a_n, b_n)$ , ή απλούστερα ότι

$\{x\} \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  για κάθε  $\varepsilon$  θετικό.

**8.7.2. Ένα σύνολο με δύο στοιχεία είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.**

Ένα σύνολο με δυο στοιχεία  $\{x_1, x_2\}$  μπορεί να καλυφτεί από την ακολουθία διαστημάτων  $I_n$

$$\text{με } I_1 = \left(x_1 - \frac{\varepsilon}{8}, x_1 + \frac{\varepsilon}{8}\right), I_2 = \left(x_2 - \frac{\varepsilon}{16}, x_2 + \frac{\varepsilon}{16}\right), I_n = (0, 0) = \emptyset \text{ για } n \geq 3, \{x_1, x_2\} \subseteq \bigcup_1^\infty I_n.$$

Το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων είναι

$$\sum_1^\infty \lambda^*(I_n) = \lambda^*(I_1) + \lambda^*(I_2) = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ για κάθε θετικό } \varepsilon, \text{ δηλ. είναι } 0.$$

**8.7.3. Ένα σύνολο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.**

Ένα σύνολο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  μπορεί να καλυφθεί από

$$\text{την ακολουθία διαστημάτων } I_n \text{ με } I_1 = \left(x_1 - \frac{\varepsilon}{8}, x_1 + \frac{\varepsilon}{8}\right), I_2 = \left(x_2 - \frac{\varepsilon}{16}, x_2 + \frac{\varepsilon}{16}\right),$$

$$I_3 = \left(x_3 - \frac{\varepsilon}{2^5}, x_3 + \frac{\varepsilon}{2^5}\right), \dots, I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right), \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_1^\infty I_n \text{ (για το$$

«άπειρα», συμπληρώνουμε αν θέλουμε, με κενά σύνολα). Το συνολικό μήκος αυτών των

$$\text{διαστημάτων είναι } \sum_1^\infty \lambda^*(I_n) = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ για κάθε θετικό } \varepsilon, \text{ δηλ. ένα}$$

σύνολο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.

**8.7.4. Ένα αριθμήσιμο σύνολο είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.**

Έστω  $A = \{x_1, x_2, \dots\}$  η αριθμηση. Καλύπτουμε το  $A$  με την ακολουθία διαστημάτων  $I_n$ ,

$$I_n = \left(x - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right), n \in \mathbb{N} \text{ (όπως παραπάνω για τα πεπερασμένου πλήθους στοιχεία,$$

αλλά εδώ τα διαστήματα είναι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ) με συνολικό μήκος διαστημάτων πάλι  $< \varepsilon$ ,

$$\text{αφού } \sum_1^\infty \lambda^*(I_n) = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots\right) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 < \varepsilon.$$

Το μηδενικό μέτρο για σύνολα το πολύ αριθμήσιμα, μπορούμε να το συμπεράνουμε

$$\text{και από το ότι αν } A = \{x_1, x_2, \dots\} \text{ η αριθμηση, τότε } 0 \leq \lambda^*(A) = \lambda^*\left(\bigcup_n \{x_n\}\right) \leq \sum_1^\infty \lambda^*\{x_n\} = 0,$$

από την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

**8.7.5. Το σύνολο των φυσικών, των ακέραιων, των ρητών και των αλγεβρικών αριθμών έχουν μέτρο 0, γιατί είναι αριθμήσιμα.**

**8.7.6.** Ένα σύνολο μηδενικού μέτρου δεν είναι κατ'ανάγκην αριθμήσιμο. Ο Cantor κατασκεύασε υπεραριθμήσιμο σύνολο μηδενικού μέτρου ( τριαδικό σύνολο του Cantor). Αποδεικνύεται ότι το δυναμοσύνολο του τριαδικού συνόλου του Cantor έχει πληθάριθμο  $2^c$ .

**8.7.7.** Λέμε ότι **σχεδόν όλοι** οι πραγματικοί αριθμοί ενός υποσυνόλου του  $\mathbb{R}$  έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα  $\Pi$  αν το υποσύνολο των πραγματικών που **στερούνται** την ιδιότητα  $\Pi$  έχει μέτρο 0. Για παράδειγμα: σχεδόν όλοι οι θετικοί πραγματικοί δεν είναι φυσικοί, γιατί το σύνολο των φυσικών είναι μηδενικού μέτρου (το σύνολο των φυσικών είναι το σύνολο των αριθμών που στερούνται την ιδιότητα «δεν είναι φυσικοί»). Η έκφραση «σχεδόν όλοι» χρησιμοποιείται με παραπλήσιο νόημα και στην καθημερινή ζωή. Λέμε «σχεδόν σε όλα τα βιβλία» του (τυπικού λογικιστή) γερμανού μαθηματικού Weierstrass δεν υπάρχουν σχήματα, γιατί σχήμα βρέθηκε σε μία μόνο από τις πολυπληθείς εργασίες του.

## 8.8. Η κυριαρχία των υπερβατικών

**8.8.1.** Το μέτρο του διαστήματος  $(0,1)$ , ή κάποιου από τα  $[0,1)$ ,  $[0,1]$ ,  $(0,1]$ , είναι το μήκος του, 1. Το μέτρο των ρητών του  $(0,1)$  είναι 0. Το συνολικό μήκος των διαστημάτων με τα οποία μπορούμε να καλύψουμε τους ρητούς του  $(0,1)$  έχει μήκος 0. Από την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας έχουμε:  $1 = \lambda^*( (0,1) ) \leq \lambda^*(\text{αρρήτων του } (0,1)) + \lambda^*(\text{ρητών του } (0,1))$ , δηλ.  $1 \leq \lambda^*(\text{αρρήτων του } (0,1))$ . Επίσης  $\lambda^*(\text{αρρήτων του } (0,1)) \leq 1 = \lambda^*(0,1)$ , από την μονοτονία, γιατί το σύνολο των αρρήτων του  $(0,1)$  είναι υποσύνολο του  $(0,1)$ . Συμπεραίνουμε ότι το μέτρο των αρρήτων του  $(0,1)$  είναι 1.

Επειδή και το σύνολο των αλγεβρικών είναι αριθμήσιμο, με τις ίδιες σκέψεις συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των υπερβατικών του διαστήματος  $(0,1)$  έχει μέτρο 1.

### 8.8.2.

**1.**  $\lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty$ : Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $\mathbb{R} = \bigcup_1^\infty (-n, n)$ . Οπότε  $\lambda^*(\mathbb{R}) \geq \lambda^*((-n, n)) = 2n$ , για κάθε φυσικό  $n$ , αφού  $(-n, n)$  υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  (από την μονοτονία του μέτρου).

**2.**  $\lambda^*(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = +\infty$ ,  $\lambda^*(\mathbb{R} - \text{Αλγεβρικοί}) = +\infty$

Επειδή  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ ,  $\lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty$ ,  $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$ . Από την υποπροσθετικότητα του μέτρου έχουμε:  $\lambda^*(\mathbb{R}) \leq \lambda^*(\mathbb{Q}) + \lambda^*(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \lambda^*(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και το μέτρο των υπερβατικών, Υπερβατικοί =  $\mathbb{R}$ -Αλγεβρικοί, είναι  $+\infty$ .



3.  $\lambda^*((a, +\infty)) = +\infty$ ,  $\lambda^*((-\infty, a)) = +\infty$ , για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

Για κάθε φυσικό ισχύει:  $(a, a+n) \subseteq (a, +\infty)$ . Από την μονοτονία του μέτρου παίρνουμε:  $\lambda^*(a, a+n) = n \leq \lambda^*(a, +\infty)$ . Ομοίως  $(a-n, a) \subseteq (-\infty, a)$  και  $n \leq \lambda^*(-\infty, a)$ .

### 8.8.3. Συμπέρασμα:

Σχεδόν όλοι οι πραγματικοί του διαστήματος  $(0,1)$  είναι υπερβατικοί, γιατί το σύνολο των αριθμών που στερούνται την ιδιότητα «υπερβατικοί», δηλ. το σύνολο των αλγεβρικών του  $(0,1)$  είναι μηδενικού μέτρου. Το μήκος του  $(0,1)$  είναι 1, το σύνολο των αλγεβρικών μπορεί να καλυφθεί με μια αριθμήσιμη ακολουθία διαστημάτων που έχουν συνολικό μήκος μικρότερο από κάθε θετικό  $\varepsilon$ , άρα οι αλγεβρικοί του  $(0,1)$  είναι εξαιρετικά σπάνιοι.

Σχεδόν όλοι οι πραγματικοί είναι άρρητοι, γιατί το σύνολο των αριθμών που στερούνται την ιδιότητα «άρρητοι», δηλ. το σύνολο των ρητών, είναι μηδενικού μέτρου.

**Σχεδόν όλοι οι πραγματικοί είναι υπερβατικοί**, γιατί το σύνολο των αριθμών που στερούνται την ιδιότητα « υπερβατικοί », δηλ. το σύνολο των αλγεβρικών, είναι μηδενικού μέτρου. Το συνολικό μήκος των διαστημάτων που καλύπτουν τους αλγεβρικούς στην πραγματική ευθεία είναι μικρότερο από κάθε θετικό (ίσως γίνεται διαισθητικά φανερό ότι το σύνολο των υπερβατικών δεν μπορεί να είναι αριθμήσιμο, γιατί τότε η ευθεία, ένωση αλγεβρικών και υπερβατικών, θα μπορούσε να καλυφθεί από διαστήματα με συνολικό μήκος όσο θέλουμε μικρό). Επομένως η τυχαία επιλογή αριθμού από το «πραγματικό συνεχές» δίνει με πιθανοθεωρητική βεβαιότητα υπερβατικό!

Είτε μέσω της αριθμησιμότητας, είτε με τη βοήθεια των μετρήσιμων συνόλων, διαπιστώσαμε, ας πούμε κάπως εύκολα, ότι οι υπερβατικοί είναι απείρως περισσότεροι όχι μόνον από τους ρητούς, αλλά και από τους αλγεβρικούς. Είδαμε όμως στο K5, ότι ο Liouville κατασκεύασε τον πρώτο υπερβατικό το 1851 και ότι είναι πολύ δύσκολο το να αποφανθούμε αν ένας συγκεκριμένος πραγματικός είναι υπερβατικός.

*\*Για το K8 χρησιμοποιήθηκαν κυρίως τα 11,31,42,52,68,77,116,147,159.*



## Euler και Ramanujan

Το 1734 ο Euler, χρησιμοποιώντας μεθόδους απαράδεκτες για τα σημερινά μαθηματικά, βρήκε (σωστά) ότι αν  $r_n = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n^2}\right)^2}$ , τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ . Ο

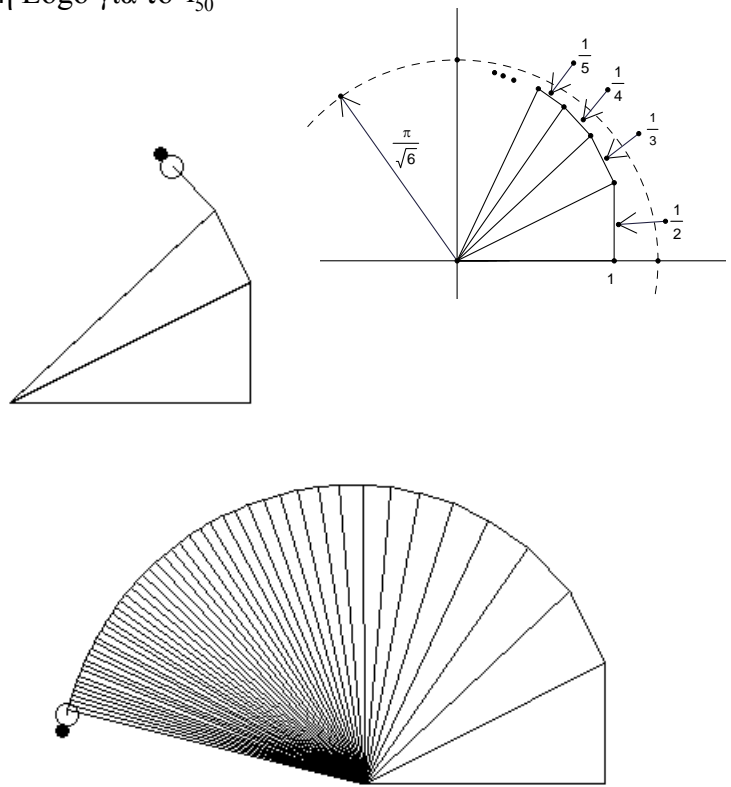
Euler, ο πολυγραφότατος των μαθηματικών, έκανε και ατοπήματα. Μάλλον ήταν οπαδός του Spinoza: *Για τον ερευνητή η πλάνη δεν είναι παρά μια καινούργια βοήθεια για την ανακάλυψη της αλήθειας*. Για η πεπερασμένο το άθροισμα κατασκευάζεται (Maor, 2008: 130).

Στο πλαίσιο είναι οι εντολές στη Logo για το  $r_{50}$

```

για euler
make "k 150
make "x 2
make "s 1+1/(:x*:x)
rt 90 fd :k lt 90
fd :k/2
eu :x
end

για eu :x
αν :x > 50 [σταματησε]
seth towards [0 0]
μ :k*SQRT(:s) π :k*SQRT(:s)
δ 90 μ :k/(:x+1)
make "s :s+1/((:x+1)*(:x+1))
eu :x+1
end
    
```



Ο Ramanujan χωρίς κανένα μαθηματικό ατόπημα και χωρίς καμιά εξήγηση έγραψε τον διπλανό τύπο:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots}}}}} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$$

Συνέδεσε μια άπειρη σειρά και ένα συνεχές κλάσμα. «Ούτε η σειρά

ούτε και το συνεχές κλάσμα μπορούν να εκφραστούν μέσω των διάσημων αυτών σταθερών,

αλλά μυστηριωδώς το άθροισμά τους αποδεικνύεται ίσο με  $\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$ » (Gindkin, 1998).

Μάλλον ήταν Γιόγκι: *Μάθημα Ι<sup>ο</sup>: Αυτοσυγκέντρωση και σιωπή*.

## Κ9: Διδακτική

### 9.1. Τα Μαθηματικά

Τα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολο και δυσνόητο αντικείμενο. Ίσως εξ αιτίας της αφηρημένης φύσης των μαθηματικών αντικειμένων και επινοημάτων, τα οποία δεν βλέπουμε, δεν ακούμε, δεν γευόμαστε, δεν πιάνουμε και δεν μυρίζουμε (Παντελίδης, 1998: ν). Ίσως εξ αιτίας των απαιτήσεων για αποδείξεις μόνο με τη χρήση της λογικής και όχι παραδοσιακών «πειστικών» διαδικασιών. Ίσως εξαιτίας του βασικού χαρακτηριστικού που τα διακρίνει από όλες τις άλλες επιστήμες: *«τα μαθηματικά δεν περιορίζονται πλέον στο να βάζουν τάξη σε μια υπάρχουσα εμπειρία και διαίσθηση, αλλά, ερχόμενα σε σύγκρουση με την κοινή εμπειρία και διαίσθηση, υπερισχύουν»* (Νεγρεπόντης, 2009:14).

Η θεωρία της σχετικότητας αποτελεί ίσως το πιο εντυπωσιακό παράδειγμα μιας τέτοιας περίπτωσης, όπου τα μαθηματικά ανέδειξαν νόμους όχι απλώς απροσπέλαστους από τις αισθήσεις μας, αλλά ακόμη και αντίθετους προς τη λογική που επιβάλλει η περιορισμένη από βιολογικούς παράγοντες επικοινωνία μας με τον φυσικό κόσμο. Η εμπειρία, είναι υποκειμενικό ερέθισμα. Δεν είναι δυνατόν να εκφράσει με αντικειμενικό τρόπο τις ιδιότητες αυτού του θαυμαστού κόσμου. Τα μαθηματικά προσφέρουν ό,τι χρειαζόμαστε: έναν μηχανισμό ελέγχου της αντικειμενικότητας των εμπειριών μας που προέρχονται από τα ερεθίσματα που προσλαμβάνουμε από τον εξωτερικό κόσμο και τα οποία αποτελούν το μέσο επικοινωνίας μας με αυτόν. Αλλά και κάτι πολύ περισσότερο: *«τα μαθηματικά προσφέρουν την ευκαιρίαν της δοκιμασίας και την δοκιμήν της ικανότητας, διότι χαρίζουν την λογικήν ως αίσθημα, την στερεότητα ως χάριτα, την λιτότητα ως αφθονίαν»* (Καζαντζίδης, 1972: β).

Στην επιστήμη των μαθηματικών συλλαμβάνονται νέες δυναμικότερες ιδέες και επινοούνται μέθοδοι για άμεσα και ασφαλή συμπεράσματα. Οι μέθοδοι προϋποθέτουν τις ιδέες και οι ιδέες προϋποθέτουν κάποιο εύρος εμπειρίας και κάποιο βάθος πνευματικής καλλιέργειας. Αυτά, δηλαδή το εύρος εμπειρίας και το βάθος της πνευματικής καλλιέργειας, είναι αδύνατον να αναχθούν στο μηδέν, ως βασικές προϋποθέσεις. Είναι αδύνατον να κατακτηθούν οι γνώσεις με μηδενική προσπάθεια και κάθε τέτοια προσπάθεια πρέπει να είναι ουσιαστική και όχι βεβιασμένη ή εικονική. *«Εκείνος ο οποίος θα περιπλανηθεί εις τον Μαθηματικόν τόπον, θα συναντήσει εις τους σκολιούς, δυσκόλους δρόμους, μεγάλας, πολλάκις ανυπερβλήτους, δυσχερείας»* (Βαρόπουλος, 1949: 153). Τιμούμε και σεβόμαστε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται. *«Μια δυσκολία είναι ένα φως. Μια ανυπερβλήτη δυσκολία είναι ένας ήλιος»* (Βαλερύ, 1996: 27). Οι απαιτήσεις για την μελέτη των Μαθηματικών είναι γνωστές (Ευκλείδης προς Πτολεμαίο: μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν): μολύβι, χαρτί, αρκετή υπομονή και πολύ απλά, φως, καρέκλα, τραπέζι, ξενύχτι.

## 9.2. Οι δυνατότητες των παιδιών και οι αδυναμίες των μεγάλων

Μια αντίληψη στερεωμένη σε επιστημονικές θέσεις, που διατυπώθηκαν ήδη σε προηγούμενους αιώνες, συνεχίζει να αποτελεί και σήμερα την βάση για την οργάνωση, την επιλογή της ύλης και την διδασκαλία των μαθηματικών. Εκπαιδευτικοί και πολλοί επιστήμονες εξακολουθούν να πιστεύουν ότι τα παιδιά δεν μπορούν να μάθουν μαθηματικά (και όχι μόνο) σε μικρή ηλικία ότι ο εγκέφαλος τους απλώς δεν είναι έτοιμος για την πρόσληψη της μαθηματικής (ή και μη μαθηματικής) γνώσης.

Είναι γνωστή η άποψη του Piaget ότι η αληθινή μάθηση έρχεται μόνο μαζί με τη νοητική ανάπτυξη του παιδιού και ότι η προσπάθειά μας να διδάξουμε τα παιδιά, πριν αυτά είναι εννοιολογικά έτοιμα, παράγει μόνον επιφανειακή μάθηση (Piaget, 2005, Donaldson, 1991). Με τα ζητήματα του εγκεφάλου ασχολήθηκε, όπως είναι γνωστό, και ο Immanuel Kant (1724-1804). Στην *Κριτική του Καθαρού Λόγου*, διατύπωσε την άποψη ότι η δομή του εγκεφάλου είναι τέτοια ώστε η Ευκλείδεια Γεωμετρία να αποτελεί τη μόνη γεωμετρία που μπορούμε να κατανοήσουμε. Οι ιδέες του σχετικά με το χώρο και τη Γεωμετρία λειτούργησαν ως τροχοπέδη για την αποδοχή μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ορισμένοι μάλιστα θεωρούν ότι η απόφαση του Gauss να μην δημοσιεύσει τις μη Ευκλείδειες ιδέες του οφείλεται στην απροθυμία του να αντιμαχίσει με τον Kant (Davis, 2007: 133).

Η αξία βέβαια των εκλεκτών αυτών ψυχολόγων, φιλοσόφων ή και άλλων ανθρώπων οι οποίοι εργάστηκαν σκληρά για να κτίσουν τον εκπληκτικό κόσμο της επιστημονικής γνώσης δεν μειώνεται από κάποιες λαθεμένες - κατά άλλους και πάλι επιστήμονες, όπως παρατίθεται στη συνέχεια - εκτιμήσεις ούτε αναιρεί το σύνολο του έργου τους. Απ' τον κανόνα αυτόν δεν διαφεύγουν ούτε μεγάλα ονόματα Μαθηματικών. Για παράδειγμα, αν και επισημάνθηκε στον Cauchy η διάκριση ανάμεσα στην συνέχεια μιας συνάρτησης και στην διαφορισιμότητά της, επέμεινε για 20 χρόνια να χρησιμοποιεί την διαφορισιμότητα εκεί που είχε υποθέσει μόνο τη συνέχεια μιας συνάρτησης (Kline, 1981). Η εικασία του Fermat (1630) για το ότι η (διοφαντική) εξίσωση  $x^n + y^n = z^n$  δεν έχει ακέραιες λύσεις για  $n \geq 3$ , έγινε θεώρημα, αλλά η εικασία του για το ότι οι αριθμοί Fermat (έτσι λέγονται οι αριθμοί της μορφής  $2^{2^n} + 1$ , π.χ. για  $n=0,1,2,3,4,5$ , έχουμε τους αριθμούς: 3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297) είναι πρώτοι, δεν είχε την ίδια τύχη, αφού το 1732 ο Euler βρήκε ότι  $4294967297=641*6700417$ . Ο Isaac Barrow (1630-1677), δάσκαλος του Isaac Newton, όπως και ο Fermat, είχαν ασπαστεί την άποψη των αρχαίων Ελλήνων για την εφαπτομένη ότι είχε ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη (Γιαννακούλιας, 2007: 239).

Γνωστές είναι και οι προσπάθειες του Ιταλού Saccheri για την απόδειξη της ανεξαρτησίας του 5<sup>ου</sup> αιτήματος. Ο Saccheri προσπάθησε να αποδείξει ότι η άρνηση του αιτήματος των παραλλήλων οδηγεί σε αντιφάσεις. Επειδή, όμως, δεν μπορούσε να αποδειχθεί κάτι τέτοιο «έβαλε με το ζόρι μέσα στην ανάπτυξη του μια καθόλου πειστική αντίφαση, που περιείχε ασαφείς έννοιες περί απείρων στοιχείων (1733: Ο Ευκλείδης απελευθερωμένος από κάθε ατέλεια). Αν ο Saccheri δεν ήταν τόσο απόλυτα πεισμένος για τη μη ανεξαρτησία αυτού του αιτήματος, θα του οφείλαμε, ίσως, σήμερα, την εφεύρεση της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας» (Wilder, 1986: 32).

Αναφορικά με την ετοιμότητα των μαθητών για τη μαθηματική γνώση, οι De Corte & Verschaffel (2005) στο άρθρο τους για τις δεξιότητες των παιδιών και τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων, αναφέρουν ότι από τα σημαντικότερα αποτελέσματα των πρόσφατων ερευνών της γνωστικής ψυχολογίας, σε σχέση με τα στοιχειώδη προβλήματα αριθμητικής, είναι ότι τα παιδιά της προσχολικής και της πρώτης σχολικής ηλικίας διαθέτουν σ' αυτόν τον τομέα σημαντικά μεγαλύτερες δεξιότητες απ' ό,τι θεωρείται συχνά πως έχουν. Το ίδιο υποστηρίζει και ο Hughes (1992) στο άρθρο του για τη δυσκολία στη μάθηση της αριθμητικής.

Άλλη μια απόδειξη για το ότι υποτιμήθηκαν οι δυνατότητες των μικρών παιδιών, είναι οι δραστηριότητες που επινόησε και εφήρμοσε με επιτυχία η Μαρία Μοντεσσόρι στο δικό της «Σπίτι των παιδιών» (Μοντεσσόρι, 1965: 113-127). Ανάλογες έρευνες σε μεγάλο αριθμό παιδιών έδειξαν την «πρώιμη» ικανότητά τους στην ανάγνωση (Delogne, 1973). «Ακόμη και τα νεογέννητα βρέφη διακρίνουν τις διαφορές ανάμεσα σε πολύπλοκα ερεθίσματα και προτιμούν να βλέπουν πολύπλοκα σχήματα περισσότερο από τα απλά» (Βοσνιάδου, 2007: 157-177).

Χαρακτηριστικό επίσης είναι το παράδειγμα του 6<sup>ου</sup> προβλήματος της 29<sup>ης</sup> Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας που έγινε στην Καμπέρα της Αυστραλίας το 1988: **Αποδείξτε ότι αν  $a, b, q$  είναι θετικοί ακέραιοι και  $a^2 + b^2 = q(ab + 1)$ , τότε ο  $q$  είναι τέλειο τετράγωνο.** Πρόκειται για ένα πρόβλημα της θεωρίας αριθμών που δεν μπόρεσε να λύσει κανένα μέλος της αυστραλιανής επιτροπής για την επιλογή θεμάτων, αλλά ούτε και κάποιος από τους τέσσερις επιφανείς αριθμοθεωρητικούς της ίδιας χώρας στους οποίους δόθηκε για να το λύσουν εντός 6 ωρών. Έντεκα όμως μαθητές λυκείου έδωσαν πλήρεις απαντήσεις (Ευαγγελόπουλος Γ., 1994). Η τολμηρή συλλογιστική είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα των νεαρών ατόμων, που είναι ακόμα ανεξάρτητοι από οποιεσδήποτε επιρροές.

**Η απελευθέρωση της δημιουργικής αυτής νοητικής δύναμης των μαθητών φαίνεται να είναι η σημαντικότερη εκπαιδευτική και διδακτική πρόκληση-στόχος.**

Οι απόψεις του Piaget σχετικά με την αντιστοιχία τυπικότητας της γνώσης και επιπέδου νοητικής ωρίμανσης των μαθητών αμφισβητήθηκε, μεταξύ των άλλων (Donaldson, Gelman κλπ), και από τον Papert, ο οποίος αποδίδει την αποτυχία της πρόσληψης πολύπλοκων γνώσεων σε διαφορετικούς παράγοντες και πρωτίστως στην ανεπάρκεια της παιδείας και των παρεχόμενων μορφωτικών εκπαιδευτικών υλικών. Χαρακτηριστικά υποστηρίζει: «Σε πολλές περιπτώσεις όπου ο Piaget θα απέδιδε τη βραδύτερη ανάπτυξη μιας συγκεκριμένης γνώσης στη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα ή τυπικότητα της εγώ βλέπω ως κρίσιμο παράγοντα τη σχετική ανεπάρκεια της παιδείας σε υλικά που θα έκαναν την ιδέα απλή και συγκεκριμένη. Ακόμα σε άλλες περιπτώσεις η παιδεία μπορεί να παρέχει υλικά αλλά να παρεμποδίζει τη χρήση τους. Στην περίπτωση των τυπικών μαθηματικών, υπάρχει έλλειψη υλικών και μαζί μια μορφωτική παρεμπόδιση...» (Papert, 1991: 22). Κατά τον ίδιο (Papert, 1991: 229) οι πλατιά εφαρμοσμένες θεωρίες της ψυχολογίας της μαθηματικής ανάπτυξης, όπως αυτή του Piaget, αγνοούν εντελώς την αισθητική, η ακόμα την διαισθητική, και επικεντρώνονται στη δομική ανάλυση της λογικής επιφάνειας της μαθηματικής σκέψης.

**Με βάση τα παραπάνω θεωρούμε ότι η μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να αρχίσει από πολύ μικρή ηλικία. Ότι θα πρέπει να εκμεταλλευτούμε τις απεριόριστες δυνατότητες των παιδιών, να γεμίσουμε με φώς τα αστραφτερά μάτια τους, να απαντήσουμε με σοβαρότητα, άμεσα, στα αλλεπάλληλα «γιατί» τους και να δημιουργήσουμε νέα.** Ακόμα και τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας, σχεδόν πάντοτε, θέτουν ερωτήσεις του είδους: «Πως γνωρίζουμε ότι...; Γιατί πιστεύουμε ότι...;», «μέχρις ότου η τυπική εκπαίδευση τους διδάξει να σταματήσουν αυτή τη συνήθεια» (Arons, 1992: 492).

Μια από τις θετικές συνέπειες των θέσεων του Piaget είναι η αποκάλυψη της αδυναμίας των ενηλίκων να εκτιμήσουν την έκταση και τη φύση αυτών που μαθαίνουν τα παιδιά, επειδή οι δομές της γνώσης που θεωρούμε δεδομένες κάνουν μεγάλο μέρος αυτής της γνώσης να περνά απαρατήρητη (Papert, 1991: 59). Αυτό πιθανόν συμβαίνει γιατί οι μικροί μαθητές αδυνατούν, συνήθως, να περιγράψουν με λέξεις την σκέψη τους και «οι μεγάλοι ποτέ δεν καταλαβαίνουν τίποτα μόνοι τους και είναι πολύ κουραστικό για τα παιδιά να τους δίνουν ξανά και ξανά εξηγήσεις» (Εξυπερύ, 1940: 8). Είναι επίσης διαπιστωμένο ότι δεν σκέφτονται όλοι με τη βοήθεια λέξεων (Bermudez, 2003, Hadamard, 1995, ενότητες 5.6.8, 6.9). Μπορούμε όμως να καταλαβαίνουμε το νόημα των φράσεων των παιδιών ακόμα και αν είναι άσχημα διατυπωμένες ή και όταν λείπουν λέξεις. Αυτή είναι και η βασική ιδιότητα του εγκεφάλου (το πώς γίνεται αυτό ίσως δεν είναι σαφές, αλλά γίνεται οι ιδέες σπάνια έρχονται με λογοτεχνικό τρόπο) που τον διαφοροποιεί από τα προγράμματα των υπολογιστών, που δεν «τρέχουν» αν λείπει έστω και μία μόνο παρένθεση (Τζουβάρας, 1993).

Πιστεύουμε ότι είναι αναγκαία μια θεμελιακή μεταρρύθμιση στην εκμάθηση των μαθηματικών, ίσως και της γραφής και της ανάγνωσης, φυσικά αντίθετης φοράς από τις ανά πενταετία επιχειρούμενες. Η αλλαγή στη μάθηση δεν θα προκύψει από την βελτίωση, με βάση τα αποτελέσματα της μελέτης των χαρακτηριστικών της υπάρχουσας εκπαιδευτικής κατάστασης. Χρειάζεται μια διαφορετική προσέγγιση, μια άλλη μέθοδος σκέψης. Το παρακάτω απόσπασμα είναι ενδεικτικό για μια τέτοιου είδους προσέγγιση:

*«Φανταστείτε κάποιον που ζούσε το 19<sup>ο</sup> αιώνα και αισθανόταν την ανάγκη να βελτιώσει τις μεθόδους μεταφοράς. Ήταν πεπεισμένος ότι ο δρόμος προς τις νέες μεθόδους άρχιζε από την βαθιά κατανόηση των υφιστάμενων προβλημάτων. Έτσι άρχισε μια προσεκτική μελέτη των διαφορών μεταξύ των κάρων που τα έσερναν άλογα. Τεκμηρίωνε προσεκτικά τις πιο εκλεπτυσμένες μεθόδους, τους τρόπους με τους οποίους άλλαζε η ταχύτητα με τη μορφή και την ουσία διαφόρων τροχών, χαλιναριών και τεχνικών σαμαρώματος. Εξετάζοντάς το εκ των υστέρων γνωρίζουμε ότι ο δρόμος που ξεκίνησε από τους τρόπους μεταφοράς του 19ου αιώνα ήταν πολύ διαφορετικός. Η εφεύρεση του αυτοκινήτου και του αεροπλάνου δεν προήλθε από την λεπτομερειακή μελέτη του τρόπου με τον οποίο λειτουργούσαν ή όχι οι πρόδρομοί τους όπως τα κάρα και τα άλογα» (Papert, 1991: 64).*

Βέβαια, ριζικά διαφορετικές προσεγγίσεις σε υπάρχοντα προβλήματα ή καταστάσεις προκαλούν συνήθως απόρριψη ή δυσπιστία, γιατί συνηθίζουμε να πιστεύουμε σε πράγματα, απλώς επειδή προγενέστεροι άνθρωποι πίστευαν στα ίδια πράγματα (Dawkins, 2000), γιατί αντιβαίνουν τις κυρίαρχες αντιλήψεις της εποχής για ένα συγκεκριμένο γνωστικό-επιστημονικό τομέα (Eisenkraft, 1994) και γιατί έχουν επιβληθεί από την καθημερινότητα και την συνήθεια. Π.χ. Δεν επιτρέπεται η χρήση βιβλίων ή και κάθε είδους σημειώσεων στις εξετάσεις. *«Αν όμως πραγματικά διδάσκουμε σκέψη και όχι απομνημόνευση, αν ενδιαφερόμαστε για την «κριτική σκέψη» των μαθητών, τι θα μπορούσαν να πάρουν οι μαθητές απ' τα βιβλία και πόσο θα νόθευε τα τεστ η χρήση τους; (Kline, 1993: 23 και 154).* Η τεχνολογική επανάσταση που ήρθε μέσω του ολοκληρωμένου κυκλώματος και μας έφερε τον προσωπικό υπολογιστή (και πολλές άλλες εφαρμογές) είναι ένα ακόμα παράδειγμα αλλαγής μεθόδου: οι μεγάλοι υπολογιστές στοίχιζαν εκατομμύρια δολάρια επειδή συναρμολογούνταν από εκατομμύρια διαφορετικά εξαρτήματα. Στη νέα τεχνολογία ένα σύνθετο κύκλωμα δεν συναρμολογείται, αλλά δημιουργείται ως μια ολοκληρωμένη οντότητα, απ' όπου και ο όρος «ολοκληρωμένο κύκλωμα» (Papert, 1991: 40). Ας μην ξεχνάμε επίσης *«ότι η πλειοψηφία έχει πάντοτε την τάση να απορρίπτει μια πραγματικά επαναστατική ιδέα, επειδή δεν είναι δυνατόν να κατανοηθεί με βάση τη θεωρία που επιχειρεί να εκτοπίσει» (Farmelo, 2004: 37).*

### 9.3. Η διαδικασία μάθησης

Στα «Ταξίδια του Gulliver» ο Σουίφτ (κεφάλαιο πέμπτο) αναφέρει μία χώρα, όπου οι μαθητές μαθαίνουν τα μαθηματικά δια του πεπτικού συστήματος γράφοντας τα θεωρήματα και τις αποδείξεις σε μικρά χαρτάκια, τα οποία καταπίνουν. Νηστεύουν μετά για τρεις μέρες, και τα μαθηματικά μεταφέρονται στο μυαλό, όπου παραμένουν ανεξίτηλα. Η μέθοδος προτάθηκε το 1726, αλλά, όπως γνωρίζουμε, δεν είχε επιτυχία (ίσως γιατί, όπως παρατηρεί ειρωνικά ο συγγραφέας, οι μαθητές δυσκολευόταν να τηρήσουν την απαραίτητη νηστεία).

Συμφωνούμε με την άποψη του Bruner ότι μπορούμε να διδάξουμε οτιδήποτε σε οποιονδήποτε αρκεί να προσαρμόσουμε με ευαισθησία την διδασκαλία στον τρόπο που εκείνος μπορεί να κατανοήσει (Bruner, 1960). Η άποψη αυτή εκφράζεται με λογοτεχνικά άψογο τρόπο στην Μπρίντα: *«Πήγε στη βιβλιοθήκη της και αναζήτησε ανάμεσα στα βιβλία το χαρτί που της έδωσε ο βιβλιοπώλης. Υπάρχουν κι άλλοι δρόμοι, είπε στον εαυτό της για να παρηγορηθεί. Αφού είχε κατορθώσει να πάει στον Μάγο, αφού είχε καταφέρει να φτάσει στη Γουίκα, τελικά θα έβρισκε τον άνθρωπο που θα μπορούσε να τη διδάξει με τρόπο που η ίδια θα ήταν σε θέση να καταλάβει...»* (Coelho, 2006: 64). Υπάρχει και μια σημαντική λεπτομέρεια που ίσως δεν φαίνεται με την πρώτη ματιά: Η ηρωίδα του Coelho δεν μένει αδρανής: προσπαθεί, αγωνίζεται να μάθει και αναζητεί την καλύτερη καθοδήγηση. *«Σε μια προσπάθεια γνήσιας εκπαίδευσης που απελευθερώνει, είναι ουσιαστικό να φωτίσουμε τα πιο γενικά χαρακτηριστικά κάθε επιστημονικού εγχειρήματος. Δεν μπορούμε, ωστόσο, να πετύχουμε αυτό το αποτέλεσμα με αόριστες γενικεύσεις αποκομμένες από το μόχθο που συνοδεύει τη διαμόρφωση των εννοιών και την κατανόηση του θέματος»* (Arons, 1992: 468).

Ίσως όμως θα πρέπει να έχουμε υπ' όψιν ότι αρκετοί ενήλικοι δεν συμπαθούν τα μαθηματικά και μεταφέρουν το άγχος και το φόβο τους στα παιδιά. Ο φόβος ενισχύεται και από μεγάλο μέρος της εκπαιδευτικής έρευνας που έχει ως πρωταρχικό αντικείμενο μελέτης την υπάρχουσα σχολική τάξη, αλλά και από τις διδακτικές προσεγγίσεις.

Συχνά διερευνούμε την κατανόηση των μαθηματικών οντοτήτων ενώ θα 'πρεπε να είμαστε ικανοποιημένοι από τη σωστή χρήση τους και άλλες φορές δεν δεχόμαστε διαισθητικές αποδείξεις των μαθητών ενώ τους παρέχουμε τέτοιες. Για παράδειγμα το θεώρημα του Bolzano (Γ' Λυκείου) δίνεται «εποπτικά», όπως και διάφορα θεωρήματα στα όρια: η παρουσίαση όμως διαισθητικών αποδείξεων από τους μαθητές, σε άλλα βέβαια θέματα, σχεδόν πάντοτε δεν γίνονται αποδεκτές. Αρκετοί επίσης μαθητές γνωρίζουν καλά π.χ. τη χρήση του αριθμού «π» και απαντούν σωστά ότι είναι άρρητος, παρότι δεν υπάρχει σχολείο δευτεροβάθμιας στο οποίο να αποδεικνύεται η αρρητότητά του.



Το ίδιο ισχύει και για την αποδοχή της σχέσης  $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6}$ , ή τη γνώση του ορισμού της εκθετικής συνάρτησης στη Β' λυκείου.

Άλλες φορές πάλι εισάγονται αποδείξεις χωρίς προετοιμασία, συνήθως κατά τον «Ευκλείδειο τρόπο» παρουσίασης (Τουμάσης, 1994: 303), σε θέματα που διαισθητικά έχουν κατανοήσει οι μαθητές, με τρόπο που συνήθως κλονίζει τις βεβαιότητες και την αυτοπεποίθησή τους. Είναι γνωστή η σχετική άποψη του Poincare: *«Όταν ο μαθητής αρχίζει να ασχολείται σοβαρά με τα μαθηματικά πιστεύει ότι ξέρει τι είναι κλάσμα, τι είναι συνέχεια και τι είναι το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας. Θεωρεί προφανές, για παράδειγμα, ότι δεν είναι δυνατόν να αλλάξει το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης χωρίς αυτή να μηδενισθεί. Αν χωρίς καμιά προπαρασκευή του ανακοινώσουμε ότι αυτό δεν είναι προφανές και πρέπει να αποδειχθεί και αν η απόδειξή μας βασίζεται σε υποθέσεις λιγότερο προφανείς από τα συμπεράσματα, τι θα σκεφτεί αυτός ο μαθητής; Θα σκεφτεί ότι η μαθηματική επιστήμη είναι μια συλλογή από άχρηστα τεχνάσματα και ή θα αηδιάσει, ή θα αρχίσει να παίζει καταλήγοντας σε μια αντιμετώπιση των μαθηματικών ανάλογη με εκείνη των αρχαίων Ελλήνων σοφιστών....»* (αναφέρεται στο Kline, 1981).

Υπάρχουν έρευνες για την Ευκλείδεια Γεωμετρία που βρίσκουν ότι οι μαθητές δεν κατανοούν τις ιδιότητες έτοιμων δοσμένων σχημάτων. Ή που δεν κατανοούν την αποδεικτική διαδικασία που υποδεικνύει το σχήμα που τους δίνεται. Ή που παρουσιάζουν τα οφέλη της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, όταν μετά από π.χ. μισή ώρα παρατηρήσεις, η ομάδα ανακαλύπτει τις ορθές γωνίες του δοσμένου τετραγώνου. Ο Ευκλείδης όμως δεν αποδεικνύει τις προτάσεις του σε έτοιμα σχήματα, αλλά **τα κατασκευάζει σταδιακά** και η απόδειξη **τελειώνει** με την ολοκλήρωση της κατασκευής. Το δημιουργημένο σχήμα **δεσμεύει** τη σκέψη του μαθητή: την οδηγεί στον τρόπο που σκέφτηκε αυτός που το σχεδίασε. *«Μπορεί σε μια απόδειξη ο δάσκαλος να καταφέρει σ' ένα τέχνασμα, να φέρει, για παράδειγμα, σ' ένα πρόβλημα γεωμετρίας μία βοηθητική ευθεία που οδηγεί με άνεση στο αποτέλεσμα, αλλά οι μαθητές δεν θα μπορέσουν ποτέ να καταλάβουν πως είναι δυνατόν να υπάρχει ανθρώπινο ον ικανό να επινοήσει ένα τέτοιο τέχνασμα»* (Polya, 1990). Παρακολουθούμε ακόμα παραδειγματικές διδασκαλίες Ευκλείδειας Γεωμετρίας όπου στα θρανία των μαθητών δεν υπάρχουν τα στοιχειώδη: κανόνας και διαβήτης.

**Τα σχήματα όμως στη γεωμετρία είναι όπως τα προγράμματα για τους υπολογιστές.**

**Οι μαθητές κατανοούν τα σχήματα που κατασκευάζουν οι ίδιοι.**

Το εκπληκτικό είναι ότι γίνονται έρευνες ακόμα και για την κατανόηση των ορισμών!

Οι ορισμοί, το πιο δυσνόητο πράγμα στα μαθηματικά, το σημείο δηλαδή κατάληξης μιας μακρόχρονης και δύσκολης διανοητικής πορείας για την διαμόρφωση μιας έννοιας, η συσσωρευμένη εμπειρία και η συμπυκνωμένη εκτενής ιστορία της (Kahane, 1997), εξετάζονται ως προς την κατανόηση. «Ο τρόπος που τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν και κατανοήθηκαν απεικονίζεται πολύ καθαρά στην ιστορία του διαφορικού λογισμού. Η βασική έννοια είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής μιας συνάρτησης. Ο Newton εξέδωσε τρεις φορές το περίφημο σύγγραμμά του: «Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας» δίνοντας κάθε φορά και διαφορετική εξήγηση στο πρόβλημα της παραγώγου. Αγωνίσθηκε σκληρά να δώσει και έναν επαρκή ορισμό της παραγώγου, χωρίς τελικά να το κατορθώσει. Ανάλογη και επίσης ανεπιτυχής ήταν και η προσπάθεια του Leibniz για την εξήγηση των διαφορικών  $dx$ ,  $dy$  και του λόγου  $dx / dy$  (Kline, 1981). Ο Leibniz (σε αντίθεση με τον Newton που δεν απαντούσε), απέρριψε τις «εξεζητημένης ακρίβειας κριτικές» δηλώνοντας ότι «δεν μπορούμε παρασυρμένοι από την υπερβολική ακριβολογία να απορρίψουμε τους καρπούς της επινόησης» (Kline, 1993: 63). Οι Newton και Leibniz, αν και εισήγαγαν νέα γλώσσα, νέες συλλογιστικές, νέες προτάσεις και νέα ερωτήματα στα μαθηματικά, δεν εξήγησαν με αρκετή σαφήνεια και δεν κατόρθωσαν να ορίσουν με αυστηρότητα τις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας τους (Γιαννακούλιας, 2007:283). Διερευνάται όμως η κατανόηση των ορισμών από τους μαθητές. Υπάρχει κάποια αμφιβολία για το αποτέλεσμα; Ο μέσος μαθητής, απλά αποτυπώνει τον ορισμό στη μνήμη του, γιατί δεν σημαίνει τίποτα για τη νόηση του. «Τελικά ούτε το σκύλο δεν μπορείς να αναγνωρίσεις από ανάλογους ορισμούς του σκυλιού» (Kline, 1981).

Σε άλλες έρευνες εξετάζεται η κατανόηση του ορισμού της συνάρτησης, για την οποία «χρειάστηκαν 2000 χρόνια για να εδραιωθεί στην σημερινή της πραγματικότητα. Ο Cauchy επεσήμανε ότι ακόμα και για τον Euler, το  $\sqrt{x^2}$  αναγνωριζόταν ως συνάρτηση, διότι οριζόταν από έναν μόνο τύπο, ενώ το  $x \rightarrow x$ , αν  $x \geq 0$  και  $x \rightarrow -x$ , αν  $x < 0$  δεν ήταν» (Henry, 2006: 65). Είναι γνωστό ότι με τον ορισμό της συνάρτησης ασχολήθηκαν πολλοί κορυφαίοι Μαθηματικοί στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, κατά την διάρκεια των συζητήσεων των προβλημάτων που συνδέονται με την κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών (Poincare, Hilbert, Hadamard, Weyl, Brouwer και άλλοι). «Για κάποιους Μαθηματικούς, οι συνολοθεωρητικοί ορισμοί και συγκεκριμένα ο ορισμός της συνάρτησης, ήταν απαράδεκτα ευρείς. Οι Μαθηματικοί αυτοί πίστευαν ακλόνητα ότι κάθε συναρτησιακή εξάρτηση που μπορεί να παρουσιάζει ενδιαφέρον από πρακτική σκοπιά οφείλει να είναι απαραίτητως κατασκευαστική, δηλ. να υπάρχει ένας αλγόριθμος τέτοιος ώστε, αν δοθεί το  $x$ , να μπορεί να προσδιοριστεί το απαιτούμενο  $y$ » (Tikhomirov, 1999: 99).

Ευτυχώς δεν γίνονται έρευνες και για την κατανόηση του ορισμού των πραγματικών αριθμών. Οι έρευνες, μετά τα διαγράμματα και την ανάλογη στατιστική επεξεργασία, ‘σταθερά’ διαπιστώνουν προβλήματα και παρερμηνείες στην κατανόηση και τελειώνουν με παρόμοιο τρόπο: τα αποτελέσματα (είτε συμφωνούν είτε είναι αντίθετα με τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών), χρειάζονται επανεξέταση.

Οι ερευνητές δεν έχουν υπολογίσει τρεις πολύ απλούς παράγοντες: (ι) Οι κάθε είδους εξετάσεις απαιτούν την μηχανική εφαρμογή κάποιου αλγόριθμου (λύση εξίσωσης, συστήματος, διαίρεση πολυωνύμων, υπολογισμό ολοκληρώματος κλπ.) και έτσι η προετοιμασία των μαθητών προσαρμόζεται συνήθως στην εξεταστική επιβολή και όχι στην κατανόηση των εννοιών. Η διδασκαλία των αλγορίθμων προκρίνεται επίσης από το δίδασκοντα και για το λόγο ότι δημιουργεί την ψευδαίσθηση της μεθοδικής προσέγγισης της γνώσης, σε αντίθεση με τη μη αλγοριθμική αντιμετώπιση των προβλημάτων, που δεν μπορεί να μεθοδευτεί (Τζουβάρας, 1993). Η τοποθέτηση των μαθηματικών στο γενικό πολιτισμικό τους πλαίσιο, η εξήγηση της σημασίας τους για την ανθρωπότητα, η πληροφόρηση για την ιστορική τους ανάπτυξη ή η επισήμανση πληθώρας αναπάντητων προβλημάτων δεν «δικαιούνται» χρόνο στο στοχοθετικό αυτό διδακτικό πλαίσιο προηγείται η προετοιμασία για τις εξετάσεις (Stewart, 2008: 60). (ii) Τα μαθηματικά είναι «ατομικό αγώνισμα» και όπως συμβαίνει σε όλα τα ατομικά αγώνισμα, υψηλά επίπεδα κατανόησης μπορούν να επιτευχθούν μόνο από εκείνους που έχουν αναπτύξει τις απαραίτητες προϋποθέσεις κατά την παιδική τους ηλικία και είναι ικανοί να σκέφτονται και να ενεργούν από μόνοι τους (Hagge, 1987: 15). «*Δε γίνονται όλοι πιανίστες ή παγοδρόμοι. Γιατί θα πρέπει να συμβαίνει κάτι διαφορετικό με τα Μαθηματικά;*» (Davis-Herch, 1981: 275). (iii) Τα μαθηματικά είναι κάτι που αναπτύσσεται σωρευτικά και «είναι πρακτικώς αδύνατο να μάθεις τα πιο καινούργια αν δεν γνωρίζεις τα πιο παλιά» (Kline, 1993: 38).

Οι μαθηματικές ιδέες οδηγήθηκαν στην τόσο οικεία αυστηρή μορφή και συστηματική παρουσίαση, όπως αυτή των ορισμών, μετά από μακροχρόνια προσπάθεια πολλών επιστημόνων. Οποσδήποτε **οι έννοιες** δεν είναι απλές. Γνωρίζουμε ολόκληρες φυλές ανθρώπων που έχουν π.χ. 40 διαφορετικές λέξεις (όχι συνδυασμούς) για διάφορες καταστάσεις του χιονιού (λέξη για το «χιόνι στο έδαφος», άλλη λέξη για το «χιόνι που πέφτει τώρα» κλπ) αλλά δεν έχουν μια λέξη για το χιόνι, τη «γενική ιδέα», την «έννοια» του χιονιού (Ζαφρανάς, 2000: 76). Για τις επιστήμες της εκπαίδευσης η συνθετότητα μιας έννοιας αναδεικνύεται από την προσέγγιση του Gerard Vergnaud, όπως αναφέρεται στο Henry, 2006: 27, κατά τον οποίο η έννοια χαρακτηρίζεται από την τριάδα « S, I, s » όπου:

(S) είναι το σύνολο των καταστάσεων που δίνουν νόημα στην έννοια. Κάθε στοιχείο της (S) είναι μια συγκεκριμενοποίηση της έννοιας, ένας από τους αντιπροσώπους της.

(I) είναι το σύνολο των αμετάβλητων λειτουργιών της έννοιας, το σύνολο των ιδιοτήτων που είναι κοινές στα στοιχεία του (S) και που μας κάνουν να τις εντάσσουμε όλες στην ίδια εννοιολογική κατηγορία.

(s) είναι ένα σύνολο όρων, ονομασιών ή συμβόλων που υποδηλώνουν την έννοια.

Όμως δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε αποκλειστικά με μια έννοια μέχρι να την συλλάβει και ο τελευταίος μαθητής. Κάτι τέτοιο είναι μάταιο και ανέφικτο. Ο μαθητής αφομοιώνει προοδευτικά μια έννοια: η έννοια ωριμάζει στο μυαλό του με τη χρήση και την εφαρμογή (Arons,1992: 60). Συμφωνούμε με την άποψη του Σαμ Καλαβίτα ότι η διαδικασία της μάθησης είναι η ίδια στα μαθηματικά και στη φυσική αγωγή - ο μαθητής πρέπει να αποκτά νέες δεξιότητες, να τις αφομοιώνει με την πρακτική άσκηση, αλλά και να μπορεί ανά πάσα στιγμή να επιστρέφει στα βασικά... *«Δουλειά μου δεν είναι να κάνω να γεννιούνται ιδιοφυΐες, αλλά να ενθαρρύνω την επιμονή»* (Αγγελόπουλος, 2009).

Η απαίτηση για κατανόηση στα μαθηματικά είναι μια αργή, ίσως ανιαρή και συχνά επίπονη διαδικασία, καθώς η βασική ιδέα είναι συχνά ευφυής αλλά δύσκολη και η δημιουργικότητα, αν και άφθονη, δεν είναι δημοκρατικά κατανεμημένη σε ολόκληρο τον πληθυσμό (Davis-Herch,1981: 274). Θεωρούμε άστοχη την εμπειρική διερεύνηση της κατανόησης δύσκολων μαθηματικών εννοιών, αφού τα αποτελέσματα είναι καθορισμένα. Παρά το φόβο, όμως, την δυσκολία και το «άγχος των μαθηματικών» που περιέχεται στις έρευνες, είναι γνωστό ότι εμφανίζονται - κατά προσέγγιση - ένα εκατομμύριο σελίδες νέων μαθηματικών κάθε χρόνο (Stewart, 2008: 59).

Συμφωνούμε όμως με την άποψη ότι ακόμη και αν δυσκολεύεται κανείς να κατανοήσει πλήρως τις έννοιες, είναι χρήσιμο για την παιδεία του να ενημερωθεί και να νιώσει, άλλος περισσότερο άλλος λιγότερο, πως η (ελεγχόμενη από τον δάσκαλο) δυσκολία οδηγεί στην υπέρβασή της και στο άνοιγμα νέων οριζόντων (Πάμφιλος, 2011: 254).

Θεωρούμε επίσης απαραίτητο να επιμένουμε στην εκτέλεση συλλογισμών από τους μαθητές (αλλά και στη διατύπωση συλλογισμών από εμάς ως διδάσκοντες) και να μην εξετάζουμε αποκλειστικά την απομνημόνευση των ορισμών ή τον έλεγχο των τελικών συμπερασμάτων. Η συλλογιστική διαδικασία ενέχει για τον μαθητή την απλή, αλλά δύσκολη, τέχνη της εστίασης της προσοχής σε ένα θέμα, της προσεκτικής παρατήρησης, της συγκρότησης της συλλογιστικής ακολουθίας, του ελέγχου των υποθέσεων, της οργάνωσης του χρόνου σκέψης. Είναι μακροχρόνια, αποκτάται βαθμιαία και διδάσκεται μέσα από τις δυσκολίες συγκεκριμένων θεμάτων (Jacques Barzum, αναφέρεται στο Arons, 1992: 489).

Η εξέταση των μαθητών με βάση, για παράδειγμα, ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής δεν υπηρετεί την κατεύθυνση αυτή. Είναι γνωστή και η σχετική άποψη του Μ. Klamkin: «φαίνεται ότι ο μοναδικός λόγος ύπαρξης των θεμάτων πολλαπλής επιλογής, είναι η ευκολία με την οποία βαθμολογούνται» (αναφέρεται στο Καζαντζής, 1998: 7).

Οπωσδήποτε μας ενδιαφέρει η λύση, αλλά, το θεμελιώδες για τον μαθητή είναι να βλέπει το πρόβλημα. Επιθυμία μας είναι να παροτρύνουμε τους μαθητές να δημιουργήσουν τα δικά τους μονοπάτια σκέψης: *«αφήστε τους μαθητές να συμμετάσχουν ενεργά στη διαμόρφωση του προβλήματος που πρόκειται να λύσουν στη συνέχεια, οπότε θα έχουν και ενεργητικότερη συμμετοχή. Αυτό είναι το σημαντικότερο μέρος της ανακάλυψης. Η λύση συχνά απαιτεί λιγότερη διορατικότητα και πρωτοτυπία από τη διαμόρφωση»* (Polya, 1990). Στόχος μας είναι να διδάξουμε τους μαθητές πώς να σκέφτονται και όχι απλώς να «μεταγγίζουμε» γεγονότα στις μνήμες τους (Papert, 1991: 84). Τα γεγονότα δεν συνιστούν το «νόμισμα» της μάθησης, ούτε η καλή γνώση αυτών είναι ενδεικτική της μόρφωσης κάποιου· παίζουν όμως σημαντικό ρόλο στο εκπαιδευτικό σύστημα, επειδή προσφέρονται για εξετάσεις. *«Το πραγματικό περιεχόμενο της εκπαίδευσης είναι να μαθαίνουμε να σκεφτόμαστε και να εκφράζουμε τη σκέψη μας με πειστικό τρόπο»* (Shank, 2001). Ο Δημόκριτος (400 π.Χ.) επεσήμανε από πολύ παλιά το πρόβλημα: «ου πολυμαθίην, πολυνοείην ασκέειν χρη».

#### 9.4. Άοκνος προετοιμασία της διδασκαλίας

Προτείνουμε ορισμένες δραστηριότητες που μπορούν να τροποποιηθούν και να προσαρμοστούν ώστε να *«συναντήσουν τους μαθητές στο δικό τους πνευματικό επίπεδο, θεωρώντας ως σημείο εκκίνησης το γλωσσικό και εννοιολογικό υπόβαθρό τους»* (Arons, 1992:504). Στις προτεινόμενες δραστηριότητες, οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι πολύ περιορισμένες. Συμπεριλαμβάνονται βέβαια και ενότητες για την ενημέρωση του δασκάλου, ο οποίος θα απορρίψει πιθανόν μερικές δραστηριότητες, γιατί δεν ταιριάζουν στην ιδιοσυγκρασία του, κάποιες όμως ίσως του φανούν χρήσιμες για να οδηγήσει τους μαθητές του στον δρόμο της επιστημονικής σκέψης.

Πιστεύουμε ότι μερικές ιδέες θα αντέξουν τη δοκιμασία.

Τις προτεινόμενες δραστηριότητες διατρέχουν τρεις βασικές διδακτικές αρχές:

(1) Σφαιρική και βαθιά ενημέρωση του δασκάλου για την ιστορία των μαθηματικών, όπως και για τα κάθε είδους «εμπόδια» (επιστημολογικά, διδακτικά, ψυχολογικά, οντογενετικά), που ορθώνονται στον διανοητικό αγώνα των μαθητών. Συμφωνούμε με την αισιόδοξη άποψη: *«αυτό που λειτουργεί ως εμπόδιο κάποτε υπήρξε παράγοντας προόδου, προωθητικός κινητήρας εξέλιξης»* (Σπύρου, 2006: 178).

(ι) Γνώση των μορφών και των μεθόδων διδασκαλίας - ζούμε στην εποχή του πληθωρισμού των μεθοδολογιών – τις οποίες όμως ο εκπαιδευτικός δεν είναι απαραίτητο να ακολουθεί δογματικά. Οι ιδέες που γεννιούνται μέσα στο μυαλό των μαθητών ή οι απορίες που εκφράζονται μπορούν να οδηγήσουν σε νέους και πολύ πιο ενδιαφέροντες, ίσως, τρόπους οργάνωσης της μαθησιακής διαδικασίας (Polya, 1990).

(ιι) Κύριος στόχος της διδασκαλίας μας είναι να συνοδεύουμε διακριτικά το μαθητή, χωρίς να χάνουμε καμιά ευκαιρία για συνειδητή διερεύνηση και ανάλυση, ώστε να τον βοηθήσουμε να ξεπεράσει την δυσκολία και να οδηγηθεί γρήγορα σε άμεσα και ασφαλή συμπεράσματα. Φυσικά δεν θα πρέπει «να επιταχύνουμε την μαθηματική εκπαίδευση σε περιόδους που θα ήταν πιο σοφό να επιβραδυνθεί» (Kline, 1993: 159), π.χ. όριο. Οπωσδήποτε «ο τρόπος με τον οποίο μεταδίδονται οι γνώσεις είναι πολύ πιο σημαντικός και από αυτές τις ίδιες. Σημασία δεν έχει το τι ξέρετε, αλλά το πώς φτάσατε να το ξέρετε» (Shank, 2001).

Κατά την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων ο δάσκαλος επεμβαίνει όσο το δυνατόν λιγότερο. «Αν κοιτάζουμε τη λέξη παιδαγωγός, θα βρούμε μέσα της το ρήμα «άγω» που σημαίνει οδηγώ, καθοδηγώ. Αυτό ακριβώς σημαίνει ...να καθοδηγείς, να νοιώθεις ενθουσιασμό ο ίδιος, να ετοιμάζεις καινούργιο υλικό καθώς οι μαθητές σου εξαντλούν τις δυνατότητες του παλιού και να βάλεις αυτό το έδεσμα μπροστά τους λέγοντας: Κοίτα τι θαυμάσιο! Ελάτε να το απολαύσουμε μαζί» (Μπουσκάλια, 1982: 24).

Η Μαρία Μοντεσσόρι έχει προτείνει τη μέθοδο της μη επέμβασης: Ο δάσκαλος πρέπει να μετράει το τι χρειάζεται το παιδί σαν τον υπηρέτη που ετοιμάζει με προσοχή το ποτό για τον αφέντη του και τον αφήνει μετά να το πει όπως θέλει. Όλες οι δραστηριότητες που περιγράφει προϋποθέτουν την ενεργητική προετοιμασία και καθοδήγηση του δασκάλου και η κατοπινή «απραξία» του είναι σημάδι της επιτυχίας του, γιατί δείχνει πως το έργο έγινε σωστά (Μοντεσσόρι, 1960).



Κανένα άλλο μάθημα, ίσως, δεν προσφέρεται για τόσο καλή ή κακή διδασκαλία όσο τα μαθηματικά. Και η κακή διδασκαλία οφείλεται κυρίως στην αδυναμία να αναδειχτεί η γοητεία των μαθηματικών. Αλλά, συνθήκη sine qua non, για να γοητευθεί ο μαθητής από τα μαθηματικά, είναι να γοητευθεί πρώτα ο δάσκαλος. Αν αυτό δε συμβαίνει, καμιά παιδαγωγική εκπαίδευση, όσο μακρόχρονη και να είναι, δεν μπορεί να αναπληρώσει το κενό (Wilder, 1986: 26). Απαραίτητη λοιπόν προϋπόθεση για μια επιτυχημένη διδασκαλία είναι η ευχαρίστηση του ίδιου του δασκάλου από τα μαθηματικά. Κάποιος που δεν μπορεί να εκτιμήσει την ομορφιά και την δύναμη των μαθηματικών δεν θα μεταδώσει σε άλλους την γνήσια συγκίνηση του.

*«Τα παιδιά μπορούν να δουν πολύ καθαρά τον δάσκαλο που δεν αγαπάει τα μαθηματικά περισσότερο από τα ίδια και ότι ο λόγος που τα διδάσκει είναι απλά ότι περιλαμβάνονται στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα» (Papert, 1991: 71).*

Είναι σίγουρο ότι ο δάσκαλος που αντλεί ευχαρίστηση από τα μαθηματικά και που δεν απέκτησε ό,τι γνωρίζει καθαρά παθητικά, έχει αναπτύξει και κάποια (οποιαδήποτε) εκπαιδευτική φιλοσοφία, η οποία του δίνει τη δυνατότητα να εξασφαλίσει την προσοχή των μαθητών που δεν είναι σε απελπιστικό βαθμό αδιάφοροι. Αν κάποιος δάσκαλος δεν έχει την απαραίτητη αυτοπεποίθηση, αν δεν του δόθηκε η ευκαιρία στα πανεπιστημιακά του μαθήματα, θα πρέπει να δεχθεί να διασχίσει αργά και υπομονετικά την ύλη και να ασκηθεί στην εκτέλεση αφηρημένων λογικών συλλογισμών έχοντας υπ' όψιν ότι οι αφηρημένες έννοιες *«πρέπει να ωριμάζουν μέσα στον άνθρωπο»* (Kline, 1993: 145) και ότι *«ο ρυθμός κατανόησης των ενηλίκων είναι, συνήθως, μικρότερος από των παιδιών»* (Arons, 1992: 480).

Συμφωνούμε με την άποψη του Polya: *«Η διδασκαλία εξαρτάται από την προσωπικότητα του καθηγητή. Υπάρχουν τόσες καλές μέθοδοι όσοι είναι και οι καλοί καθηγητές»* (Polya, 1990). Δεν χρειάζεται επίσης καμιά περίπλοκη έρευνα για να διαπιστώσουμε ότι η μετάδοση της γνώσης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό, από το πόσο καλά ξέρουμε εκείνο που θέλουμε να μεταδώσουμε. Αυτό είναι ολοφάνερο, αδιάφορο από το ποια μέσα χρησιμοποιεί ο δάσκαλος. Οποιοσδήποτε έχει διδάξει γνωρίζει επίσης ότι η διδασκαλία βελτιώνει και την δική του αντίληψη. Και όχι μόνο αυτό. Κατά τον Bruner (1960: 96) η διδασκαλία βοηθά τον καλά προετοιμασμένο δάσκαλο να μάθει τα θέματα που θα διδάξει *«όπως τα μαθαίνει κανείς μόνο διδάσκοντάς τα»* Το παράθεμα από το ίδιο έργο είναι διασαφηνιστικό: *«Η παρακάτω ιστορία αφορά έναν διακεκριμένο καθηγητή Φυσικής. Όταν δίδαξε για πρώτη φορά σε μια προχωρημένη τάξη κολλεγίου τη θεωρία των quantum, είδε τα παιδιά να τον κοιτάζουν με ένα βλέμμα άδειο, σαν να μην είχαν καταλάβει τίποτε. Επανέλαβε τη θεωρία και πάλι δεν κατάλαβαν. Την είπε για τρίτη φορά και αυτή τη φορά την κατάλαβε ο ίδιος!»* (Bruner, 1960: 96).

Αν λοιπόν υπάρχει ο ενθουσιασμός, και κάποια -τουλάχιστον- από τα προτεινόμενα υλικά τότε ο δάσκαλος μπορεί να γίνει γέφυρα για να περάσει απέναντι ο μαθητής του, κι όταν πια του έχει διευκολύνει το πέρασμα *...χαρούμενα να γκρεμιστεί, ενθαρρύνοντας τον μαθητή να φτιάξει δικές του γέφυρες για μια αυτόνομη πρόοδο σε όλη την διάρκεια της ζωής του* (Νικ. Καζαντζάκης για τον ιδανικό δάσκαλο, στο: Μπουσκάλια, 1982: 9). Έχει περάσει πολύς καιρός από τότε που μπορούσαμε να διδάξουμε στους μαθητές μας κάθε απαραίτητη γνώση.

## 9.5. Γυμνάσιο

**9.5.0.** Για την πραγματοποίηση των «χειρωνακτικών» δραστηριοτήτων λαμβάνουμε ως δεδομένο ότι υπάρχει η άνεση του χώρου για τον δάσκαλο αλλά και για τους μαθητές (αν δεν επαρκούν τα θρανία ή το πάτωμα της αίθουσας, οι δραστηριότητες μπορούν να γίνουν στο χώρο εκδηλώσεων, ακόμα και στην αυλή του σχολείου). Είναι ενστικτώδης η επιθυμία του παιδιού για κίνηση. Αποκτούμε γνώσεις όχι μόνο με το μάτι και το αυτί, αλλά και με το χέρι, με το πιάσιμο, με την **αφή**. *«Η χρησιμοποίηση των χεριών βοηθά το μαθητή να συνειδητοποιήσει τα διάφορα μέρη, τη συναρμογή τους και τις σχέσεις τους με το σύνολο. Η σκέψη δεν σφηνώνεται λοιπόν στο κεφάλι. Υφαίνεται κατά κάποιον τρόπο με το γρήγορο παλινδρομικό της πέρασμα από το χέρι στο κεφάλι και αντίστροφα»* (Δαμαλάς, 1980: 37).

Στο «Πιστέβω του Επίκουρου», ο Farrington, αποδίδει στον Αναξαγόρα έναν αφορισμό που πανηγυρίζει αυτή την ευτυχισμένη ένωση του μυαλού και των χεριών: *«Δια το χείρας έχειν φρονιμώτατον είναι των ζώων άνθρωπος»* (Farrington, 1969:70). Στο ίδιο έργο παρατίθεται ένα γλαφυρό και αρκετά μεγάλο απόσπασμα από τον ύμνο για τα χέρια, που έγραψε ο Κικέρωνας το 50 π.Χ. Ο Κικέρωνας κλείνει το κείμενο με την φράση: *«χρησιμοποιώντας τα χέρια μας φτιάχνουμε μέσα στο βασίλειο της Φύσης μια δεύτερη Φύση για μας τους ίδιους»* (Farrington, 1969: 50). Η Μαρία Μοντεσσόρι, στο «μυστικό της παιδικής ηλικίας» γράφει: ο άνθρωπος αποκτά συνείδηση του περιβάλλοντος με τα χέρια του και το τροποποιεί πάλι με τα χέρια του, σύμφωνα πάντα με τις σκέψεις του.

Οι μαθητές μπορούν να ζωγραφίσουν, να βάψουν, να γράψουν αφιερώσεις, επιτρέπεται τελικά να χειριστούν τα υλικά σαν παιχνίδια. Αξία έχουν οι ιδέες που θα σχηματίσουν οι μαθητές με τη βοήθεια των υλικών. Η αυξημένη ελευθερία εξωτερικών κινήσεων είναι βέβαια μέσο και όχι σκοπός. Ο δάσκαλος γνωρίζει έτσι καλύτερα τους μαθητές του. Επιτρέπεται λοιπόν η κίνηση και η ομιλία, *η κίνηση και ο νους πηγαίνουν μαζί*. Ο αντικοινωνικός χαρακτήρας του παραδοσιακού σχολείου φαίνεται από το γεγονός ότι μια από τις πρώτες «αρετές» που διακηρύσσει είναι η ακινησία και η παρατεταμένη σιωπή. Άλλοτε επέβαλαν στα παιδιά, τα δάχτυλα των δύο χεριών να είναι μπλεγμένα, ακριβώς για να μη μπορούν να πιάσουν τίποτα. Αλλά αυτή η ακινησία, η απραξία και η σιγή είναι αληθινό μαρτύριο για το παιδί και εντελώς έξω από τη φυσιολογία του (Πολυδούρης, 1997: 21).

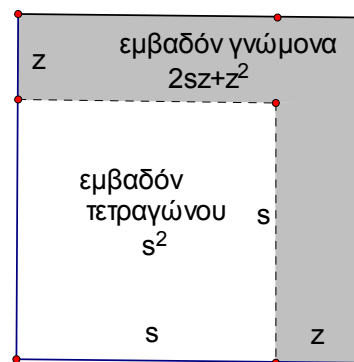
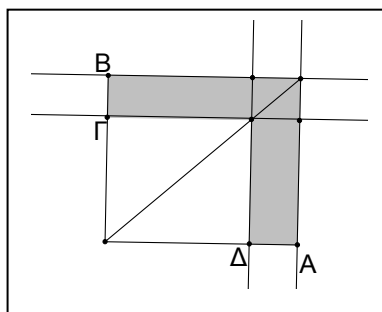
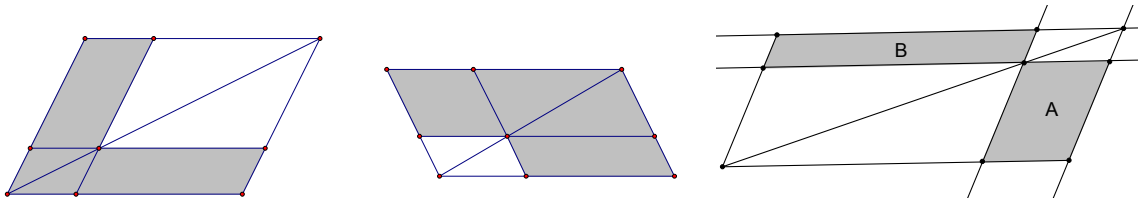
Η μέθοδος υπολογισμού της τετραγωνικής ή κυβικής ρίζας με τη βοήθεια των επίπεδων ή στερεών γνωμόνων, με τα προτερήματα του χώρου, την απλότητα των εννοιών, την προφάνεια των αποδείξεων και την ανάγλυφη μορφή των συμπερασμάτων, είναι το κατάλληλο αντικείμενο για να παρακινήσει και τους αδιάφορους μαθητές, για να καλλιεργήσει και να αναπτύξει την μέθοδο σκέψης και αυτών των μαθητών.



### 9.5.1. Γνώμονες

Στο δεύτερο βιβλίο των Στοιχείων ο Ευκλείδης περιλαμβάνει 2 ορισμούς και 14 Προτάσεις. Ο πρώτος ορισμός αναφέρεται στον καθορισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όταν δίνονται δύο διαδοχικές πλευρές του: « Πάν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν»(Σταμάτης 1975, I , σελ.98). Ο δεύτερος είναι ο ορισμός του **γνώμονα**:

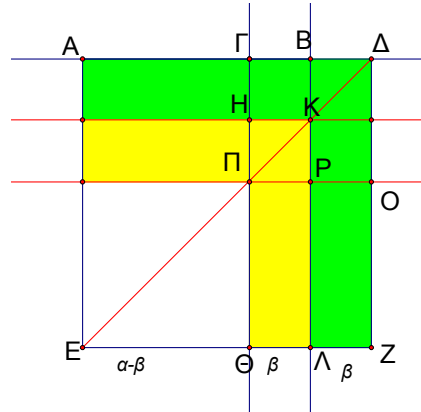
«Παντὸς δε παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περι τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων εν ὁποιοονῶν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω» (Σε κάθε παραλληλόγραμμο, οποιαδήποτε από τα δύο παραλληλόγραμμο περι την διαγώνιό του, μαζί με τα δύο παραπληρώματα (A,B), ονομάζεται γνώμων).



Οι γνώμονες χρησιμοποιούνται για σύντομες αποδείξεις, ακόμα και σε πρακτικά αριθμητικά προβλήματα. Συνδέονται με τους αριθμούς Fibonacci, τον Ευκλείδειο αλγόριθμο και τα συνεχή κλάσματα (ΚΕΕΠΕΚ I 2001, I, σελ.211). Το όνομά τους οφείλεται στο αρχικό τους «Γ». Στο βιβλίο II, αναφέρονται μόνο γνώμονες για τετράγωνα.

*Αν το αρχικό τετράγωνο έχει πλευρά  $s$  και προστεθεί γνώμονας μήκους  $z$ , δημιουργείται τετράγωνο με εμβαδόν  $(s+z)^2$ .*

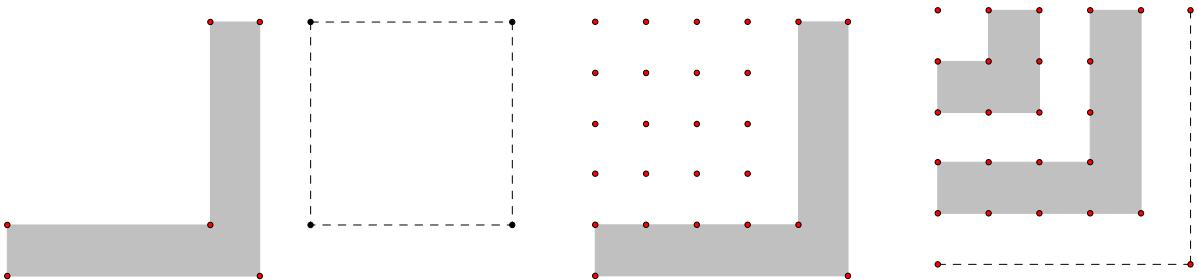
Στο διπλανό σχήμα, με πρόσθεση δύο γνωμώνων, αποδεικνύεται η (αρκετά πολύπλοκης διατύπωσης) πρόταση II.8: Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ (Σταμάτης 1975, I, σελ.108).



Η σύγχρονη συμβολική της έκφραση είναι η  $(α+β)^2=(α-β)^2+4αβ$ .

Με το όνομα «γνώμονας» αναφέρονται και οι περιττοί αριθμοί, γιατί αν προστεθούν σε τετράγωνο δίνουν ένα νέο τετράγωνο.

Στο τετραγωνισμένο χαρτί οι γνώμονες θα είναι γωνιώδη σχήματα αποτελούμενα από μοναδιαία τετράγωνα του πλέγματος. Αν σχεδιάσουμε, τότε είναι φανερό ότι ο κάθε γνώμονας **θέλει** το τετράγωνό του:



Αν προσαρμόσουμε ένα πλήθος από γνώμονες, τον ένα μέσα στον άλλο, αρχίζοντας από τον μικρότερο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι, ξεκινώντας από τον αριθμό 1, το άθροισμα περιττών αριθμών είναι τέλει τετράγωνο:  $1+3 = 4$ ,  $1+3+5 = 9$  κλπ. Επίσης προκύπτει ότι κάθε περιττός αριθμός μπορεί να παρασταθεί σαν διαφορά δύο διαδοχικών τετραγώνων:  $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$ ,  $9 = 2*4+1 = 5^2 - 4^2$ . Τότε η πλευρά ενός περιττού τετραγώνου και οι πλευρές των τετραγώνων των οποίων η διαφορά είναι ίση με αυτό το περιττό τετράγωνο, σχηματίζουν πυθαγόρεια τριάδα, π.χ.  $3^2 = 9 = 5^2 - 4^2$ , προκύπτει η (3,4,5),  $5^2=25=2*12+1=13^2-12^2$ , προκύπτει η (5,12,13),  $7^2 = 49 = 2*24+1 = 25^2-24^2$ , η (7,24,25) κλπ.

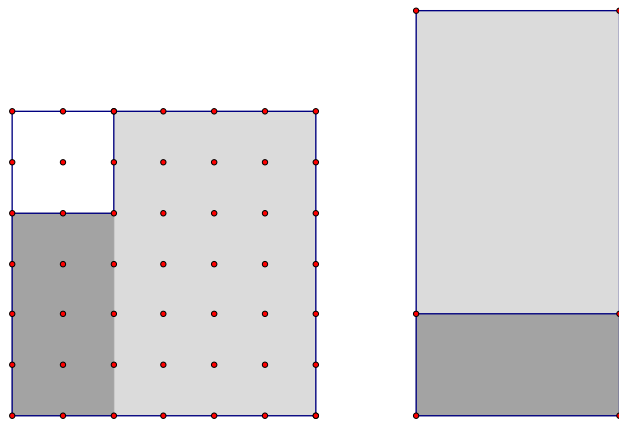
Στην ενότητα 7.7.1. είδαμε ότι με μ περιττό,  $μ > 1$ , παίρνουμε τις «Πυθαγορικές»

$$\text{τριάδες: } \mu, \frac{\mu^2 - 1}{2}, \frac{\mu^2 + 1}{2} \quad (2n+1=\mu^2, n = \frac{\mu^2 - 1}{2}, n + 1 = \frac{\mu^2 + 1}{2}).$$

Η διδασκαλία μπορεί να κατευθυνθεί στην εξέταση της διαφοράς τετραγώνων δύο οποιονδήποτε φυσικών. Η διαφορά τετραγώνων δυο φυσικών μπορεί να είναι περιττός, αλλά μπορεί να είναι και πολλαπλάσιο του 4, π.χ.  $48=13^2-11^2$  (Κόσσυβας, 2009). Στο τετραγωνισμένο χαρτί, η διαφορά αυτή είναι ένας «παχύς» γνόμονας, ο οποίος μετασχηματίζεται σε ορθογώνιο, έναν «επίπεδο αριθμό» (Ευκλείδου Στοιχεία, VII, «όροι»).

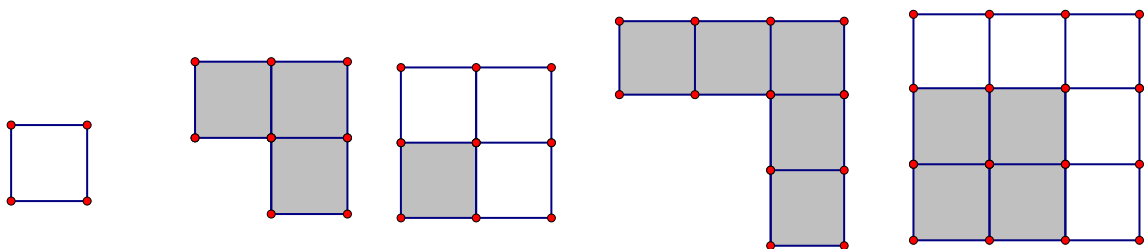
Από δω προκύπτει η γνωστή γεωμετρική απόδειξη της διαφοράς τετραγώνων.

Αλλά και κάτι περισσότερο: Αν προσπαθήσουμε να περιγράψουμε όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς ενός τετραγώνου σε έναν «παχύ γνόμονα» (χωρίς να μεταβληθεί το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων που περιέχει) οδηγούμαστε, με την βοήθεια της αριθμητικής, στην ανακάλυψη των Πυθαγόρειων τριάδων (Gindkin, 1995).



### 9.5.2. Τετράγωνοι αριθμοί

Φανταζόμαστε ότι οι αριθμοί αποτελούνται από μονάδες τετράγωνα, φυσικά ίσα μεταξύ τους και με πλευρά τη μονάδα. Τετράγωνα σχηματίζονται με  $1, 4, 9, 16, \dots, n^2$  μονάδες,  $n$  φυσικός. Τα τετράγωνα μπορούν να σχηματιστούν προσθέτοντας διαδοχικούς γνόμονες στην πρώτη τετραγωνική μονάδα.



Σχ. 1: ο κάθε περιττός γνόμονας αυξάνει την πλευρά του τετραγώνου κατά μία μονάδα.

**Τετράγωνοι** είναι οι αριθμοί εκείνοι που με τις τετραγωνικές τους μονάδες μπορούν να σχηματίσουν ένα νέο τετράγωνο, χωρίς να περισσέψει τετραγωνική μονάδα. Αρχίζοντας από τον 1, σχηματίζουμε τους τετράγωνους αριθμούς προσθέτοντας περιττούς γνόμονες, γνόμονες με περιττό αριθμό τετραγώνων, όπως φαίνεται στο σχ.1.

Στην ενότητα 9.5.1. είδαμε ότι το άθροισμα διαδοχικών περιττών είναι τετράγωνος αριθμός,  $\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2$  ( ή αριθμητική πρόοδος:  $\sum_{i=1}^k (2i-1) = \frac{k(1+2k-1)}{2} = k^2$ , ή επαγωγικά:  $\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 1 = 1^2$ ,  $\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^k (2i-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$  ).

**Τετραγωνική ρίζα** ενός φυσικού αριθμού είναι η **πλευρά του τετραγώνου**, στο οποίο **μετασχηματίζεται** ο αριθμός αυτός. Ο κάθε περιττός αριθμός είναι και γνώμονας, που όταν προστίθεται, αυξάνει την πλευρά του τετραγώνου κατά μια μονάδα.

Ας βρούμε με την μέθοδο της πρόσθεσης περιττών γνωμόνων τις τετραγωνικές ρίζες ενός διψήφιου αριθμού π.χ. του 81 και ενός τριψηφίου π.χ. του 256. Για να οργανώσουμε αυτή τη δραστηριότητα στην αίθουσα, ή αν δεν υπάρχει αίθουσα οπουδήποτε, είναι απαραίτητο να έχουμε υλικό για **κάθε** μαθητή: πολλές τετραγωνικές μονάδες, π.χ. τετραγωνάκια από χαρτόνι 10εκ. X 10εκ., που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τις υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου. *Προτείνουμε να υπάρχει υλικό για κάθε μαθητή.*

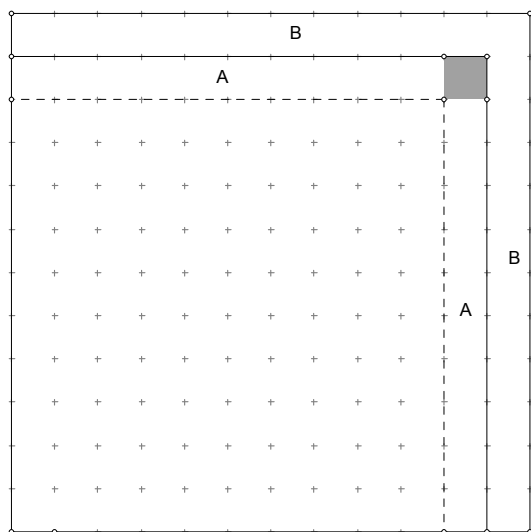
#### **A. Η τετραγωνική ρίζα του 81.**

Διαθέτουμε λοιπόν κάποιο πλήθος από **τ.μ.** Αρχίζοντας από 1τ.μ., όπως δείχνει το **σχ.1**, οι μαθητές τοποθετούν (περιττούς) γνώμονες σχηματίζοντας τετράγωνα, μέχρι να συμπληρωθεί ο αριθμός των τ.μ. που διατίθενται κάθε φορά.

Τετραγωνική ρίζα του 81, είναι η πλευρά του τετραγώνου που θα σχηματιστεί, η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν αυτές τις 81τ.μ.

#### **Τετραγωνική ρίζα του 81**

Αύξων αριθμός	Αριθμός τετραγώνων περιττών γνωμόνων	Δοσμένος αριθμός	Τετραγωνική ρίζα
1	1	<b>81</b> Η τετραγωνική ρίζα είναι ο αριθμός της τάξης του τελευταίου περιττού προσθετέου, γιατί: $\sum_{\kappa=1}^v (2\kappa-1) = v^2$	1
2	3		2
3	5		3
4	7		4
5	9		5
6	11		6
7	13		7
8	15		8
9	17		9
	Σύνολο: 81 τετράγωνα		

**Β. Η τετραγωνική ρίζα του 256.**

Επειδή 100 τ.μ., σχηματίζουν ένα τετράγωνο με πλευρά 10 μονάδες, ο αμέσως επόμενος γνόμονας αποτελείται από  $10+10+1=21$ τ.μ. (γνόμονας  $A=2*10+1$ ).

Οι επόμενοι γνόμονες θα αποτελούνται από 23 (γνόμονας  $B=2*11+1$ ), 25, κλπ. τετραγωνικές μονάδες. Μια εκτίμηση του αριθμού των γνωμόνων που απαιτούνται μας δίνει η διαίρεση  $156:20$ , περίπου 7.

Για να τοποθετήσουμε 7 γνόμονες, χρειάζονται  $7*20=140$ τ.μ. και άλλες  $1+3+5+7+9+11+13=1+2+\dots+(2*7-1) = 7^2 = 49$ τ.μ., συνολικά 189 τετραγωνικές μονάδες, τις οποίες δεν έχουμε. Διαθέτουμε 156 τ.μ. Αν αφαιρέσουμε τον τελευταίο γνόμονα, οι τετραγωνικές μονάδες που χρειάζονται είναι  $6*20=120$  και άλλες:  $1+3+5+7+9+11= 6^2 = 36$ , συνολικά 156, όσες δηλ. έμειναν από την πρώτη αφαίρεση των 100τ.μ.

Αρχίζουμε λοιπόν την τοποθέτηση περιττών γνωμόνων γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 10 μονάδες, και η διαδικασία μπορεί να συντομευτεί στον **Πίνακα 9.5.2.Β**:

Αύξων αριθμός	Αριθμός τετραγώνων περιττών γνωμόνων	Δοσμένος αριθμός	Τετραγωνική ρίζα
		256	
0	100	-100	10
		Υπόλοιπο 156τ.μ.	
1	21	$156-21=135$ τ.μ.	11
2	23	$135-23=112$	12
3	25	$112-25=87$	13
4	27	$87-27=60$	14
5	29	$60-29=31$	15
6	31	$31-31=0$	16

Γ. Ανάλογα σκεφτόμαστε π.χ. για την τετραγωνική ρίζα του 625. Οι 400τ.μ. σχηματίζουν τετράγωνο με πλευρά 20 μονάδες, αρχίζουμε με γνόμονα 41 τ.μ. γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 20 μονάδες και συνεχίζουμε με γνόμονες 43, 45, 47 και 49 τετραγωνικών μονάδων. Καθώς μεγαλώνουν οι αριθμοί οι μαθητές θα αναγκαστούν να χρησιμοποιήσουν «νοερά» τετράγωνα και νοητούς γνόμονες.

### 9.5.3. Τετραγωνική ρίζα θετικού ρητού, ακριβής και κατά προσέγγιση

Τετραγωνική ρίζα (ακριβής) ενός θετικού ρητού  $\alpha$ , είναι ένας θετικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με  $\alpha$ , π.χ. ο 2.8 είναι η τετραγωνική ρίζα του 7.84, η τετρ. ρίζα του  $\frac{16}{25}$  είναι ο  $\frac{4}{5}$ , του 0.4624 είναι ο 0.68, του 12345678987654321 είναι ο 111111111.

Τετραγωνική ρίζα του (θετικού)  $\alpha$  κατά προσέγγιση μονάδος με έλλειψη, ονομάζεται ο (μη αρνητικός)ακέραιος  $v$  που είναι τέτοιος ώστε:  $v^2 \leq \alpha < (v+1)^2$ . Ο  $v+1$  είναι η τετραγωνική ρίζα του  $\alpha$  κατά προσέγγιση μονάδος με υπεροχή.

Συνήθως, όταν λέμε ότι η τετραγωνική ρίζα του  $\alpha$  κατά προσέγγιση μονάδος είναι  $v$ , εννοούμε συγχρόνως ότι είναι κατά προσέγγιση μονάδος με έλλειψη. Π.χ. Ο αριθμός 5 είναι η τετραγωνική ρίζα κατά προσέγγιση μονάδος του 26. Επίσης, επειδή  $0 \leq \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$ , η κατά προσέγγιση μονάδος τετραγωνική ρίζα του δεκαδικού  $\alpha.a_1a_2a_3\dots a_k$  είναι ίση με την κατά προσέγγιση μονάδος τετραγωνική ρίζα του ακέραιου μέρους του, του  $\alpha$ . Π.χ. Ο αριθμός 5 είναι η τετραγωνική ρίζα κατά προσέγγιση μονάδος του 26.42, ο 51 είναι η κατά προσέγγιση μονάδος τετραγωνική ρίζα του 2615.34.

Η διαφορά  $\rho = \alpha - v^2$  ονομάζεται υπόλοιπο της κατά προσέγγιση τετραγωνικής ρίζας  $v$ . Από την  $v^2 \leq \alpha < (v+1)^2$  προκύπτει ότι  $\rho = \alpha - v^2 < (v+1)^2 - v^2 = 2v+1$ , δηλ. το υπόλοιπο δεν υπερβαίνει το διπλάσιο της τετρ. ρίζας. Π.χ. το υπόλοιπο της κατά προσέγγιση μονάδας τετρ. ρίζας του 35 ( $25 < 35 < 36$ ), είναι  $35-25=10 < 2*5+1=11$ . Όταν το υπόλοιπο είναι 0, τότε ο  $\alpha$  ονομάζεται τέλειο τετράγωνο.

Κατά προσέγγιση δεκάτου τετραγωνική ρίζα του  $\alpha$  λέγεται το κλάσμα  $\frac{v}{10}$  που είναι τέτοιο ώστε:  $\left(\frac{v}{10}\right)^2 \leq \alpha < \left(\frac{v+1}{10}\right)^2$  Πολλαπλασιάζοντας επί  $10^2$ , παίρνουμε  $v^2 \leq 100*\alpha < (v+1)^2$ , δηλ. ο ακέραιος  $v$  είναι η κατά προσέγγιση μονάδος ρίζα του  $100*\alpha$ . Για να βρούμε λοιπόν την τετραγωνική ρίζα κατά προσέγγιση δεκάτου του  $\alpha$ , βρίσκουμε την κατά προσέγγιση μονάδος τετραγωνική ρίζα του  $100*\alpha$  και διαιρούμε δια 10. Ομοίως, κατά προσέγγιση εκατοστού τετραγωνική ρίζα του  $\alpha$  λέγεται το ρητό κλάσμα  $\frac{v}{100}$  ώστε  $\left(\frac{v}{100}\right)^2 \leq \alpha < \left(\frac{v+1}{100}\right)^2$ . Πολλαπλασιάζοντας επί  $10^4$ , παίρνουμε  $v^2 \leq 10000*\alpha < (v+1)^2$ , δηλ. ο φυσικός  $v$  είναι η κατά προσέγγιση μονάδος ρίζα του  $10000*\alpha$ .

Για να βρούμε την τετραγωνική ρίζα κατά προσέγγιση εκατοστού του  $a$ , μπορούμε να διαιρέσουμε δια 100 την κατά προσέγγιση μονάδος τετραγωνική ρίζα του  $10000 \cdot a$ .

Κατά προσέγγιση  $\frac{1}{10^k}$  τετραγωνική ρίζα του  $a$  λέγεται το κλάσμα  $\frac{v}{10^k}$  ώστε

$$\left(\frac{v}{10^k}\right)^2 \leq a < \left(\frac{v+1}{10^k}\right)^2. \text{ Πολλαπλασιάζοντας επί } 10^{2k}, \text{ παίρνουμε } v^2 \leq (10^{2k}) \cdot a < (v+1)^2,$$

δηλ. ο φυσικός  $v$  είναι η κατά προσέγγιση μονάδος ρίζα του  $(10^{2k}) \cdot a$ . Για να βρούμε επομένως την τετραγωνική ρίζα κατά προσέγγιση  $\frac{1}{10^k}$  του  $a$ , μπορούμε να βρίσκουμε την κατά προσέγγιση μονάδος τετραγωνική ρίζα του  $(10^{2k}) \cdot a$  και μετά να διαιρούμε δια  $10^k$ .

Η δικαιολόγηση μπορεί να γίνει και με την βοήθεια των μονάδων: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του 33.64, δηλ. την πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 33.64 τ.μ. Τα 33.64 τ.μ. είναι 3364 τετραγωνικά δέκατα. Βρίσκουμε την πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 3364 τ.δ., 58 δέκατα. Διαιρούμε δια 10 και βρίσκουμε 5.8 μέτρα.

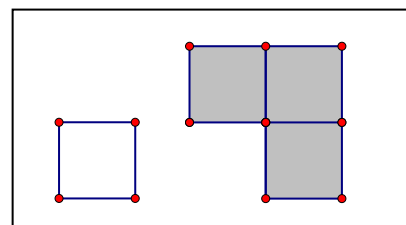
#### 9.5.4. Ο αλγόριθμος πριν τις αριθμομηχανές

##### A. Για να θυμηθούν οι παλιοί και να γνωρίσουν οι νέοι.

Η «αλγοριθμική» μέθοδος για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας, όπως περίπου περιγράφεται στην Άλγεβρα του Σπ. Κανέλλου (1963: 80), συμπυκνώνει την διαδικασία με τους γνώμονες που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα τμήματα. Θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο χρησιμοποιώντας για παράδειγμα τον 256, συνήθως σε παρένθεση, την τετραγωνική ρίζα του οποίου υπολογίσαμε στην ενότητα 9.5.2.

Υποθέτουμε αρχικά ότι έχουμε έναν θετικό ακέραιο.

1. Χωρίζουμε τον αριθμό σε διψήφια τμήματα, αρχίζοντας από δεξιά (κάθε τετραγωνική μονάδα διψήφιου τμήματος χωρίζεται σε 100 τ.μ. της τάξης του αμέσως δεξιότερου τμήματος). Το πρώτο προς τα αριστερά τμήμα μπορεί να περιέχει ένα μόνο ψηφίο. Π.χ. για τον  $256 : 2'56$ . Χωρίζουμε τις εκατοντάδες (2) από τις απλές μονάδες. Με τις εκατοντάδες τετραγωνικών μονάδων κατασκευάζουμε τετράγωνα με πλευρά 1 δεκάδα μονάδων και γνώμονες με τέτοια τετράγωνα, πλευράς δέκα μονάδων. Για να κατασκευαστεί ο επόμενος γνώμονας με τετράγωνα πλευράς 10 μονάδων χρειάζονται 300 τετραγωνικές μονάδες.



**2.** Βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα του πρώτου προς τα αριστερά τμήματος κατά προσέγγιση μονάδος. Αυτό θα είναι και το πρώτο ψηφίο της ζητούμενης τετραγωνικής ρίζας (για τον 256, είναι 1, μία δεκάδα μονάδων). Το τετράγωνο αυτού του ψηφίου (1, δηλ. 100 τετραγωνικές μονάδες) το αφαιρούμε από το πρώτο προς τα αριστερά τμήμα (2, δηλ. από τις 200 τ.μ.) και παίρνουμε το **πρώτο μερικό υπόλοιπο** (1, 100 τ.μ.). Δεξιά του υπολοίπου αυτού γράφουμε το επόμενο διψήφιο τμήμα (1 56, για την κατασκευή του τετραγώνου με πλευρά 1 δεκάδα, χρησιμοποιήσαμε 100 τ.μ., περισσεύουν  $256-100=156$  τ.μ., γραμμή «0» του πίνακα 9.5.2.B) και χωρίζουμε το τελευταίο δεξιά ψηφίο με ένα κόμμα (15,6. Γνώμονας με τετράγωνα πλευράς 10 μονάδων δεν μπορεί να κατασκευαστεί, χρειάζονται 300 τ.μ. Τοποθετούμε λοιπόν «γύρω» από το τετράγωνο πλευράς 10 μονάδων περιττούς γνώμονες με 21, 23, 25 τ.μ. κλπ μέχρι να εξαντλήσουμε τις διαθέσιμες τ.μ. (γραμμές 1,2,3,4,5,6 του πίνακα) Όλοι αυτοί οι γνώμονες θα αποτελούνται από **τουλάχιστον** 20 τ.μ., που είναι αριθμός διπλάσιος από την πλευρά (1 δεκάδα μονάδων) του αρχικού τετραγώνου).

**3.** Διαιρούμε τον αριθμό που βρίσκεται αριστερά του κόμματος με το διπλάσιο του ψηφίου της προσεγγιστικής ρίζας που βρήκαμε στο 2<sup>ο</sup> βήμα. Το ακέραιο πηλίκο αυτής της διαίρεσης ( $15:2=7$ , δηλ.  $150:20=7$ , είναι μια εκτίμηση του αριθμού των γνωμώνων) είναι το επόμενο, δεύτερο, ψηφίο της ρίζας, ή, αυτό το πηλίκο είναι μεγαλύτερο από το ζητούμενο δεύτερο ψηφίο. Η δοκιμή γίνεται ως εξής: Γράφουμε το πηλίκο αυτό δεξιά του διπλασίου (2) του μέρους της ρίζας που ήδη έχει βρεθεί (1), και πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που προκύπτει, με αυτό το πηλίκο.

Για τον 259:  $27*7=189$ . Ο αριθμός που προκύπτει δηλώνει το πλήθος των τ.μ. που απαιτούνται για τους 7 γνώμονες, γιατί  $7*20=140$ , και οι τ.μ. οι επιπλέον των 20 είναι  $1+3+5+7+9+11+13 = 7^2 = 49$ , σύνολο 189 ( $=7*7+7*20=7*27$ ).

Αν το γινόμενο αυτό ( $27*7$ ) μπορεί να αφαιρεθεί από το πρώτο μερικό υπόλοιπο που ακολουθείται από το επόμενο διψήφιο τμήμα (από το 156 στο παραπάνω παράδειγμα), τότε το ψηφίο (πηλίκο) που δοκιμάζουμε (το 7) είναι το επόμενο ψηφίο της ζητούμενης ρίζας.

Αν δεν μπορεί να αφαιρεθεί, δοκιμάζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, τον αριθμό που είναι κατά μία μονάδα μικρότερος (6), μέχρι η αφαίρεση αυτή να είναι δυνατή, στο  $\mathbb{N}_0$  φυσικά (στο παραπάνω παράδειγμα, δοκιμάζουμε το 6,  $26*6=156$ , είναι δυνατή η αφαίρεση, μένει υπόλοιπο 0 και έτσι βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα του 256, ακριβώς, είναι 16).

Το υπόλοιπο αυτής της αφαίρεσης είναι το **δεύτερο μερικό υπόλοιπο**. Δεξιά από το δεύτερο μερικό υπόλοιπο γράφουμε (κατεβάζουμε) το επόμενο διψήφιο τμήμα και χωρίζουμε με ένα κόμμα το τελευταίο προς τα δεξιά ψηφίο.



4.Διαιρούμε τον αριθμό που βρίσκεται αριστερά του κόμματος με το διπλάσιο του ψηφίου της προσεγγιστικής ρίζας που βρήκαμε στο 3<sup>ο</sup> βήμα, και συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να χρησιμοποιήσουμε όλα τα διψήφια τμήματα του δοσμένου αριθμού.

Έτσι βρίσκουμε την κατά προσέγγιση μονάδος τετρ. ρίζα του δοσμένου ακεραίου.

5.Αν θέλουμε να συνεχίσουμε για να βρούμε και δεκαδικά ψηφία για την τετρ.ρίζα, τότε συμπληρώνουμε τον ακέριο με δεκαδικά ψηφία που είναι τόσα ζευγάρια μηδενικών, όσα και τα δεκαδικά ψηφία της αναζητούμενης ρίζας (όπως στο παράδειγμα Γ.2). Τη στιγμή που θα «κατεβάσουμε» το πρώτο δεκαδικό διψήφιο τμήμα, βάζουμε «.» μετά το τελευταίο ακέριο ψηφίο της τετραγωνικής ρίζας που ήδη έχει βρεθεί και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

6.Αν έχουμε δεκαδικό αριθμό, τότε ο χωρισμός σε διψήφια τμήματα αρχίζει από την υποδιαστολή και προς τα αριστερά και προς τα δεξιά, π.χ. ο 153.946 γράφεται 153.9460 ή 153.946000 ή 153.94600000 κλπ (βλ. και παράδειγμα Δ). Βρίσκουμε την κατά προσέγγιση μονάδος τετρ.ρίζα του ακεραίου μέρους (του 153) όπως περιγράφεται στα βήματα 1 έως 4 (12) και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, βάζοντας «.» - υποδιαστολή- (12. ) στην τετρ.ρίζα τη στιγμή που κατεβάζουμε το πρώτο δεκαδικό διψήφιο τμήμα (το 94). Μπορούμε φυσικά και να πολ/σουμε κατάλληλα (π.χ. τον 153.946 επί  $10^4$ ), να βρούμε την κατά προσέγγιση μονάδος ρίζα του ακεραίου(1539460) και να επανέλθουμε στην αρχική με αντίστοιχη διαίρεση (εδώ δια 100).

Συνοπτικά, αλγοριθμικά, η διαδικασία για τον 256 περιγράφεται στον πίνακα:

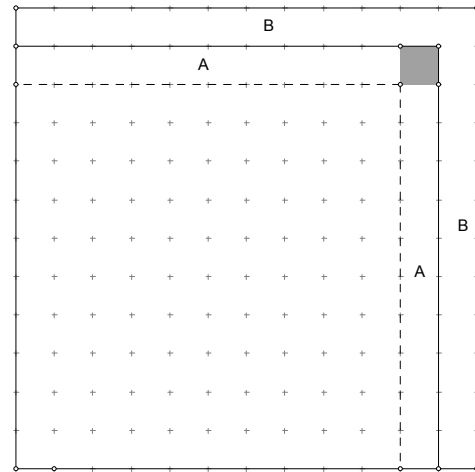
2'56	16		1 είναι η κατά προσέγγιση μονάδας τετρ.ρίζα του 2
-1	27	26	Δοκιμάζουμε 7 γνώμονες, δεν υπάρχουν 189τ.μ.
15,6	*7	6	Δοκιμάζουμε 6 γνώμονες, γίνεται η αφαίρεση
15 6	189	156	Το 6 είναι το δεύτερο ψηφίο
0			Επομένως, $\sqrt{256} = 16$

Ο παρακάτω πίνακας «συμπιέζει» ακόμα περισσότερο την προσπάθεια των προηγούμενων οκτώ σελίδων:

2'56	16	
-1	27	26
15,6	*7	6
15 6	189	156
0		

**B. Τετραγωνική ρίζα πολυψήφιου, π.χ. του  $13225=10000+32*100+25$ .**

Σχηματίζουμε πρώτα το  $100 * 100$  τετράγωνο. Σκεφτόμαστε ότι τοποθετούμε γνώμονα που αποτελείται από 21 τετράγωνα των 100 τετραγωνικών μονάδων, και έτσι η πλευρά του νέου τετραγώνου έγινε ήδη 110 μονάδες. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία είναι ανά 10 μονάδες.

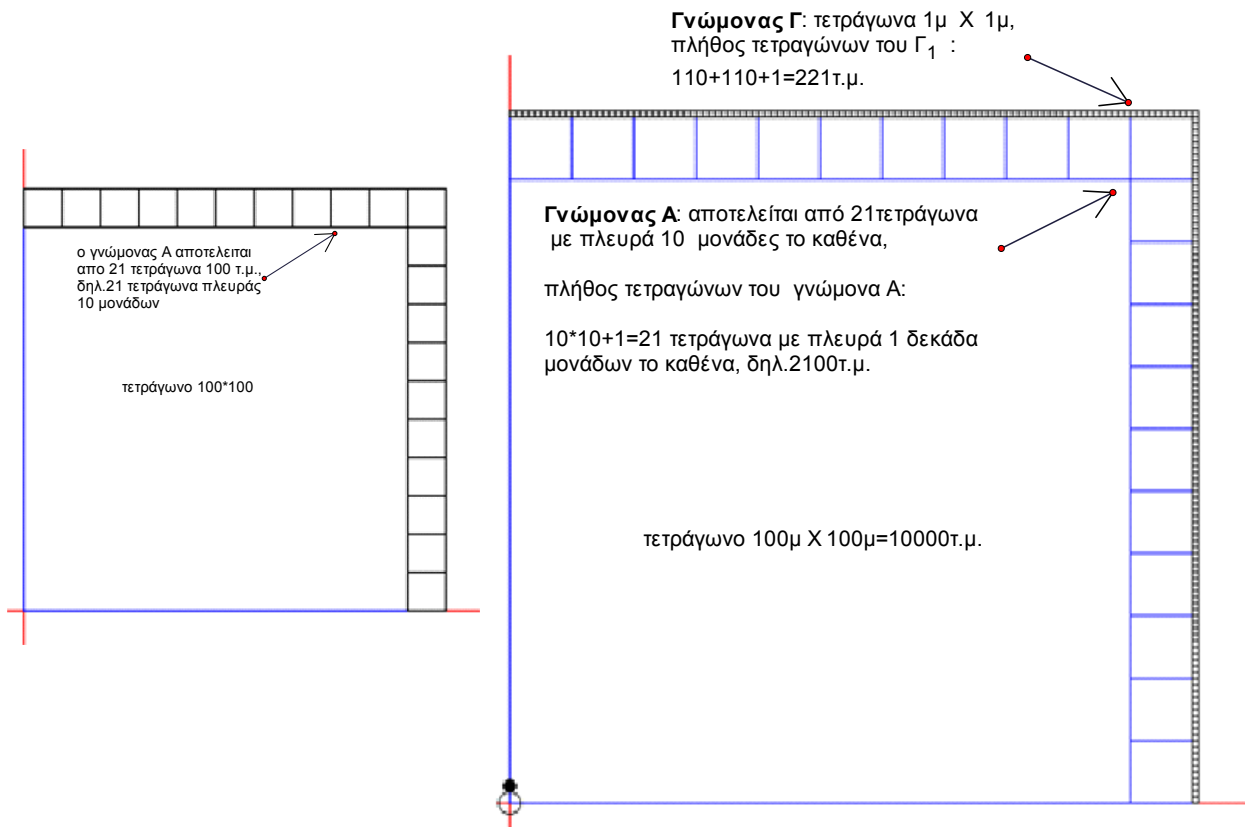


Ο Γνώμονας A αποτελείται από  $10*100+100+10*100=2100$ τ.μ. (στο τετράγωνο πλευράς 100, προσθέτω γνώμονα μήκους 10, προστίθεται εμβαδόν  $2*100*10+10^2$  και δημιουργείται τετράγωνο

πλευράς 110, βλ. γνώμονες 9.5.1 ). Για να τοποθετήσουμε τον γνώμονα B, αυτής της μορφής, δηλ. να αποτελείται από τετράγωνα των 100τ.μ., χρειαζόμαστε  $11*100+100+11*100=2300$ τ.μ., τις οποίες δεν διαθέτουμε.

Συνεχίζουμε λοιπόν τοποθετώντας γνώμονες ( $\Gamma_k$ ) που αποτελούνται από τετράγωνα μιας τ.μ.:

$$221+223+225+227+229=5*225.$$



Συνοπτική περιγραφή της διαδικασίας με τους γνώμονες :

Αύξων αριθμός	Αριθμός τετραγώνων περιττών γνώμονων	Δοσμένος αριθμός	Τετραγωνική ρίζα
		13225	
Τετράγωνο 100*100	10000	13225-10000=3225	100 [T]
Γνώμονας Α	2100	3228-2100=1125	110
Γ1	110+1+110=221	1125-221=904	111
Γ2	111+1+111=223	904-223=681	112
Γ3	2*112+1=225	681-225=456	113
Γ4	2*113+1=227	456-227=229	114
Γ5	2*114+1=229	229-229=0	115
Η τετραγωνική ρίζα του 13225 είναι τριψήφιος αριθμός, αφού, $10000 < 13225 < 1000000$			
Ο αριθμός των εκατοντάδων είναι 1, των δεκάδων είναι 1 και των μονάδων είναι 5			

\*Στην πρώτη περιοχή της μεθόδου [T] αντί της πρόσθεσης περιττών, βρίσκουμε τον μεγαλύτερο τετράγωνο αριθμό, που μπορεί να αφαιρεθεί από το «αριστερότερο» διψήφιο ή μονοψήφιο τμήμα του δοσμένου αριθμού, γιατί, στην πρώτη περιοχή, οι περιττοί γνώμονες αρχίζουν από τον 1, και επομένως το άθροισμά τους είναι τετράγωνος.

Μπορούμε φυσικά και εδώ να περιγράψουμε «αλγοριθμικά» τη διαδικασία , ως εξής:

1'32'25	115		1 είναι η ρίζα του 1
-1	21	225	Διπλασιάζουμε, 2, διαιρούμε 3:2 και ουσιαστικά αφαιρούμε 2100τ.μ. από τις 3225 τ.μ. Ήδη έχουμε τετράγωνο με πλευρά 110 μονάδες
3,2	*1	*5	
-21	21	1125	Διπλασιάζουμε, 11...22, διαιρούμε, 112:22, 5 είναι οι γνώμονες που τοποθετούνται γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 110μ.
112,5			
-1125			
0			
			$\sqrt{13225} = 115$

Συνήθως «αισθανόμαστε μέσα μας!» την (με αρκετά μεγαλύτερο πλάτος) τελευταία στήλη και για την τετραγωνική ρίζα του 13225 γράφουμε τον διπλανό πίνακα. Αν ο μαθητής δεν έχει κατανοήσει την διαδικασία, αν διδαχθεί μόνο τον αλγόριθμο, είναι φυσικό να θεωρήσει ότι τα μαθηματικά είναι προϊόν μαγείας.

1'32'25	115	
-1	21	225
3,2	*1	*5
-21	21	1125
112,5		
-1125		
0		

**Γ. Τετραγωνική ρίζα του 5.****Γ.1.Γνώμονες.**

	α/α	Αριθμός τετραγώνων Περιττών γνωμόνων	Αριθμός:5	$\sqrt{5}$
Α	1	1	5	1
	2	3	-4	2
			1	
Έχουμε ήδη τετράγωνο με πλευρά 2 μονάδες. Το υπόλοιπο 1τ.μ. αποτελείται από 100 τετράγωνα πλευράς 0.1, πλευράς ενός δεκάτου. Προχωρούμε σχηματίζοντας γνώμονες με τετράγωνα πλευράς ενός δεκάτου: 0.1				
Για τον πρώτο γνώμονα αυτής της μορφής χρειάζονται $20+1+20=41$ τετράγωνα (πλευράς 0.1)				
Β	1	41	100	2.1
	2	43	-84	2.2
	σύνολο	84 τετράγωνα πλευράς 0.1	Υπόλοιπο 16 τετραγωνικά δέκατα	
Τα 16 τετράγωνα πλευράς 0.1 αποτελούνται από 1600 τετράγωνα πλευράς 0.01, ενός εκατοστού. Έχουμε τετράγωνο με πλευρά 22 δέκατα, δηλ.220 εκατοστά και για τον πρώτο γνώμονα με τετράγωνα πλευράς ενός εκατοστού, χρειαζόμαστε με $220+1+220 = 441$ τετρ.εκατοστά.				
Γ	1	441	1600	2.21
	2	443	-1329	2.22
	3	445		2.23
	σύνολο	1329 τετρ. πλευράς 0.01	Υπολ.271 τετραγ.πλευράς 0.01	
Τα 271 τετράγωνα πλευράς 0.01 αποτελούνται από 27100 τετράγωνα πλευράς 0.001, ενός χιλιοστού. Έχουμε τετράγωνο με πλευρά 223 εκατοστά, δηλ.2230 χιλιοστά και για να συνεχίσουμε τοποθετώντας γνώμονες με τετράγωνα πλευράς ενός χιλιοστού, αρχίζουμε με $2230+1+2230$ τετρ.χιλιοστά.				
Δ	1	4461		2.231
	2	4463		2.232
	3	4465	27100	2.233
	4	4467	-26796	2.234
	5	4469		2.235
	6	4471		2.236
	σύνολο	$6*4466=26796$	Υπόλοιπο: 304 τετρ.πλευρας 0.001	

Επαλήθευση:

- Για την ομάδα Α :  $2*2+1=5$  (το 1 είναι τετραγωνικό μέτρο)
- Για την ομάδα Β:  $2.2*2.2+0.16=4.84+0.16=5$  (0.16 τ.μ. είναι 16 τ.δέκατα)
- Για την Γ ομάδα:  $2.23*2.23+0.0271=4.9729+0.0271=5$  (271 τ. εκατοστά)
- Για την Δ ομάδα:  $2.236*2.236+0.000304=4.999696+0.000304=5$  (304 τ.χιλιοστά)

### Γ.2. Τετραγωνική ρίζα του 5, αλγόριθμος.

Και εδώ λειτουργεί ο αλγόριθμος, αρκεί να γράψουμε τον 5 σαν 5,000000 και αν θέλουμε να συνεχίσουμε, να γράψουμε δεξιά και άλλα ζευγάρια μηδενικών (κάθε τετραγωνική μονάδα χωρίζεται σε 100 τετρ. μονάδες της τάξης του αμέσως προς τα δεξιά διημήφιου τμήματος).

5'00'00'00	2.236			2 είναι η προσεγγιστική ρίζα του 5
-4	42	443	4466	Το τετράγωνο του 2 είναι 4, ουσιαστικά αφαιρούμε 4τ.μ. από τις 5 τετραγωνικές μονάδες. Ήδη έχουμε τετράγωνο με πλευρά 2 μονάδες. Βάζουμε τελεία στο πρώτο 2 της τετρ.ρίζας και κατεβάζουμε το πρώτο ζευγάρι μηδενικών, 00, δίπλα στο υπόλοιπο 1.
10,0	*2	*3	*6	
-84	84	1329	26796	
160,0				3 είναι οι γνώμονες που αποτελούνται από τετράγωνα πλευράς 0.01 και τοποθετούνται γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 2.2μ.
-1329				
2710,0				6 είναι οι γνώμονες που αποτελούνται από τετρ. πλευράς 0.001 και τοποθετούνται γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 2.23μ.
-26796				
304				
Η τετραγωνική ρίζα του 5 με προσέγγιση χιλιοστού είναι 2.236 (με έλλειψη, περισσεύουν 304 τετρ.χιλ.)				

### Γ.3. Τετραγωνική ρίζα του 5, μαγεία.

Και πάλι θα επισημάνουμε ότι αν κατανοηθεί η διαδικασία, τότε αναδεικνύεται η μαγευτική φύση των μαθηματικών, αλλά χωρίς κατανόηση, ο απαραίτητος για την εξοικονόμηση χρόνου αλγόριθμος, οδηγεί σε «μαγικές» σκέψεις.

5'00'00'00	2.236		
-4	42	443	4466
10,0	*2	*3	* 6
-84	84	1329	26796
160,0			
-1329			
2710,0			
-26796			
304			
$\sqrt{5} \approx 2.236$			

### Δ. Τετραγωνική ρίζα του 42.56

#### Δ1. Με έλλειψη.

42'56'00'00	6.523			6 είναι η ρίζα του 42 με προσέγγιση μονάδος
-36	125	1302	13043	Ήδη έχουμε τετράγωνο με πλευρά 6 μονάδες.
65,6	*5	*2	*3	Βάζουμε τελεία στο 6 της ρίζας και «κατεβάζουμε» το 56. Διπλασιάζουμε, 12,διαιρούμε 65:12, 5 δίπλα και κάτω, πολλαπλασιάζουμε και ουσιαστικά αφαιρούμε 625τ.δέκατα. από τα 656 τ. δέκατα.
-625	625	2604	39129	5 γνώμονες με τετράγωνα πλευράς 0.1 Περισσεύουν 31 τετραγωνικά δέκατα, τα μεταφράζουμε σε 3100 τετραγωνικά εκατοστά.
310,0				Διπλασιάζουμε, 65...130, διαιρούμε 310:130, 2 είναι
-2604				οι γνώμονες που αποτελούνται από τετρ. πλευράς 0.01 και τοποθετούνται γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 6.5μ. Περισσεύουν 496 τετραγωνικά εκατοστά
4960,0				Διπλασιάζουμε, 652...1304, διαιρούμε 4960:1304, 3 είναι οι γνώμονες που αποτελούνται από τετρ. πλευράς 0.001 και τοποθετούνται γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 6.52μ.
-39129				η τετραγωνική ρίζα του 42.56 είναι 6.523 με έλλειψη,
10471				περίσσεψαν 10471 τετραγωνικά χιλιοστά.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν θέλαμε να τοποθετήσουμε ένα τέταρτο γνώμονα τετραγωνικών χιλιοστών γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 6.52μ θα έπρεπε να είχαμε  $4 \cdot 13040 + 16 = 52176$  τ. χ. Έχουμε όμως 49600. Μας λείπουν 2576 τετραγωνικά χιλιοστά.

Καλό είναι να πάρουμε την τετραγωνική ρίζα του 42.56 με **υπεροχή**:  $\sqrt{42.56} \approx 6.524$   
Είναι καλύτερα να «χρωστάμε» 2576 τ.χ. από το να μας περισσέψουν 10471τ.χ.

**Δ2. Με υπεροχή.**

42'56'00'00	6.523	<b>6.523 → 6.524</b>		
-36	125	1302	13043	<b>13044</b>
65,6	*5	*2	*3	<b>*4</b>
-625	625	2604	39129	<b>52176</b>
310,0				
-2604				
4960,0				4960,0
-39129				-52176
10471 *είναι αριθμός μεγαλύτερος από το μισό του 13043			Αλλάζουμε αυτή τη στήλη. Δίπλα και κάτω από τον 1304 τοποθετούμε τον 4 και πολλαπλασιάζουμε και πάλι	<b>-2576</b>

Η τετραγωνική ρίζα του 42.56 είναι 6.524 με **υπεροχή**.

Το τετράγωνο του 6.524 είναι 42.562576, χρειάζονται ακόμα 2576 τ. χιλιοστά, αυτό είναι το νόημα του «-» στην αφαίρεση  $49600-52176 = -2576$ .

Μπορούμε φυσικά να πολλαπλασιάσουμε τον 42.56 επί  $10^6$ , να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του 42560000 κατά προσέγγιση μονάδος και να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα αυτό δια 1000 (ο πίνακας είναι ίδιος, αλλάζουν μόνο οι ονομασίες των τετραγωνικών μονάδων και φυσικά η τελεία στον 6523 ή 6524 μπαίνει τελευταία).

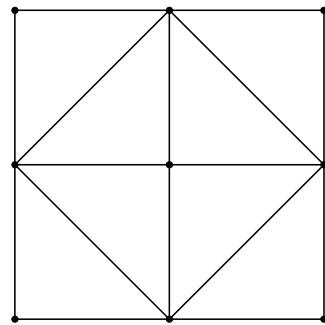
**Ε. Στα παραδείγματα Γ και Δ οπωσδήποτε μένει μια αβεβαιότητα.**

Θα συνεχίσουμε τους νοητούς τεμαχισμούς; Είναι δυνατόν να βρούμε κάποιον αριθμό με τετράγωνο 5 ή 42.56; Αυτό είναι το κατάλληλο σημείο της διδασκαλίας για ιστορικές παρατηρήσεις και σχόλια για τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων, για τον Πυθαγόρα και τη σχολή του, για την Ακαδημία του Πλάτωνα κλπ, αλλά και για τις ιδέες που θεμελίωσαν την μαθηματική επιστήμη και αποτελούν τη σημαντικότερη ίσως πολιτισμική μας κληρονομιά. Είναι η κατάλληλη στιγμή να τονίσουμε στους μαθητές ότι 'αρχαιοελληνικός πολιτισμός' δεν είναι μόνον τα εκπληκτικά υλικά δημιουργήματα των Αρχαίων που και σήμερα ακόμα θαυμάζονται από την ανθρωπότητα, αλλά είναι και οι ιδέες (και όχι μόνον οι μαθηματικές) που τα δημιούργησαν, οι οποίες μένουν αναλλοίωτες και ανεξίτηλα χαραγμένες ανά τους αιώνες.

### 9.5.5. Η τετραγωνική ρίζα του 2

**A.** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 1 μέτρο ή 1 μονάδα, 1μ. Αν διπλασιάσουμε την πλευρά το εμβαδόν τετραπλασιάζεται. Η πλευρά του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν, 2 τ.μ., είναι η διαγώνιος του αρχικού (διάμετρος κατά τους αρχαίους). Η εξήγηση του Σωκράτη περιγράφεται αναλυτικά στον Μένωνα του Πλάτωνα:

Λέγε γάρ μοι σύ· οὐ τὸ μεν τετράπουν τοῦτο ἡμῖν ἐστι χωρίον; μανθάνεις; – ΠΑΙ. Ἔγωγε. –ΣΩ. Ἐτερον δ' αὐτῷ προσθεῖμεν ἄν τουτὶ ἴσον; –ΠΑΙ. Ναί. –ΣΩ. Καὶ τρίτον τόδε ἴσον ἐκατέρῳ τούτων; –ΠΑΙ. Ναί. –ΣΩ. Οὐκοῦν προσαναπληρωσαίμεθ' ἄν τὸ ἐν τῇ γωνίᾳ τόδε; –ΠΑΙ. Πάνυ γε. –ΣΩ. Ἄλλο τι οὖν γένοιτ' ἄν τέτταρα ἴσα χωρία τάδε; –ΠΑΙ. Ναί. –ΣΩ. Τί οὖν; τὸ ὅλον τόδε ποσαπλάσιον τοῦδε γίγνεται; –ΠΑΙ. Τετραπλάσιον. –ΣΩ. Ἔδει δέ γε διπλάσιον ἡμῖν γενέσθαι· ἢ οὐ μέμνησαι; –ΠΑΙ. Πάνυ γε. –ΣΩ. Οὐκοῦν ἐστὶν αὕτη γραμμὴ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν [τινὰ] τέμνουσα δίχα ἕκαστον τούτων τῶν χωρίων; –ΠΑΙ. Ναί. –ΣΩ. Οὐκοῦν τέτταρες αὗται γίνονται γραμμαὶ ἴσαι, περιέχουσαι τουτὶ τὸ χωρίον; –ΠΑΙ. Γίνονται γάρ. –ΣΩ.



Σκόπει δὴ· πηλίκον τί ἐστὶν τοῦτο τὸ χωρίον; –ΠΑΙ. Οὐ μανθάνω. –ΣΩ. Οὐχὶ τεττάρων ὄντων τούτων ἡμισυ ἕκαστου ἕκαστη ἢ γραμμὴ ἀποτέμνηκεν ἐντός; ἢ οὐ; –ΠΑΙ. Ναί. –ΣΩ. Πόσα οὖν τηλικαῦτα ἐν τούτῳ ἔνεστιν; –ΠΑΙ. Τέτταρα. –ΣΩ. Πόσα δ' ἐν τῷδε; –ΠΑΙ. Δύο. –ΣΩ. Τὰ δ' τέτταρα τοῖν δυοῖν τί ἐστὶν; –ΠΑΙ. Διπλάσια. –ΣΩ. Τόδε οὖν ποσάπουν γίγνεται; –ΠΑΙ. Ὀκτώπουν. –ΣΩ. Ἀπὸ ποίας γραμμῆς; –ΠΑΙ. Ἀπὸ ταύτης. –ΣΩ. Ἀπὸ τῆς ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τεινούσης τοῦ τετράποδος; –ΠΑΙ. Ναί. –ΣΩ.

**Καλοῦσιν δέ γε ταύτην διάμετρον οἱ σοφισταί· ὥστ' εἰ ταύτη διάμετρος ὄνομα, ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἄν, ὡς σὺ φῆς, ᾧ παῖ Μένωνος, γίγνοιτ' ἄν τὸ διπλάσιον χωρίον. –ΠΑΙ. Πάνυ μεν οὖν, ᾧ Σώκρατες (TLG: Plato, Meno: 84 d 3- 85 b 7).**

Ο Σωκράτης ξεκινά με τετράγωνο πλευράς 2 μονάδων και με κατάλληλες ερωτήσεις οδηγεί τον μαθητή να διορθώσει την αρχική του απάντηση και να κατανοήσει ότι η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 8 είναι η «διάμετρος» του αρχικού και όχι διπλάσια της πλευράς του αρχικού. Απευθυνόμενος προς τον Μένωνα καταλήγει με επιβεβαίωση της Πλατωνικής θεωρίας ότι η γνώση είναι ανάμνηση: ΣΩ. Οὐκοῦν οὐδενὸς διδάξαντος ἀλλ' ἐρωτήσαντος ἐπιστήσεται, ἀναλαβὼν αὐτὸς ἐξ αὐτοῦ τὴν ἐπιστήμην; ΜΕΝ. Ναί. ΣΩ. Τὸ δ' ἀναλαμβάνειν αὐτὸν ἐν αὐτῷ ἐπιστήμην οὐκ ἀναμνησκέσθαι ἐστὶν; ΜΕΝ. Πάνυ γε. ΣΩ. Ἄρ' οὖν οὐ τὴν ἐπιστήμην, ἣν νῦν οὗτος ἔχει, ἥτοι ἔλαβέν ποτε ἢ αἰεὶ ε χεν; ΜΕΝ. Ναί.



Στην ακαδημία του Πλάτωνα η γεωμετρία αποτελούσε τον κύριο παιδευτικό άξονα για τη μετάβαση από την εποπτεία προς στο αφηρημένο. Ο τρόπος δουλειάς στην Ε.Γ. χαρακτηρίζεται από μια διαδοχή αφηρημένων συλλογισμών, που όμως υποβοηθούνται από συγκεκριμένα σχήματα στα οποία και αναφέρονται (Στράντζαλος, 1989: 48).

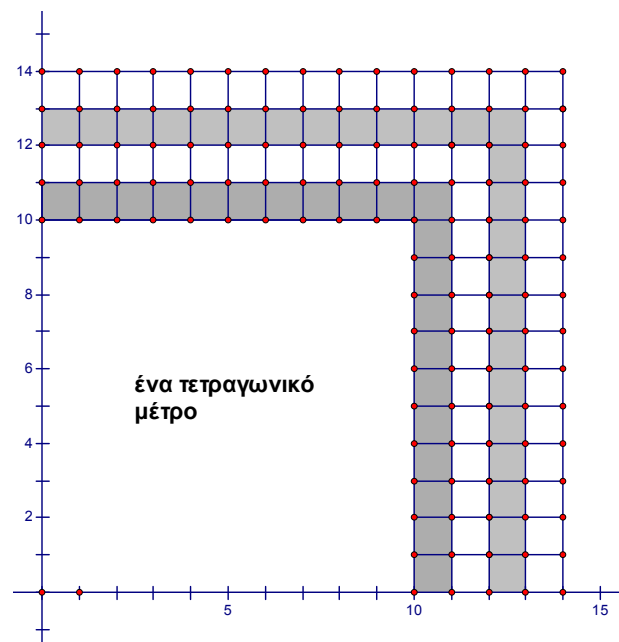
Πέρασαν αρκετά χρόνια, αλλά τα μαθηματικά και οι δυσκολίες τους δεν άλλαξαν. Και οι σημερινοί μαθητές υπολογίζουν σχετικά εύκολα το εμβαδόν από την πλευρά του τετραγώνου, αλλά δυσκολεύονται στην αντιστροφή των συλλογισμών, γιατί χρειάζεται να υπολογίζουν ρίζες αντί δυνάμεις.

**Β.** Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους γνώμονες, για να (προσπαθήσουμε να) κατασκευάσουμε το τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.μ., υπολογίζοντας ταυτόχρονα και την πλευρά αυτού του τετραγώνου.

Για να αναπτυχθεί αυτή η δραστηριότητα στην αίθουσα, ή οπουδήποτε, χρειάζονται χαρτόνια ενός τετραγωνικού μέτρου και αρκετές εκατοντάδες τετραγωνικών δεκάτων, **τ.δ.**, για **κάθε** μαθητή (αν προχωρήσουμε σε γνώμονες τετραγωνικών εκατοστών, τότε είναι απαραίτητο και ανάλογο πλήθος τετραγωνικών εκατοστών).

Διαθέτουμε 2 τ.μ., ή 200 τετραγωνικά δέκατα και θέλουμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο. Η πλευρά του είναι μεγαλύτερη από 1μ, αφού διαθέτουμε περισσότερα από 100 τ.δ., αλλά μικρότερη από 2μ, γιατί δεν έχουμε 400 τ.δ., αλλά μόνον 200. Η πλευρά επομένως του τετραγώνου με εμβαδόν 2τ.μ. δεν είναι ακέραιος αριθμός. Θα είναι κάποιος δεκαδικός (ή με διαφορετικό συμβολισμό κάποιο κλάσμα) ανάμεσα στους ακεραίους 1 και 2.

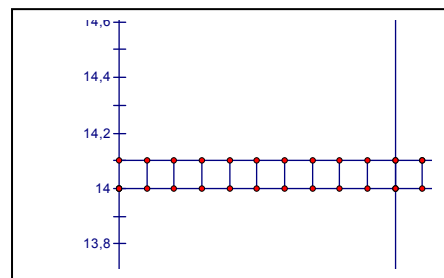
**Β.1.** Γύρω από το τετραγωνικό μέτρο τοποθετείται λοιπόν ο πρώτος γνώμονας των  $10+10+1=21$  τετραγωνικών δεκάτων. Τοποθετούνται και οι επόμενοι 3 γνώμονες των 23, 25, 27 τετραγωνικών δεκάτων και η πλευρά του τετραγώνου ήδη έχει γίνει 1 μέτρο και 4 δέκατα. Χρησιμοποιήθηκε το χαρτόνι του τετραγωνικού μέτρου (ή 100 τ.δ.) και  $21+23+25+27=96$  τετραγωνικά δέκατα. Έμειναν 4 τετραγωνικά δέκατα (**τ.δ.**), δεν φτάνουν για επόμενο γνώμονα, θα χρειαζόταν  $14+14+1=29$  τ.δ., τα οποία δεν διαθέτουμε. Η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 2 τετραγωνικά μέτρα, θα είναι λοιπόν μεγαλύτερη από 1.4μ. και μικρότερη από 1.5μ.



Στο σχηματισμένο τετράγωνο με πλευρά 1.4μ, έχουμε χρησιμοποιήσει 196 τ.δ. Έχουμε  $196 < 200 < 225$  σε τετραγωνικά δέκατα, ή  $1.96 < 2 < 2.25$  σε τετραγωνικά μέτρα για το εμβαδόν, ή  $1.4 < \text{πλευρά} < 1.5$  σε μέτρα για την πλευρά. Το 1525 κάποιος Christoff Rudolf χρησιμοποίησε για πρώτη φορά για την τετραγωνική ρίζα το σύμβολο  $\sqrt{\quad}$  στο βιβλίο «Die Coss» (Flannery, 2006: 3), το σύμβολο  $\sqrt{\quad}$  υιοθετήθηκε από την επιστημονική κοινότητα και από τότε γράφουμε:  $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$  για την ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.μ.

### Το τμήμα Β.2. μπορεί να παραληφθεί και να συνεχίσουμε με την ενότητα 9.5.6.

**Β.2.**Θα μπορούσαμε να κάνουμε ένα ακόμα βήμα, να τοποθετήσουμε γνώμονες τετραγωνικών εκατοστών. Κάθε τετραγωνικό δέκατο, **τ.δ.**, αποτελείται από 100 τετραγωνικά εκατοστά, **τ.εκ.**. Διαθέτουμε 400 τ.εκ. (τα 4 τ.δ.). Για ένα γνώμονα εκατοστών θα χρειαστούμε  $140+140+1=281$  τ. εκ.



Για τον δεύτερο γνώμονα τ. εκ. χρειαζόμαστε  $141+141+1=283$  τ. εκ., αλλά δεν έχουμε τόσα. Άρα η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 2 τετραγωνικά μέτρα, θα είναι μεταξύ 1.41 και 1.42 μέτρων, συμβολικά:  $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ . Από τα 200 τετραγωνικά δέκατα των 2 τ.μ., χρησιμοποιήσαμε 100 τ.δ. για το 1 τ.μ., και 96 τ.δ. για τους 4 γνώμονες δεκάτων. Τα υπόλοιπα 4τ.δ., τα τεμαχίσαμε σε 400 τετραγωνικά εκατοστά, χρησιμοποιήσαμε 1 γνώμονα εκατοστών, 281 τ.εκ., και έχουμε ακόμα 119 τ.εκ. για τεμαχισμό και κατασκευή γνωμόνων με τετραγωνικά χιλιοστά (**τ.χ.**).

Επόμενοι πραγματικοί τεμαχισμοί είναι κάπως δύσκολο να γίνουν, οπότε θα συνεχίσουμε με νοητούς.

Τα 119 τ.εκ. μας δίνουν 11900τ.χ. Ήδη έχουμε πλευρά 1.41μ., άρα ο πρώτος, νοητός πλέον, γνώμονας τετραγωνικών χιλιοστών, απαιτεί  $1410+1410+1=2821$ τ.χ. Για τον δεύτερο νοητό γνώμονα τ.χ. χρειαζόμαστε  $1411+1411+1=2823$  τ.χ. Υπάρχουν αρκετά ακόμα τ.χ., τοποθετούμε νοητά άλλους δυο γνώμονες τ.χ., συνολικά τέσσερις, με πλήθος 11296 τ.χ. Μένουν  $11900-11296=604$  τ.χ. Δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε 5<sup>ο</sup> γνώμονα τ.χ. Η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 2τ.μ. θα είναι μεταξύ 1.414μ και 1.415μ.,  $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$ .

Επαλήθευση:  $1.414 * 1.414 = 1.999396$ ,  $2 - 1.999396 = 0.000604$ : είναι τα 604 τ.χ. που περισσεύουν για να συνεχίσουμε το νοητικό αγώνα του πλησιάζματος.

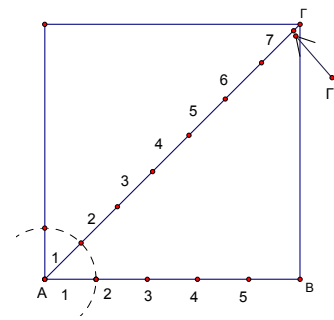
### 9.5.6. Η «εις άτοπον απαγωγή»

Αναζητούμε την πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.μ. Δεν είναι ακέραιος. Αντί να αναζητούμε δεκαδικό αριθμό με τετράγωνο 2, είναι το ίδιο με το να αναζητούμε δεκαδικό κλάσμα με τετράγωνο 2. Ο δεκαδικός αριθμός 1.4 είναι ένας άλλος τρόπος γραφής του δεκαδικού κλάσματος  $\frac{14}{10}$ . Αν δεχτούμε να βρούμε την πλευρά σε δέκατα,  $\frac{m}{10}$ , μπορούμε να αναζητήσουμε ακέραιο με τετράγωνο 200,  $m^2 = 2 \cdot 100$ , δηλ. να διερευνήσουμε την ύπαρξη ακεραίου m, με τετράγωνο διπλάσιο από το τετράγωνο του παρονομαστή 10. Γράφοντας διαδοχικά τα τετράγωνα των αριθμών (δεν χρειάζεται να αρχίσουμε από τον 1, μπορούμε να αρχίσουμε π.χ. από τον 10) βρίσκουμε την ανισοτική σχέση:  $14^2 < 200 < 15^2$ . Άρα η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 2τ.μ. δεν είναι δεκαδικός με ένα δ.ψ., είναι πιθανόν δεκαδικός με 2 δεκαδικά ψηφία. Η πλευρά θα είναι  $\frac{n}{100}$ , όπου n ακέραιος με  $n^2 = 2 \cdot 10000$ , δηλ. με τετράγωνο διπλάσιο από το τετράγωνο του παρονομαστή 100. Βρίσκουμε  $141^2 < 20000 < 142^2$ . Συνεχίζουμε διερευνώντας αν είναι δυνατόν η πλευρά να είναι  $\frac{k}{1000}$ , με  $k^2 = 2 \cdot 1000000$ , δηλ. αν υπάρχει ακέραιος k με τετράγωνο διπλάσιο από το τετράγωνο του παρονομαστή 1000.

Ξεφύγαμε κάπως από την ανησυχία των δεκαδικών ψηφίων, αλλά ελέγχουμε μεγάλους ακεραίους. **Μπορούμε να απλοποιήσουμε κάπως την διαδικασία, αν πάρουμε ανάγωγο, ισοδύναμο με το δεκαδικό κλάσμα, π.χ. αντί για το  $\frac{14}{10}$ , παίρνουμε το  $\frac{7}{5}$  και ελέγχουμε το τετράγωνο του  $\frac{7}{5}$ , ή καλύτερα ελέγχουμε αν  $7^2 = 2 \cdot 5^2$ .**

Έχουμε δει στην Β.1, ότι για τον αριθμό  $\sqrt{2}$ , το μήκος της πλευράς τετραγώνου με εμβαδόν 2τ.μ., ισχύει:  $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ . Αν χρησιμοποιήσουμε κλάσματα, η ανισοτική σχέση  $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$  γράφεται:  $\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}$  και αν απλοποιήσουμε, αν πάρουμε τα ισοδύναμα **ανάγωγα κλάσματα** γίνεται:  $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ . Η  $7^2 = 2 \cdot 5^2$  δεν ισχύει, αληθινή είναι η  $7^2 < 2 \cdot 5^2$ , η οποία μπορεί να γραφεί και ως  $\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ . Επίσης  $3^2 > 2 \cdot 2^2$ .

Η προηγούμενη ανισοτική σχέση δείχνει και το νόημα της αναζήτησης «κοινού μέτρου» πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου: για ένα ευθ.τμήμα που επιλέχθηκε να είναι η μονάδα μέτρησης, «μ», στην πλευρά του τετραγώνου τοποθετούνται ακριβώς 5 τέτοιες μονάδες ενώ η διαγώνιος (που είναι η πλευρά του τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν) περιέχει κάτι περισσότερο από 7 μ.



Στο τυχαίο δεκαδικό κλάσμα γνωρίζουμε ότι ο παρονομαστής είναι δύναμη του 10, αλλά στο **ανάγωγο** ισοδύναμό του, δεν γνωρίζουμε τον παρονομαστή. Θα είναι κάποιος ακέραιος όπως και ο αριθμητής, οπότε αντί για το  $\frac{m}{10^j}$  θα

έχουμε το ισοδύναμό του  $\frac{\mu}{\nu}$ . Ελπίζουμε να βρούμε κλάσμα με τετράγωνο 2, ή σύμφωνα και με τα προηγούμενα, να βρούμε ακέραιο μ με τετράγωνο διπλάσιο από το τετράγωνο του παρονομαστή ν, δηλαδή τετράγωνο διπλάσιο από το τετράγωνο ενός άλλου ακεραίου ν. Θα διερευνήσουμε την ύπαρξη ακεραίων μ,ν ώστε  $\mu^2 = 2\nu^2$ . «Αν θέλουμε να διατυπώσουμε μια εξίσωση, πρέπει να εκφράσουμε σε μαθηματική γλώσσα ότι όλα τα μέρη της συνθήκης ικανοποιούνται, αν και δεν ξέρουμε ακόμη αν είναι πράγματι δυνατόν να ικανοποιήσουμε όλα αυτά τα μέρη» (Polya, 1991: 80) .

**Αναζητούμε λοιπόν ακεραίους μ,ν, που δεν έχουν κοινό παράγοντα, ώστε  $\mu^2=2\nu^2$ .**

Στην σύγχρονη τεχνολογική εποχή αυτό είναι εύκολο: Πολύ γρήγορα (π.χ στο excel ή με αριθμομηχανή) μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα με τους φυσικούς και τα διπλάσια των τετραγώνων τους:

φυσικοί	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
τετράγωνα	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
Διπλάσια τετρ.	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200	242	288	338	392

φυσικοί	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
τετράγωνα	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625
Διπλάσια τετρ.	450	512	578	648	722	800	882	968	1058	1152	1250

φυσικοί	26	27	28	29	30-31-32-33-34-...39	40	41
τετράγωνα	676	729	...	841	...	...	1681
Διπλάσια τετρ.	1352	1458	...	1682	...	...	...

Μέχρι τώρα δεν έχουμε βρει φυσικούς  $\mu, \nu$  ώστε  $\mu^2=2\nu^2$ . Από τον πίνακα βρίσκουμε τα «γνωστά» ζεύγη (3,2) και (7,5) που πλησιάζουν σε απόσταση μιας μονάδος τον  $2\nu^2$ , αλλά και τα (17,12), (41,29). Θα πρέπει να συνεχίσουμε. Τα επόμενα τετράγωνα δεν μας δίνουν την ποθητή ισότητα,  $\mu^2=2\nu^2$ . Βρίσκουμε και πάλι τετράγωνα,  $\mu^2$ , που διαφέρουν κατά 1 από τον  $2\nu^2$ : (99,70), (239,169), (577, 408), (1393,985), (8119, 5741) ... . Μάλλον θα πρέπει να σταματήσουμε την αναζήτηση και με την παρέμβαση του δασκάλου να τεθεί το βασικό ερώτημα: υπάρχει αυτό που ψάχνουμε να βρούμε; Μήπως είναι άσκοπη η συνέχεια;

Η απόδειξη για το ότι δεν υπάρχει ρητός με τετράγωνο δύο θα γίνει φυσικά με «εις άτοπον απαγωγή», ένα από τα δυνατότερα Μαθηματικά εργαλεία. «Ένας σκακιστής μπορεί να θυσιάσει ένα πιόνι, ή ακόμη και ένα δυνατότερο κομμάτι, αλλά ο μαθηματικός προσφέρει το ίδιο το παιχνίδι» (Hardy, 1993: 69). Πιστεύουμε ότι ο δάσκαλος δεν θα πρέπει να βιαστεί. Όλη η μέχρι τώρα προσπάθεια έχει στόχο να πείσει τον δάσκαλο να μην βιαστεί όχι μόνον στην παρουσίαση της «εις άτοπον απαγωγής», αλλά και στην «αφαίρεση» από τα συγκεκριμένα κλάσματα στο  $\mu/\nu$ , γιατί «οι πρόωρες αφαιρέσεις χτυπάνε σε κλειστά αυτιά» (Kline, 1993: 145).

Για το Γυμνάσιο προτείνεται η παρακάτω μέθοδος:

Δυο ίσοι φυσικοί αριθμοί έχουν τα ίδια ψηφία στις ίδιες θέσεις. Αν συμφωνούν σε όλα τα ψηφία αλλά διαφέρουν μόνο στο τελευταίο, τότε οι αριθμοί δεν είναι ίσοι.

τελ. ψηφίο του $\mu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
του $\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
του $\mu^2$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
του $\nu^2$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
του $2\nu^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

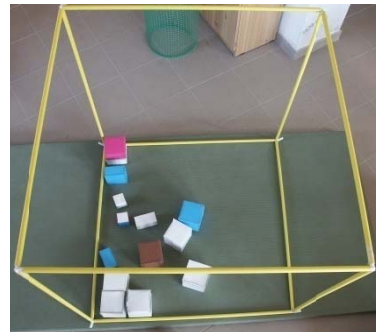
Όλες οι περιπτώσεις είναι στον πίνακα. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο των  $\mu^2$ ,  $2\nu^2$  είναι ίδιο, το 0, όταν το τελευταίο ψηφίο των  $\mu$  και  $\nu$  είναι 0 ή 5. Αλλά τότε οι  $\mu, \nu$  δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, όπως υποθέσαμε (έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο της μονάδος, τουλάχιστον τον 5). Δεν είναι δυνατόν για το ανάγωγο κλάσμα  $\frac{\mu}{\nu}$  να ισχύει  $\mu^2=2\nu^2$ .

Ο δάσκαλος μπορεί να τονίσει και πάλι τη διαφορά των μαθηματικών από τις παρατηρησιακές επιστήμες: δεν εξηγούμε φαινόμενα, αποδεικνύουμε ότι κάποια είναι αδύνατα (βλ. και 1.5.7).

Δεν υπάρχει ακέραιος με τετράγωνο 2, δεν υπάρχει κλάσμα, δηλ. δεν υπάρχει ρητός αριθμός με τετράγωνο 2. Τετράγωνο όμως με εμβαδόν 2 κατασκευάζεται. Η πλευρά του έχει δικαίωμα σε κάποιον αριθμό που εκφράζει το μήκος της, την τετραγωνική ρίζα του 2, την οποία δεν μπορούμε να εκφράσουμε «ακριβώς» με τους γνωστούς μας ρητούς αριθμούς.

### 9.5.7. Κυβική ρίζα- Στερεοί γνώμονες

Η μέθοδος που προτείνεται για την κατανόηση των κυβικών ριζών (αλλά και των μονάδων και υποδιαρίσεων του κυβικού μέτρου) και την εξοικείωση με τα στερεά που μας κατακλύζουν, θα μπορούσε να ονομαστεί «καταιγισμός στερεών». Η εφαρμογή της στο Γυμνάσιο ή και στο Δημοτικό προϋποθέτει κάποια προσπάθεια στην κατασκευή των υλικών. Στις τελευταίες τάξεις του



δημοτικού και στην πρώτη ή δεύτερα του Γυμνασίου, ο δάσκαλος μπορεί να δίνει ως «ασκήσεις για το σπίτι» την κατασκευή κύβων διαφόρων διαστάσεων αλλά και οποιουδήποτε άλλου στερεού (στερεό ορθογώνιο, πυραμίδες διαφόρων ειδών, κλπ). Αν ζητήσει και «ελεύθερες» κατασκευές συνδυασμού στερεών, τότε θα διαπιστώσει τις φανταστικές ικανότητες των νεαρών μαθητών. Θα εφαρμόσει έτσι και τις αρχές της βιωματικής μάθησης, αξιοποιώντας τις εμπειρίες και τις παρατηρήσεις των παιδιών από το περιβάλλον τους και θα αρχίσει να γίνεται κατανοητό, ότι τα μαθηματικά είναι μια συναρπαστική δημιουργική δραστηριότητα και όχι μια «στείρα μετάδοση γνώσεων».

Έτσι σε μικρό χρονικό διάστημα θα συγκεντρώσει τα υλικά, ιδίως τα κυβικά δέκατα που θα χρειαστεί, για την οργάνωση των δραστηριοτήτων. Για την κατασκευή κύβων με ακμή 1 μέτρο υπάρχουν έτοιμοι πλαστικοί σωλήνες και σύνδεσμοι στη μορφή «τρισορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων» (είναι για την κατασκευή σκηνών, αφαιρούμε τη «στέγη» και μένει ο κύβος).



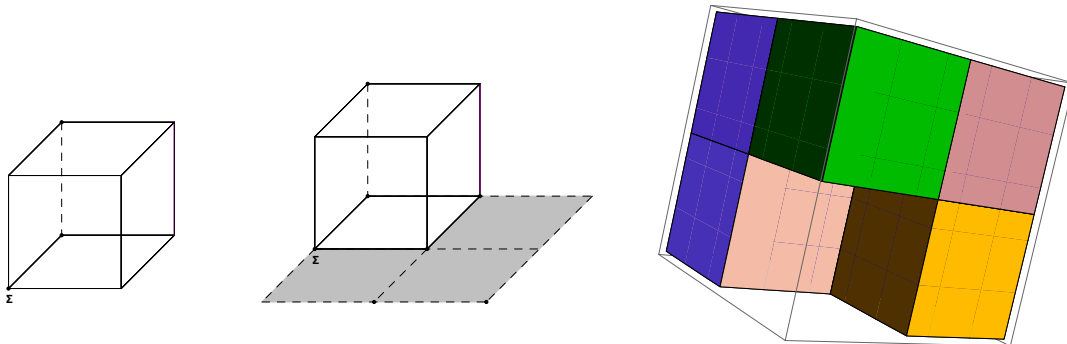
Θεωρούμε ότι κάθε μονάδα φυσικού αριθμού είναι ένας κύβος ακμής μιας μονάδας μήκους, 1μ. Πόσες κυβικές μονάδες χρειάζονται για να δημιουργηθεί ο επόμενος κύβος ακμής 2μ.; Μπορούμε να φανταστούμε ότι τοποθετούμε έναν «επίπεδο γνώμονα» που αποτελείται από 3 τετράγωνα, γύρω από τη βάση του κύβου, οπότε απαιτούνται 3 κυβικές μονάδες, στο εξής **κ.μ.**, για να κατασκευαστεί το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο 2 X 2 X 1.



Για να ολοκληρωθεί η κατασκευή του κύβου με ακμή 2μ. χρειάζονται  $2*3=6$ κ.μ. και 1 κύβος ακόμα που θα τοποθετηθεί πάνω από τον αρχικό.

Για τον κύβο με ακμή 2 είναι λοιπόν απαραίτητο να έχουμε  $2*3+1=7$  κύβους τοποθετημένους γύρω και πάνω από τον αρχικό. Λέμε ότι οι 7 αυτοί κύβοι αποτελούν ένα **στερεό γνώμονα**,  $\Sigma_2$ .

Για να δημιουργήσουμε τον  $\Sigma_2$  χρησιμοποιούμε τις έτοιμες κυβικές μονάδες και κόλλα. Οι μαθητές βρίσκουν πάντα τρόπους για την στερέωση.



Πολύχρωμοι γνόμονες  $\Sigma_2$  κατασκευάζονται άμεσα από το mathematica με την απλή εντολή: `Graphics3D[{Yellow, Cuboid[{0,0,0}], LightGreen, Cuboid[{0,1,1}], LightGray, \\\ Cuboid[{1,1,1}], Blue, Cuboid[{0,1,0}, {2,2,1}], GrayLevel[0.752941], \\\ Cuboid[{1,0,0}, {2,1,1}], Green, \Cuboid[{1,0,1}, {2,1,2}]]` (επιλέγουμε διάφορα χρώματα).

Για τον επόμενο κύβο, ακμής 3μ., τοποθετούμε στην βάση (που είναι τετράγωνο πλευράς 2 μονάδων) έναν επίπεδο γνόμονα που αποτελείται από 5 τετράγωνα, για να δημιουργηθεί τετράγωνο πλευράς 3μ. Χρειαζόμαστε 3 πεντάδες κ.μ. , άρα 15 (=3\*5) κ.μ. , που θα τοποθετηθούν «γύρω» από τον κύβο των 8 κ.μ., αλλά φυσικά, για να ολοκληρωθεί η κατασκευή του κύβου ακμής 3μ, για να γεμίσει ο 3 X 3 κύβος, απαιτούνται ακόμα 4 κ.μ., για να τοποθετηθούν «πάνω» από τους ήδη υπάρχοντες 8 κύβους. Ο στερεός γνόμονας  $\Sigma_3$  αποτελείται λοιπόν από 19 κ.μ.,  $\Sigma_3=3*5+4=3*(2*3-1)+2^2=19$  κ.μ.

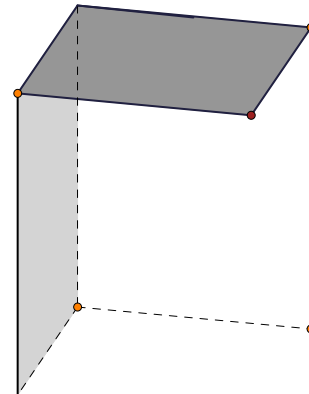
Είναι πλέον φανερό, ότι για τον επόμενο κύβο, ακμής 4μ., ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Πρώτα τοποθετούμε τον επόμενο επίπεδο γνόμονα, που αποτελείται από 7 τετράγωνα, 7 είναι ο 4<sup>ος</sup> περιττός. Μετά τοποθετούμε γύρω από τον 3X3X3 κύβο, 4\*7=28 κ.μ. Τοποθετούμε «πάνω» από τον 3X3 κύβο, 3<sup>2</sup> κ.μ. Συνολικά 4\*7+3<sup>2</sup> =37 κ.μ., δηλαδή  $\Sigma_4=4*(2*4-1)+(4-1)^2$ κ.μ. Ο (n+1)-οστός στερεός γνόμονας αποτελείται από  $(n+1)*(2*(n+1)-1)+n^2$  κ.μ.=  $3n^2+3n+1$ κ.μ.

Μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής: αν έχουμε κύβο ακμής n, για να κατασκευάσουμε τον επόμενο κύβο ακμής n+1, χρειάζονται ακόμα  $3n^2+3n+1$ κυβικές μονάδες (από το ανάπτυγμα του  $(n+1)^3$ ).

Επειδή  $3n^2+3n+1-[3(n-1)^2+3(n-1)+1]=6n$ , οι στερεοί γνόμονες  $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \dots, \Sigma_{n+1}$  αποτελούνται από 1+6, 7+2\*6, 19+3\*6, 37+4\*6, ...,  $\Sigma_{n+1}=\Sigma_n+n*6$  κυβικές μονάδες ( $\Sigma_1=1$ ).

Ας ονομάσουμε την παρατήρηση αυτή «κανόνα του 6»

2. Ο στερεός γνόμενος θυμίζει τρισσορθογώνια στερεά γωνία. Αν έχουμε το απαραίτητο πλήθος από κυβικές μονάδες (π.χ. πολλά κυβικά δέκατα), χαρτόνια και κόλλες, μπορούμε να κατασκευάσουμε στερεούς γνόμονες, οι οποίοι, ανάλογα με τους επίπεδους, «θέλουν» τους κύβους τους.



Στον στερεό γνόμονα  $\Sigma_2$  που αποτελείται από 7κ.μ., φωλιάζει ο κύβος 1κ.μ., στον στερεό γνόμονα  $\Sigma_3$  που αποτελείται από 19κ.μ., φωλιάζει ο κύβος που αποτελείται από 8κ.μ., ο  $\Sigma_4$  που αποτελείται από 37κ.μ. θέλει τον κύβο του ακμής 3 μονάδων κλπ. Οι κατασκευαστικές λεπτομέρειες, οι χρωματισμοί, και οι αφιερώσεις αφήνονται στους μαθητές.

### Παράδειγμα: Κυβική ρίζα του 512

Αύξων αριθμός	Αριθμός κύβων στερεών γνόμενων	Δοσμένος αριθμός	Κυβική ρίζα
1	1	512	1
2	1+6=7		2
3	7+2*6=19		3
4	19+3*6=37		4
5	37+4*6=61		5
6	91		6
7	127		7
8	169		8
	Σύνολο: 512 κ.μ.		

#### 9.5.8. Κυβική ρίζα του 2

Α.Η μέθοδος είναι ανάλογη αυτής που ακολουθήθηκε στην ενότητα 9.5.5.

Διαθέτουμε 2 κυβικά μέτρα, 2000 κυβικά δέκατα, άρα η  $\sqrt[3]{2}$  είναι αριθμός μεταξύ 1 και 2, συμβολικά:  $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ . Ο «χορός» θα εξελιχθεί γύρω από τον κύβο ακμής 1μ.

Ο πρώτος στερεός γνόμονας τετραγωνικών δεκάτων θα στηθεί πάνω στον επίπεδο γνόμονα δεκάτων που θα τοποθετηθεί γύρω από το τετράγωνο της βάσης του κύβου ακμής 1μ. Χρειάζονται  $(2*10+1)$  κυβικά δέκατα για να σχηματιστεί το στερεό ορθογώνιο 1.1μ.X 1.1μ. X 0.1μ. .

Για να συμπληρωθεί ο κύβος με ακμή 1.1μ, χρειάζονται  $21*11+10^2=331$  κυβικά δέκατα, **κ.δ.** Έχουμε άλλα 669 κ.δ.



Ο επόμενος στερεός γνόμονας απαιτεί  $331+6*11=397$  κ.δ., σύμφωνα με τον κανόνα του 6 (ή  $23*12+11^2=397$ κ.δ.). Μένουν 272 κ.δ., δεν φτάνουν για επόμενο γνόμονα κυβικών δεκάτων (χρειάζονται  $469=25*13+12^2=397+6*12$ ).

Ήδη έχουμε κύβο ακμής 1.2μ. και για την πλευρά του θα ισχύει:  $1.2 < \sqrt[3]{2} < 1.3$

Τεμαχίζουμε τα 272κ.δ. σε κυβικά εκατοστά, μάλλον νοητά. Έχουμε 272000 κυβικά εκατοστά. Ο πρώτος στερεός γνόμονας κυβικών εκατοστών, **κ. εκ.**, θα τοποθετηθεί «γύρω και πάνω» από τον κύβο ακμής 1.2μ. Χρειάζονται  $241*121+120^2=43561$  κυβικά εκατοστά. Τώρα όμως διαθέτουμε πολλές χιλιάδες. Έχουμε ήδη κύβο ακμής 1.21μ.

Τοποθετούμε λοιπόν γνόμονες κυβικών εκατοστών:  $243*122+121^2=44287$  (αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του 6 : $43561+6*121=44287$ ). Ακμή 1.22μ. Συνεχίζουμε με άλλους τρεις γνόμονες κ.εκ.:  $44287+6*122=45019$ ,  $45019+6*123=45757$ ,  $45757+6*124=46501$ . Διαθέσαμε  $43561+44287+45019+45757+46501=225125$ κ.εκ. Έμειναν  $272000-225125 = 46875$ . Ήδη έχουμε ακμή 1.25.

Για τον επόμενο γνόμονα χρειάζονται  $46501+6*125=47251$ . Αν σκεφτούμε όπως και για την  $\sqrt{42.56}$  θα προτιμήσουμε την προσέγγιση εκατοστού με υπεροχή, δηλ. θα προτιμήσουμε να «χρωστάμε»  $47251-46875=376$  κυβικά εκατοστά, από το να μας περισσέψουν 46875 κ.εκ. Τελικά  $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$ . Επαλήθευση:  $1.26^3=2.000376$ .

Η κυβική ρίζα του 2 δεν είναι ακέραιος. Είναι άρρητος, γιατί ανάγωγο κλάσμα στον κύβο εξακολουθεί να είναι ανάγωγο, άρα δεν μπορεί να δώσει ακέραιο αποτέλεσμα.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ενώ η  $\sqrt{2}$  (ρίζα της  $x^2-2=0$ ) κατασκευάζεται πολύ εύκολα με κανόνα και διαβήτη, η  $\sqrt[3]{2}$  (ρίζα της  $x^3-2=0$ ) δεν ανήκει στην κατηγορία των κατασκευάσιμων αριθμών. Η  $\sqrt{2}$  συνδέεται με την κατασκευή (με κανόνα και διαβήτη) τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν από ένα δοσμένο τετράγωνο. Η πλευρά του διπλασίου (ως προς το εμβαδόν) τετραγώνου είναι ίση, όπως έχουμε δει, με την διαγώνιο του αρχικού. Η γεωμετρική κατασκευή της  $\sqrt[3]{2}$  είναι το ανάλογο «στερεό» πρόβλημα: κατασκευή με κανόνα και διαβήτη της πλευράς κύβου,  $z$ , με όγκο διπλάσιο από τον όγκο δοσμένου κύβου πλευράς  $a$ , η κατασκευή της λύσης της εξίσωσης  $z^3=2a^3$ .

Με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου ασχολήθηκαν πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί από την αρχαία εποχή έως το 1829: Ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.Χ.) ήταν ο πρώτος γεωμέτρης που ασχολήθηκε με το πρόβλημα και ακολούθησαν οι: Αρχύτας (430-365 π.Χ.), Εύδοξος (408-355 π.Χ.) μαθητής του Αρχύτα και του Πλάτωνα, Μέναιχμος (περίπου 350 π.Χ.), Πλάτωνας (427-347 π.Χ.), Ερατοσθένης(276-195 π.Χ.), Νικομήδης (2<sup>ος</sup> αιώνας π.Χ.), Απολλώνιος (270-186 π.Χ.), Διοκλής (περίπου 100 π.Χ.), Ήρων(περίπου 100μ.Χ.), Πάππος (περίπου 320 μ.Χ.), Descartes (1596-1650). Αυτό το πρόβλημα, η τριχοτόμηση γωνίας, η επίλυση τριτοβάθμιας και τεταρτοβάθμιας εξίσωσης καθώς και η επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης οποιουδήποτε βαθμού, βρήκαν τη φυσική τους θέση στη θεωρία Galois, οπότε τελείωσε ένας ακόμα πνευματικός αγώνας που πρόσφερε τη χαρά της εντατικής διανοητικής δραστηριότητας σε πολλούς γνωστούς επιστήμονες, αλλά και άγνωστους ανθρώπους που δεν επαναπαύονται με την υπάρχουσα γνώση.

Στην ενότητα 5.7.2, αποδείξαμε ότι ο αριθμός  $\sqrt[3]{2}$  είναι αλγεβρικός βαθμού 3. Γνωρίζουμε (αποδεικνύεται με τις μεθόδους του Galois) ότι, αρχίζοντας από ένα μοναδιαίο, οποιοδήποτε μήκος που κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη, είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού 1,2,4,8,..., γενικά αλγεβρικός αριθμός του οποίου ο βαθμός είναι δύναμη του 2, οπότε η  $\sqrt[3]{2}$  δεν κατασκευάζεται.

Κίνητρο μάθησης μπορεί να αποτελέσουν και οι δύο επικρατέστεροι θρύλοι που σχετίζονται με τον διπλασιασμό του κύβου: (i) Ο Μίνωας είχε διατάξει να κατασκευαστεί για το γιό του, Γλαύκο, τάφος κυβικού σχήματος. Όταν όμως τον είδε να γίνεται έκρινε ότι ήταν πολύ μικρός για έναν βασιλιά και διέταξε να διπλασιαστεί, διατηρώντας τη μορφή του. (ii) Κάποιος χρησμός επέβαλε στους Δηλίους να διπλασιάσουν υπάρχοντα βωμό του Απόλλωνα, κυβικής μορφής. Εξ αιτίας αυτού του θρύλου, τον οποίο αναφέρει και ο Πλούταρχος, το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου είναι γνωστό και ως «*Δήλιο πρόβλημα*» (αναλυτικότερα στο Μπρίκας, 1970).

Η διαδικασία με τους γνώμονες προσφέρει «δώρο» σ' αυτόν που θα ασχοληθεί και τις σχέσεις μεταξύ του τετραγωνικού μέτρου και των υποδιαιρέσεών του, του κυβικού μέτρου και των υποδιαιρέσεών του αλλά και την πλήρη κατανόηση για το είδος των δεκαδικών ψηφίων αυτών των υποδιαιρέσεων.

**\*Οι ιδέες για την γεωμετρική μέθοδο υπολογισμού των τετραγωνικών και κυβικών ριζών με την βοήθεια επίπεδων και στερεών γνωμόνων είναι του Βαγγέλη Πολυδούρη (Πολυδούρης, 1990-1995).**

### 9.6. Καθοδηγούμενη... ανακάλυψη

Οι σκέψεις –προτάσεις της ενότητας 9.5. για το Γυμνάσιο στηρίζονται στη θέση του Arons σύμφωνα με την οποία: «*Η ουσία αυτού του τρόπου διδασκαλίας είναι να δοθεί χρόνος στο παιδί να ερευνήσει, να ελέγξει, να χειριστεί, να συζητήσει και να διατυπώσει ισχυρισμούς για τα νοήματα και τις ερμηνείες, να αρθρώσει υποθέσεις, να ακολουθήσει δοκιμαστικά κάποιες σκέψεις μέχρι να φτάσει σε αδιέξοδο, να επαναλάβει τα βήματά του (αν το θεωρεί απαραίτητο), να κάνει λάθη και να αναθεωρήσει τις απόψεις του και τον τρόπο ερμηνείας, όταν **καθοδηγούμενο** αντιληφθεί ότι υπάρχουν αντιφάσεις σ'αυτές (παρά να του ειπωθεί με τη μορφή διακήρυξης ότι οι ιδέες του είναι «σωστές» ή «λαθεμένες» ) και να αποφασίσει τότε και πως πρέπει να εκτελέσει αριθμητικούς υπολογισμούς. Ορισμένες φορές, ο εν λόγω τρόπος μάθησης ονομάζεται παραπλανητικά «μάθηση μέσω της ανακάλυψης». Δεν περιμένουμε βεβαίως από το παιδί να γίνει Νεύτων, Faradey ή Δαρβίνος και να «ανακαλύψει» εκ νέου τις θεωρίες. Κανονικά, τα δραστήρια, περίεργα παιδιά, απλώς αντιδρούν θετικά στην ευκαιρία που τους δίνεται να μάθουν μέσω **καθοδηγούμενης εμπειρίας και παρατήρησης** (Arons, 1992:505, οι υπογραμμίσεις δικές του). Όταν λέμε ότι οι διανοητικές δομές κτίζονται από τον μαθητή μάλλον παρά κατασκευάζονται από τον διδάσκοντα, δε σημαίνει ότι κατασκευάζονται από το τίποτα (Papert, 1992: 22-35). Προσανατολίζουμε λοιπόν τη σκέψη του μαθητή ώστε να δραστηριοποιηθεί στη χρήση των εννοιών σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Οι έννοιες συνδέονται στενά με άμεση, ορατή ή κιναισθητική εμπειρία. Πρώτα υποθέτει, χρησιμοποιώντας χαρτί, μολύβι και συλλογισμό, μετά ελέγχει με τη βοήθεια του υλικού (και πιθανόν του λογισμικού) και επικυρώνει ή αν χρειαστεί, αναθεωρεί. Η προηγούμενη πρόταση, όπως εκτέθηκε στην ενότητα 9.5, έχει στόχο τη σταδιακή προώθηση της ικανότητας του μαθητή να αξιοποιήσει την εποπτεία για να την υπερβεί.*

Κάποιες από τις δραστηριότητες για το Γυμνάσιο (ή τμήματα αυτών), είναι δυνατόν να αναπτυχθούν και στο δημοτικό (σε παιγνιώδη μορφή) από τον δάσκαλο, ο οποίος πιστεύει στις απεριόριστες δυνατότητες του παιδιού, καταλαβαίνει ότι οι συνέπειες ενός νεωτερισμού για τη διανοητική ανάπτυξη μπορεί να είναι ποιοτικά ανώτερες από το συσσωρευμένο πλήθος αποτελεσμάτων χιλιάδων άλλων (Papert, 1991: 37), και κατανοεί ότι το να εξοικειωθεί το παιδί με τα τετράγωνα, τους κύβους και τις ρίζες (π.χ. μέσω των γνωμόνων), δεν είναι πολυπλοκότερο από τον όγκο της γνώσης που έχει ήδη αποκτήσει στα πρώτα χρόνια της ζωής του.

### 9.7. Η βοήθεια των υπολογιστών

Είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας είναι κατά πολύ συντομότερος της γεωμετρικής μεθόδου, ιδίως αν μάθουμε το τελευταίο «μαγικό» στάδιο (π.χ.9.5.4:Γ.3). Είναι επίσης ξεκάθαρο ότι ο αλγόριθμος συγκαλύπτει τις συντελούμενες διεργασίες και μας μεταφέρει στο αποτέλεσμα κατά τρόπο μαγικό και μυστηριώδη. Έτσι, δεν υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στο να διδαχτεί ένας μαθητής να χρησιμοποιεί π.χ. τον αλγόριθμο 9.5.4. για να βρίσκει την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού και στο να διδαχτεί ένα περιστέρι να χτυπήσει με το ράμφος του έναν ορισμένο συνδυασμό πλήκτρων που θα του προμηθεύουν τροφή (λειτουργικό κουτί του Skinner, Βοσνιάδου 2007:127). Αντίθετα, η γεωμετρική μέθοδος αποκαλύπτει βήμα προς βήμα τις πράξεις, που ταυτόχρονα είναι και νοητικές διεργασίες και μας οδηγεί προς το αποτέλεσμα έχοντας συνείδηση της λογικής προς αυτό πορείας (Πολυδούρης, 1990: 21).

Οι αλγόριθμοι όμως είναι χρήσιμες τεχνικές εξοικονόμησης χρόνου και συχνά οι μαθηματικοί καταβάλουν μεγάλες προσπάθειες για την ανάπτυξή τους. Οι αριθμομηχανές συντόμευσαν ακόμη περισσότερο τις διαδικασίες. Ο αλγόριθμος της τετραγωνικής ρίζας π.χ. είναι ενσωματωμένος στο πλήκτρο με το σύμβολο της ρίζας. Κατά τον Kline επίσης, είναι απαραίτητο *«να γίνουν οι στοιχειώδεις πράξεις τόσο οικείες στους μαθητές, ώστε να μην απασχολούν το μυαλό τους για αυτές περισσότερο, απ' όσο για το δέσιμο των παπουτσιών τους»* (Kline, 1981). Χρησιμοποιώντας την εμπειρία του με τους αριθμούς, ο μαθητής θα μπορεί να γράφει άμεσα π.χ.  $3\chi\psi(\chi+\psi+\zeta) = 3\chi^2\psi + 3\chi\psi^2 + 3\chi\psi\zeta$  (και σε επόμενο στάδιο να αναπαράγει αυτόματα τις ταυτότητες ή τις συνήθειες παραγώγου), να «αισθάνεται» τη διαδικασία, χωρίς να είναι υποχρεωμένος να δικαιολογεί κάθε βήμα, καταναλώνοντας δυσανάλογο «λογοτεχνικό» χρόνο. *«Ο τύπος πρέπει να μαθευτεί σαν εξαρτημένο ανακλαστικό και οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να τον αναπαράγουν ακαριαία»* (Lang, 1998:150). Η ανάγκη να γίνεται ένα μέρος της εργασίας στα μαθηματικά αυτόματα, υπογραμμίστηκε και από τον A.N.Whitehead: *«είναι μια βαθειά λανθασμένη αντίληψη, που επαναλαμβάνεται τακτικά σε βιβλία και ομιλίες, το ότι θα πρέπει να καλλιεργούμε τη σκέψη, που αντιστοιχεί σε κάθε πράξη που κάνουμε...»* (παρατίθεται στο Kline, 1981). Εφόσον κατανοηθούν οι διαδικασίες (κατά την άποψή μας όσο γίνεται σε μικρότερη ηλικία), οι αλγοριθμικές τεχνικές μπορούν σήμερα να ανατεθούν στις μηχανές ώστε *«να αφεθεί ελεύθερο το ανθρώπινο μυαλό να κάνει ό,τι μόνον αυτό μπορεί να κάνει: να επινοεί»* (Τζουβάρας, 1993).

**Οπωσδήποτε μας ενδιαφέρει η κατανόηση, αλλά, για να προχωρήσει κάποιος στην μαθηματική του εκπαίδευση, υποστηρίζουμε την άποψη ότι είναι απαραίτητο να αναπτυχθούν και οι αυτοματισμοί.**

Η μαθηματική εκπαίδευση παλιότερα στηριζόταν στην καλλιέργεια προβλημάτων της θεωρίας αριθμών (αριθμητικής) και στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Τελευταία επεκράτησε η άποψη του Δυτικού κόσμου να διδάσκουμε κυρίως ό,τι χρειάζεται στις πρακτικές εφαρμογές. Ίσως για να επαναληφθεί η ιστορία (να αρχίσουμε και πάλι από τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων), ίσως για να μην επαναληφθεί μια «Sputnik crisis» (Οκτώβριος 1957), ίσως γιατί δεν έχει κατανοηθεί αυτό που είναι στοιχειώδες για τους Μαθηματικούς. Δηλαδή: «αν και η πρώτη παράγωγος μιας μεταρρύθμισης μπορεί να είναι θετική (προσωρινή βελτίωση), η σταθερά αρνητική δεύτερη ή ακόμη και μεγαλύτερης τάξης παράγωγος έχει ως αποτέλεσμα την επιβράδυνση της ανάπτυξης και μοιραία την αλλαγή και του προσήμου της πρώτης... Το ουσιώδες για τους εκπαιδευτικούς δεν είναι να κυνηγούν τις πρακτικές ανάγκες της στιγμής, αλλά να διακρίνουν σταθερά τους μακροπρόθεσμους στόχους της κοινωνίας. Δεν υπάρχει τίποτα πιο πρακτικό από μια καλή θεωρία» (Arnold, 1994).

Το κυριότερο όμως χαρακτηριστικό της σημερινής προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η εξαπλούμενη χρήση και η έμφαση που αποδίδεται σ' αυτή των ηλεκτρονικών υπολογιστών (Η.Υ.).

Στα προηγούμενα των υπολογιστών χρόνια, σαν «νέα εκπαιδευτικά μέσα» προτάθηκαν οι εγκυκλοπαίδειες και η τηλεόραση. Πολλές οικογένειες και σχολεία έσπευσαν να βάλουν στα ράφια των βιβλιοθηκών τους πολύτομες εγκυκλοπαίδειες. Πολλά χρήματα διατέθηκαν για να εξοπλιστούν όλα τα σχολεία με τηλεοράσεις και εκπαιδευτικές ταινίες, ώστε οι μαθητές να παρακολουθούν σιωπηρά και ακινητοποιημένοι την διάλεξη του παρουσιαστή. Τα παιδιά όμως δεν εξελίχθηκαν σε ιδιοφυίες για τον απλό λόγο ότι τα μαθηματικά δεν είναι «άθλημα» για θεατές. Απαιτούν προσωπική ενασχόληση και μόχθο: «ιδιοφυία σημαίνει 1% έμπνευση (inspiration) και 99% εφίδρωση (perspiration)» (Chaitin, 2007: 97). Είναι επίσης γνωστή και η άποψη του Polya για το θέμα αυτό: «Διαβάζοντας βιβλία ή ακούγοντας διαλέξεις ή παρακολουθώντας κινηματογραφικές ταινίες, χωρίς ενεργό νοητική συμμετοχή του δικού σας μυαλού, μπορείτε μετά δυσκολίας να μάθετε κάτι, σίγουρα όμως δεν μπορείτε να μάθετε πολλά» (Polya, 1990).

Ίσως η εισαγωγή των υπολογιστών, όπως και των προηγούμενων «εκπαιδευτικών μέσων» υπακούει περισσότερο στις ανάγκες της αγοράς παρά σε ουσιαστικές εκπαιδευτικές ανάγκες. Σύμφωνα με την άποψη του γνωστού αμερικανού οικονομολόγου Τζων Γκαλμπραϊθ: «η μεγάλη εταιρεία διαμορφώνει τη συμπεριφορά του κοινωνικού συνόλου κατά τις ανάγκες της. Κάτι που θεωρείται αξιόλογος κοινωνικός στόχος, δεν είναι συχνά παρά μια αντανάκλαση των στόχων των μεγάλων επιχειρήσεων και των διευθυντών της τεχνοδομής» (παρατίθεται στο Πολυδούρης, 1997: 81).

Για να μην θεωρηθεί ότι δεν αποδόθηκε το ακριβές νόημα, παραθέτουμε και την άποψη που εκφράζει ο Brian Harvey (στον πρόλογο του τρίτομου έργου για την Logo) στη γλώσσα του: «*There is a popular myth that if you aren't "computer literate", whatever that means, then you'll flunk out of college, you'll never get a job, and you'll be poor and miserable all your life. The myth is promoted by computer manufacturers and also by certain educators and writers*» (Harvey, 1997: xi) [υπάρχει ένας λαϊκός μύθος, ευρέως διαδεδομένος, ότι δηλαδή εάν είσαι ηλεκτρονικά αναλφάβητος, οτιδήποτε και αν αυτό σημαίνει, τότε δεν θα καταφέρεις σε ανώτερες σπουδές, δεν θα βρεις ποτέ δουλειά και θα είσαι φτωχός και δυστυχής σε όλη σου τη ζωή. Ο μύθος αυτός προωθείται από τους κατασκευαστές των ηλεκτρονικών υπολογιστών και επίσης από συγκεκριμένους παιδαγωγούς και συγγραφείς].

Δεν μπορούμε φυσικά να αγνοήσουμε την πραγματικότητα και να απορρίψουμε την χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Πως θα πείσουμε τον μαθητή να αποφύγει τον πειρασμό να «πατήσει» το πλήκτρο της διαίρεσης π.χ. 3662031:1821 στην πάμφθηνη αριθμομηχανή του (ή στο κινητό του ή στο ρολόι του); Κι αν διαβάξει και φιλοσοφικά κείμενα μπορεί να μας απαντήσει : Δεν ταιριάζει σε έναν ξεχωριστό άνθρωπο να χάνει ώρες σαν τους σκλάβους στο μόχθο των αριθμητικών υπολογισμών (Leibniz). Ένας μέσος άνθρωπος θέλει περίπου 45 δευτερόλεπτα για να πολλαπλασιάσει δύο τετραψήφιους αριθμούς, ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής μπορεί να κάνει (χωρίς λάθη, εκτός αν χαλάσει) 20 εκατομμύρια πολλαπλασιασμούς σε ένα δευτερόλεπτο, π.χ. σε 1sec υπολογίζεται τι πρέπει να κάνει ένα διαστημόπλοιο μετά την αποχώρηση της πρώτης βαθμίδας του (Δανιηλόπουλος, 1980 :2). Με την βοήθεια του υπολογιστή γίνονται πράγματα που ο άνθρωπος μόνος του δεν θα κατόρθωνε να κάνει. «*Ούτε είναι πιθανόν ότι οι μηχανές θα συντελέσουν στην απομάκρυνση του ανθρώπινου στοιχείου από τη μάθηση, περισσότερο απ' ότι το έχουν κάνει τα βιβλία*» (Bruner, 1960: 92).

Οφείλουμε επίσης να παραδεχτούμε ότι ο υπολογιστής συνιστά ένα ευέλικτο οπτικό μέσο το οποίο ελευθερώνει την ικανότητά των μαθητών «*να σκέφτονται χωρίς να χρειάζεται να κάνουν υπολογισμούς, να κατασκευάζουν χωρίς να χρειάζεται να περιγράψουν, να σχεδιάζουν χωρίς να πρέπει να διατυπώσουν*» (Horwitz, 1996).

Για τα γεωμετρικά ζητήματα υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία και ακόμα πλουσιότερη προσφορά στο διαδίκτυο, αντιστρόφως ανάλογη της προσπάθειας για την ελαχιστοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο Ευκλείδης βρήκε ανέλπιστο σύμμαχο τους κατασκευαστές λογισμικών, αφού τα περισσότερα έχουν γεωμετρικό άρωμα.

Εμείς απλά θα παρατηρήσουμε ότι προβλήματα του παρελθόντος, όπως οι χρονοβόρες διαδικασίες κατασκευής σχήματος, η ανακρίβεια στα σχήματα, ο περιορισμός στον αριθμό των παραδειγμάτων και η στατικότητα των σχημάτων, αντιμετωπίζονται πάρα πολύ εύκολα με κάποιο λογισμικό συμβολικής έκφρασης (π.χ. Logo) ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (π.χ. Sketchpad, Cabri, GeoGebra) ή σύστημα άλγεβρας υπολογιστών (π.χ. Mathematica, Maple). Η τεχνολογία προσφέρει βελτίωση του διδακτικού έργου, αλλά απαιτεί από τον δάσκαλο και το αντίτιμό της: αύξηση των ικανοτήτων του, μεγιστοποίηση του χρόνου προετοιμασίας και διαρκή ενημέρωση.

Θα είναι καλό να χρησιμοποιήσουμε το πάθος των μαθητών (ή και του εμπορικού κόσμου) για τους υπολογιστές, βοηθώντας τους να αναπτύξουν την συλλογιστική τους ικανότητα και ενθαρρύνοντάς τους να εκμεταλλεύονται τις ευκαιρίες παρέμβασης στην εκπαιδευτική διαδικασία. Άποψή μας είναι ότι αυτό μπορεί να γίνει με την ανάπτυξη αλγορίθμων από τους ίδιους τους μαθητές, με τη βοήθεια μιας γλώσσας προγραμματισμού.

*«Ο υπολογιστής αλλάζει και την επιστημολογία του όρου «κατανοώ». Κατά τη γνώμη μου, κατανοείται κάτι μόνο όταν είστε σε θέση να το προγραμματίσετε. **Εσείς** όχι κάποιος άλλος. Στην αντίθετη περίπτωση δεν το κατανοείτε πραγματικά, **νομίζετε** ότι το κατανοείτε»* (Chaitin, 2007: 14, οι υπογραμμίσεις δικές του). Η ενασχόληση αυτή θα τους βοηθήσει επίσης να κατανοήσουν τα πλεονεκτήματα της τεχνολογίας αλλά και τις αμφισβητήσεις και τα όριά της.

Για την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου είναι απαραίτητο πρώτα να συγκεντρώσουμε την προσοχή μας στο τι θέλουμε να κάνουμε και μετά να ασχοληθούμε με το πώς. Οι διευκρινήσεις δεν είναι απαραίτητο να «εξαντλούνται» με την έναρξη της διδασκαλίας, αλλά πιθανόν να αυξάνονται κατά την δημιουργία του αλγορίθμου. Ο τελικός σκοπός απαιτεί την αναγνώριση «υποσκοπών» και την επιμέρους (τμηματική) εκτέλεση και έλεγχο αυτών των υποσκοπών. *«Τέτοιες διαδικασίες, που αποτελούν αυτοτελείς αλγορίθμους συμφέρει να τις αναγνωρίζουμε με ένα ιδιαίτερο όνομα και να τις έχουμε διατυπωμένες έτσι ώστε να τις χρησιμοποιούμε σαν δομικές μονάδες ενός πιο πολύπλοκου αλγορίθμου χωρίς να χρειάζεται κάθε φορά να τις ξανασκεφτόμαστε και να τις ξανα-αναπτύσσουμε»* (Δανιηλόπουλος, 1980:114). Η μέθοδος θα μπορούσε να ονομαστεί «διαίρει και βασίλευε» και διευκολύνει σημαντικά την υπολογιστική διαδικασία, αφού κάθε φορά έχουμε να λύσουμε ένα μικρό και εύκολο πρόβλημα (π.χ. σελίδες: Κατασκευή ριζών-Γνώμονες (Logo), Euler και Ramanujan).

Η μάθηση αρχίζει όταν «μεταφραστεί» ο αλγόριθμος στην γλώσσα προγραμματισμού.

Είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει πρόγραμμα που να γράφεται σωστά με την πρώτη φορά.

Η ερώτηση σχετικά με ένα πρόγραμμα δεν είναι αν είναι σωστό ή λάθος, αλλά αν διορθώνεται. *«Αν τα πράγματα δεν είναι εντελώς σωστά, δεν σημαίνει ότι είναι και εντελώς λανθασμένα. Ο μαθητής ενθαρρύνεται να μελετήσει το σφάλμα αντί να ξεχάσει το λάθος. Βλέπει τα αποτελέσματα των σκέψεών του και ολοκληρώνει το πρόγραμμα μέσα από συνεχείς διορθώσεις. Η διαδικασία διόρθωσης του σφάλματος είναι ένα κανονικό τμήμα της διεργασίας κατανόησης του προγράμματος»* (Papert, 1991: 84). Ο δάσκαλος δεν αφήνει βέβαια μόνο του το μαθητή με το πρόβλημα, γιατί τότε είναι πιθανό να μη σημειώσει καμία πρόοδο. *Ο δάσκαλος πρέπει να βοηθά, όχι πάρα πολύ ούτε πολύ λίγο, ώστε ο μαθητής να έχει ένα λογικό μερίδιο στην εργασία»* (Polya, 1991: 29). Καλό είναι να διερευνά τις «παράτολμες» υποθέσεις των μαθητών, αλλά να «διακινδυνεύει» και ο ίδιος (τα παιδιά έχουν την τάση να μιμούνται τους δασκάλους ασυνείδητα).

Οι διοφαντικές εξισώσεις αποτελούν ένα πολύ καλό πεδίο για να κατανοήσουν οι μαθητές *«την περιορισμένη εμβέλεια των αλγοριθμικών διαδικασιών στη λύση θεωρητικών προβλημάτων»* (Τζουβάρας, 1993) καθώς επίσης και την άποψη του Godel ότι ο νους ακριβώς επειδή είναι «ζωντανός», θα βρίσκεται πάντα ένα βήμα μπροστά σε σχέση με οποιοδήποτε τυπικό απολιθωμένο, νεκρό σύστημα. Είναι γνωστό από τις εργασίες του Y.V.Matijasevic (1970) ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος που να μας καθιστά ικανούς να αποφασίσουμε αν μια διοφαντική εξίσωση έχει λύσεις ή όχι. Κίνητρο μάθησης μπορεί να αποτελέσει η αναφορά στην εκθετική διοφαντική εξίσωση του Fermat και την ιστορία της ( $x^k + y^k = z^k$  με τρεις μεταβλητές και παράμετρο τον αριθμό  $k$ ), αλλά και την μη επιλύσιμη εκθετική διοφαντική εξίσωση που διατύπωσε το 1987 ο Chaitin (17000 μεταβλητές και παράμετρο  $k$ , καταλαμβάνει διακόσιες σελίδες), μεταφέροντας στην στοιχειώδη αριθμητική τα θεωρήματα μη πληρότητας που είχε ανακαλύψει στην περιοχή της θεωρίας πολυπλοκότητας (Delahaye, 1992). Μπορεί επίσης να γίνει ενημέρωση για τους υπολογίσιμους αριθμούς: υπάρχει αλγόριθμος που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τα πρώτα  $n$  ψηφία του αριθμού σε καθορισμένο χρόνο, π.χ. ο υπερβατικός αριθμός « $\pi$ » είναι υπολογίσιμος-πεπερασμένης πολυπλοκότητας (Chaitin, 2007: 271), αλλά και για τον μη υπολογίσιμο (ασυμπίεστο) αριθμό  $\Omega$  που παρουσίασε το 1974 ο Chaitin (Chaitin, 2007).

Θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν παραδείγματα από τις ενότητες 7.4 έως 7.7, χωρίς οποιαδήποτε αναφορά σε συνεχή κλάσματα. Οι μαθητές θα αναθέσουν στον υπολογιστή (αλγόριθμος και πρόγραμμα) να αναζητήσει ακέραιες λύσεις αντικαθιστώντας, στη θέση των αγνώστων, δυνατές τιμές φυσικών, αρχίζοντας με μικρούς αριθμούς και ανεβαίνοντας σταδιακά.



Το θεμελιώδες ερώτημα είναι να αποφασίσουμε πότε πρέπει να παραιτηθούμε. Θεωρητικά, ιδίως όταν δεν υπάρχει λύση, μπορούμε να ψάχνουμε συνεχώς. Οι μηχανικοί υπολογιστών όμως είναι πιο πρακτικοί άνθρωποι. Μετά από ορισμένο χρόνο, ή ορισμένο αριθμό επαναλήψεων, προγραμματίζουν να παρουσιάζονται στην οθόνη τα γνωστά μηνύματα υπερπλήρωσης, οπότε για να συνεχίσουμε θα πρέπει να αναζητήσουμε τις τεχνικές οδηγίες (συνήθως ο μέγιστος επιτρεπτός αριθμός επαναλήψεων είναι 256, αλλά η τιμή αυτή μπορεί να αλλάξει, π.χ. στο mathematica με την εντολή: `$RecursionLimit = newvalue`).

Ο δάσκαλος μπορεί να αντλήσει από το κεφάλαιο 7 παραδείγματα για κάθε περίπτωση: υπάρχουν λύσεις, δεν υπάρχουν, υπάρχουν αλλά ο υπολογιστής δεν μπορεί να τις βρει με απλή αναζήτηση, ακόμα κι αν ψάχνει μέρες. Η δραστηριότητα αυτή θα βοηθήσει επίσης τους μαθητές να κατανοήσουν πλήρως το νόημα της εικασίας. Π.χ. για την  $x^2 - 991y^2 = 1$ , αν μετά από (απλή) αναζήτηση κάποιων ημερών ο Η.Υ. δεν βρει λύση πιθανόν να υποθέσουν, λανθασμένα, ότι δεν υπάρχει. Η πρόκληση για τα μηχανήματα θα είναι να επαληθεύσουν την ελάχιστη θετική λύση (ενότητα 7.4.1). Για την  $x^2 - 3y^2 = -1$  η εικασία τους θα είναι σωστή και πιστεύουμε ότι μπορούν να κατανοήσουν την απλή αριθμητική της απόδειξης στο τμήμα 7.4.1. (την οποία φυσικά δεν μπορεί να εξηγήσει ο υπολογιστής).

Στα πλαίσια της επόμενης σελίδας είναι ένα πολύ απλό (και μάλλον ελλιπές, χωρίς τα απαραίτητα σχόλια) πρόγραμμα αναζήτησης γραμμένο με την βοήθεια της παρεξηγημένης Logo. Επειδή είχε μεγάλη επιτυχία στους μαθητές του δημοτικού, θεωρήθηκε ότι απευθύνεται στους μικρούς. Στην πραγματικότητα είναι ένα πολύ ισχυρό προγραμματιστικό εργαλείο με τρία ακαταμάχητα προσόντα: (α) επιτρέπει στον μαθητή να επικεντρωθεί στο πρόβλημα, παρά να ανησυχεί για τους περιορισμούς της γλώσσας, (β) καταλαβαίνει Greeklish, Ελληνοαγγλικά, τη γλώσσα των νέων, (γ) δεν απαιτεί τους Αλεξανδρινούς τόνους, αλλά ούτε και ενοχλείται αν υπάρχουν.

Αλλά «ουδέν καλόν αμιγές κακού». Υπάρχουν και μειονεκτήματα (όχι μόνο στη Logo), ιδίως στη σύνθετη σχέση του προγράμματος (διαδικασίας) και του σχήματος: «*διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά έχουν δυσκολίες με τη σχέση σχήματος-διαδικασίας, αυτά δεν χρησιμοποιούν αναγκαστικά γεωμετρικές ιδέες όταν δουλεύουν με τη γεωμετρία της «χελώνας»...ο μαθητής έχει μεγάλες δυσκολίες να τροποποιήσει στοιχεία του προγραμματισμού με τα οπτικά τους παράγωγα*» (Hershkowitz, 1996).

Για την  $x^2 - 17y^2 = 1$ , πραγματοποιούνται 321 δοκιμές (41\*7+34). Οι εντολές εκτύπωσης δίνουν την λύση και το πλήθος των δοκιμών:  $x = 33\dots$  και  $y = 8\dots$ δοκιμές 321.

για **αναζήτηση**

```
make "x 0
make "y 1
make "d 17
make "μετρητης 1
δοκιμη :x :y
end
```

για **δοκιμη** :x :y

```
make "p :x*:x - :d*:y*:y
αν :p =1 [type (sentence [x =] :x )
type (sentence [... και y =]:y)
type (sentence [...δοκιμες] :μετρητης)
σταματησε]
αν :x>40 [ make "x 0 make "y :y+1]
make "μετρητης :μετρητης+1
δοκιμη :x+1 :y
end
```

Θα μπορούσαμε να τροποποιήσουμε την διαδικασία «δοκιμη» ώστε η χελώνα της Logo (που όμως δημιουργεί με ταχύτητα λαγού τα σχήματα) να μην είναι ακινητοποιημένη, αλλά να κάνει π.χ. κυκλικές βόλτες, μέχρι να ολοκληρωθούν οι υπολογισμοί (ή μέχρι να συμπληρωθεί ο καθορισμένος από το πρόγραμμα αριθμός επαναλήψεων).



Χρειάζεται και η εντολή «make "r 0» στην «**αναζήτηση**».

```
για δοκιμη :x :y   make "p :x*:x - :d*:y*:y
αν :p =1 [type (sentence [x =] :x )   type (sentence [... και y =]:y)
type (sentence [...δοκιμες] :μετρητης)   σταματησε]
αν :x>40 [ make "x 0 make "y :y+1]   make "μετρητης :μετρητης+1
```

```
σπ θεσεχψ 20+:r-xsize 20+:r-ysize σκ μ 1 π 1
```

```
make "r :r+1   make "χρωμα 1   θεσεχρωμαστυλο :χρωμα
```

```
επανάλαβε 100 [μ 1 δ 3.6   make "χρωμα :χρωμα + 1
```

```
αν :χρωμα=7 [make "χρωμα 1]   θεσεχρωμαστυλο :χρωμα]
```

;κατα τη διάρκεια των υπολογισμών η χελώνα κάνει χρωματιστές κυκλικές βόλτες

```
δοκιμη :x+1 :y
```

```
end
```

Σε μερικές περιπτώσεις ακόμα και η επαλήθευση δεν εξελίσσεται ομαλά (παραδείγματα στις ενότητες 7.4.4, 7.4.5). Τα προβλήματα έχουν σχέση με την παράσταση των αριθμών: εκτός από την έννοια των δεκαδικών ψηφίων, έχουμε και την έννοια των σημαντικών ψηφίων. Σημαντικά ψηφία είναι όλα τα ψηφία του αριθμού που δίνονται, εκτός από τυχόν μηδενικά που υπάρχουν στην αρχή του αριθμού. Π.χ. τα σημαντικά ψηφία των αριθμών 320.7, 4.60, 0.0058 είναι αντίστοιχα: 4, 3, 2. Τα σημαντικά ψηφία (σ.ψ.) παίζουν μεγάλο ρόλο στην εσωτερική παράσταση ενός αριθμού από έναν Η.Υ., γιατί οι Η.Υ. εργάζονται συνήθως με σημαντικά και όχι με δεκαδικά ψηφία.

Το παράδειγμα που ακολουθεί βρίσκεται στο Χατζηδημόσ, 1977: 13-14.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα  $0.000001 + 0.000001 + 0.000001 + \dots + 0.000001$  που αποτελείται από δύο εκατομμύρια όρους (με 1 σ.ψ.) με τη βοήθεια ενός Η.Υ. ο οποίος, υποθέτουμε, ότι μπορεί να απομνημονεύσει σε μια θέση μνήμης αριθμούς με ακριβώς 6 το πολύ σημαντικά ψηφία.

Αν η πρόσθεση γίνει με το συνηθισμένο τρόπο, δηλαδή ο δεύτερος όρος προστεθεί στον πρώτο, ο τρίτος στο άθροισμα των δύο προηγούμενων κλπ, τότε το τελικό άθροισμα θα είναι ίσο με 1 αντί του σωστού 2.

Αυτό, γιατί ενώ όλα πάνε καλά μέχρι και την πρόσθεση του εκατομμυριοστού 0.000001 (ένα σ.ψ.), οπότε το άθροισμα θα είναι 1.00000 (6 σ.ψ.), η πρόσθεση του εκατομμυριοστού πρώτου όρου θα αφήσει το προηγούμενο άθροισμα αμετάβλητο, γιατί το σωστό άθροισμα 1.000001 έχει 7 σ.ψ. ενώ ο Η.Υ. μπορεί να απομνημονεύσει μέχρι 6, απομνημονεύει τα 6 πρώτα. Το ίδιο θα συμβαίνει και με την πρόσθεση των επομένων 0.000001. Φυσικά μπορούμε να βρούμε το άθροισμα με την μέθοδο αυτή χρησιμοποιώντας δύο θέσεις μνήμης, μία για κάθε άθροισμα ενός εκατομμυρίου όρων, και μετά πρόσθεση του περιεχομένου αυτών των δυο θέσεων, ή να αλλάξουμε την μορφοποίηση των αριθμών, ή την χρησιμοποιούμενη από την υπολογιστική μηχανή ακρίβεια ή, για το συγκεκριμένο, να απαντήσουμε αμέσως, χωρίς τη βοήθεια του υπολογιστή. Τα ισχυρά μαθηματικά «πακέτα» υπολογίζουν συνήθως τα σημαντικά ψηφία, π.χ. αν δώσουμε στο mathematica την εντολή  $N[\frac{1}{280}, 5]$  μας «απαντά»: 0.0035714 (5 σημαντικά ψηφία) τα μηδενικά στην αρχή δεν τα μετρά.

Η θεωρία αριθμών προσφέρεται περισσότερο από οποιονδήποτε άλλο κλάδο για «υπολογιστικά πειράματα». Είναι γνωστή η άποψη του Hardy (1877-1947) ότι τα πιο ονομαστά της θεωρήματα διατυπώθηκαν ως εικασίες, συχνά εκατό και πλέον χρόνια πριν αποδειχθούν και ότι η ιδέα προέκυψε από τις ενδείξεις που έδωσε ένας μεγάλος αριθμός υπολογισμών.

Κατά την διαδικασία ολοκλήρωσης του προγράμματος, η διαίσθηση και η λογική αλληλοδρούν. Η μία στην διακινδυνευμένη ή και παράτολμη εικασία, η άλλη στην επαλήθευσή της. Ο δάσκαλος θα πρέπει να είναι έτοιμος και για απαντήσεις που δεν «αναμένονται», γιατί οι ιδέες των παιδιών είναι πρωτότυπες και απεριόριστες. Εξάλλου, πολλοί και διαφορετικοί δρόμοι μπορεί να οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα και ίσως είναι σκόπιμο να αναζητούμε εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης ενός θέματος. Θεωρούμε χρήσιμο να παραθέσουμε την ιστορία: Ο κ. Κόνερ και η ζωγραφική της ανεψιάς του: «Ο κ. Κόνερ κοίταζε τη ζωγραφική που είχε κάνει η ανεψιά του. Έδειχνε μια κότα που πετούσε πάνω από την αυλή. Γιατί η κότα σου έχει τρία πόδια; ρώτησε ο κ. Κ. Μα οι κότες δεν μπορούν να πετάζουν, αποκρίθηκε η μικρή καλλιτέχνης, της χρειάζεται λοιπόν ένα τρίτο πόδι για να πάρει φόρα. Χαίρομαι που ρώτησα, είπε ο κ. Κόνερ» (Μπρεχτ, 1978: 72).

Δεν πρέπει επίσης να ξεχνάμε και τη συμβουλή του Ian Stewart στην «νεαρή Μαθηματικό»: είναι πολύ εύκολο να καταστρέψεις την αυτοπεποίθηση κάποιου, και πολύ δύσκολο να τον βοηθήσεις να την ξανακερδίσει (Stewart, 2008: 206).

Πιστεύουμε ότι η εγρήγορση αλλά και η κατάλληλη παρέμβαση του δασκάλου θα βοηθήσει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν δημιουργικά οποιαδήποτε τεχνολογική βοήθεια.

## 9.8. Λύκειο

**9.8.0.** Οι προτεινόμενες δραστηριότητες περιέχουν πολύ αριθμητική και λίγη άλγεβρα. Έχουν στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν την δύναμη και να εκτιμήσουν την αξία των συμβολικών μεθόδων της άλγεβρας, της αριθμητικής που εφαρμόζεται σε γράμματα. Οι διαδικασίες προσέγγισης της  $\sqrt{2}$ , έχουν στόχο να κατανοήσουν την έννοια της ακολουθίας και την θεμελιώδη έννοια του ορίου με το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένοι οι άρρητοι.

Μετά την 9.8.2, αν κριθεί σκόπιμο, μπορούμε να παρουσιάσουμε τμήματα από την ενότητα 1.2. έστω και ενημερωτικά. Πολλά παραδείγματα αρρητοτήτων από το Κ1 είναι επίσης «συμβατά» με την σχολική ύλη, π.χ. από τις ενότητες 1.3.3, 1.5, 1.6 .

Ίσως το δυσκολότερο τμήμα είναι το 9.8.3. Δεν επηρεάζει όμως τα υπόλοιπα. Είναι ένας δρόμος για να οδηγήσουμε τους μαθητές στην αντιστροφή μιας πορείας συλλογισμών και στην κατανόηση της «αρχής της καθόδου» (παράρτημα και 1.1). Μπορεί να παραληφθεί, αλλά, αν παραληφθεί, τότε κρίνουμε σκόπιμο να γίνουν μερικά αριθμητικά παραδείγματα.

Διάφοροι τρόποι προσέγγισης, παλιοί, αναπαλαιωμένοι, αλλά και νέοι δίνονται στις ενότητες 9.8.4, 9.8.5 και 9.8.6. Μπορεί να αναφερθεί και η απόδειξη της αρρητότητας της  $\sqrt{2}$  που υπαινίσσεται (χωρίς όμως να την αναπτύσσει διεξοδικά) ο Αριστοτέλης (*Αναλυτικά Πρότερα*, 41α.21-32): αν υποθέσουμε ότι η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου είναι σύμμετρες, τότε καταλήγουμε στην αντίφαση ότι «τα άρτια γίνονται ισα με τα περιττά».

Θεωρήσαμε σκόπιμο να αφιερώσουμε την ενότητα 9.8.7. σε όχι και τόσο τετριμμένα θέματα που αφορούν την περίοδο του δεκαδικού στον οποίο μετατρέπεται ένα ρητό κλάσμα με πρώτους διαφορετικούς από 2 ή 5 (εγκλειστική διάζευξη) στην πρωτογενή ανάλυση του παρονομαστή, αφού όλη η εργασία χαρακτηρίζεται από μια διαρκή εναλλαγή κλασμάτων και δεκαδικών. Ελπίζουμε ότι κάποιος μαθητής θα έχει την περιέργεια να ρωτήσει «γιατί;». Ο Βαλερύ, με την εντυπωσιακή του διαύγεια γράφει στην ηλικία του γιατί: «Τα παιδιά ρωτούν Γιατί; Τότε τα στέλνουν στο σχολείο που τα θεραπεύει από το ένστικτο αυτό και θριαμβεύει πάνω στην περιέργεια με την πλήξη» (Βαλερύ, 1996: 49).

Ίσως δεν έχουν «θεραπευθεί» όλοι οι μαθητές του Λυκείου.

Εκτός από τα **συνήθη** κλάσματα υπάρχουν και τα **συνεχή**. Παρουσιάζονται σαν αριθμητικό παιχνίδι στην 9.8.8.

Υποθέτουμε ότι μέχρι την Γ' Γυμνασίου οι μαθητές έχουν κατανοήσει τις διαδικασίες των πράξεων, οπότε για τους υπολογισμούς μπορούν να χρησιμοποιήσουν οποιαδήποτε τεχνολογική βοήθεια. Κάποια θέματα ίσως είναι «εκτός σχολικής ύλης», αλλά, σύμφωνα πάντα με την αισιόδοξη άποψη, πιστεύουμε ότι αυτό θα αλλάξει μελλοντικά.

### 9.8.1. Η πολιορκία της τετραγωνικής ρίζας του 2

\*Είναι συνέχεια της ενότητας 9.5.6.

Στην 9.5.6. είδαμε ότι δεν υπάρχει ρητός  $m/n$  ώστε να ισχύει:  $m^2 = 2n^2$  ή  
 ισοδύναμα:  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ .

$$\begin{array}{ccc} 2n^2-1 & & 2n^2 & & 2n^2+1 \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \hline & & & & \end{array}$$

Για οποιοδήποτε ζεύγος ακεραίων  $(m,n)$  επομένως θα έχουμε  $m^2 > 2n^2$  ή  $m^2 < 2n^2$ .

Οι  $m^2$ ,  $2n^2$  είναι ακέραιοι, άρα οι τιμές του  $m^2$  που βρίσκονται πλησιέστερα στον  $2n^2$ , αν υπάρχουν, είναι εκείνες για τις οποίες ισχύει  $m^2 = 2n^2 + 1$  ή  $m^2 = 2n^2 - 1$ . Η απόλυτη τιμή «συσκευάζει» τις δύο περιπτώσεις σε μία:  $|m^2 - 2n^2| = 1$ : «οικονομία στην έκφραση και συνεπτυγμένη αλγεβρική γραφή» (Θωμαΐδης, 1995: 299).

Υπάρχουν ζεύγη ακεραίων (m,n), με  $|m^2 - 2n^2| = 1$ , π.χ. τα (1,0):  $1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$ , (1,1):  $1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$ , (3,-2):  $3^2 - 2 \cdot (-2)^2 = 1$  ( βλ. και στην 9.5.6.).

**Θα λέμε ότι οι (m,n) έχουν την ιδιότητα «±1», αν ισχύει η  $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ .**

Ας περιοριστούμε στους θετικούς ακεραίους.

Οι μαθητές δεν έχουν αντίρρηση, θα θεωρούσαν αστείο να προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τον  $\sqrt{2}$  με αρνητικούς. Είναι γνωστή η αντιπάθειά τους στους αρνητικούς και συνήθως υποθέτουν, χωρίς πολύ σκέψη, ότι τα γράμματα είναι αντιπρόσωποι θετικών. Αυτό δεν είναι και τόσο ...αρνητικό, αν σκεφτούμε τον αγώνα των αρνητικών (που οι Ινδοί χρησιμοποιούσαν από το 600 π.Χ. ) για να τους δεχτούν οι Μαθηματικοί στην κοινότητα των αριθμών. Ο αγώνας «δικαιώθηκε» μόνο κατά τον 17<sup>ο</sup> αιώνα, αν και μερικοί θαρραλέοι (Δυτικοί) Μαθηματικοί(π.χ. Kardan, Girard), έπαιξαν λίγο με αυτούς αρκετά νωρίτερα (Wilder, 1986: 167).

Υπάρχει και ένα ακόμη προτέρημα των μαθητών:

Δεν ασχολούνται με την ύπαρξη, δέχονται ότι υπάρχει αριθμός με το σύμβολο  $\sqrt{2}$  και υπακούει στους συνήθεις νόμους των πράξεων.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι ακέραιοι (3,2) και (7,5) της  $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$  (9.5.6.) έχουν την «±1» ιδιότητα: (3,2):  $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$ , (7,5):  $7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1$ .

Υψώνουμε στο τετράγωνο και βλέπουμε ότι  $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = \frac{50-1}{25} = 2 - \frac{1}{25}$  (το  $\frac{1}{25}$  των

100 τ.δ. είναι εκείνα τα 4 τ.δ. που μας περίσσεψαν στην 9.5.5.B1).

Επίσης  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{8+1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$  (το  $\frac{1}{4}$  των 100 τ.δ. είναι τα 25 τ.δ. τα οποία δεν

διαθέταμε για να σχηματίσουμε με τα 29 (25+4) έναν ακόμα γνώμονα δεκάτων και να φτάσουμε σε μήκος πλευράς 1.5 στην ενότητα 9.5.5.B1).

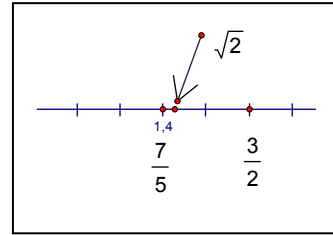
Από τις  $\left|\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 2\right| = \frac{1}{25}$ ,  $\left|\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\right| = \frac{1}{4}$  παίρνουμε τις

$$\left|\frac{7}{5} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{25 \left|\frac{7}{5} + \sqrt{2}\right|} = \frac{1}{5(7+5\sqrt{2})} \text{ και } \left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{4 \left|\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right|} = \frac{1}{2(3+2\sqrt{2})}.$$

Επειδή  $5(7+5\sqrt{2}) > 2(3+2\sqrt{2})$ , θα έχουμε

$$\left| \frac{7}{5} - \sqrt{2} \right| < \left| \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right| \quad (\text{Αν } a, b \text{ ομόσημοι, τότε } a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}).$$

Ο ρητός  $7/5$  θα είναι «πιο κοντά» στην  $\sqrt{2}$  από ότι ο  $3/2$ . (Η τοποθέτηση στον άξονα γίνεται με τον γνωστό «γεωμετρικό»



τρόπο, από την Β' Γυμνασίου). Η απόσταση των  $\frac{7}{5}, \frac{3}{2}$  είναι  $\frac{1}{10}$ .

Η  $\sqrt{2}$  δεν είναι ρητός, δεν μπορεί να είναι ο αριθμητικός μέσος των  $\frac{7}{5}, \frac{3}{2}$  που απέχει

$\frac{1}{20}$  από καθέναν. Είναι πιο κοντά στον  $\frac{7}{5}$ , άρα η απόσταση  $\left| \frac{7}{5} - \sqrt{2} \right|$  είναι μικρότερη από το

μισό του  $\frac{1}{10}$ ,  $\left| \frac{7}{5} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{20}$  [1].

Δεν γνωρίζουμε τον  $\sqrt{2}$  «ακριβώς», αλλά ο ρητός  $\frac{7}{5}$  έχει πλησιάσει σε απόσταση

$\frac{1}{20}$  (= 0.05) από αυτόν (σχετικά 4.6, 5.3.1:  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ ).

Από την  $|m^2 - 2n^2| = 1$  παίρνουμε  $\left| \left( \frac{m}{n} \right)^2 - 2 \right| = \frac{1}{n^2}$ , ενώ για τους  $m, n$  με  $|m^2 - 2n^2| > 1$

απομακρυνόμαστε από τον στόχο μας:  $\left| \left( \frac{m}{n} \right)^2 - 2 \right| > \frac{1}{n^2}$ . Θα διερευνήσουμε τον ρόλο των  $m, n$

με  $|m^2 - 2n^2| = 1$ , στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε την φύση του  $\sqrt{2}$ .

Στην 9.5.6. έχουμε κατασκευάσει ένα πίνακα με τα τετράγωνα και τα διπλάσια των τετραγώνων των φυσικών. Αναζητούμε ζεύγη ακεραίων  $(m, n)$  που ικανοποιούν την ισότητα  $|m^2 - 2n^2| = 1$  με στόχο, το τετράγωνο του ρητού  $\frac{m}{n}$  να βρίσκεται όσο γίνεται ή όσο θέλουμε «κοντά» στον 2. Από τον πίνακα αυτόν βλέπουμε ότι τα ζεύγη  $(3, 2)$ ,  $(7, 5)$ ,  $(17, 12)$ ,  $(41, 29)$ , ικανοποιούν κάποια από τις  $m^2 - 2n^2 = +1$  ή  $m^2 - 2n^2 = -1$  (δηλ. έχουμε λύσεις των αντίστοιχων εξισώσεων Pell, βλ. 7.4, 7.5).

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι τα τετράγωνα των ρητών κλασμάτων  $\frac{3}{2}, \frac{7}{5},$

$\frac{17}{12}, \frac{41}{29}$  (που είναι αναγωγήματα της  $\sqrt{2}$ ) πλησιάζουν ταχύτατα τον 2, γιατί  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{2^2},$

$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = 2 - \frac{1}{5^2}, \left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{288+1}{12^2} = 2 + \frac{1}{12^2}, \left(\frac{41}{29}\right)^2 = \frac{1681}{841} = 2 - \frac{1}{29^2}$  και  $\frac{1}{29^2} < \frac{1}{12^2} < \frac{1}{5^2} < \frac{1}{2^2}.$

Ελπίζουμε ότι, αν προκύψουν επόμενα ζεύγη, τότε η απόσταση των αντίστοιχων ρητών από την ιδέα που εκφράζει το σύμβολο  $\sqrt{2}$  θα είναι ακόμα μικρότερη, μικρότερη από  $\frac{1}{29^2} = \frac{1}{841} = 0.001189... .$

*Η «+1» ιδιότητα χαρακτηρίζει τους ρητούς με τετράγωνα μεγαλύτερα του 2,  
η «-1» ιδιότητα με μικρότερα.*

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ξεφύγουμε από τα συγκεκριμένα παραδείγματα και με την βοήθεια κατάλληλων συμβόλων, να σκεφτούμε πιο γενικά «Όταν σε μια περίπτωση επικρατήσει ο συμβολισμός που αρμόζει, τότε αυτός προικίζεται με δικιά του ζωή και αυτή με τη σειρά της δημιουργεί νέα ζωή» (Struik,1982: 151). Στόχος μας είναι η ταυτόχρονη παράσταση πολλών αριθμών και αν είναι δυνατόν, όλης της διαδικασίας.

Από τον πίνακα του τμήματος 9.5.6, με τα τετράγωνα και τα διπλάσια των τετραγώνων, μας ενδιαφέρουν οι ακέραιοι m,n ώστε  $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ . Η «σειριακή» αναγραφή μάλλον είναι κουραστική υπόθεση (πιθανόν και για τα μηχανήματα). Θα θέλαμε μόνο τους (m,n) με την «(±1)» ιδιότητα:  $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ .

Μπορούμε να κάνουμε κάποια **εικασία** για το επόμενο από τα  $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}$ .

Παρατηρούμε ότι, αν αρχίσουμε από το 3/2, ας το ονομάσουμε «τρέχον κλάσμα», τότε ο παρονομαστής του επομένου είναι το άθροισμα αριθμητή και παρονομαστή του τρέχοντος: 3+2=5, 7+5=12, 17+12=29. Έχουμε το  $\frac{3}{2}$ , γενικά το  $\frac{m}{n}$ , βρίσκουμε τον επόμενο

παρονομαστή:  $\frac{3}{2} \rightarrow \frac{?}{5}, \frac{m}{n} \rightarrow \frac{?}{m+n}.$



Για τους αριθμητές παρατηρούμε ότι ο αριθμητής του επομένου είναι το άθροισμα των παρονομαστών του «τρέχοντος» και του επομένου, του παρονομαστή που μόλις κατασκευάστηκε:  $2+5 = 7$ ,  $5+12 = 5 + (7+5) = 17$ , ...,  $n+(m+n) = m+2n$ .

Δικαιούμαστε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το επόμενο κλάσμα του τρέχοντος  $\frac{m}{n}$  είναι το  $\frac{m+2n}{m+n}$  και θα θέλαμε να έχει και αυτό την  $\pm 1$  ιδιότητα.

Δοκιμάζουμε για το επόμενο του  $\frac{7}{5}$ :  $\frac{7+2\cdot 5}{7+5} = \frac{17}{12}$ , δοκιμάζουμε για το επόμενο του  $\frac{17}{12}$ :  $\frac{17+2\cdot 12}{17+12} = \frac{41}{29}$ . Ελπίζουμε ότι για το  $\frac{99}{70}$  που κατασκευάζεται με την μέθοδο

$\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$  από το  $\frac{41}{29}$ :  $\frac{41+2\cdot 29}{41+29} = \frac{99}{70}$  θα ισχύει η « $\pm 1$ » ιδιότητα.

Έχουμε  $99^2 - 2 \cdot 70^2 = 1$ , ισχύει.

Μπορούμε να συνεχίσουμε την παραγωγή κλασμάτων με την μέθοδο  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$ ,

π.χ. από το  $\frac{99}{70}$  παίρνουμε το  $\frac{99+2\cdot 70}{99+70} = \frac{239}{169}$  από αυτό το  $\frac{239+2\cdot 169}{239+169} = \frac{577}{408}$  και στη

συνέχεια με τον ίδιο τρόπο τα  $\frac{1393}{985}$ ,  $\frac{3363}{2378}$ ,  $\frac{8119}{5741}$ ,  $\frac{19601}{13860}$ ,  $\frac{47321}{33461}$ ,  $\frac{114243}{80782}$ ,  $\frac{275807}{195025}$ , κλπ.

Θα πρέπει φυσικά να αποδείξουμε την  $\pm 1$  ιδιότητα για όλα αυτά τα κλάσματα, και πιθανόν και για την αστείρευτη παραγωγή νέων που δημιουργούνται με την συγκεκριμένη μέθοδο. «Μια απόδειξη είναι ένα λογικό επιχείρημα που δεν αφήνει περιθώριο αμφιβολίας και καμιά ποσότητα εμπειρικών ενδείξεων δεν μπορεί να την υποκαταστήσει» (Stewart, 2008: 103). Δεν θα εξετάσουμε κάθε νέο κλάσμα ξεχωριστά.

Χρησιμοποιούμε τη δύναμη της άλγεβρας:

Παρατηρούμε ότι  $(m+2n)^2 - 2(m+n)^2 = -(m^2 - 2n^2)$  [\*]

Αν ξεκινήσουμε από κάποιο κλάσμα  $\frac{m}{n}$  που έχει την  $\pm 1$  ιδιότητα και

ακολουθήσουμε την μέθοδο  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$ , τότε η ιδιότητα «εξαπλώνεται» και στα επόμενα

κλάσματα. Το  $\frac{3}{2}$  έχει την «+1» ιδιότητα (ή και το  $\frac{1}{1}$  την «-1»). Η [\*] είναι το επαγωγικό

βήμα. Τονίζουμε στους μαθητές την αποδεικτική μέθοδο: μαθηματική επαγωγή.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν το ρητό κλάσμα  $\frac{m}{n}$  είναι ανάγωγο, τότε είναι και το επόμενο του  $\frac{m+2n}{m+n}$ . Γιατί, αν οι  $m+2n$ ,  $m+n$  έχουν κοινό διαιρέτη  $p > 1$ , αυτός θα διαιρεί και την διαφορά τους, τον  $n$ , άρα και τον  $(m+n)-n=m$ , γίνεται ήδη ο  $p$  κοινός διαιρέτης και των  $m, n$ . Αρχίσαμε με το ανάγωγο κλάσμα  $\frac{3}{2}$ , άρα ανάγωγα είναι και όλα τα επόμενα. Οι  $m, n$  είναι φυσικοί, το κλάσμα  $\frac{m+2n}{m+n}$  δεν «ανάγεται» σε ισοδύναμο με μικρότερους όρους, άρα οι όροι κάθε επόμενου κλάσματος είναι μεγαλύτεροι των προηγούμενων (αν το  $\frac{m}{n}$  δεν είναι ανάγωγο, π.χ. αν  $\frac{m}{n} = \frac{9}{3}$ , τότε δεν είναι και το  $\frac{m+2n}{m+n} = \frac{15}{12}$ ).

Για το  $99/70$  έχουμε  $\left(\frac{99}{70}\right)^2 = \frac{9801}{4900} = \frac{9800+1}{4900} = 2 + \frac{1}{70^2}$  και  $\frac{1}{70^2} < \frac{1}{29^2} < \frac{1}{12^2} < \frac{1}{5^2} < \frac{1}{2^2}$ .

Όπως και προηγουμένως, από τις  $\left|\left(\frac{99}{70}\right)^2 - 2\right| = \frac{1}{70^2}$ ,  $\left|\left(\frac{41}{29}\right)^2 - 2\right| = \frac{1}{29^2}$  παίρνουμε τις

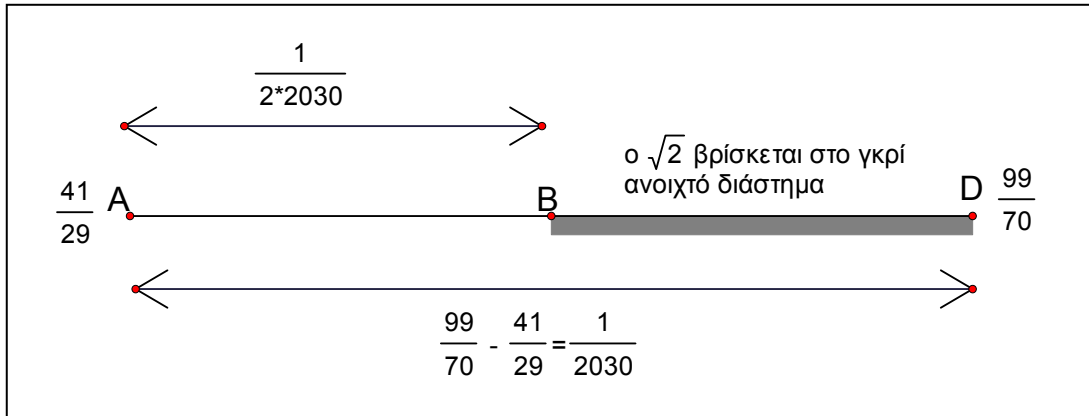
$$\left|\frac{99}{70} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{70^2 \left|\frac{99}{70} + \sqrt{2}\right|} = \frac{1}{70(99 + 70\sqrt{2})} \quad \text{και} \quad \left|\frac{41}{29} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{29^2 \left|\frac{41}{29} + \sqrt{2}\right|} = \frac{1}{29(41 + 29\sqrt{2})}.$$

Επειδή  $70(99 + 70\sqrt{2}) > 29(41 + 29\sqrt{2})$ , θα έχουμε  $\left|\frac{99}{70} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{41}{29} - \sqrt{2}\right|$ . Διαπιστώνουμε ότι

η  $\sqrt{2}$  είναι πιο κοντά στον  $99/70$ , απ' ότι στον ρητό  $41/29$ . Άρα η  $\left|\frac{99}{70} - \sqrt{2}\right|$ , θα είναι

μικρότερη από το μισό της απόστασης των  $\frac{41}{29}$ ,  $\frac{99}{70}$ . Δηλ.  $\left|\frac{99}{70} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2} \left|\frac{99}{70} - \frac{41}{29}\right| = \frac{1}{2 \cdot 2030}$ .

Επειδή  $\frac{1}{2030} < \frac{1}{2000} = 0.0005$  θα έχουμε  $\left|\frac{99}{70} - \sqrt{2}\right| < \frac{0.0005}{2} = 0.00025$ .



Στην [1] είδαμε ότι ο ρητός  $\frac{7}{5}$  έχει πλησιάσει σε απόσταση  $\frac{1}{20} = 0.05$  τον άγνωστο αριθμό με το σύμβολο  $\sqrt{2}$ . Ο  $\frac{99}{70}$  είναι πολύ πιο κοντά στον στόχο μας. [2]

Για τον ρητό  $\frac{239}{169}$  έχουμε  $\left(\frac{239}{169}\right)^2 = \frac{57122}{169^2} = \frac{2 \cdot 169^2 - 1}{169^2} = 2 - \frac{1}{169^2}$ , για τον  $\frac{577}{408}$ :

$\left(\frac{577}{408}\right)^2 = 2 + \frac{1}{408^2}$ . Επειδή η τετραγωνική ρίζα του 2 βρίσκεται πιο κοντά στον  $\frac{577}{408}$ , οι

μαθητές θα κληθούν να αποδείξουν ότι, όπως και στις [1] και [2], ισχύει:

$$\left| \frac{577}{408} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2 \cdot 408 \cdot 169} = \frac{1}{2 \cdot 68952} < \frac{1}{2 \cdot 50000} = \frac{1}{100000} = 10^{-5} = 0.00001.$$

Ο ρητός  $\frac{577}{408}$  βρίσκεται πολύ πιο κοντά στον  $\sqrt{2}$ , απ' ό,τι οι προηγούμενοί του που προκύπτουν με αυτή τη μέθοδο. Αν ο δάσκαλος ζητήσει την απόδειξη του γενικότερου συμπεράσματος ότι κάθε επόμενος ρητός,  $\frac{m+2n}{m+n}$ , βρίσκεται πιο κοντά στον  $\sqrt{2}$  από τον

$\frac{m}{n}$  καλό θα είναι να τονίσει ότι για τους παρονομαστές θα έχουμε:  $n < m+n$ , αφού τα κλάσματα είναι ανάγωγα και οι  $m, n$  φυσικοί. Πιθανόν να χρειαστεί κάποια ενθάρρυνση και

$$\text{για την } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| = \frac{1}{n^2 \left( \frac{m}{n} + \sqrt{2} \right)} = \frac{1}{n(m+n\sqrt{2})}.$$

### 9.8.2. Ακολουθίες και Υπακολουθίες

Α. Αν εφαρμόσουμε την μέθοδο  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$  στο ζεύγος φυσικών (1,1) που έχει την «±1» ιδιότητα, παίρνουμε τον ρητό  $\frac{3}{2}$ . Επαναλαμβάνοντας διαδοχικά την μέθοδο συλλέγουμε τους ρητούς:  $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \frac{8119}{5741}, \frac{19601}{13860}, \frac{47321}{33461}, \dots$

Μπορούμε να προγραμματίσουμε τον υπολογιστή να παράγει ρητούς που έχουν την «±1» ιδιότητα, αρχίζοντας από τον  $\frac{1}{1}$  και εφαρμόζοντας τη μέθοδο  $\frac{m+2n}{m+n}$  για τον επόμενο του  $\frac{m}{n}$ . Οι 13 προηγούμενοι π.χ., παράγονται (και τυπώνονται) από το πρόγραμμα (Logo) του διπλανού πλαισίου (εναλλακτικά mathematica: 9.8.5, 9.8.7)

Αυξομειώνουμε το πλήθος των ρητών με την εντολή ελέγχου:  
« αν :πληθος >13 [σταματησε]».

```
για παραγωγή
make "m 1 make "n 1 make "p 1
make "q 1 make "πληθος 1
μεθοδος :m :n
end

για μεθοδος :m :n
type (sentence [αυξων αριθμος:] :πληθος)
type (sentence [-αριθμητης =] :p)
τυπωσε (sentence [... και παρονομαστης =]:q)
make "p :m + 2*:n make "q :m + :n
make "πληθος :πληθος + 1
αν :πληθος >13 [σταματησε]
μεθοδος :p :q
end
```

Η διαδικασία παραγωγής αυτών των ρητών απαιτεί μόνον ένα αρχικό ζεύγος ακεραίων.  
Στη συνέχεια «ανατροφοδοτείται».

Μπορούμε επίσης, πολύ εύκολα, να πάρουμε ρητούς με την συγκεκριμένη ιδιότητα με την βοήθεια του excel ή αριθμομηχανής.

Ή, πιθανόν λίγο πιο κουραστικά, χωρίς τεχνολογική βοήθεια.

**Β.** Αν θέλουμε να βάλουμε μια « τάξη» στην μέχρι τώρα συλλογή μας:  $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12},$

$\frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots, \frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$ , μπορούμε να αναρτήσουμε «ετικέτες» σε κάθε κλάσμα:

1,2,3,4,5,... και να τα ονομάσουμε  $\alpha_1 = \frac{1}{1}, \alpha_2 = \frac{3}{2}, \alpha_3 = \frac{7}{5}, \alpha_4 = \frac{17}{12}, \dots$ , οπότε κάθε κλάσμα

έχει την «τάξη» του και την τιμή του: π.χ. το 3<sup>ο</sup> κλάσμα έχει τιμή  $\frac{7}{5}$ .

Σχηματίζουμε έτσι μια **ακολουθία** με **όρους**  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ , συμβολικά **( $\alpha_n$ )**, για τους οποίους ισχύει:  $\left| \left( \frac{m}{n} \right)^2 - 2 \right| = \frac{1}{n^2}$ , δηλ.  $\left( \frac{m}{n} \right)^2 = 2 \pm \frac{1}{n^2}$ . Ο  $n$  αυξάνεται, άρα η απόσταση των **τετραγώνων** από τον 2 συνεχώς μικραίνει.

Μπορούμε να επιλέξουμε όρο της ακολουθίας με συγκεκριμένη απόσταση από τον 2: αν θέλουμε απόσταση μικρότερη από 0.01, επιλέγουμε κάποιον όρο με παρονομαστή  $n^2 > 100$ , π.χ. τον 17/12. Οι επόμενοι παρονομαστές είναι μεγαλύτεροι, άρα **τελικά** (εδώ είναι απαραίτητη η διευκρίνιση της μαθηματικής γλώσσας), εκτός από τους 3 πρώτους, όλοι οι όροι «στριμώνονται» σε απόσταση ενός εκατοστού από τον 2.

Από την ενότητα 9.8.1. συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να διαλέξουμε και την απόσταση από τον άρρητο  $\sqrt{2}$ , αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλο όρο της ακολουθίας.

Π.χ. αν θέλουμε ρητό που να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη του  $10^{-5}$ , αναζητούμε διπλάσιο γινόμενο παρονομαστών διαδοχικών όρων της ακολουθίας που να υπερβαίνει τον 100000. Επειδή  $2*1*2=4, 2*2*5=20, 2*5*12=120, 2*12*29=696, 2*29*70=4060, 2*70*169=23660, 2*169*408=137904$ , συμπεραίνουμε ότι για τον ρητό  $\frac{577}{408}$  ισχύει:

$\left| \frac{577}{408} - \sqrt{2} \right| < 10^{-5}$ , όπως έχουμε δει και στα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας. Ο  $\sqrt{2}$

επιτρέπει στους ρητούς να φτάσουν σε απόσταση «αναπνοής» από αυτόν, αλλά κανένας ρητός δεν θα έχει την τύχη να τον κατακτήσει.

Στη συνέχεια διατηρούμε την ονομασία **( $\alpha_n$ )** για την ακολουθία:  $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$

**Γ.** Με την βοήθεια της « $\pm 1$ » ιδιότητας, ο δάσκαλος μπορεί να προχωρήσει και στην έννοια της υπακολουθίας, αλλά και της σύνθεσης ακολουθιών (4.2.2):

Μπορούμε να χωρίσουμε τα κλάσματα της ακολουθίας  $(a_n)$  σε δύο υποομάδες, που λέγονται υπακολουθίες της  $(a_n)$  :

Την υπακολουθία «-1»: με  $b_1 = \frac{1}{1} < b_2 = \frac{7}{5} < b_3 = \frac{41}{29} < b_4 = \frac{239}{169} < \dots < \sqrt{2}$  η οποία «πολιορκεί» τον  $\sqrt{2}$  με μικρότερες τιμές και την υπακολουθία «+1»:  $c_1 = \frac{3}{2} > c_2 = \frac{17}{12} > c_3 = \frac{99}{70} > \dots > \sqrt{2}$  η οποία κατευθύνεται προς τον  $\sqrt{2}$  με μεγαλύτερες τιμές.

Αν  $\frac{m}{n}$  είναι το τρέχον κλάσμα μιας ομάδας, το επόμενο στην υπακολουθία είναι το μεθεπόμενο της ακολουθίας, άρα η κάθε υπακολουθία μπορεί να περιγραφεί από το σχήμα:  $\frac{m}{n} \rightarrow \left( \frac{m+2n}{m+n} \right) \rightarrow \frac{3m+4n}{2m+3n}$ , δηλ.  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{3m+4n}{2m+3n}$ .

Για την « $\pm 1$ » ιδιότητα έχουμε:  $(3m+4n)^2 - 2(2m+3n)^2 = m^2 - 2n^2$ .

**Δ.** Το *μωρό* είναι πλέον έτοιμο να γεννηθεί: ο  $\sqrt{2}$  είναι **το όριο** της ακολουθίας  $(a_n)$ . Οι υπακολουθίες  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  συγκλίνουν στον  $\sqrt{2}$  από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα. Ο δάσκαλος μπορεί φυσικά να βρει και άλλους δρόμους για την παρουσίαση του ορίου από την πολύ πλούσια βιβλιογραφία (π.χ. Sawyer, 1993- Πάμφιλος, 2011, Κεφ.5 – Lang, 1998 - Καζαντζής, Π, 1971(από σελ.340) - Thomas, 1993 - Flannery, 2006 κλπ). Οι ρητοί των ακολουθιών προσεγγίζουν σε κάθε βήμα τον  $\sqrt{2}$ , προσεγγίζουν αποκλειστικά αυτόν τον αριθμό, αλλά **το όριο δεν είναι κατά προσέγγιση**, το όριο είναι ακριβώς  $\sqrt{2}$ .

### 9.8.3. Η αντιστροφή της πορείας

Αρχίζοντας με τον ρητό  $\frac{1}{1}$  και εφαρμόζοντας τη μέθοδο  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$  δημιουργείται η ακολουθία  $(a_n)$  με κάθε όρο της να έχει την « $\pm 1$ » ιδιότητα.

Αν έχουμε έναν ρητό που έχει αυτή την ιδιότητα, π.χ. αν για τον  $\frac{p}{q}$  ισχύει:  $p^2 - 2q^2 = +1$  ή  $p^2 - 2q^2 = -1$ , τότε αυτός είναι μέλος της  $(a_n)$ ; Στο σημείο αυτό καλό είναι να τονίσουμε **την σκοπιμότητα** αλλαγής συμβόλων, π.χ.  $\frac{p}{q}$ , αντί του  $\frac{m}{n}$ .

Ο δάσκαλος μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να διερευνήσουν αν π.χ. για τον  $\frac{22619537}{15994428}$  (ή κάποιον με μικρότερους όρους, ιδίως αν δεν υπάρχουν αριθμομηχανές), ισχύει  $22619537^2 - 2 \cdot 15994428^2 = \pm 1$ . Αφού διαπιστώσουν ότι ισχύει η «+1» ιδιότητα, θα ζητήσει να διερευνήσουν αν αυτός ο ρητός είναι ή όχι μέλος της  $(a_n)$ .

Μια σκέψη, πιθανόν, είναι να ξεκινήσει κάποιος από τον  $\frac{1}{1}$  και υπολογίζοντας με τη μέθοδο  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$  να εξετάσει (ίσως με κάποια κούραση για μεγάλους αριθμητές και παρονομαστές) αν ο δοσμένος ρητός είναι όρος της ακολουθίας. Αλλά πως θα είμαστε σίγουροι ότι η μέθοδος παράγει όλους τους ρητούς με την  $(\pm 1)$  ιδιότητα; Για το «όλους» ακόμα και εκατομμύρια δοκιμών δεν είναι αρκετά. Θεωρούμε πολύ σημαντική την αντιστροφή της πορείας: από τον δοσμένο να βρούμε τον προηγούμενό του και να συνεχίσουμε με τους προηγούμενους, μήπως φτάσουμε σε κάποιον «γνωστό», ή στον αρχικό, τον  $\frac{1}{1}$ . «Καθοδηγώντας τους μαθητές στην αντιστροφή της πορείας των συλλογισμών, τους βοηθάμε να αφομοιώσουν όλη τη διαδικασία» (Arons, 1992: 30).

Για να κατανοηθεί η αντιστροφή, προτείνουμε να δοκιμάσουν οι μαθητές πρώτα μικρούς όρους, π.χ. πως θα βρούμε τον προηγούμενο του  $\frac{17}{12}$ ;

Μπορεί να βοηθήσει η άλγεβρα στην αντιστροφή της μεθόδου  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$ ;

Πιθανόν να χρειαστεί να υποδειχθεί και πάλι η μετονομασία των  $\frac{m+2n}{m+n}$ ,  $\frac{m}{n}$  σε π.χ.  $\frac{p}{q}$  και  $\frac{r}{s}$ .

$$\text{Τότε } p = r + 2s, \quad q = r + s.$$

Η συνέχεια είναι κάπως οικεία στους μαθητές Λυκείου:  $s = p - q$ ,  $r = p - s = 2q - p$  (η λύση είναι μοναδική, η ορίζουσα του συστήματος είναι  $-1 \neq 0$ ). Η μέθοδος αντιστροφής είναι

$$\frac{r}{s} = \frac{2q-p}{p-q} \leftarrow \frac{p}{q} \quad (\text{μπορεί επίσης να διαπιστωθεί ότι η «προς τα εμπρός πορεία» δίνει το } \frac{p}{q},$$

από το  $\frac{2q-p}{p-q}$ , γιατί  $p = 2q - p + 2p - 2q$  και  $q = 2q - p + p - q$  και ότι αν το  $\frac{p}{q}$  είναι ανάγωγο, το

ίδιο θα ισχύει και για το  $\frac{2q-p}{p-q}$ ).

Οι αριθμοί  $r, s$  είναι μικρότεροι από τους  $p, q$  γιατί  $p = r + s$ ,  $q = 2r + s$ .

Αν κάποιος ρητός έχει την « $\pm 1$ » ιδιότητα, θα την έχει και ο προηγούμενός του. Η άλγεβρα για την απόδειξη αυτή είναι πολύ απλή και θα την ζητήσουμε από τους μαθητές:

$$(2q-p)^2 - 2(p-q)^2 = 2q^2 - p^2 = -(p^2 - 2q^2).$$

Επόμενο βήμα θα είναι η απόδειξη των εξής **παρατηρήσεων**:

- (i). αν  $m$  φυσικός με  $m^2 - 2m^2 = \pm 1$ , τότε  $m = 1$  ( $m^2 = \mp 1$ ).
- (ii). αν ένα ζεύγος φυσικών  $(m, n)$  ικανοποιεί την ιδιότητα:  $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ , τότε  $m > n$   
(αν  $m < n$ , με  $m^2 = 2n^2 \pm 1$ , τότε  $n^2 < \mp 1$ ,  $n$  φυσικός, άτοπον).

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο  $\frac{p}{q}$  έχει την ιδιότητα  $p^2 - 2q^2 = \pm 1$ . Το προηγούμενο ζεύγος θα είναι το  $(2q-p, p-q)$  και θα ισχύουν οι  $p > q$  και  $2q-p > p-q$ , γιατί τα ζεύγη  $(p, q)$  και  $(2q-p, p-q)$  έχουν την  $\pm 1$  ιδιότητα. Επίσης  $q > 2q-p \Leftrightarrow p > q$  και καταλήγουμε στην  $p > q > 2q-p > p-q$  (εφόσον οι αριθμοί είναι διαφορετικοί).

Μπορεί ένας **φυσικός** να μειώνεται επ' άπειρον; Μπορεί να μειώνεται συνεχώς και να παραμένει φυσικός; Όσο μεγάλος και να είναι π.χ. ο  $p$ , ακόμα και κατά μια μονάδα να μειώνεται, μετά από το πολύ  $p$  βήματα θα φτάσουμε στον ελάχιστο φυσικό, τον 1.

Η διαδικασία αντιστροφής,  $\frac{2q-p}{p-q} \leftarrow \frac{p}{q}$ , δημιουργεί μια γνήσια φθίνουσα ακολουθία φυσικών,  $p > q > 2q-p > p-q > \dots$ , μια **κάθοδος**, και κάθε κάθοδος τερματίζεται (βλ. και 1.1): Κάθε μη κενό σύνολο **φυσικών** έχει ελάχιστο στοιχείο. Οι μαθητές δεν έχουν αντίρρηση για «φυσιολογικές» παραδοχές, όπως και για πολλές άλλες που απλά περνούν απαρατήρητες, π.χ. δέχονται ότι  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ,  $\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$ , ή τον ορισμό του  $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$  ή ότι ο περιοδικός 0.12121212... όταν πολλαπλασιαστεί επί 100 γίνεται 12.121212... κλπ (βλ. και 9.3).

Ο δάσκαλος ολοκληρώνει την απόδειξη, π.χ. ως εξής:

Έστω ότι οι μικρότεροι φυσικοί, που ικανοποιούν την « $\pm 1$ » ιδιότητα, είναι το ζεύγος  $(\beta, \alpha)$ . Ισχυριζόμαστε ότι  $\alpha = \beta$ , γιατί: Οι  $\alpha, \beta$  ικανοποιούν την ιδιότητα, άρα  $\beta^2 = 2\alpha^2 \pm 1$ .

Αν  $\beta > \alpha$ , τότε  $\beta - \alpha$  φυσικός και θα έχουμε το ζεύγος φυσικών  $(2\alpha - \beta, \beta - \alpha)$  μικρότερο από το προηγούμενο, άτοπο. Άρα  $\beta = \alpha$  και σύμφωνα με τις παρατηρήσεις, θα είναι  $\beta = \alpha = 1$ .

Από οποιοδήποτε ρητό (που έχει την συγκεκριμένη ιδιότητα) και να αρχίσουμε την πορεία προς τα πίσω, καταλήγουμε στον δημιουργό της ακολουθίας  $(\alpha_n)$ , στον  $\frac{1}{1}$ .

Επομένως αν αρχίσουμε με τον  $\frac{1}{1}$  και εφαρμόσουμε την μέθοδο  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$  βρίσκουμε όλα τα ζεύγη φυσικών που ικανοποιούν την ιδιότητα  $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ .



\* Αν δεν περιοριστούμε στους φυσικούς, τότε η «πορεία προς τα πίσω» δεν σταματά:

Π.χ. από τον  $\frac{99}{70} = \frac{p}{q}$  βρίσκουμε τον «προηγούμενό» του:  $\frac{2q-p}{p-q} = \frac{2*70-99}{99-70} = \frac{41}{29}$ , από

τον  $\frac{41}{29}$  βρίσκουμε τον :  $\frac{2*29-41}{41-29} = \frac{17}{12}$ , από τον  $\frac{17}{12}$  τον  $\frac{2*12-17}{17-12} = \frac{7}{5}$ , από το ρητό

κλάσμα  $\frac{7}{5}$  το  $\frac{2*5-7}{7-5} = \frac{3}{2}$ , από το  $\frac{3}{2}$  το  $\frac{2*2-3}{3-2} = \frac{1}{1}$ . Αν συνεχίσουμε θα αναγκαστούμε να

γράψουμε  $\frac{2*1-1}{1-1} = \frac{1}{0}$  και πολλοί δάσκαλοι θα έχουν αντίρρηση, αλλά οι μαθητές το

γράφουν άφοβα. Εξάλλου το  $(1,0)$  έχει την ιδιότητα  $1^2-2*0=1$ . Για να είμαστε «συμβατοί» ως

βλέπουμε το σχήμα  $\frac{1}{0}$  σαν έναν διαφορετικό τρόπο παράστασης του ζεύγους ακεραίων  $(1,0)$ .

Μπορούμε να κινούμαστε συνεχώς προς τα πίσω:  $\dots \frac{3}{2} \rightarrow \frac{1}{1} \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow -\frac{1}{1} \rightarrow -\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{7}{5} \rightarrow \dots$  και

για ενδιαφέρον να κάνουμε και καμιά «εμπρός» βόλτα:  $\frac{1}{1} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{7}{5} \rightarrow \frac{17}{12} \rightarrow \frac{41}{29} \rightarrow \frac{99}{70} \rightarrow \dots$

Η παραγωγή ρητών κλασμάτων με την « $\pm 1$ » ιδιότητα, είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξή μας .

#### 9.8.4. Κάποιες ιστορικές προσεγγίσεις

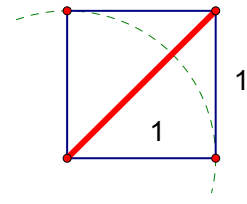
Η ιστορία των μαθηματικών και το κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο της ανάλογης εποχής επιδρά συνήθως θετικά στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η ενημέρωση των μαθητών για τις προσεγγιστικές μεθόδους των αρχαίων λαών (όχι μόνο των Ελλήνων), αποτελεί βέβαια κίνητρο μάθησης, αλλά είναι και απαραίτητη για να κατανοηθεί ότι «τα μαθηματικά, η γιγαντιαία αυτή περιπέτεια στον κόσμο των ιδεών» (Struik, 1982: 19) δεν γεννήθηκαν αυτόματα, αλλά αποτελούν μακροχρόνια και κοπιώδη πνευματική κατάκτηση. Θα μπορούσαν να γίνουν και συγκρίσεις των μεθόδων ως προς την ταχύτητα προσέγγισης αλλά και ως προς τις ιδέες που τις δημιούργησαν.

**A.** Οι αριθμητές και παρονομαστές των κλασμάτων που προκύπτουν με τη μέθοδο

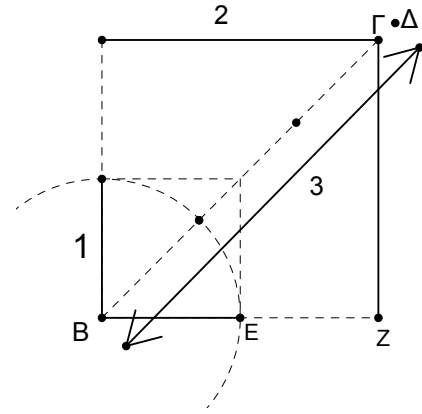
$\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$  είναι **οι πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί**, τον ορισμό των οποίων ο

Πρόκλος αποδίδει στους Πυθαγόρειους και τον οποίο συναντάμε στον **Θέωνα τον Σμυρναίο** (2<sup>ος</sup> μ.Χ. αιώνας) και στον Ιάμβλιχο (Waerden, 2007: 142-144).

Αν αρχίσουμε με τετράγωνο πλευράς 1 μονάδος, τότε η κατά προσέγγιση μονάδος (με έλλειψη) διαγώνιος του τετραγώνου είναι 1. Αν σχηματίσουμε νέο τετράγωνο με πλευρά το άθροισμα πλευράς και διαγώνιου του προηγούμενου, 2 μονάδες, τότε η διαγώνιος (διάμετρος κατά την ορολογία των αρχαίων Ελλήνων) του νέου είναι 3 κατά προσέγγιση μονάδος με υπεροχή. Ο διαμετρικός αριθμός 3 είναι το άθροισμα της διαγώνιου και του διπλασίου της πλευράς του πρώτου.



Για το επόμενο τετράγωνο, θα έχουμε πλευρά  $2+3=5$  μονάδες και διαγώνιο  $2*2+3 = 7$ . Ο διαμετρικός 7 δεν είναι η διαγώνιος του τετραγώνου με πλευρά 5, είναι η κατά προσέγγιση μονάδος της διαγώνιου με έλλειψη.

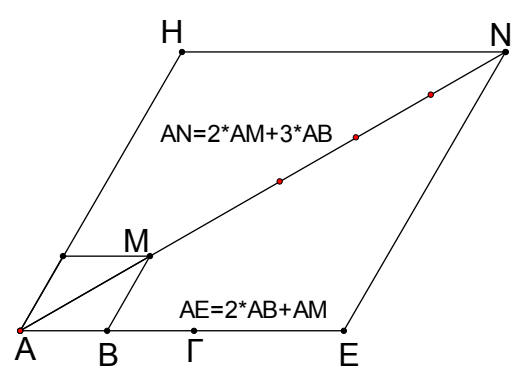


Στο διπλανό σχήμα είναι  $BE=1, BZ=2, B\Delta=3$ .

Οι λόγοι  $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots, \frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$ , είναι πλέον γνωστοί, είναι

αυτοί που «πολιορκούν» όλο και στενότερα την  $\sqrt{2}$ , εναλλάξ, με μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές (βλ. και 1.1).

Αν ξεκινήσουμε από «ισοσκελές αμβλυγώνιο τρίγωνο του οποίου η αμβλεία γωνία είναι εξωτερική ισοπλεύρου τριγώνου», από το  $ABM$ , και κατασκευάζουμε διαδοχικούς ρόμβους (αντί τετράγωνα) με την μέθοδο που δείχνει το διπλανό σχήμα, τότε η ακολουθία που δημιουργείται από τον λόγο της διαγώνιου προς την πλευρά προσεγγίζει την  $\sqrt{3}$ . Αν  $\alpha, \delta$  είναι πλευρά και διαγώνιος του αρχικού ρόμβου, τότε ο



επόμενος θα έχει πλευρά  $2*\alpha+\delta$  και διαγώνιο  $3*\alpha +2*\delta$ , ο μεθεπόμενος πλευρά  $7*\alpha+4*\delta$  και διαγώνιο  $12*\alpha+7*\delta$  κλπ. Η «μέθοδος των ρόμβων» προτάθηκε από τον Ε.Σταμάτη (Αρχιμήδους Άπαντα, Τόμος Α, Μέρος Β: 473-477) στην ακαδημία Αθηνών στις 2-6-1955, για την απόδειξη της σχέσης  $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$  (βλ.και 4.5.2, 4.7) που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης, χωρίς καμιά εξήγηση, στο γ' θεώρημα της πραγματείας του «Κύκλου μέτρησις».

**B.** Μια άλλη γνωστή μέθοδος στους αρχαίους είναι η **μέθοδος του Αρχύτα** (428-347 π.Χ.). Η βασική παρατήρηση είναι ότι οι τέσσερις αριθμοί  $\alpha, \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta$  αποτελούν

αναλογία:  $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta}$ . Η ανισότητα ( $\alpha, \beta$  θετικοί,  $\alpha < \beta$ )  $\alpha \leq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \beta$

δείχνει την μέθοδο εγκλωβισμού της ρίζας (αυτή είναι μέρος της ανισότητας των πέντε μέσων του Αρχύτα: αρμονικού - γεωμετρικού - αριθμητικού - τετραγωνικού - αντιαρμονικού

μέσου,  $\alpha \leq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \leq \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \leq \beta$ ).

Αν ξεκινήσουμε με  $\alpha=1$  και  $\beta=2$ , παίρνουμε αρχικά τους  $\frac{4}{3}$  και  $\frac{3}{2}$ . Συνεχίζουμε αντικαθιστώντας τα  $\alpha, \beta$  με αυτές τις τιμές:  $\frac{24}{17}, \frac{17}{12}$ .

Στο τρίτο βήμα, ο μέσος αρμονικός των δύο προηγούμενων είναι ο  $\frac{816}{577}$  και ο μέσος αριθμητικός ο  $\frac{577}{408}$ . Αρχίζουν να «παράγονται» γνωστοί από προηγούμενες ακολουθίες αριθμοί. Αν συνεχίσουμε δημιουργείται η φθίνουσα ακολουθία των αριθμητικών μέσων,  $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots$  και η αύξουσα των αρμονικών:  $\frac{4}{3}, \frac{24}{17}, \frac{816}{577}, \frac{941664}{665857}, \dots$ . Οι διαφορές των αντίστοιχων όρων μας δείχνουν την καταπληκτική ταχύτητα της προσέγγισης.

Η μέθοδος του Αρχύτα είναι ένα θαυμάσιο μέσον για να εξηγηθεί η αρχή του κιβωτισμού (παράρτημα Γ). Τι είναι κιβωτισμός, αλλά και τι δεν είναι, π.χ. για τα διαστήματα  $\left[ \frac{n-1}{3n}, \frac{2n^2+1}{4n^2} \right], n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $\frac{2n^2+1}{4n^2} - \frac{n-1}{3n} \rightarrow \frac{1}{6}$ , άρα δεν είναι κιβωτισμένα (Ξένος, 1989).

**Γ.** Η παρατήρηση ότι αν  $a$  είναι μια προσέγγιση με έλλειψη της  $\sqrt{2}$ , τότε ο  $\frac{2}{a}$  προσεγγίζει την  $\sqrt{2}$  με υπεροχή, οδήγησε στην «**μέθοδο του Ήρωνα**» (1ος μ.Χ. αιώνας, Αλεξάνδρεια) : αν  $a$  είναι μια προσέγγιση, η επόμενη είναι ο αριθμητικός μέσος των  $a, \frac{2}{a}$ .

Αν αρχίσουμε με τον  $\frac{m}{n}$ , τότε η ακολουθία του Ήρωνα (Flannery, 2006:159)

σχηματίζεται με την μέθοδο  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{m}{n} + \frac{1}{\frac{m}{n}} \right) = \frac{m^2 + n^2}{2mn}$  και προσεγγίζει ταχύτατα τον

άρρητο  $\sqrt{2}$ . Αν αρχίσουμε με τον 1, οι 4 πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι οι  $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}$ .

Με λίγη άλγεβρα, μπορούν οι μαθητές να διαπιστώσουν, ότι αν το αρχικό ζεύγος ακεραίων (m, n) έχει την «±1» ιδιότητα, τότε, εκτός πιθανόν αυτού του πρώτου όρου, όλοι οι υπόλοιποι της ακολουθίας του Ήρωνα έχουν την «+1» ιδιότητα.

Γίνεται τελικά αυτή η ακολουθία, μια υπακολουθία της  $(a_n)$  με όρους που προσεγγίζουν τον  $\sqrt{2}$  με υπεροχή (εκτός πιθανόν του πρώτου όρου).

**Δ.** Η προηγούμενη μέθοδος προσέγγισης είναι και η πιθανή των **Βαβυλωνίων** (κατά τους Bunt-Jones-Bedient, 1981) για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός (μη τετράγωνου) αριθμού. Π.χ. για την τετραγωνική ρίζα του 5:

Πρώτη προσέγγιση το 2. Το 2 είναι πιο μικρό από τη ρίζα. Επειδή  $2 \cdot \frac{5}{2} = 5$ , το  $\frac{5}{2}$  είναι μεγαλύτερο από τη ρίζα. Δεύτερη προσέγγιση παίρνουμε τον μέσο όρο των δύο αυτών

αριθμών:  $\frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}$ . Ο αριθμός  $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$  είναι μεγαλύτερος από το 5, άρα η τιμή  $\frac{9}{4}$  είναι

μεγαλύτερη από τη  $\sqrt{5}$ . Επειδή  $\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{\frac{9}{4}} = 5$ , ο αριθμός  $\frac{20}{9}$  είναι μικρότερος από τη  $\sqrt{5}$ . Τρίτη

προσέγγιση είναι ο μέσος όρος των δύο αριθμών,  $\frac{9}{4}$  και  $\frac{20}{9}$ , δηλ. ο αριθμός

$\frac{\frac{9}{4} + \frac{20}{9}}{2} = \frac{161}{72} = 2,236\bar{1}$  (72=2<sup>3</sup>\*9, η περίοδος αρχίζει τρία ψηφία μετά την υποδιαστολή και

αποτελείται από 1 ψηφίο, βλ.9.8.7.) «Σ'ένα Βαβυλωνιακό κείμενο συναντάμε την εκτίμηση:

$\sqrt{40^2 + 10^2} = 40 + \frac{100}{2 \cdot 40}$ . Η πιθανή σειρά συλλογισμών είναι: Πρώτη προσέγγιση 40, μικρότερη

από τη ρίζα. Επειδή  $40 \cdot \frac{40^2 + 10^2}{40} = 40^2 + 10^2$ , ο αριθμός  $\frac{40^2 + 10^2}{40}$  θα είναι μεγαλύτερος από

τη ρίζα. Δεύτερη προσέγγιση παίρνουμε τον μέσο όρο των δύο αυτών αριθμών:

$\frac{40 + \frac{40^2 + 10^2}{40}}{2} = \frac{2 \cdot 40^2 + 10^2}{2 \cdot 40} = 40 + \frac{100}{2 \cdot 40}$ » (Bunt κ.α., 1981: 59).

### 9.8.5. Διαφορετικές προσεγγίσεις

**A.** Η ακολουθία  $(\alpha_n)$  μπορεί να δημιουργηθεί και ως εξής:

$$\text{Από την } (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1, \text{ παίρνουμε τις } \sqrt{2}-1=\frac{1}{1+\sqrt{2}} \text{ και } \sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Η ισότητα αυτή έχει δεξιά και αριστερά του « $\Rightarrow$ » το σύμβολο  $\sqrt{2}$ . Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με ισότητες που έχουν το ίδιο σύμβολο και στα δύο μέλη από την λύση

εξισώσεων. Από την  $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$  κρατάμε το σχήμα  $1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$  και από αυτό

δημιουργούμε την «μηχανή παραγωγής»:  $1+\frac{1}{1+(\quad)}$  (**M**).

Αρχίζουμε με τον «1» στην κενή θέση, οπότε παίρνουμε  $1+\frac{1}{1+(1)}=\frac{3}{2}$ . Συνεχίζουμε

με το αποτέλεσμα  $\frac{3}{2}$  στην κενή θέση:  $1+\frac{1}{1+(\frac{3}{2})}=\frac{7}{5}$ , το  $\frac{7}{5}$  στην κενή θέση:  $1+\frac{1}{1+(\frac{7}{5})}=\frac{17}{12}$

κλπ. Αν στην κενή θέση της παράστασης  $1+\frac{1}{1+(\quad)}$  βάλουμε το κλάσμα  $\frac{m}{n}$ , τότε

προκύπτει η γνωστή μέθοδος:  $1+\frac{1}{1+(\frac{m}{n})}=\frac{m+2n}{m+n}$  και επομένως η ακολουθία  $(\alpha_n)$ .

**B.** Η ακολουθία  $(\alpha_n)$  δεν είναι η μοναδική με ρητές προσεγγίσεις του αρρήτου  $\sqrt{2}$ .

Δεν είναι απαραίτητο να αρχίσουμε με τον «1» την λειτουργία της **M**.

Μπορεί κάθε μαθητής να αρχίσει με τον δικό του (θετικό)  $\frac{m}{n}$ . Παραδείγματα:

(i) αν  $m=10, n=1$ , τότε παράγεται η ακολουθία  $\frac{10}{1}, \frac{12}{11}, \frac{34}{23}, \frac{80}{57}, \dots, \frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$ .

Οι παρακάτω εντολές (mathematica) παράγουν, εκτός της «εισαγωγής» 10, άλλους 11 όρους και δίνουν τα αποτελέσματα σε κλάσματα και δεκαδικούς με 9 δ.ψ. (10 σημαντικά ψηφία).

```
yn=10;
```

```
Print ["y1=",N[yn,10]]
```

```
Do [y=((yn+2)/(1+yn));
```

```
yn=y;
```

```
Print "y",i+1,"=",N[yn,10],"=",Rationalize[yn]],{i,1,10}]
```

Οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν ότι οι όροι αυτής της ακολουθίας (εκτός της αρχικής τυχαίας επιλογής) είναι αριθμοί «πολύ κοντά» στους όρους της  $(a_n)$ : ο  $\frac{12}{11}$  είναι πολύ

κοντά στον  $\frac{1}{1}$ , ο  $\frac{34}{23}$  στον  $\frac{3}{2}$  κλπ. Για τα τετράγωνα (εκτός του πρώτου) θα έχουμε:

$$\left(\frac{12}{11}\right)^2 = \frac{144}{121} = \frac{242-98}{121} = 2 - \frac{98}{121}, \left(\frac{34}{23}\right)^2 = \frac{1156}{529} = \frac{1058+98}{529} = 2 + \frac{98}{529}, \left(\frac{80}{57}\right)^2 = 2 - \frac{98}{3249} \dots$$

Που οφείλεται αυτό το 98; Θα παρουσιάζεται σε κάθε τετράγωνο; Τα ζεύγη των ακεραίων (αριθμητής, παρονομαστής) έχουν την «±1» ή κάποια άλλη ιδιότητα;

(ι) Αν αρχίσουμε με τον 100 και την ίδια μέθοδο σχηματισμού του επόμενου από τον τρέχοντα όρο, την μέθοδο  $\frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}$  παράγεται η ακολουθία:

$$100, 1.009900990 = 102/101, 1.497536946 = 304/203, 1.400394477 = 710/507, 1.416598192 = 1724/1217, \text{ κλπ (στρογγύλευση για τους δεκαδικούς).}$$

Οι παρατηρήσεις ίδιες με το (ι), π.χ.  $\left(\frac{304}{203}\right)^2 = \frac{92416}{41209} = \frac{82418+9998}{41209} = 2 + \frac{9998}{41209}$ . Οι όροι αυτής της ακολουθίας έχουν την «±9998» ιδιότητα.

(ιι) Αν αρχίσουμε με τον 1000, τότε θα σχηματιστεί η ακολουθία:  $\frac{1000}{1}, \frac{1002}{1001},$

$$\frac{3004}{2003}, \text{ κλπ. Για τον } \frac{1002}{1001} \text{ θα ισχύει: } \left(\frac{1002}{1001}\right)^2 = \frac{1004004}{1002001} = \frac{2004002-999998}{1002001} = 2 - \frac{999998}{1002001}.$$

Ο αριθμητής 999998 είναι συνέπεια της αρχικής εκλογής, γιατί  $1000^2 - 2 \cdot 1^2 = 999998$ .

Ομοίως για τον  $\frac{3004}{2003}$  θα έχουμε  $\left(\frac{3004}{2003}\right)^2 = 2 + \frac{999998}{4012009}$  κλπ.

(ιγ) Αν για την αρχική επιλογή πάρουμε  $m=1, n=1000$ , τότε σχηματίζεται η ακολουθία:  $\frac{1}{1000}, \frac{2001}{1001}, \frac{4003}{3002}, \frac{10007}{7005}, \frac{24017}{17012}, \frac{58041}{41029} = 1.41463... \text{ κλπ.}$

Με όποιον ρητό  $\frac{m}{n}$  και να αρχίσουμε, αν π.χ.  $m^2 - 2n^2 = \pm w$ , τότε  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \pm \frac{w}{n^2}$

Η παράσταση  $\frac{w}{n^2}$  γίνεται συνεχώς μικρότερη, αφού ο  $w$  είναι σταθερός και ο  $n$  αυξάνεται.

Εκτός πιθανόν της τυχαίας πρώτης επιλογής, η μέθοδος  $\frac{m+2n}{m+n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{m}{n}}$  (έχουμε

υποθέσει τον  $\frac{m}{n}$  θετικό) υποχρεώνει τους ρητούς να βρίσκονται μεταξύ 1 και 2 και την ακολουθία που δημιουργείται να συγκλίνει και πάλι στον  $\sqrt{2}$

Υπολογίζουμε ρίζες με διαδοχικές προσεγγίσεις ξεκινώντας από μια οποιαδήποτε εκτίμηση.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τους αριθμούς Fibonacci που με άπειρη θέληση προσπαθούν να φτάσουν στον Χρυσό Λόγο, στον αριθμό  $\phi$  : «αν καθορίσετε μια σειρά αριθμών με την ιδιότητα κάθε όρος (ξεκινώντας από τον τρίτο) να ισούται με το άθροισμα των δυο προηγούμενων, τότε άσχετα από τους δυο αριθμούς με τους οποίους ξεκινήσατε, όσο προχωράτε στην ακολουθία, ο λόγος των δυο διαδοχικών όρων θα προσεγγίζει τον χρυσό λόγο» (Livio, 2005: 149).

### 9.8.6. Η σύγχρονη μέθοδος

Οι υπολογιστές χρησιμοποιούν την μέθοδο των **Newton-Raphson** (βλ. και 7.4.10), η οποία για την τετραγωνική ρίζα και για αρχική προσέγγιση θετικό ρητό, είναι ίδια με την μέθοδο που πρότεινε ο Ήρωνας. *Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του 2 ακριβώς;*

Καλό είναι να ενημερωθούν οι μαθητές, για το νόημα του «ακριβώς» των ριζών, αλλά και οποιουδήποτε υπολογισμού. Οι υπολογιστές προσαρμόζουν το «ακριβώς» όχι μόνο στην μέθοδο προσέγγισης, αλλά και στον τρόπο παράστασης των αριθμών στη μνήμη τους και στο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς (οι αριθμομηχανές και στο μέγιστο πλήθος των ψηφίων της οθόνης τους). Για τους αρρήτους το «ακριβώς» υπάρχει μόνο στον κόσμο των Πλατωνικών ιδεών.

Προτείνουμε να γίνει ένα παράδειγμα υπολογισμού των διαδοχικών προσεγγίσεων της  $\sqrt{2}$ : Αν αρχίσουμε τον αλγόριθμο Newton-Raphson,  $x_{n+1} = 0.5 \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ , με  $x_0=1$ , το πρώτο βήμα εξελίσσεται ομαλά:  $x_1=1.5$ . Από το δεύτερο βήμα όμως θα πρέπει να αποφασίσουμε με πόσα δεκαδικά ψηφία θα συνεχίσουμε τους υπολογισμούς και έτσι θα υποχρεωθούμε σε αποκοπές ή στρογγυλεύσεις, γιατί απλά οι μηχανές, δεν συμπαθούν το άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Επιλέγουμε λοιπόν σφάλματα στρογγύλευσης αντί αποκοπής. Αν είμαστε ικανοποιημένοι με ακρίβεια 4 δ.ψ., τότε, διατηρώντας 5 δ.ψ. στους υπολογισμούς, παίρνουμε (στρογγυλοποίηση σε 5 δ.ψ.):  $x_2 = 1.41667$ ,  $x_3 = 1.41422$ ,  $x_4 = 1.41421$  και σταματάμε, γιατί:  $|x_3 - x_4| = 0.00001 \leq .5 * 10^{-4}$ .

Λέμε ότι: με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων η  $\sqrt{2}$  είναι 1.4142, ή ότι η  $x_4$  συμπίπτει με την  $\sqrt{2}$  σε 4 δ.ψ., και εννοούμε ότι οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις συμπίπτουν σε 4 δ.ψ. Πως γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικές επαναλήψεις προσεγγίζουν κάποιον αριθμό; Πως γνωρίζουμε ότι προσεγγίζουν τον  $\sqrt{2}$  και όχι κάποιον άλλον; Πως γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικές επαναλήψεις είναι βελτιώσεις της αρχικής επιλογής  $x_0$ ; Οι μαθητές του Λυκείου δεν θα δυσκολευτούν να αποδείξουν ότι αν  $x_0 > 0$  θετικός ρητός, τότε, διαδοχικά:  $x_n > 0$ ,  $x_{n+1} - \sqrt{2} = 0.5 \left( \sqrt{x_n} - \sqrt{\frac{2}{x_n}} \right)^2 \geq 0$ ,  $x_n \geq \sqrt{2}$ ,  $x_n - x_{n+1} = 0.5 \left( \frac{x_n^2 - 2}{x_n} \right)^2 \geq 0$ ,  $x_n \geq x_{n+1}$ , η ισότητα δεν είναι δυνατή, ... και φτάνουμε στο μέγιστο κάτω φράγμα της γνήσια φθίνουσας ακολουθίας  $x_n$  (πλήρης μελέτη στο Χατζηδήμος I, 1978). Με την βοήθεια ισχυρών υπολογιστών και κατάλληλων προγραμμάτων μπορούμε να πάρουμε χιλιάδες ή και εκατομμύρια δεκαδικά ψηφία (όχι μόνο) του  $\sqrt{2}$ .

Στην Γ' Λυκείου, μπορούμε να παρουσιάσουμε στους μαθητές και διαφορετικής φύσης παραδείγματα, π.χ.  $\sqrt{10001} \approx 100 + \frac{401}{80400}$ , θεώρημα μέσης τιμής για την  $f(x) = \sqrt{x}$  στο διάστημα  $[10000, 10001]$  (Καζαντζής, 1994:221), ή τον προσεγγιστικό τύπο  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$  ( $a$  θετικός,  $|b|$  μικρός σε σύγκριση με τον  $a$ ), αλλά και τον  $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$  (Apostol, 1962:169). Καλό είναι να παρουσιάσουμε και κάποια παραδείγματα προσεγγιστικών υπολογισμών για λογαρίθμους και τριγωνομετρικούς αριθμούς π.χ.  $\ln 101$  (Καζαντζής, 1994: 221),  $\eta\mu 1^\circ$  (Λάμπρου-Τζανάκης, 1987) αλλά και να ενημερωθούν οι μαθητές για το πώς προέκυψαν οι εκτενείς πίνακες τριγωνομετρικών, λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων (Eves, 1990: 71).



### 9.8.7. Κλάσματα και δεκαδικοί

Δεν δημιουργούν μόνο οι άρρητοι προβλήματα στους υπολογισμούς. Αν δοκιμάσουν οι μαθητές να μετατρέψουν σε δεκαδικούς π.χ. τους ρητούς  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{13}$ ,  $\frac{1}{109}$ ,  $\frac{1}{61}$ ,  $\frac{360}{109}$ ,  $\frac{1}{98982277}$  κλπ θα διαπιστώσουν ότι η αρχική χαρά της ακρίβειας μετατρέπεται και πάλι σε χαρά του πλησιάζματος: Η περίοδος του  $\frac{1}{3}$  αποτελείται από το ψηφίο 3 μόνο, αλλά πόσα «3» θα γράψουμε; Παρόμοια για τον  $\frac{2}{9} = 0.\overline{2}$  ή για τον  $\frac{1}{28} = 0.03571428\overline{}$ . Η περίοδος του  $\frac{1}{61}$  αποτελείται από 60 ψηφία, του  $\frac{1}{71}$  αποτελείται από 35 ψηφία, του  $\frac{360}{109}$  από 108 ψηφία (βλ.2.4), η περίοδος του  $\frac{355}{113}$  αποτελείται από 112 ψηφία (4.5.2).

Υπάρχουν βέβαια και εξωφρενικές περιπτώσεις, π.χ. η περίοδος του  $\frac{1}{1861}$  (ο 1861 είναι πρώτος) αποτελείται από 1860 ψηφία, του  $\frac{1}{17389}$  από 17388 ψηφία (ο 17389 είναι πρώτος), του  $\frac{1}{98982277}$  αποτελείται από 16 493 730 ψηφία -ο 98982277 δεν είναι πρώτος, είναι γινόμενο των πρώτων 9931 και 9967- (Flannery, 2006: 70).

«Με την βοήθεια των υπολογιστών καλό θα είναι να οργανώσουμε μια «εγκατοίκηση» κλασματικών και δεκαδικών μορφών» (Pluvinage, 1988). Π.χ. αν χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω πρόγραμμα (mathematica) παίρνουμε ρητές προσεγγίσεις (αναγωγήματα) του  $\sqrt{2}$  σε κλασματική και δεκαδική μορφή με οκτώ δ.ψ. ή και περισσότερα, αν αλλάξουμε το «9» στην εντολή `N[yn,9]`. Ας μην ξεχνάμε ότι τα περισσότερα λογισμικά υπολογίζουν τα σημαντικά και όχι τα δεκαδικά ψηφία.

Αν θέλουμε περισσότερα ζεύγη (μ,ν) αλλάζουμε το 10 στην εντολή `{i,1,10}`.

```
yn=1;
```

```
Print ["y1=",N[yn,9]]
```

```
Do [y=((yn+2)/(1+yn));
```

```
yn=y;
```

```
Print ["y",i+1,"=",N[yn,9],"=",Rationalize[yn]],{i,1,10}]
```

Μερικά αποτελέσματα:

$y_2 = 1.50000000 = 3/2$ ,  $y_3 = 1.40000000 = 7/5$ ,  $y_4 = 1.41666667 = 17/12$ ,

$y_5 = 1.41379310 = 41/29$ ,  $y_6 = 1.41428571 = 99/70$ ,  $y_7 = 1.41420118 = 239/169$ ,

$y_8 = 1.41421569 = 577/408$ ,  $y_9 = 1.41421320 = 1393/985$ ,

$y_{10} = 1.41421362 = 3363/2378$ ,  $y_{11} = 1.41421355 = 8119/5741$ .

Πιθανόν να προκύψει (ή και να προκληθεί) συζήτηση για το πλήθος των ψηφίων της περιόδου των ρητών. Ο δάσκαλος μπορεί να ενημερώσει τους μαθητές ότι το πλήθος των ψηφίων της περιόδου δεν είναι προϊόν μαγείας, αλλά βασικό θεώρημα της αριθμητικής το οποίο, προς το παρόν, για τους μαθητές είναι μόνον εικασία. Όμως «τα πιο χρήσιμα άρθρα και οι πιο χρήσιμες ομιλίες είναι εκείνες οι οποίες μας είναι εν μέρει μόνο κατανοητές, και αποτελούν, κατά το άλλο μη κατανοητό μέρος τους, ένα μακροπρόθεσμο σπόρο εντός μας που ενδέχεται να ενεργοποιηθεί στο μέλλον, από κάποιο άδηλο αλλά ευτυχή συνδυασμό τυχαιότητας και ωρίμανσης» (Νεγρεπόντης, 2009: 2).

Αν  $q=2^k 5^m r$  με  $\text{MK}\Delta(r,10)=1$ , τότε η περίοδος του δεκαδικού στον οποίο μετατρέπεται ο ρητός  $\frac{p}{q}$  αρχίζει  $n = \max(k,m)$  ψηφία μετά την «υποδιαστολή» και το πλήθος των ψηφίων της περιόδου είναι ο μικρότερος φυσικός  $v$  που επαληθεύει την  $10^v \equiv 1 \pmod{r}$ , δηλαδή ο μικρότερος φυσικός  $v$  για τον οποίο ο  $r$  διαιρεί ακριβώς την διαφορά  $10^v - 1$  (Αγάπης, 1998: 246). Για πρώτους αριθμούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα Fermat: Αν ο πρώτος  $p$  δεν διαιρεί τον  $a$ , τότε ο  $p$  διαιρεί την διαφορά  $a^{p-1} - 1$ ,  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  (Καζαντζίδης, 1977:108). Π.χ. για τον πρώτο 61,  $\text{MK}\Delta(61,10)=1$ , Fermat:  $61/(10^{60}-1)$ , και προκύπτει η περίοδος των 60 ψηφίων για τον  $1/61$  (χρειάζεται όμως και έλεγχος, π.χ.  $10^{12} \equiv 1 \pmod{13}$  αλλά και  $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$ , ο 12 είναι πολ/σιο του 6).

Για τις διαδικασίες στρογγύλευσης καλό είναι να ελέγχεται το λογισμικό ως προς την κρίσιμη περίπτωση: πιθανόν να μην τηρείται η «άρτια-περιττή» διαδικασία, αλλά κάποια μονόπλευρη (αναλυτικά στην 5.1.4).

Παραδείγματα:  $\frac{1}{28} = [0.03571428]$ ,  $28=2^2 \cdot 7$ ,  $2 = \max(2,1)$ ,  $\text{MK}\Delta(7,10)=1$ , ο 7 δεν διαιρεί (ακριβώς) τους αριθμούς  $10^k - 1$ , για  $k=1,2,3,4,5$ , αλλά  $7/(10^6 - 1)$ ,  $999999:7=142857$ .

Για μερικές από τις παραπάνω προσεγγίσεις του  $\sqrt{2}$  έχουμε:

	κλάσμα	παρονομαστής	Έλεγχος διαιρετότητας	Η περίοδος αρχίζει n ψηφία μετά την «υποδιαστολή»	Πλήθος Ψηφίων περιόδου
$y_5 =$ 1.413793103...	$\frac{41}{29}$	$29=2^0 \cdot 5^0 \cdot 29$	$29/(10^{28}-1)$	0	28
$y_6 =$ 1.414285714...	$\frac{99}{70}$	$70=2 \cdot 5 \cdot 7$	$7/(10^6-1)$	1	6
$y_8 =$ 1.414215686...	$\frac{577}{408}$	$408=2^3 \cdot 3 \cdot 17$	$51/(10^{16}-1)$	3	16

Για 20 δεκαδικά, αλλάζουμε τον αριθμό 9 στην εντολή,  $N[yn, 9]$ , γράφουμε  $N[yn, 21] : y5 = 1.41379310344827586207$ ,  $y6 = 1.41428571428571428571$ ,  $y8 = 1.41421568627450980392$ .

Η περιοδική επανάληψη βοηθά να κατανοηθούν λεπτομέρειες που ίσως δεν παρατηρήθηκαν κατά την πρώτη διδασκαλία. Ο δάσκαλος μπορεί να κρίνει σκόπιμο να υπενθυμίσει την ιδέα της μετατροπής ενός συνήθους κλάσματος σε δεκαδικό, π.χ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= \frac{10 \cdot \frac{1}{7}}{10} \text{[*]} = \frac{10}{10} = \frac{1 + \frac{3}{7}}{10} = \frac{1}{10} + \frac{\frac{3}{7}}{10} = \frac{1}{10} + \frac{10 \cdot \frac{3}{7}}{10^2} = \frac{1}{10} + \frac{30}{10^2} = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4 + \frac{2}{7}}{10^2} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{\frac{2}{7}}{10^2} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{10 \cdot \frac{2}{7}}{10^3} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{20}{10^3} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2 + \frac{6}{7}}{10^3} = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{\frac{6}{7}}{10^3} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{10 \cdot \frac{6}{7}}{10^4} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{60}{10^4} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8 + \frac{4}{7}}{10^4} = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{\frac{4}{7}}{10^4} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{10 \cdot \frac{4}{7}}{10^5} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{40}{10^5} = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5 + \frac{5}{7}}{10^5} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{\frac{5}{7}}{10^5} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{10 \cdot \frac{5}{7}}{10^6} = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{\frac{50}{7}}{10^6} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7 + \frac{1}{7}}{10^6} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{10 \cdot \frac{1}{7}}{10^7} = \end{aligned}$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε αντιγράφοντας από την [\*] τους αριθμητές και προσέχοντας τους εκθέτες των δυνάμεων του δέκα στους παρονομαστές.

«Η προσπάθειά μας για κατανόηση αποδίδει περισσότερο αν προχωράμε σε άλλα θέματα και με κάθε ευκαιρία επιστρέφουμε και επικαλούμαστε πάλι τις έννοιες, τις ίδιες ιδέες σε συνεχώς πλουσιότερο περιβάλλον» (Arons, 1992:79). Η επανάληψη θα πρέπει να περιλαμβάνει ακόμα και τις βασικές πράξεις (π.χ. μπορεί να ζητηθεί η εξήγηση του «δανεισμού» στην αφαίρεση - σε ποια ιδιότητα στηρίζεται ο μηχανισμός εκτέλεσης της πράξης; ή η εξήγηση της διαίρεσης κλασμάτων - γιατί αντιστρέφουμε και πολλαπλασιάζουμε;).

Η παραπάνω ιδέα συμπυκνώνεται στον συνηθισμένο «αλγόριθμο της διαίρεσης», ο οποίος, ίσως αποκρύπτει τι ακριβώς σημαίνει η επισύναψη μηδενικών στα υπόλοιπα.

Τα δυνατά υπόλοιπα σε μια διαίρεση δια 7 είναι 7, άρα, αν δεν υπάρχει υπόλοιπο μηδέν, πριν φτάσουμε στην έβδομη διαίρεση, κάποιο υπόλοιπο θα επανεμφανιστεί, οπότε προκύπτει περιοδικός δεκαδικός. Οι μαθητές θα προτιμήσουν τον αλγόριθμο φυσικά, αλλά ίσως κατανοήσουν και την προσπάθεια που πρέπει να καταβάλλουν για να κατακτήσουν τις ιδέες. Θα μπορούσε να γίνει και σύγκριση της «πολυπλοκότητας» αυτού του αλγορίθμου και του αλγορίθμου της τετραγωνικής ρίζας ( 9.5.4).

Από την συμπίεση της παραπάνω διαδικασίας με τα κλάσματα, παράγεται ο περιοδικός δεκαδικός $0.\overline{142857}$								
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>7</b>
	3	0						0.142857...
		2	0					
			6	0				
				4	0			
					5	0		
						<b>1</b>	<b>0</b>	

Για την επιλογή του συμβόλου  $0.\overline{142857}$  για να εκφράσουμε το κλάσμα  $\frac{1}{7}$ , αντί του  $\frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \dots$ , δεν νομίζουμε ότι θα υπάρχει αντίρρηση από τους μαθητές. Μάλλον έχει δίκιο και ο Pluvinage που προτείνει να γράφουμε «**0.142857...**», το μέγεθος της γραμματοσειράς μικραίνει γιατί μικραίνει και η αξία των δεκαδικών ψηφίων «Μιλάμε, με κάποιο τρόπο, για διαδοχική προσέγγιση, σαν να πλησιάζουμε το μάτι ενός φακού μέτρησης όπου μια βελόνα δείχνει το αποτέλεσμα» (Pluvinage, 1988).

Στο αριθμητικό σύστημα των Βαβυλωνίων η μετατροπή του  $\frac{1}{7}$  σε «εξηνταδικό» κλάσμα

$$\begin{aligned} \text{γίνεται με τον ίδιο τρόπο: } \frac{1}{7} &= \frac{60 \cdot \frac{1}{7}}{60} [**] = \frac{8 + \frac{4}{7}}{60} = \frac{8}{60} + \frac{\frac{4}{7}}{60} = \frac{8}{60} + \frac{60 \cdot \frac{4}{7}}{60^2} = \frac{8}{60} + \frac{34 + \frac{2}{7}}{60^2} \\ &= \frac{8}{60} + \frac{34 + \frac{2}{7}}{60^2} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{60 \cdot \frac{2}{7}}{60^3} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17 + \frac{1}{7}}{60^3} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{60 \cdot \frac{1}{7}}{60^4} \end{aligned}$$

Μπορούμε πλέον να συνεχίσουμε αντιγράφοντας από την [\*\*] και προσέχοντας τους εκθέτες των δυνάμεων του 60 στους παρονομαστές. Οι Βαβυλώνιοι θα έγραφαν  $\frac{1}{7} = 0;8,34,17$  (Bunt κ.α., 1981: 273). Η περιοδικότητα των ρητών δεν είναι προνόμιο του δεκαδικού συστήματος: Αν ο παρονομαστής του κλάσματος είναι γινόμενο παραγόντων της βάσης, τότε η παράσταση του κλάσματος στο σύστημα θέσης, που έχει αυτή τη βάση, είναι τερματιζόμενη (επαναλαμβάνεται το μηδέν). Αν δεν είναι, τότε προκύπτει περιοδικό κλάσμα με πλήθος ψηφίων περιόδου μικρότερο από τον παρονομαστή του κλάσματος από το οποίο παράγεται το περιοδικό (Bunt κ.α., 1981: 276).

### 9.8.8. Συνεχή κλάσματα

Από την  $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ , παίρνουμε την ισότητα  $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$  [1].

Αντικαθιστούμε το δεξιά  $\sqrt{2}$  με 1 και έχουμε:  $1+\frac{1}{1+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ .

Αν στην  $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$  αντικαταστήσουμε το δεξιά  $\sqrt{2}$  με το ...ίσον του,  
 $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ , παίρνουμε:  $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$  [2].

Αντικαθιστούμε στην δεξιότερη θέση της [2] τον  $\sqrt{2}$  με 1 και παίρνουμε  $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}$ .

Αν αντικαταστήσουμε και πάλι στην [2] το δεξιότερο  $\sqrt{2}$  με την [1] παίρνουμε:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}.$$

Η αντικατάσταση του δεξιότερου  $\sqrt{2}$  με 1, δίνει τον ρητό  $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}$ .

Το σχήμα  $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$  γράφεται απλούστερα:  $[1,2,2,2]$ , οπότε έχουμε ένα ακόμα σύμβολο

για τον ρητό  $\frac{17}{12}$ . Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, συμπεραίνουμε ότι το άπειρο **συνεχές**

κλάσμα  $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}$  παράγει την ακολουθία  $(a_n): 1, 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12} \dots$

Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα  $[1], [1,2], [1,2,2], [1,2,2,2], \dots$  για τους όρους της ακολουθίας

$$\text{και το σύμβολο } [1,2,2,2,\dots] \text{ για το } 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}.$$

Όσο αυξάνεται το πλήθος των «2», που θα χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς, τόσο περισσότερο προσεγγίζουμε τον απρόσιτο  $\sqrt{2}$ .

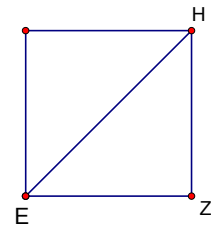
Δεν είναι λοιπόν απαραίτητο να θυμόμαστε την ακολουθία  $(a_n)$  του τμήματος 9.8.2.B. Από το  $[1, 2, 2, 2, \dots]$  μπορούμε να υπολογίσουμε τους όρους της. Οι τρεις τελείες δηλώνουν την συνεχή παραγωγή των ρητών προσεγγίσεων και το  $[1, 2, 2, 2, \dots]$  είναι ένας άλλος τρόπος γραφής του  $\sqrt{2}$  που θυμίζει και την «απειρία» του.

Το σχήμα  $[1, 2, 2, 2, \dots]$  περιέχει «συμπυκνωμένη» τη γνώση μας για τον άρρητο  $\sqrt{2}$ .

Δεν είναι δυσνόητα και τα παραδείγματα στις 2.1 και 2.3, όπως και σε άλλες ενότητες, αλλά καταλληλότερο θεωρούμε το παράδειγμα της λύσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης, στην 2.4.

### 9.9. Επίμετρο

Ο αριθμός  $\sqrt{2}$  οφείλει την ύπαρξή του στη διαγώνιο του μοναδιαίου τετραγώνου και στις αναρίθμητες ανεπιτυχείς προσπάθειες εύρεσης κοινής μονάδας μέτρησης με την πλευρά αυτού του τετραγώνου. Με έναυσμα τον  $\sqrt{2}$  μπορεί να εξηγηθεί και η ελληνική ιδέα του «μεγέθους» και το νόημα της ασυμμετρίας μεγεθών: Ας υποθέσουμε ότι ένας (βαθμολογημένος) χάρακας μετρά ακριβώς την πλευρά (ή τη διαγώνιο), οπότε τα σημεία E, Z (ή τα E, H) συμπίπτουν με δύο «σημάνσεις» του χάρακα. Τότε, αν ο χάρακας τοποθετηθεί έτσι ώστε ένα σημάδι του να συμπίπτει με το E, το άλλο άκρο της διαγωνίου, το H (ή της πλευράς, το Z) θα βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών σημάνσεων αυτού του χάρακα. Πάντα, για κάθε χάρακα, ανεξάρτητα από το πλήθος των σημάνσεων. Διαφορετικά, για κάποια μονάδα  $u$ , θα είχαμε  $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{mu}{nu}$  και ο  $\sqrt{2}$  θα ήταν ο ρητός  $\frac{m}{n}$ .



Η έννοια του αρρήτου είναι φυσικά δύσκολο να κατανοηθεί.

Η απόδειξη της αρρητότητας της  $\sqrt{2}$  με την βοήθεια του Θεμελιώδους θεωρήματος της Αριθμητικής(παράρτημα) είναι απλή. Στηρίζεται στην μοναδικότητα της πρωτογενούς ανάλυσης: αν  $m = p_1 p_2 p_3 \dots p_r$  και  $n = q_1 q_2 q_3 \dots q_s$ , τότε αντικαθιστώντας στην  $m^2 = 2n^2$ , έχουμε:  $(p_1 p_2 p_3 \dots p_r)^2 = p_1 p_1 p_2 p_2 \dots p_r p_r = 2(q_1 q_2 q_3 \dots q_s)^2 = 2q_1 q_1 q_2 q_2 \dots q_s q_s$ .

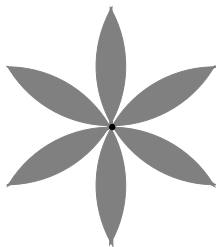
Η ισότητα  $p_1 p_1 p_2 p_2 \dots p_r p_r = 2q_1 q_1 q_2 q_2 \dots q_s q_s$  δεν είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί δεξιά του = έχουμε τον πρώτο αριθμό 2 περιττό αριθμό φορών, ενώ αριστερά άρτιο (και ο μηδέν είναι άρτιος). « Αν σας συγκινεί ο μαθηματικός τρόπος σκέψης είναι αδύνατο να σας αφήσει αδιάφορος η κομψότητα και η απατηλή απλότητα αυτής της απόδειξης» (Feldman, 2000).

Αυτή η απόδειξη ότι ο αριθμός  $\sqrt{2}$  δεν ανήκει στους ρητούς, δεν προσφέρει κάποια βοήθεια στην κατανόησή του. Όπως παρατηρεί και ο Hardy στην «Απολογία» του, είναι ένα θεώρημα καθαρής αριθμητικής που «δεν απαιτεί καμία γνώση «αρρήτων αριθμών» ούτε εξαρτάται από οποιαδήποτε θεωρία για τη φύση τους» (Hardy, 1993: 70).

Στο διάσημο έργο τους «What is mathematics» οι Courant & Robbins (1978: 60) γράφουν ότι δεν υπάρχει κάτι που μπορεί να βοηθήσει τη διαίσθησή μας για να διακρίνουμε τα άρρητα σημεία από τα ρητά. Δεν δημιουργεί έκπληξη το γεγονός ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας συντάραξε τους Έλληνες φιλοσόφους και μαθηματικούς και ότι αυτή ακολουθείται έως σήμερα από προκλητικές επιδράσεις στους συλλογισμούς. Ας μην ξεχνάμε ότι οι κλασσικοί Έλληνες αρνήθηκαν την έννοια του αριθμού στους αρρήτους (τους θεώρησαν γεωμετρικά μεγέθη και εργάζονταν με μήκη, εμβαδά και όγκους, παρακάμπτοντας τα προβλήματα που δημιουργούσαν ως αριθμοί), αν και ο πραγματικός τους χαρακτήρας εντοπίστηκε πολύ νωρίς από τους Πυθαγόρειους (Kline, 1981).

Ο Dedekind στο έργο του «Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί» γράφει: *«Θεωρώ την έννοια του αριθμού ως τελείως ανεξάρτητη από τις εποπτείες του χώρου και του χρόνου. Τη θεωρώ ως άμεσο παράγωγο των νόμων της σκέψης... Οι αριθμοί είναι ελεύθερη δημιουργία του ανθρώπινου νου. Μας βοηθούν να κατανοήσουμε ευκολότερα και σαφέστερα τις διαφορές των πραγμάτων. Μόνο με την καθαρά λογική διαδικασία κατασκευής της επιστήμης των αριθμών και με την απόκτηση του συνεχούς πεδίου των αριθμών μπορούμε να προετοιμαστούμε καταλλήλως για να ερευνήσουμε τις έννοιες του χώρου και του χρόνου, συσχετίζοντάς τις με το αριθμητικό πεδίο που κατασκευάσαμε στο νου μας»* (Dedekind, 1988).

Ίσως η κατανόηση της φύσης των άρρητων αριθμών περνά μέσα από την άπειρη ανθυφαίρεση (2.8) και τα συνεχή κλάσματα. Θέματα δύσκολα για διδασκαλία, αλλά, εκτός από τα επιχειρήματα που εκτέθηκαν στα τμήματα 9.1-2-3-4, υπάρχει και αυτό το ακαταμάχητο: *«αν και κανείς ποτέ δεν έφτασε στον Πολικό Αστέρα, πολλοί όμως βρήκαν τη σωστή πορεία κοιτώντας τον»* (Polya, 2001: 12).

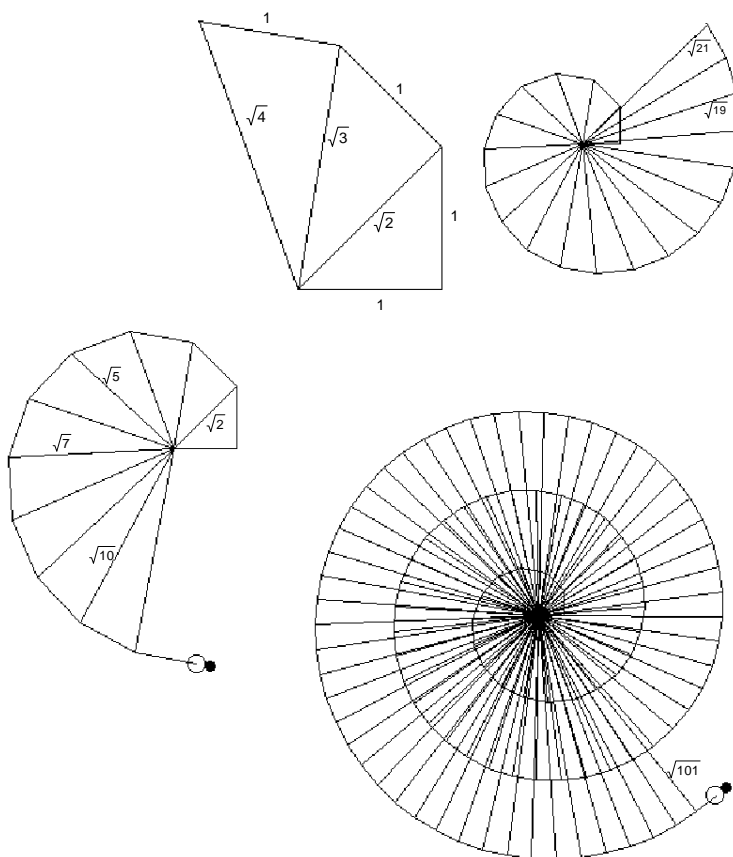


## Κατασκευή ριζών – Γνώμονες (Logo)

Το αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με τη μονάδα. Η τιμή του  $k$  είναι τα χελωνοβήματα που παίρνουμε για μονάδα (π.χ.20,30,40,...). Το πλήθος των διαδοχικών ριζών ελέγχεται από την εντολή «αν  $:x > \dots$ », στην διαδικασία «αρρητο  $:x$ »

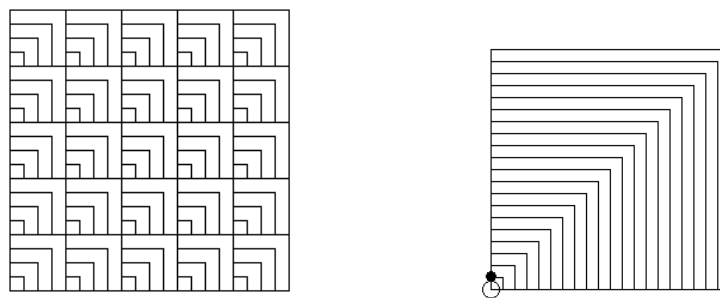
```
για ρίζες
make "k 20
make "x 1
rt 90 fd :k lt 90 fd :k
αρρητο :x
τέλος
```

```
για αρρητο :x
αν :x > 100 [σταμάτησε]
seth towards [0 0]
μ :k*SQRT(:x+1)
π :k*SQRT(:x+1)
δ 90 μ :k
αρρητο :x+1
τέλος
```



```
για τετράγωνο :α
επανάλαβε 4 [μ :α δ 90]
τέλος
```

```
για γνώμονα :m
αν :m > 200
[σταμάτησε]
τετράγωνο :m
γνώμονα :m+10
τέλος
```



Με την εντολή «τετράγωνο 10» σχεδιάζουμε τετράγωνο με πλευρά 10 χελωνοβήματα. Αν χρησιμοποιήσουμε την δομική μονάδα «τετράγωνο» (βλ. και 9.7), για 20 γνώμονες –με αυτή την πλευρά - δίνουμε την εντολή «γνώμονα 10». Με την εντολή « αν  $:m > 200$  [σταμάτησε] » ελέγχουμε το πλήθος των γνωμώνων. Με ελάχιστη επιπλέον προσπάθεια, μπορούμε να σχεδιάσουμε γνώμονες διάφορων μονάδων και μεγεθών.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Α. Θεωρία αριθμών

*\*Τα περισσότερα από τα παρακάτω αποτελέσματα, με την συγκεκριμένη διατύπωση, βρίσκονται στα: Καζαντζίδης, 1977 (Θεωρία αριθμών) και Κριτικός, 1981.*

**A.1.** Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  ακέραιοι αριθμοί. Ένας αριθμός  $\beta$  λέγεται **διαιρέτης** του  $\alpha$ , όταν υπάρχει αριθμός  $\gamma$  τέτοιος ώστε  $\alpha = \beta\gamma$ . Συμβολικά γράφουμε  $\beta/\alpha$ . Η ιδιότητα του διαιρέτη είναι ανεξάρτητη από τα πρόσημα των αριθμών. Ο  $\gamma$  λέγεται **συζυγής διαιρέτης** του  $\alpha$ . Αν έχουμε π.χ. την ισότητα  $30 = 6 \cdot 5$ , τότε χρησιμοποιούμε τις ισοδύναμες εκφράσεις: Ο 5 διαιρεί τον 30, ο 5 είναι παράγοντας του 30, ο 5 είναι διαιρέτης του 30, ο 5 μετρά τον 30, ο 30 είναι πολλαπλάσιο του 5, ο 30 διαιρείται δια 5, ο 30 μετριέται από τον 5. Γράφουμε  $5/30$  ( $6/30$ ).

Αν δυο αριθμοί έχουν κοινό διαιρέτη  $\mu$ , τότε και το άθροισμά τους και η διαφορά τους έχει κοινό διαιρέτη τον  $\mu$ . Αν ο  $\gamma$  είναι διαιρέτης του διαιρέτη  $\beta$  του  $\alpha$ , τότε ο  $\gamma$  είναι διαιρέτης και του  $\alpha$ . Κάθε αριθμός είναι διαιρέτης του μηδενός

*Επειδή ισχύουν οι ισοδυναμίες:  $\beta/\alpha \Leftrightarrow (-\beta)/\alpha$ ,  $\beta/\alpha \Leftrightarrow \beta/(-\alpha)$  περιοριζόμαστε συνήθως στους φυσικούς αριθμούς και στους φυσικούς διαιρέτες τους.*

Αν  $\beta/\alpha$ , τότε  $\beta \leq \alpha$ .

Έστω  $\alpha > 1$ , φυσικός. Αν ο  $\alpha$  δεν έχει άλλους φυσικούς διαιρέτες εκτός των 1 και  $\alpha$ , τότε ο  $\alpha$  λέγεται **πρώτος** αριθμός. Αν ο  $\alpha$  έχει διαιρέτη διαφορετικό από τους 1 και  $\alpha$ , τότε λέγεται **σύνθετος**. Ισοδύναμα: αν  $\alpha > 1$  πρώτος, τότε σε κάθε ανάλυση του  $\alpha$  σε γινόμενο (δύο φυσικών) παραγόντων,  $\alpha = \beta\gamma$ , ένας ακριβώς από τους φυσικούς  $\beta, \gamma$  είναι ο 1, ενώ αν  $\alpha > 1$  σύνθετος, τότε υπάρχει ανάλυση του  $\alpha$  σε γινόμενο  $\beta\gamma$  ώστε  $1 < \beta < \alpha$  και  $1 < \gamma < \alpha$  (πιο σύντομα: ο  $\alpha$  είναι σύνθετος, αν υπάρχει διαιρέτης  $\beta$  του  $\alpha$  με  $1 < \beta < \alpha$ ).

**A.2.** Κάθε σύνθετος είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων, όχι κατ' ανάγκην ανά δύο ανίσων, παραγόντων. Κάθε αριθμός  $\alpha > 1$  έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.

Ονομάζουμε «**δεύτερο διαιρέτη**» ενός φυσικού, τον διαιρέτη του που είναι δεύτερος στη σειρά, αν διατάξουμε όλους τους διαιρέτες αυτού του αριθμού από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, δηλ. τον μικρότερο διαφορετικό του 1 διαιρέτη. Ο **δεύτερος διαιρέτης** κάθε φυσικού, είναι πρώτος αριθμός, είναι ο ελάχιστος των διαιρετών του  $\alpha$  στο σύνολο  $\{2, 3, \dots, \alpha\}$ . Αν  $\alpha$  σύνθετος, τότε ο δεύτερος διαιρέτης του είναι πρώτος, έστω  $p$ , και από την σχέση  $\alpha = p^t$ ,  $p \leq t$ , αφού  $p$  είναι ο ελάχιστος των διαιρετών του  $\alpha$ , συμπεραίνουμε ότι  $p^2 \leq p^t = \alpha$ , άρα  $p \leq \sqrt{\alpha}$ . Αν λοιπόν ο φυσικός  $\alpha$  δεν διαιρείται με κάποιον πρώτο  $p$ , τέτοιον ώστε  $p \leq \sqrt{\alpha}$ , τότε ο φυσικός αυτός είναι πρώτος.

**A.3.** Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου των φυσικών έχει ελάχιστο. Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου των μη αρνητικών ακεραίων,  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , έχει ελάχιστο (αρχή της καλής διάταξης).

**A.4. Αλγόριθμος της διαίρεσης:** Για κάθε ζεύγος ακεραίων  $a, \beta$  με  $\beta \neq 0$ , υπάρχει και μάλιστα μοναδικό αντίστοιχο ζεύγος ακεραίων  $\pi, \upsilon$  (πηλίκιο-υπόλοιπο) με  $a = \beta\pi + \upsilon$  και  $0 \leq \upsilon < |\beta|$ . Έπεται ότι αν οι  $a, \beta$  είναι φυσικοί, τότε υπάρχει μοναδικό ζεύγος μη αρνητικών ακεραίων  $\pi, \upsilon$  ώστε να ισχύει  $a = \beta\pi + \upsilon$  και  $0 \leq \upsilon < \beta$ . Ο  $\pi$  ονομάζεται «μερικό πηλίκιο» ή απλά πηλίκιο και ο  $\upsilon$  «υπόλοιπο» της διαίρεσης του  $a$  δια του  $\beta$ .

**A.5. Για κάθε πρώτο  $\rho$ , αν  $\rho/\beta\gamma$  και  $\rho$  δεν διαιρεί τον  $\beta$ , τότε  $\rho/\gamma$**  (Euclids first theorem, Hardy, 2008: 3, πρβλ. πρόταση VII 30 των Στοιχείων του Ευκλείδη: Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, τὸν δε γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῆ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἓνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει).

**Απόδειξη** (Καζαντζίδης, 1977: 44): Επαγωγή. Για  $\beta=1$ , προφανής.

Ας υποθέσουμε ότι  $\beta > 1$  και ότι η πρόταση αποδείχτηκε για  $\sigma \in \{1, 2, 3, \dots, \beta-1\}$ , δηλ. αν πρώτος  $\rho/\sigma\gamma$  και ο  $\rho$  δεν διαιρεί τον  $\sigma$  τότε διαιρεί τον  $\gamma$ . Ο πρώτος  $\rho$  είναι διαφορετικός του  $\beta$ , αλλιώς  $\rho/\beta$ , ενώ έχει υποθεθεί ότι ο  $\rho$  δεν διαιρεί τον  $\beta$ .

1. Υποθέτουμε ότι  $\rho > \beta$ . Για τους  $\rho, \beta$  υπάρχει μοναδικό ζεύγος φυσικών  $\kappa, \lambda$  ώστε  $\rho = \kappa\beta + \lambda$  [εδώ  $\lambda \neq 0$  γιατί διαφορετικά,  $\rho = \kappa\beta$ , δηλ.  $\beta/\rho$  με  $\beta > 1$  και  $\rho$  πρώτο, άρα  $\beta = \rho$ , αφού  $\rho$  πρώτος, άτοπο, υπετέθη  $\rho > \beta$ ]. Έχουμε λοιπόν διαδοχικά:  $\rho = \kappa\beta + \lambda$ ,  $\rho\gamma = \kappa\beta\gamma + \lambda\gamma$ ,  $\rho(\gamma - \mu\rho) = \lambda\gamma$  (αφού  $\rho/\beta\gamma$ ,  $\beta\gamma = \mu\rho$ ) με  $1 \leq \lambda < \beta < \rho$ , δηλαδή  $\rho/\lambda\gamma$  και ο  $\rho$  δεν διαιρεί τον  $\lambda$ , γιατί  $\lambda < \rho$ , και επίσης  $\lambda < \beta$ , άρα κατά την επαγωγική υπόθεση  $\rho/\gamma$ .

2. Υποθέτουμε ότι  $\rho < \beta$ . Για τους  $\rho, \beta$  υπάρχει μοναδικό ζεύγος φυσικών  $\kappa, \lambda$  ώστε  $\beta = \kappa\rho + \lambda$  [και εδώ  $\lambda \neq 0$  γιατί διαφορετικά,  $\beta = \kappa\rho$ , δηλ.  $\rho/\beta$  άτοπο, υπετέθη ότι ο  $\rho$  δεν διαιρεί τον  $\beta$ ]. Έχουμε λοιπόν διαδοχικά:  $\beta = \kappa\rho + \lambda$ ,  $\beta\gamma = \kappa\rho\gamma + \lambda\gamma$ ,  $\mu\rho = \beta\gamma = \kappa\rho\gamma + \lambda\gamma$ ,  $\rho(\mu - \kappa\gamma) = \lambda\gamma$  (αφού  $\rho/\beta\gamma$ ,  $\beta\gamma = \mu\rho$ ) με  $1 \leq \lambda < \rho < \beta$ , δηλαδή  $\rho/\lambda\gamma$  και ο  $\rho$  δεν διαιρεί τον  $\lambda$ , γιατί  $\lambda < \rho$  και επίσης  $\lambda < \beta$ , άρα κατά την επαγωγική υπόθεση  $\rho/\gamma$ .

**A.6.** Αν πρώτος είναι διαιρέτης γινομένου πρώτων, τότε είναι ίσος προς ένα τουλάχιστον από τους παράγοντες του γινομένου.

Έστω ότι έχουμε  $n$  ανά δυο διαφορετικούς αριθμούς  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Το σχήμα  $a_1 a_2 \dots a_n$  θα λέμε ότι είναι μια **μετάθεση** των  $\omega_1, \dots, \omega_n$  αν οι οντότητες  $a_1, \dots, a_n$  είναι οι αριθμοί  $\omega_1, \dots, \omega_n$  κατά κάποια οποιαδήποτε τάξη, δηλ αν το σχήμα  $a_1 a_2 \dots a_n$  είναι ένα «αράδιασμα» των αριθμών αυτών με οποιαδήποτε σειρά.

Αν δυο γινόμενα πρώτων είναι ίσα, τότε μπορούν να διαφέρουν μόνο κατά την σειρά με την οποία είναι τοποθετημένοι οι παράγοντές τους. Συμβολικά: αν  $\pi_1\pi_2\dots\pi_\mu = \rho_1\rho_2\dots\rho_\nu$  με τους αριθμούς  $\pi$  και  $\rho$  πρώτους, τότε  $\mu=\nu$  και υπάρχει μετάθεση  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\nu$  των δεικτών  $1, 2, \dots, \nu$  ώστε να είναι  $\pi_i = \rho_{\kappa_i}$ .

**Θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής:** Κάθε φυσικός  $a > 1$  αναλύεται σε γινόμενο φυσικών πρώτων και μάλιστα, αν αγνοήσουμε την σειρά των παραγόντων, κατά μοναδικό τρόπο. Για κάθε φυσικό  $a > 1$  υπάρχουν εντελώς ορισμένοι διακεκριμένοι φυσικοί πρώτοι  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_\nu$  και εντελώς ορισμένοι φυσικοί  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu$  ώστε να είναι  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_\nu^{\alpha_\nu}$ . Αυτή την παράσταση του  $a$  ονομάζουμε **πρωτογενή** ή **πρωτοφυή** παράσταση ή **μορφή** του  $a$ . Όλα τα εργαλεία για την απόδειξη παρουσιάζονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη, αλλά ο Gauss, στο Disquisitiones Arithmeticae (1801), ήταν ο πρώτος που διατύπωσε και απέδειξε το θεώρημα (Adler, 1994: 10).

Στην πρωτογενή ανάλυση του  $b^2$  περιέχονται οι πρώτοι της πρωτογενούς ανάλυσης του  $b$  σε άρτιους εκθέτες.

**A.7.** Ο αριθμός  $\beta$  ονομάζεται κοινός διαιρέτης των  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  όταν είναι διαιρέτης εκάστου των  $a_i$ . Κάθε διαιρέτης κοινού διαιρέτη των  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  είναι κοινός διαιρέτης των  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ . Αν ένας τουλάχιστον των  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  είναι μη μηδενικός, τότε οι κοινοί διαιρέτες τους είναι πεπερασμένοι σε πλήθος και, επομένως έχουν έναν μέγιστο,  $\delta$ , συμβολικά:  $\text{MK}\Delta(a_1, a_2, \dots, a_\nu)$ . Ιδιαίτερα, για δύο αριθμούς  $\alpha, \beta$ , γράφουμε  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)$ .

Ο  $\text{MK}\Delta$  των αριθμών  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  μπορεί να εκφραστεί με την μορφή  $\delta = \kappa_1 a_1 + \dots + \kappa_\nu a_\nu$  και είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος του συνόλου των αριθμών αυτής της μορφής. Το σύνολο των κοινών διαιρετών των  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  ταυτίζεται με το σύνολο των διαιρετών του  $\text{MK}\Delta$  αυτών των αριθμών. Ιδιαίτερα:  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = 1 \Leftrightarrow \kappa\alpha + \lambda\beta = 1$ , για κάποιους  $\kappa, \lambda$ . Για μη μηδενικό  $\lambda$  ισχύει:  $\text{MK}\Delta(\lambda a_1, \dots, \lambda a_\nu) = |\lambda| \text{MK}\Delta(a_1, \dots, a_\nu)$ .

Αν  $\delta = \text{MK}\Delta(a_1, \dots, a_\nu)$ , τότε  $\text{MK}\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\delta}, \dots, \frac{\alpha_\nu}{\delta}\right) = 1$ . Ο  $\text{MK}\Delta$  των  $\text{MK}\Delta(a_1, \dots, a_\nu)$  δεν μεταβάλλεται αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με τον  $\text{MK}\Delta$  τους.

**A.8.** Αν  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = 1$  και  $\mu, \nu$  τυχαίο ζεύγος φυσικών, τότε  $\text{MK}\Delta(\alpha^\mu, \beta^\nu) = 1$ .

Αν  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta_i) = 1$ , για  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , τότε  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta_1\beta_2\dots\beta_\nu) = 1$ . Αν  $\alpha, \beta$  φυσικοί, τότε  $\text{MK}\Delta(\alpha, \alpha) = \alpha$ ,  $\text{MK}\Delta(\alpha, 0) = \alpha$ ,  $\text{MK}\Delta(\alpha, 1) = 1$ . Αν  $\alpha, \beta$  φυσικοί, και  $\beta/\alpha$ , τότε  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = \beta$ . Αν για κάποιο ζεύγος φυσικών  $\mu, \nu$  ισχύει  $\text{MK}\Delta(\alpha^\mu, \beta^\nu) = 1$ , τότε  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = 1$ . Αν  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = 1$ , τότε  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta\gamma) = \text{MK}\Delta(\alpha, \gamma)$ . Αν  $\text{MK}\Delta(\beta, \gamma) = 1$ , τότε  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta\gamma) = \text{MK}\Delta(\alpha, \beta) * \text{MK}\Delta(\alpha, \gamma)$ .

**A.9.** Αν ο  $a$  διαιρεί τον  $\beta\gamma$  και  $\text{MK}\Delta(a,\beta)=1$ , τότε ο  $a$  διαιρεί τον  $\gamma$ .

**A.10.** Αν  $\text{MK}\Delta(a_1, \dots, a_n)=1$ , τότε οι αριθμοί  $a_1, \dots, a_n$  ονομάζονται **σχετικά πρώτοι** ή πρώτοι μεταξύ τους. Αν είναι περισσότεροι από δύο, δεν είναι απαραίτητο να είναι σχετικά πρώτοι και ανα δύο, π.χ.  $\text{MK}\Delta(6,10,15)=1$ ,  $\text{MK}\Delta(6,10)=2$ ,  $\text{MK}\Delta(10,15)=5$ ,  $\text{MK}\Delta(6,15)=3$ .

Αν  $\text{MK}\Delta(\beta,\gamma)=1$ , τότε και  $\text{MK}\Delta(a,\beta,\gamma)=1$ . Ο  $\text{MK}\Delta$  διαδοχικών ακεραίων είναι 1.

Όταν ένας αριθμός έχει δύο διαιρέτες πρώτους μεταξύ τους, τότε έχει διαιρέτη και το γινόμενο των δύο αυτών διαιρετών.

**A.11.** Στα μαθηματικά προσπαθούμε να πετύχουμε τις πιο απλές εκφράσεις, γιατί η απλότητα διευκολύνει τη λύση των προβλημάτων. **Ανάγωγο** ονομάζεται ένα ρητό κλάσμα με όρους πρώτους μεταξύ τους, ένα κλάσμα που δεν απλοποιείται, που δεν ανάγεται σε άλλο απλούστερο. Αν διαιρέσουμε τους όρους ενός κλάσματος με τον  $\text{MK}\Delta$  τους, τότε παίρνουμε ανάγωγο, ισοδύναμο με το αρχικό. Αν ένα ρητό κλάσμα  $\frac{\gamma}{\delta}$  είναι ίσο προς το ανάγωγο  $\frac{\alpha}{\beta}$ , τότε οι όροι του  $\frac{\gamma}{\delta}$  είναι ισοπολλαπλάσιοι των όρων του αναγώγου.

Αν οι  $a$  και  $\gamma$  είναι ακέραιοι, οι  $\beta$  και  $\delta$  φυσικοί και τα ανάγωγα κλάσματα  $\frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\frac{\gamma}{\delta}$

είναι ίσα,  $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$ , τότε  $a = \gamma$  και  $\beta = \delta$ .

**Απόδειξη:**  $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ , ο  $a$  διαιρεί τον  $\beta\gamma$  και είναι πρώτος προς τον  $\beta$ , άρα

διαιρεί τον  $\gamma$ , επομένως υπάρχει ακέραιος  $\mu$  ώστε:  $\gamma = \alpha\mu$ . Από την  $\alpha\delta = \beta\gamma$ , παίρνουμε και  $\delta = \beta\mu$ . Επειδή  $\text{MK}\Delta(\gamma,\delta) = 1$ , και ο  $\mu$  διαιρεί τους  $\gamma,\delta$  θα διαιρεί και τον 1, άρα  $\mu = \pm 1$ . Υποθέσαμε όμως ότι οι  $\beta,\delta$  είναι φυσικοί, οπότε, η  $\delta = \beta\mu$  δίνει  $\mu=1$ .

**A.12.** Ονομάζουμε **κάθοδο** μια γνήσια φθίνουσα ακολουθία(διαδοχή) φυσικών. Για τους φυσικούς ισχύει η ακόλουθη βασική πρόταση (**Αρχή της καθόδου**):

**Κάθε κάθοδος τερματίζεται, περιέχει δηλαδή ένα ελάχιστο τελευταίο στοιχείο και επομένως αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών.** Η αρχή της καθόδου στηρίζεται στο γεγονός ότι κάθε μη κενό σύνολο φυσικών έχει ελάχιστο στοιχείο.

Στην Αριθμοθεωρία, από την εποχή του Fermat (1601-1665), χρησιμοποιούμε συχνά την ακόλουθη αποδεικτική μέθοδο: Αν μια υπόθεση έχει για συνέπεια την δημιουργία μιας άπειρης καθόδου, τότε αυτή η υπόθεση πρέπει να απορριφθεί.

**A.13.** Για το δοθέν ζεύγος ακεραίων  $\alpha, \beta$  με  $\beta \neq 0$ , και το μοναδικό αντίστοιχο ζεύγος ακεραίων  $\pi, \nu$  με  $\alpha = \beta\pi + \nu$  και  $0 \leq \nu < |\beta|$  που προκύπτει από τον αλγόριθμο της διαίρεσης, ισχύει:  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = \text{MK}\Delta(\beta, \nu)$ .

Ας υποθέσουμε ότι

$u_0 = u_1\pi_1 + u_2$	με :	$ u_1  > u_2 > \dots > u_\nu > u_{\nu+1} \geq 0$	(1)
$u_1 = u_2\pi_2 + u_3$			
...			
$u_{\nu-1} = u_\nu\pi_\nu + u_{\nu+1}$			

Αν για κάθε φυσικό  $\nu$ , προέκυπτε ένας  $u_{\nu+1} > 0$ , τότε μεταξύ των αριθμών  $|u_1|$  και 0, θα είχαμε μια απειρία ανίσων φυσικών  $u_2, u_3, \dots$ , στο σύνολο των οποίων δεν θα υπήρχε ελάχιστος, πράγμα άτοπον (δηλαδή: αν κάθε υπόλοιπο είναι  $\neq 0$ , δημιουργείται μια κάθοδος, η οποία θα πρέπει να τερματίζεται). Επομένως, για κάποιον καθορισμένο φυσικό  $\nu$  για το ζευγος  $(u_0, u_1)$  η τελευταία από τις ισότητες (1) γίνεται  $u_{\nu-1} = u_\nu\pi_\nu$  και έχουμε διαδοχικά:  $\text{MK}\Delta(u_0, u_1) = \text{MK}\Delta(u_1, u_2) = \dots = \text{MK}\Delta(u_{\nu-1}, u_\nu) = |u_\nu|$  (αν  $u_{\nu-1} = u_\nu\pi_\nu$ , τότε  $u_\nu / u_{\nu-1}$ ).

Η δημιουργία του συστήματος (1) μέχρι να βρεθεί ο φυσικός  $\nu$  για τον οποίο  $u_{\nu+1} = 0$ , ή και το ίδιο το σύστημα (1), ονομάζεται **αλγόριθμος μεγίστου κοινου διαιρέτη** για το δοθέν ζεύγος των ακεραίων  $(u_0, u_1)$  ή και **Ευκλείδειος αλγόριθμος**.

Αν ο  $\beta$  δεν διαιρεί τον  $\alpha$ , τότε ο  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)$  είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο του Ευκλειδείου αλγορίθμου που εφαρμόζεται στο ζευγος  $(\alpha, \beta)$ . Αν  $\alpha, \beta$  φυσικοί και  $\beta < \alpha$ , τότε (Θεώρημα Lame, Gabriel Lame (1795-1870), γάλλος Μαθηματικός) ο αριθμός των διαιρέσεων που χρειάζονται για τον προσδιορισμό του  $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta)$  με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη είναι το πολύ ίσος με  $5\rho$ , όπου  $\rho$  το πλήθος των ψηφίων του  $\beta$  στο δεκαδικό σύστημα: π.χ. για το ζευγος  $(337, 233)$  απαιτούνται 12 διαιρέσεις, ενώ για το  $(1597, 987)$  απαιτούνται 15 (Θωμαΐδης, 1984).

**A.14.** Ακέραιο μέρος του  $x$ ,  $[x]$ , είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει τον  $x$ . Η διαφορά του  $[x]$  από τον  $x$  ονομάζεται κλασματικό μέρος του  $x$ ,  $\{x\} = x - [x]$ . Η αλγεβρική μορφή των ορισμών είναι:  $[x] \leq x < [x] + 1$ , ή ισοδύναμα:  $x - 1 < [x] \leq x$ ,  $0 \leq \{x\} = x - [x] < 1$ . Άμεσα προκύπτουν και οι ιδιότητες:  $[x + m] = [x] + m, m \in \mathbb{Z}$ ,  $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$ .

## B. Πολυωνυμικές εξισώσεις

**B.1.** Αν το πολυώνυμο  $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , έχει ακέραιους συντελεστές και ο μη μηδενικός ακέραιος  $d$  είναι ρίζα του, τότε  $d / a_0$  (ο  $d$  διαιρεί ακριβώς τον σταθερό όρο  $a_0$ ). Έχουμε διαδοχικά:  $f(d)=0$ ,  $a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \dots + a_1 d + a_0 = 0$ ,  $-d(a_n d^{n-1} + a_{n-1} d^{n-2} + \dots + a_1) = a_0$ , ο αριθμός στην παρένθεση είναι ακέραιος, άρα  $d / a_0$ .

Η εξίσωση  $f(x)=0$ , ονομάζεται πολυωνυμική εξίσωση βαθμού  $n$ . Αν έχουμε μια πολυωνυμική εξίσωση με ρητούς συντελεστές, τότε, πολλαπλασιάζοντας επί το ΕΚΠ των παρανομαστών, παίρνουμε ισοδύναμη με ακέραιους συντελεστές. Ισχύει το **θεώρημα**:

Αν το πολυώνυμο  $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_k \neq 0$ , έχει ακέραιους συντελεστές και ο μη μηδενικός ρητός  $\frac{m}{n}$ , με  $\text{ΜΚΔ}(m,n)=1$ ,  $m, n$  ακέραιοι, είναι ρίζα του, τότε  $m / a_0$  και  $n/a_k$ .

**Απόδειξη:** Επειδή ο  $\frac{m}{n}$  είναι ρίζα θα έχουμε:  $a_k \left(\frac{m}{n}\right)^k + a_{k-1} \left(\frac{m}{n}\right)^{k-1} + \dots + a_1 \left(\frac{m}{n}\right) + a_0 = 0$ . Με απαλοιφή παρονομαστών παίρνουμε:  $a_0 n^k + a_1 m n^{k-1} + \dots + a_{k-1} m^{k-1} n + a_k m^k = 0$  και από αυτήν τις  $n(a_0 n^{k-1} + a_1 m n^{k-2} + \dots + a_{k-1} m^{k-1}) = -a_k m^k$  και  $m(a_k m^{k-1} + a_{k-1} n m^{k-2} + \dots + a_1 n^{k-1}) = -a_0 n^k$ .

Επομένως:  $n / a_k m^k$ , και  $m/a_0 n^k$ , με  $\text{ΜΚΔ}(m,n)=1$ . Επειδή  $n/a_k m^k$  με  $(m,n)=1$ , ο  $n$  δεν διαιρεί (ακριβώς) τον  $m$ , άρα  $n/a_k$ , (A9) και ανάλογα,  $m/a_0$ .

\*η  $\text{ΜΚΔ}(m,n)=1$  είναι απαραίτητη, π.χ. ο  $\frac{2}{2}$  είναι ρίζα της  $x^2-1=0$  και ο 2 δεν διαιρεί τον 1.

Αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι  $\pm 1$  και η πολυωνυμική εξίσωση έχει ρητή ρίζα, τότε αυτή η ρίζα είναι ακέραιος αριθμός που διαιρεί τον σταθερό όρο. Τελικά, αν  $a_k = \pm 1$  και ο  $a$  είναι ρίζα του  $f(x)$ , τότε ο  $a$  είναι είτε ακέραιος είτε άρρητος. Έχουμε λοιπόν μια (ακόμα) μέθοδο για να αποδείξουμε ότι κάποιος αριθμός είναι άρρητος.

**B.2.** Αν  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x + a_1 x + a_0$  πολυώνυμο βαθμού  $n$  ( $a_n \neq 0$ ), και  $x_0$  πραγματικός, τότε  $P(x) = (x - x_0)Q(x) + r$ , με  $r = P(x_0)$ .

**Απόδειξη:** Το πηλίκο  $Q(x)$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $n-1$ , ας πούμε με συντελεστές  $b_i$ ,  $i=1,2,\dots, n$ , που καθορίζονται από το σχήμα Horner :

Πολλαπλασιάζουμε:  $(x - x_0)Q(x)$ , εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων δυνάμεων του  $x$  στα δύο μέλη της  $P(x) = (x - x_0)Q(x) + P(x_0)$  και, αν πάνε όλα καλά, βρίσκουμε  $b_i = a_i + x_0 * b_{i+1}$ ,  $i = 1,2,\dots, n$  (για την ενότητα των τύπων θέσαμε  $b_{n+1} = 0$ ).

$x_0$	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
	$x_0^* b_n$	$x_0^* b_{n-1}$	$\dots$	$x_0^* b_3$	$x_0^* b_2$	$x_0^* b_1$	
	$b_n$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\dots$	$b_2$	$b_1$	$P(x_0)$

Είναι φανερό ότι αν  $x_0$  ρητός και τα  $a_i$  ακέραιοι, οι  $b_i$  είναι ρητοί, ενώ, αν  $x_0$  άρρητος, τότε το  $Q(x)$  έχει συντελεστές άρρητους αριθμούς.

**B.3.** Έστω το  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x + a_1 x + a_0$ .

Αν ο αλγεβρικός αριθμός  $a$  βαθμού  $n \geq 2$  είναι ρίζα του  $P(x)$ , (δηλ.  $P(a) = 0$  και δεν υπάρχει πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του  $n$  που να έχει τον  $a$  ρίζα), τότε το  $P(x)$  δεν έχει ρητές ρίζες.

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε ότι  $p/q$  είναι ρητή ρίζα του  $P(x)$ , δηλ.  $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ .

Τότε  $P(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) P_0(x)$ . Το  $P_0(x)$  έχει ρητούς συντελεστές. Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ των παρανομαστών του, έστω  $M$ . Το  $Q(x) = MP_0(x)$  έχει ακέραιους συντελεστές, έχει βαθμό  $n-1$  και έχει ρίζα τον  $a$  (ο  $a$  είναι διαφορετικός από τον  $p/q$ ,  $\text{dega} = n \geq 2$ , ο  $a$  δεν είναι ρητός). Όμως ο βαθμός του  $Q(x)$  είναι  $n-1 < n = \text{dega}$ . Άτοπον.

### Γ.Ανάλυση

**1.Αξίωμα του ελαχίστου άνω φράγματος:** Αν ένα μη κενό σύνολο με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς είναι άνω φραγμένο, τότε θα υπάρχει ένας και μόνο πραγματικός αριθμός, σύμβολο  $\sup A$ , ο οποίος θα είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου, (ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών). Το αξίωμα του ελαχίστου άνω φράγματος είναι ισοδύναμο με την πρόταση: Αν ένα μη κενό σύνολο πραγματικών είναι κάτω φραγμένο, τότε έχει μέγιστο κάτω φράγμα,  $\inf A$ . Είναι επίσης ισοδύναμο με τις τομές Dedekind.

**2.** Το σύνολο των φυσικών δεν είναι άνω φραγμένο. Για κάθε πραγματικό  $x$  υπάρχει φυσικός  $v$  με  $v > x$ : κάθε πραγματικός αριθμός είναι μικρότερος από πεπερασμένο άθροισμα μονάδων. Για κάθε θετικό πραγματικό  $x$ , υπάρχει φυσικός  $v$ , ώστε  $\frac{1}{v} < x$ . Αν  $x$  θετικός πραγματικός και  $y$  τυχαίος πραγματικός, τότε υπάρχει φυσικός  $v$  με  $v x > y$ . Η τελευταία ιδιότητα ονομάζεται **Αρχιμήδεια ιδιότητα** των πραγματικών.

Η γεωμετρική της ερμηνεία είναι ότι ένα οσοδήποτε μεγάλο ευθ. τμήμα μπορεί να «εξαντληθεί» επαναλαμβάνοντας ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα με μήκος δοσμένο και οσοδήποτε μικρό. Αν όμως θεωρήσουμε μικροσκοπικά σωμάτια, τότε είναι αδύνατη η εξάντληση ενός διαστήματος, η Αρχιμήδεια ιδιότητα απουσιάζει (Δρόσος, 2000: Κεφ.3), π.χ. η κερατοειδής γωνία (απειροστό) είναι το πιο απλό μοντέλο για το οποίο δεν ισχύει η Αρχιμήδεια ιδιότητα.



**3.** Αν  $\chi, \psi$  θετικοί πραγματικοί, τότε υπάρχει φυσικός  $v$  ώστε  $(v-1)\chi \leq \psi < v\chi$ .

Αν  $\psi$  πραγματικός, τότε υπάρχει ακέραιος ώστε  $(\zeta-1) \leq \psi < \zeta$ .

**4.** Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta$ , τότε υπάρχουν άπειροι ρητοί  $\rho$ , ώστε  $\alpha < \rho < \beta$  (η πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς).

**Απόδειξη:** Για τον  $\beta - \alpha > 0$ , από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει θετικός ακέραιος  $v$ , ώστε  $v(\beta - \alpha) > 1$ , δηλ.  $v\beta > v\alpha + 1$ . Για τον πραγματικό  $v \cdot \alpha$ , σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση 3, υπάρχει ακέραιος  $\mu$  ώστε  $\mu - 1 \leq v\alpha < \mu$ . Επομένως  $v\beta > v\alpha + 1 \geq \mu - 1 + 1 = \mu > v\alpha$ , δηλ.  $\beta > \frac{\mu}{v} > \alpha$ . Το σύνολο  $\Pi = \{\rho \in \mathbb{Q} : \alpha < \rho < \beta\}$  δεν είναι κενό. Αν περιέχει πεπερασμένου πλήθους στοιχεία, τότε έχει μέγιστο, έστω το  $\sigma$  και θα ισχύει:  $\alpha < \rho \leq \sigma < \beta$  για όλα τα στοιχεία του  $\Pi$ .

Αλλά για τους  $\sigma$  και  $\beta$ , αφού  $\sigma < \beta$ , μπορούμε να βρούμε (όπως και για τους  $\alpha, \beta$ ) ρητό  $\varphi$  ώστε  $\sigma < \varphi < \beta$ , άτοπο, γιατί  $\sigma$  είναι το μέγιστο στοιχείο του  $\Pi$ . Άρα το  $\Pi$  έχει άπειρα στοιχεία.

Το σύνολο των αρρήτων είναι επίσης πυκνό στο  $\mathbb{R}$ : Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta$ , τότε από την πυκνότητα των ρητών, υπάρχει ρητός  $\delta$  ώστε:  $\frac{\alpha}{\sqrt{2}} < \delta < \frac{\beta}{\sqrt{2}}$ , οπότε  $\alpha < \delta\sqrt{2} < \beta$ .

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αν  $(a_n)$  αύξουσα και φραγμένη, τότε  $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \sup a_v (= \sup \{a_v : v \in \mathbb{N}\})$ . Αν  $(a_n)$  φθίνουσα και φραγμένη, τότε  $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \inf a_v$ .

Αν μια ακολουθία  $\{a_n\}$  συγκλίνει προς πραγματικό αριθμό (ή προς το  $+\infty$ , ή το  $-\infty$ ), τότε και κάθε υπακολουθία της  $\{a_n\}$  συγκλίνει προς το ίδιο όριο.

**5. Αρχή του κιβωτισμού:** Αν  $\mathbb{R} \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \dots$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , τότε  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ . Επιπλέον, αν  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , τότε το σύνολο  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$  αποτελείται από ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό.



**Δ. Διώνυμα της μορφής  $a + b\sqrt{d}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $d \in \mathbb{N}$  όχι τέλειο τετράγωνο**

Αν  $a + b\sqrt{d} = x + y\sqrt{d}$ , με  $a, b, x, y \in \mathbb{Q}$ , τότε  $a - x = (y - b)\sqrt{d}$ . Αν  $y \neq b$ , τότε  $\sqrt{d} = \frac{a - x}{y - b}$  ισότητα που δεν είναι δυνατόν να ισχύει, αφού  $\sqrt{d}$  άρρητος, και  $a, b, x, y$  ανήκουν στο σώμα των ρητών. Άρα  $y = b$ , οπότε και  $a = x$ .

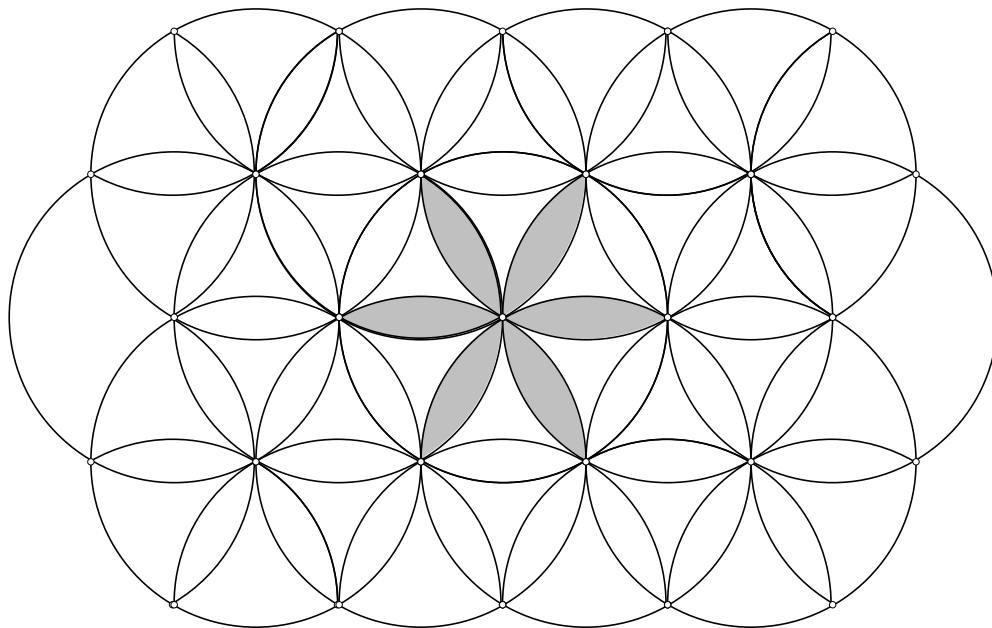
Γενικότερα ισχύει η πρόταση: Αν  $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}$ ,  $\beta, \delta \in \mathbb{Q}^+$ , οι  $\beta, \delta$  δεν είναι τέλεια τετράγωνα και  $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$ , τότε  $\alpha = \gamma$  και  $\beta = \delta$ .

**Απόδειξη:** Έχουμε διαδοχικά:  $\sqrt{\beta} = \gamma - \alpha + \sqrt{\delta}$ ,  $\beta = (\gamma - \alpha)^2 + \delta + 2(\gamma - \alpha)\sqrt{\delta}$ .

- Αν  $\gamma - \alpha = 0$ , τότε  $\gamma = \alpha$  και η προηγούμενη ισότητα δίνει και  $\beta = \delta$ .
- Αν  $\gamma - \alpha \neq 0$ , διαιρούμε δια  $\gamma - \alpha$  και παίρνουμε:  $\sqrt{\delta} = \frac{\beta - \delta - (\gamma - \alpha)^2}{2(\gamma - \alpha)}$ , άτοπον.

Επίσης, αν  $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}$ ,  $\beta, \delta \in \mathbb{Q}^+$ , οι  $\beta, \delta$  δεν είναι τέλεια τετράγωνα και  $\alpha - \sqrt{\beta} = \gamma - \sqrt{\delta}$ , τότε  $\alpha = \gamma$  και  $\beta = \delta$  (προκύπτει από την προηγούμενη, αρκεί να αλλάξουμε μέλη στις ρίζες).

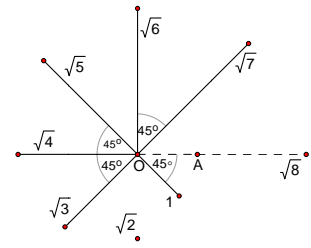
**Ε. Το Λουλούδι στο τέλος των κεφαλαίων**



Ότι είναι απαραίτητο για την κατασκευή,  
 «ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔσται θεωροῦσι δῆλον» (Αριστοτέλης, Μετεωρολογικά, 375b 18).

## Ρητοί εναντίον αρρήτων

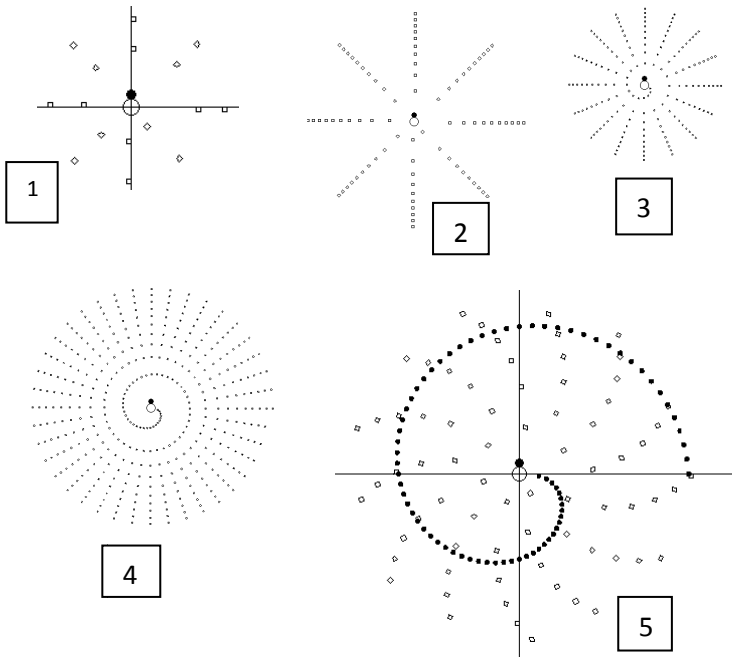
Με μονάδα το  $OA$  τοποθετούμε την  $\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , σε απόσταση  $\sqrt{n}$ . Γωνία  $45^\circ$ , δεξιόστροφα. Ο  $\sqrt{8}$  τοποθετείται στον θετικό ημιάξονα  $Ox$ , γιατί  $8 \cdot 45 = 360$ .



Με την διαδικασία «versus :α» (Logo), δίνοντας την εντολή 'versus 45', στο σχ.1 έχουμε τις ρίζες των φυσικών από 1 έως 16 (οι  $\sqrt{8}$  και  $\sqrt{16}$  στον  $Ox$ ). Αν αλλάξουμε το «2» στην εντολή «επαναλαβε  $2 \cdot (360 / :α)$ » με π.χ. 10, τότε τοποθετούνται οι ρίζες από 1 έως 80 σε 8 βραχίονες (σχ. 2). Τυπώνεται ο αριθμός 81 (εντολή «τύπωσε :κ»), η επόμενη ρίζα που περιμένει να τοποθετηθεί είναι η  $\sqrt{81}$ . Αν δεν θέλουμε  $45^\circ$  αλλά π.χ.  $22.5^\circ$  τότε δίνουμε την εντολή 'versus 22.5' και οι ρίζες των φυσικών από 1 έως 160 δημιουργούν το σχ. 3 (16 \* 22.5 = 360, 16 βραχίονες). Με την εντολή 'versus 9' τοποθετούνται οι ρίζες από 1 έως 400 σε 40 βραχίονες-ανά 10 ρίζες (σχ. 4). Μεταξύ των βραχιόνων δημιουργούνται κενά, ιδιαίτερα όσο απομακρυνόμαστε από την αρχή.

```

για versus :α
θεσεχρωμαστυλο 0
make "κ 1
επαναλαβε 2*(360/:α) [
θεσεκατευθυνση 90+κ*:α
σπ
μ 20*sqrt(:κ)
σκ
επαναλαβε 4 [μ 2 δ 90]
σπ
στηναρχη
make "κ :κ+1]
τυπωσε :κ
τελος
    
```



Στο σχήμα 5 οι μαύρες τελείες είναι 72, παραστατικά σημεία ριζών των φυσικών από 1 έως 72, δεξιόστροφα ανά  $5^\circ$ . Αν τοποθετήσουμε τις ίδιες ρίζες ανά  $55^\circ$ , τότε τα σημεία – τετραγώνια - διασκορπίζονται καλύτερα στο επίπεδο (11 πλήρεις περιστροφές,  $11 \cdot 360 = 55 \cdot 72$ ,  $55 = (11/72) \cdot 360$ ). Σκεφτόμαστε με τον ίδιο τρόπο για οποιοδήποτε ρητό πολλαπλάσιο ( $\mu/\nu$ ) του 360 ( $\nu \cdot (\mu/\nu) = \mu \cdot 360$ ). Αν θέλουμε την βέλτιστη εκμετάλλευση του επιπέδου, χωρίς βραχίονες, τότε είναι απαραίτητη η περιστροφή κατά γωνία που είναι άρρητο πολλαπλάσιο των  $360^\circ$  (Flannery, 2006: K5).

## Βιβλιογραφία

### Ελληνόγλωσση

1. Αγάπης, Γ. (1998). *Αριθμοί και άλλα....* Θεσ/νίκη: Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ.Βαφειάδης.
2. Ανδρεαδάκης, Σ. (1979). *Μαθήματα επί της Θεωρίας Galois*. Αθήνα.
3. Aristoteles: *Topica, De anima, Meteorologica, Analytica priora et posteriora*: TLG.
4. Βαρόπουλος, Θ. (1949). *Γενικά Μαθηματικά*. Αθήνα: Εστία.
5. Βοσνιάδου, Σ. (2001/2007). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία, Τόμος Α'. Βιολογικές, Αναπτυξιακές και Συμπεριφοριστικές Προσεγγίσεις. Γνωστική Ψυχολογία*. Αθήνα: Gutenberg.
6. Γιαννακούλιας, Ε. (2007). *Ιστορική εξέλιξη του Απειροστικού λογισμού*. Αθήνα: Συμμετρία.
7. Δαμαλάς, Γ. (1980). *Διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα.
8. Δανηλόπουλος, Σ. (1980). *Εισαγωγή στην Υπολογιστική, την Επιστήμη των Αυτομάτων Υπολογισμών*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
9. Δανίκας, Ν. (1991). Μια αριθμοθεωρητική πρόταση για τον αριθμό  $\pi$  και η σχέση του με ορισμένες τριγωνομετρικές ανισότητες και ακολουθίες. *Διάσταση* 3-4: 65-70.
10. Διαμαντής, Ν. (1993). Η ανακάλυψη της ασυμμετρότητας και τα Μαθηματικά των Πυθαγορείων. *Διάσταση* 1-2: 142-153. Θεσ/κη: Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας ΕΜΕ.
11. Δρόσος, Κ. (2000). *Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη*. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών
12. Ευαγγελόπουλος, Γ. (1994). Το πανίσχυρο εργαλείο. *Quantum*, 1(4): 56-58. Κάτοπτρο.
13. Ευαγγελόπουλος, Δ. (2002). *Ιερή Γεωμετρία*. Θεσσαλονίκη: Αρχέτυπο.
14. Ζαφρανάς, Α., Κάτσιου Ζαφρανά, Μ. (2000). *Από τον εγκέφαλο στη νόηση*. Θεσ/νίκη: Αφοί Κυριακίδη.
15. Ζήβας, Μ. (1987). *Μιγαδικοί Αριθμοί*. Αθήνα: Gutenberg
16. Θωμαΐδης, Γ. (1984). Η ακολουθία του Fibonaccì. *Διάσταση* 3-4: 50-54. Θεσσαλονίκη: Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας ΕΜΕ.
17. Θωμαΐδης, Γ. (1995). *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης (Η περίπτωση της απόλυτης τιμής)*. Διδακτορική διατριβή.
18. Θωμαΐδης, Γ., Πούλος, Α. (2000). *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Θεσ/νίκη: Ζήτη
19. Καζαντζής, Θ. (1971). *Άλγεβρα, I, II*. Θεσσαλονίκη: Ανικούλας.
20. Καζαντζής, Θ. (1994). *Παράγωγοι Συναρτήσεων*. Αθήνα: Σπηλιώτης.
21. Καζαντζής, Θ. (1996). *Συνδυαστική*. Θεσ/νίκη: Μαθηματική Βιβλιοθήκη-Χ.Βαφειάδης.
22. Καζαντζής, Θ. (1997). *Θεωρία αριθμών*. Θεσσαλονίκη: Χ.Βαφειάδης.
23. Καζαντζής, Θ. (1998). *Τεστ πολλαπλής επιλογής για την Α' Λυκείου*. Θεσ/κη: Χ.Βαφειάδης.
24. Καζαντζίδης, Γ. (1972). *Βασική Γραμμική Άλγεβρα*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
25. Καζαντζίδης, Γ. (1977). *Θεωρία αριθμών*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

26. Καζαντζίδης, Γ. (1977). *Θεωρία δομών I*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
27. Κανέλλος, Σ. (1963) *Άλγεβρα*. Αθήνα: Παπαδημητρόπουλος.
28. Κανέλλος, Σ. (1975). *Ευκλείδειος Γεωμετρία*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
29. Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001). *Ευκλείδη "Στοιχεία."* Τόμοι I,II,III. Αθήνα: Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης.
30. Κόσυβας, Γ. (2009). Διαφορά τετραγώνων δυο φυσικών αριθμών. *Το φ:Περιοδική έκδοση επικοινωνίας και διαλόγου στα Μαθηματικά*, 6:133-160. Αθήνα: Βισκαδουράκης.
31. Κουμουλλής, Γ., Νεγρεπόντης, Σ. (2005). *Θεωρία Μέτρου*. Αθήνα. Συμμετρία.
32. Κριτικός, Ν (1981). *Μαθήματα Αριθμοθεωρίας του Adolph Hurwitz*. Αθήνα: Πνευματικός.
33. Μαρκόπουλος, Π. (1984). Οι άρρητοι αριθμοί. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 26:14-31.
34. Μαρκόπουλος, Π. (1986). Μερικοί Άλγεβρικοί Άρρητοι Αριθμοί που δεν έχουν σύμβολο *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 31:57-62. Αθήνα: ΕΜΕ.
35. Μπρίκας, Μ. (1970). *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*. Αθήνα.
36. Λάμπρου, Μ. (2000). Το μαθηματικό έργο του Πτολεμαίου. *Quantum*, 7(2) : 58-62.
37. Λάμπρου, Μ., Τζανάκης, Ν. (1987). Πόσο είναι το ημίτονο μιας μοίρας; *Ευκλείδης Γ'*, 16: 11-16. Αθήνα: ΕΜΕ.
38. Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β. (2009). Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες (άρθρο, ανακτήθηκε στις 21/03/2009 από: [www.mathsforyou.gr/arthra/Negrepontis.doc](http://www.mathsforyou.gr/arthra/Negrepontis.doc)).
39. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε.(1999). *Απειροστικός Λογισμός I*. Αθήνα : Συμμετρία.
40. Ξένος, Θ.(1989). Τομές του Dedekind. Αρχή του κιβωτισμού. *Διάσταση 4* :19-26 .
41. Πάμφιλος, Π.(2011) *Έλασσον Γεωμετρικόν* (ηλεκτρονικό, ανακτήθηκε στις 13/04/2011 από: [www.math.uoc.gr/~pamfilos/Z11/GeoBook.pdf](http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/Z11/GeoBook.pdf)).
42. Παντελίδης, Γ. (1992). *Μαθηματική Ανάλυση I,II*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
43. Παντελίδης, Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα ΑΝΑΛΥΣΗ της Γ' Λυκείου*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
44. Plato: Hippias major, Leges, Meno : TLG
45. Πολυδούρης, Β. (1976). *Το ταμπού των συμβόλων*. Αθήνα: Δωδώνη.
46. Πολυδούρης, Β. (1990). *Αριθμοί τετράγωνοι και κύβοι*. Αθήνα: Δωδώνη.
47. Πολυδούρης, Β. (1995). *Η Αριθμητική των ακεραίων, I,II*. Θεσ/νίκη: Αφοί Κυριακίδη.
48. Πολυδούρης, Β. (1997). *Παιδεία το αθέατο ημισφαίριο*. Θεσ/νίκη: Αφοί Κυριακίδη.
49. Πορταλάκη, Συλλογή.(2010). *Κατάλογος της έκθεσης του Thomas Shutte*. Αθήνα.

50. Proclus: In primum Euclidis elementorum librum commentarii: TLG.
51. Σπύρου, Π.(2006). *Επιστημολογίες για την διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών.
52. Στάϊκος, Β. (1971). *Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως. Μέρος Ι*. Ιωάννινα.
53. Σταμάτης, Ε.(1970). *Αρχιμήδους Άπαντα, Τόμος Α, Μέρος Β*. Αθήνα: Τεχνικό Επιμελητήριο.
54. Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία, I,II,III*. Αθήνα: ΟΕΔΒ
55. Στεφανάκη, Μ.(2008). *Διδακτική προσέγγιση του εμβαδού της έλλειψης με αναφορά στο έργο Σφαιροειδή και Κωνοειδή του Αρχιμήδη*. Διπλωματική εργασία στο πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών: Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών.ΕΚΠΑ.
56. Στράντζαλος, Χ. (1989) *Η εξέλιξη των Ευκλειδείων και των μη Ευκλειδείων γεωμετριών*. Αθήνα: Καρδαμίτσα.
57. Τζανάκης, Ν.(1986). Η Βασική θεωρία των συνεχών κλασμάτων και μερικές εφαρμογές της. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 36: 31-55. Αθήνα: ΕΜΕ.
58. Τζουβάρας, Θ.(1993). *Αλγοριθμικά Μαθηματικά-Εννοιολογικά Μαθηματικά, μια κρισιμη διάκριση. Διάσταση 1-2:5-38*.
59. Τουμάσης, Μ.(1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
60. Τσιγκάκου, Φ.(2011). *Γιάννης Μόραλης «Αρχιτεκτονικές συνθέσεις» (επιμέλεια)*. Αθήνα: Μουσείο Μπενάκη.
61. Τσιμπουράκης, Δ.(2004). *Η Γεωμετρία στην Αρχαία Ελλάδα*. Αθήνα: Ατραπός.
62. Τόγκας, Π.(1950). *Νέοι Πίνακες Λογαρίθμων*. Αθήνα.
63. Φάκελος σημειώσεων του μαθήματος «Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών-Στοιχεία Ευκλείδη». Εαρινό εξάμηνο ακαδ.έτους 2008-9. Διδάσκων Στ.Νεγρεπόντης.
64. Χατζηδήμος, Α. (1977). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Ιωάννινα.
65. Χατζηδήμος, Α. (1978). *Αριθμητική Ανάλυση I,II*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

#### **Ξενόγλωσση και μεταφρασμένη**

66. Adler, A., Coury, J. E. (1994). *The Theory of Numbers: A Text and Source Book of Problems*. Vancouver, Canada: Jones & Bartlett Publishers.
67. Apostol, T. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, I*, μτφρ.Δ.Γκιόκα. Αθήνα: Ατλαντίς.
68. Apostol, T. (1974). *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company.
69. Arnold, V. (1994). Γιατί μελετάμε τα Μαθηματικά; *Quantum*, 1(4): 39-45.

70. Arons, A. (1992). *Οδηγός Διδασκαλίας της Φυσικής*, μτφρ. Ανδρέας Βαλαδάκης. Αθήνα : Τροχαλία.
71. Βαλερύ, Π. (1996). *Στοχασμοί*, μτφρ.Χαρά Μπανάκου-Καραγκούνη. Αθήνα: Στιγμή.
72. Bermudez, J. (2003). *Thinking without words*. New York: Oxford University Press.
73. Berzsenyi, G. (1996). Μη κανονικά συνεχή κλάσματα. *Quantum*, 3(2) :49. Κάτοπτρο.
74. Bruner, J. (1960). *Η διαδικασία της Παιδείας*, μτφρ. Χρυσάνθη Κληρίδη. Αθήνα: Καραβία.
75. Bunt L., Jones P., Bedient J. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*, μτφρ. Άννα Φερεντίνου-Νικολακοπούλου. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.
76. Burton, D. (1997). *Elementary number theory*. New York: McGraw-Hill.
77. Capinski, M., Kopp, E. (2003). *Measure, Integral and Probability*. Springer.
78. Chaitin, G. (2007). *Μεταμαθηματικά. Τα μυστικά του αριθμού  $\Omega$* , μτφρ.Γεώργιος Μιχαηλίδης. Αθήνα: Τραυλός.
79. Coelho P. (2006). *Μπρίντα*, μτφρ.Μάτα Σαλογιάννη. Αθήνα: Λιβάνης.
80. Courant, R. and Robbins, H. (1978). *What is mathematics?* Oxford University Press.
81. Davis, D. (2007). *Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών*, μτφρ. Δημήτρης Καραγιαννάκης - Μανώλης Μαγειρόπουλος. Ηράκλειο: ΠΕΚ
82. Davis, P. , Herch, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία*, μτφρ. Γιώργος Αναστασιάδης. Αθήνα: Τροχαλία.
83. Dawkins, R. (2000). Ορθολογισμός και πίστη. *Quantum*, 7(5) :2-5. Αθήνα: Κάτοπτρο.
84. De Corte & Verschaffel (2005). Δεξιότητες των Παιδιών και Διαδικασίες που αυτά χρησιμοποιούν κατά την Επίλυση Στοιχειωδών Λεκτικών Προβλημάτων. Στο Βοσνιάδου, Σ. (Επιμ.) *Η ψυχολογία των μαθηματικών* (Σελ.70-86). Αθήνα: Gutenberg.
85. Dedekind, R. (1988). Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί, *Μαθηματική Επιθεώρηση* 1988 Β (35): 31-41. Αθήνα: ΕΜΕ.
86. Delahaye, J. (1992). Η εξίσωση του Chaitin: Μια επέκταση του θεωρήματος του Godel, μτφρ.Κ.Δημητρακόπουλος. *Μαθηματική Επιθεώρηση* 38: 52-57.
87. Delogne, R. (1973). *Ανάγνωση πριν από τα έξι χρόνια*, μτφρ.Γ.Βασδέκη-Θ.Δρόσου. Αθήνα:Δίπτυχο.
88. Dennett, D. (1999). Γιατί πρέπει να κάνουμε λάθη, *Quantum*, 6 (4): 2-4.
89. Donaldson, M. (2001) *Η σκέψη των παιδιών*, μτφρ. Α.Καλογιαννίδου-Α.Αρχοντίδου. Αθήνα: Gutenberg.
90. Dorrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics their History and Solution* (Translated by David Antin). New York: Dover Publication, Inc.

91. Eves, H. (1989). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, έως το 1650*.
92. Eves, H. (1990). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, 2, μετά το 1650*, μτφρ. Μανώλης Κωνσταντινίδης-Νίκος Λιλής. Αθήνα: Τροχαλία.
93. Εξυπερύ, Α.(1940). *Ο Μικρός Πρίγκιπας*, μτφρ.Τάκης Κουνέλης. Αθήνα: Γνώση.
94. Eisenkraft, A., Kirpatrick, L. (1994). Ανερχόμενοι αστέρες. *Quantum*, 1(4): 46-48.
95. Farmelo, G. (2004). Μια επανάσταση χωρίς επαναστάσεις. Στο Farmelo, G. (Επιμέλεια): *Οι μεγάλες εξισώσεις του 20<sup>ου</sup> αιώνα*, μτφρ. Τεύκρος Μιχαηλίδης. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.
96. Farrington, B.(1969). *Το Πιστέβω του Επίκουρου*, μτφρ. Πολύκαρπος Πολυκάρπου. Αθήνα: Κάλβος
97. Feldman, N. (2000). Αλγεβρικοί και υπερβατικοί αριθμοί. *Quantum*, 7(5) :18-22.
98. Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29: 29-44.
99. Flannery D. (2006). *The Square Root of 2. A Dialogue Concerning a Number and a Sequence*. New York: Praxis Publishing
100. Fowler, D. (2003). *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*. Oxford University Press.
101. Gindikin, S. (1995). Αριθμητική στο τετραγωνισμένο χαρτί. *Quantum*, 2(3): 56-59.
102. Gindikin, S. (1998). Το φαινόμενο Ramanujan. *Quantum*, 5(3): 5-11.
103. Hadamard, J. (1995). *Η ψυχολογία της επινόησης στα μαθηματικά*, μτφρ.Στέλιος Ζαχαρίου. Αθήνα: Κάτοπτρο.
104. Hardy, G., Wright, E. (2008). *An introduction to the theory of numbers (6<sup>th</sup> edition)*. New York: Oxford University Press.
105. Hardy, G. (1987). *A Course of Pure Mathematics (10<sup>th</sup> edition)*. Cambridge Un. Press.
106. Hardy, G. (1993). *Η απολογία ενός Μαθηματικού*, μτφρ.Δ.Καραγιαννάκης - Μ.Λάμπρου. Ηράκλειο:ΠΕΚ.
107. Harre, D. (1987).*Θεμελιώσεις Αθλητικής Προπόνησης*, μτφρ. Σοφία Κλεισούρα.Αθήνα.
108. Harvey, B. (1997). *Computer Science Logo Style. Vol. 1-3*. Massachusetts: MIT.
109. Henry, M. (2006). *Διδακτική των Μαθηματικών*, μτφρ.Γ.Κοντογιάννης, Γ.Πρίντζης, Π.Σπύρου. Αθήνα: ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών.
110. Hershkowitz, R. κ.α. (1996). Ψυχολογικές όψεις της μάθησης της Γεωμετρίας, μτφρ. Ανδρέας Πούλος- Γιάννης Θωμαΐδης. *Διάσταση 1*: 93-135. Θεσ/κη: Παράρτημα ΕΜΕ.
111. Horwitz, P. (1996). Ο μύθος της κωδωνοειδούς καμπύλης. *Quantum*, 3(2): 38-39.
112. Hughes, M. (1992). Ποια δυσκολία υπάρχει στη μάθηση της αριθμητικής; Στο Βοσνιάδου, Σ. (Επιμ.). *Κείμενα εξελικτικής ψυχολογίας: Σκέψη (165-190)*. Gutenberg.

113. Humphrey, N. (1997). Μια άλλη ματιά. *Quantum*, 4(5): 2-3. Αθήνα: Κάτοπτρο.
114. Johnston, S., Mason, J. (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.
115. Kahane, J. (1997). Ένας Σωκρατικός διάλογος. *Quantum*, 4(5): 10-14.
116. Κάμκε, Ε.(1963). *Θεωρία των Συνόλων*, μτφρ. Δημ.Γκιόκα. Αθήνα: Καραβία.
117. Khinchin, A. (1992). *Continued Fractions*. New York: Dover.
118. Kline, M. (1981). Λογική εναντίον Παιδαγωγικής, μτφρ.Δημήτρης Χασάπης. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 22: 3-34. Αθήνα: ΕΜΕ.
119. Kline, M. (1993). *Γιατί δε μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης*, μτφρ. Βασίλης Τομανάς. Θεσσαλονίκη: Βάνιας.
120. Knuth, D. (2010). *Η τέχνη του προγραμματισμού. Τόμος Γ΄. Ταξινόμηση και Αναζήτηση*, μτφρ. Σταύρος Σουραβλάς. Θεσσαλονίκη: Τζιόλας.
121. Kordemsky, B. (1997). Ζητήματα απροσδιοριστίας. *Quantum*, 4(1): 39-41.
122. Kurllyandchik, L., Rozenblume, G. (1996). Άπειρη κάθοδος. *Quantum*, 3(5): 13-16.
123. Lang, S. (1998). *Μαθηματικές Συναντήσεις με μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου*, μτφρ. Αριστείδης Μουζακίτης. Αθήνα: Κάτοπτρο.
124. Lang, S. (1988). *Basic Mathematics*. New York: Springer.
125. Lindquist, M., Shulte, A. (1987). *Learning and Teaching Geometry*. NCTM.
126. Livio, M. (2005). *Ο Χρυσός Λόγος*, μτφρ. Μαριάννα Σταυροπούλου. Αθήνα: Ενάλιος.
127. Littlewood, D. (1960). *Στοιχειώδης Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά*, μτφρ. Στράτος Μάκρας. Αθήνα: Κάτοπτρο
128. Maor, E. (2008). *Το Πυθαγόρειο Θεώρημα*, μτφρ. Νίκος Αποστολόπουλος. Κάτοπτρο.
129. Marshall, D., Odell, E., Starbird, M. (2007). *Number Theory Through Inquiry*. Washington: Mathematical Association of America.
130. Μοντεσσόρι, Μ. (1960). *Εκπαίδευση για έναν καινούργιο κόσμο*, μτφρ. Μαρίνα Λώμη. Αθήνα: Γλάρος.
131. Μπουσκάλια, Λ.(1982). *Να ζεις ν' αγαπάς και να μαθαίνεις*, μτφρ. Μαρίνα Λώμη. Αθήνα: Γλάρος.
132. Μπρεχτ, Μ. (1978). *Ιστορίες του κ. Κόϋνερ*, μτφρ. Πέτρος Μαρκάρης. Αθήνα: Θεμέλιο.
133. Nahin, P. (2004). *Φανταστικές Ιστορίες*, μτφρ. Τεύκρος Μιχαηλίδης. Αθήνα: Κάτοπτρο.
134. Nesterenko Y., Nikishin E. (2000). Συνεχή κλάσματα. *Quantum*, 7 (2): 38-45.
135. Niven, I. (1956). *Irrational Numbers*. The Mathematical Association of America.
136. Niven, I. (1961). *Numbers: Rational and Irrational*. New York: Random House.



137. Niven, I., Zuckerman, H., Montgomery H. (1991). *An introduction to the theory of numbers* New York: John Willy & Sons.
138. Ντιούι, Τ.(1938). *Εμπειρία και Εκπαίδευση*, μτφρ.Λέανδρος Πολενάκης. Γλάρος.
139. Olds, C. (1963). *Continued Fractions*. The Mathematical Association of America.
140. Papert, S. (1991). *Νοητικές Θύελλες*, μτφρ. Αγνή Σταματίου. Αθήνα: Οδυσσέας.
141. Piaget, J. (2005). Η έννοια του αριθμού. Στο Βοσνιάδου, Σ.(επιμέλεια): Η Ψυχολογία των μαθηματικών, μτφρ. Γ.Μπαρουξής, Μ.Σταφυλίδου, Σ.Βοσνιάδου. Αθήμα:Gutenberg.
142. Pluvinage, F. (1988). Η μάθηση των αριθμών στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών, μτφρ. Αθανάσιος Γαγάτσης-Μαριάνα Τζεκάκη. *Διάσταση* 2: 48-58.
143. Polya, G. (1990). Η μάθηση, διδασκαλία και μάθηση του διδάσκειν. *Ευκλείδης* 7, 7(26).
144. Polya, G. (1991). *Πώς να το λύσω*, μτφρ. Ξανθή Ψυακκή. Αθήνα: Καρδαμίτσα.
145. Polya, G. (2001). *Η μαθηματική ανακάλυψη, τ. Α΄*, μτφρ. Σπύρος Στεργιάκης-Γιώργος Τσαπακίδης. Αθήνα: Κάτοπτρο.
146. Rozenblum, G., Kurlyandchik, L. (1996). Άπειρη κάθοδος. *Quantum*, 3(5): 13-16.
147. Rucker, R. (2004). *Το Άπειρο και ο νους*, μτφρ. Κώστας Χατζηκυριάκου. ΠΕΚ
148. Saul, M. (1997). Τα κοσμήματα του στέμματος. *Quantum*, 4 (1): 10-15.
149. Sawyer, W. (1993). *Τι είναι ο Απειροστικός Λογισμός*, μτφρ.Σ.Λιάτσου-Γ.Τσαπακίδης. Αθήνα: Τροχαλία.
150. Schank, R. (2001). Τι και πώς να μαθαίνουμε. *Quantum*, 8 (4): 2-3.
151. Sinclair, N., Pimm, D., Higginson, W. (2006). *Mathematics and the Aesthetic*. Springer.
152. Σουίφτ, Τ. (2007). *Τα ταξίδια του Gulliver*, μτφρ.Σωτήρης Τανιμανίδης. Αθήνα.
153. Spivak, M. (1991). *Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός*, μτφρ. Απόστολος Γιαννόπουλος. Ηράκλειο: ΠΕΚ.
154. Stewart, I. (2008). *Επιστολές σε μια νεαρή μαθηματικό*, μτφρ. Στάμος Τσιτσώνης-Σοφία Τσιτσώνη. Αθήνα: Τραυλός.
155. Struik, D. (1982). *Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών*, μτφρ. Άννα Φερεντίνου – Νικολακοπούλου. Αθήνα: Ζαχαρόπουλος.
156. Thomas, G., Finney, R. (1993). *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Α΄*, μτφρ. Κανάρης Τσίγκανος. Ηράκλειο: ΠΕΚ.
157. Tikhomirov, V. (1999). *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα*, μτφρ. Κώστας Γαβράς. Αθήνα: Κάτοπτρο.
158. Vaguten, V. (1998). Ανόμοιοι δίδυμοι. *Quantum*, 5 (1): 30-35. Αθήνα: Κάτοπτρο.
159. Vilenkin, N. (1997). *Αναζητώντας το άπειρο*, μτφρ. Αριστείδης Μουζακίτης –Γιώργος Μπούκης. Αθήνα: Κάτοπτρο.

160. Waerden, V. (2007). *Η αφόπνιση της Επιστήμης*, μτφρ. Γιάννης Χριστιανίδης. ΠΕΚ.
161. Wildberger, J., N. (2008). Pell's equation without irrational numbers. *Journal of Integer Sequences*, 13(4), 1-11. (Article 10.4.3, ανακτήθηκε στις 14/03/2011 από: <http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL13/Wildberger/wildberger2.pdf>).
162. Wilder, R. (1986). *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών*, μτφρ. Δημήτρης Ψυχογιός. Αθήνα: Κουτσουμπός.

**Εγκυκλοπαίδειες – Λεξικά – Δημοσιεύματα**

163. Αγγελόπουλος, Γ. (2009). Σαμ Καλαβίτα: Ο καλύτερος καθηγητής του κόσμου. Άρθρο στην εφημερίδα ΝΕΑ, δημοσιεύτηκε στις 11/04/2009.
164. Εγκυκλοπαίδεια Μαθηματικών. (1975). Αθήνα: Παγουλάτος.
165. Λεξικό Μαθηματικών (1997). Μετάφραση και Επεξεργασία: Παντελίδης, Γ. - Κραββαρίτης, Δ. Αθήνα: Πατάκης.
166. Τζελέκης, Κ. (2008). Αγγλο-Ελληνικό Μαθηματικό Λεξικό. Αθήνα: Πατάκης.
167. Collins internet-linked dictionary of Mathematics, 2<sup>th</sup> edition (2002). Glasgow: Harper Collins.
168. TLG (Thesaurus Linguae Graecae-Θησαυρός Ελληνικής Γλώσσας). Βάση δεδομένων Musaios.
169. Η εικόνα στον Επίλογο είναι από το περιοδικό *Quantum*, 1998, 5 (6): σελ.11.

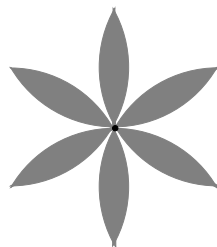
**170. Λογισμικά**

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν:

Το λογισμικό συμβολικής έκφρασης Logo,

το σύστημα άλγεβρας υπολογιστών Mathematica

και το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Sketchpad.



## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

«Έτσι μαθαίνει ένα παιδί, ρουφώντας επιδεξιότητες με τα δάχτυλα των ποδιών και των χεριών του, ώσπου να φτάσουν γερά μέσα του. Απορροφώντας τις συνήθειες και τις στάσεις του περιγύρου του, σπρώχνοντας και τραβώντας τον κόσμο του. Ένα παιδί μαθαίνει πιο πολύ από τη δοκιμή παρά από το λάθος του, πιο πολύ από την ευχαρίστηση παρά από τον πόνο, πιο πολύ από την πείρα και το παράδειγμα, παρά από την υποβολή και τη συμβουλή. Έτσι ένα παιδί μαθαίνει με τη στοργή, την αγάπη, την υπομονή, την κατανόηση, τη συμμετοχή με το να είναι και να κάνει. Μέρα με τη μέρα το παιδί μαθαίνει λίγα απ'αυτά που ξέρετε, λίγα περισσότερα απ'όσα νομίζετε και καταλαβαίνετε. Αυτά που ονειρευόσαστε και πιστεύετε, αυτά γίνεται το παιδί. Από την αντίληψη σας που είναι θολή ή διαυγής από τη σκέψη σας που είναι συγκεχυμένη ή οργανωμένη, από τα πιστεύω σας που είναι ανόητα ή σοφά, από τα όνειρα σας, που είναι άχρωμα ή - αυτό μ'αρέσει πολύ - χρυσά, από τις ανακρίβειες που λέτε ή από την αλήθεια, από όλα αυτά μαθαίνει ένα παιδί» (Μπουσκάλια, 1982:182).

