

Παράγωγοι

81. **α)** Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[1, 10]$, έχει ελάχιστη τιμή $m = 1$ και μέγιστη τιμή $M = 10$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 10$. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στις θέσεις x_1, x_2 που βρίσκονται στο εσωτερικό του $[0, 1]$ και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι: $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

β) Εστω $x_1 < x_2$. Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , και $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$.

γ) $f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f''(x) + e^x f'(x) = 0 \Leftrightarrow [e^x f'(x)]' = 0$. Εστω $g(x) = e^x f'(x)$, $x \in [x_1, x_2]$. Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Επειδή $g(x_1) = e^{x_1} f'(x_1) = 0$ και $g(x_2) = e^{x_2} f'(x_2) = 0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi_2} f''(\xi_2) + e^{\xi_2} f'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi_2) + f'(\xi_2) = 0$.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 15x - 6 \Leftrightarrow f(x) - 15x + 6 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 1)$. Εστω $h(x) = f(x) - 15x + 6$, $x \in [0, 1]$. Είναι $h(0) = f(0) - 15 \cdot 0 + 6 = 2 + 6 = 8 > 0$ και $h(1) = f(1) - 15 \cdot 1 + 6 = 7 - 15 + 6 = -2 < 0$, δηλαδή $h(0)h(1) < 0$ και η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 15x_0 + 6 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 15x_0 - 6$.

82. **α)** Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \alpha+1]$.

Για κάθε $\alpha < x < \alpha+1 \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(x) < f'(\alpha+1)$ άρα $\frac{1}{2} < f'(x)$, δηλαδή $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \alpha+1]$. Το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f([\alpha, \alpha+1]) = [f(\alpha), f(\alpha+1)] = [\alpha+1, \alpha+2].$$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = \alpha$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon : y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x - \alpha) + \alpha + 1 \Leftrightarrow 2y = x + \alpha + 2 \Leftrightarrow x - 2y + \alpha + 2 = 0$$

γ) Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $[\alpha, \alpha+1]$,

άρα βρίσκεται πάνω και από την ε , δηλαδή $f(x) \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\alpha + 1$ για κάθε $x \in [\alpha, \alpha+1]$.

δ) Λόγω του θεωρήματος μέσος τιμής για την f , υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha+1) - f(\alpha)}{\alpha+1 - \alpha} = \alpha+2 - \alpha - 1 = 1.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο (α, ξ_1) , λόγω του Θ.Μ.Τ

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \xi_1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(\alpha)}{\xi_1 - \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\xi_1 - \alpha} = \frac{1}{2(\xi_1 - \alpha)}$.

Είναι $\alpha < \xi_1 < \alpha + 1 \Leftrightarrow 0 < \xi_1 - \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < 2(\xi_1 - \alpha) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2(\xi_1 - \alpha)} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow f''(\xi) > \frac{1}{2}$.

ε) Αρκεί να εξίσωση $f(x) = -3x + 4\alpha + 2 \Leftrightarrow f(x) + 3x - 4\alpha - 2 = 0$, να έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(\alpha, \alpha + 1)$. Έστω $g(x) = f(x) + 3x - 4\alpha - 2$, $x \in [\alpha, \alpha + 1]$.

Είναι $g'(x) = f'(x) + 3 > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \alpha + 1]$.

Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) + 3\alpha - 4\alpha - 2 = \alpha + 1 - \alpha - 2 = -1 < 0$ και

$g(\alpha + 1) = f(\alpha + 1) + 3(\alpha + 1) - 4\alpha - 2 = \alpha + 2 + 3\alpha + 3 - 4\alpha - 2 = 3 > 0$, δηλαδή

$g(\alpha)g(\alpha + 1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha + 1]$ ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων, λόγω του θεωρήματος Bolzano η g εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3x + 4\alpha + 2$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha, \alpha + 1)$. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \alpha + 1]$, η

ρίζα της g είναι μοναδική.

83. **α)** Για $x = 0$ είναι:

$$f^3(0) + f(0) = 4 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ ή } f^2(0) = -1 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

β) $f^3(x) + f(x) = 4x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = 4x \Leftrightarrow f(x) = \frac{4x}{f^2(x) + 1}$ (2). Είναι

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{f^2(x) + 1} > 0 \Leftrightarrow 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και } f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{f^2(x) + 1} < 0 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

γ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , έχουμε:

$$(f^3(x) + f(x))' = (4x)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 4 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 1) = 4 \quad (3).$$

Επειδή $3f^2(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

δ) Αν $\alpha = \beta$, τότε $f(\alpha) - f(\alpha) \leq 4(\alpha - \alpha)$ και ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , λόγω του

Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Όμως από τη σχέση (3) είναι $f'(x) = \frac{4}{3f^2(x) + 1} \leq 4$, αφού $3f^2(x) + 1 \geq 1$, άρα και

$$f'(\xi) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq 4 \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) \leq 4(\beta - \alpha).$$

ε) Πρέπει $f'(x) = 1$, τότε (3) $\Rightarrow 3f^2(x) + 1 = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \pm 1$

Αν $f(x) = 1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε:

$$1^3 + 1 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ και η εφαπτομένη είναι η}$$

$$\varepsilon_1 : y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - 1 = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}$$

Αν $f(x) = -1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε:

$$(-1)^3 - 1 = 4x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ και η εφαπτομένη είναι η}$$

$$\varepsilon_2 : y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y + 1 = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Rightarrow y^3 + y = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(y^3 + y), \text{ άρα } f^{-1}(y) = \frac{1}{4}(y^3 + y)$$

$$\zeta \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{\substack{f(x)=y \\ x=f^{-1}(y)}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty \text{ και όμοια } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ άρα } f(A) = \mathbb{R}.$$

$$\textbf{n)} f^{-1}(1) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ και } f^{-1}(4) = \frac{1}{4}(64+4) = \frac{68}{4} = 17 \Leftrightarrow f(17) = 4$$

84. **a)** Επειδή $f'(x) = e^{g(x)}$ και η $e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τότε και η f' θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = (e^{g(x)})' = e^{g(x)}g'(x)$. Όμοια και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g''(x) = (-e^{-f(x)})' = e^{-f(x)}f'(x)$.

$$\textbf{b)} \text{ Είναι } f''(x) = e^{g(x)}g'(x) \text{ και } g'(x) = -e^{-f(x)}, \text{ άρα } f''(x) = e^{g(x)}(-e^{-f(x)})' = -e^{g(x)-f(x)} \quad (1).$$

$$\text{Είναι } g''(x) = e^{-f(x)}f'(x) \text{ και } f'(x) = e^{g(x)}, \text{ άρα } g''(x) = e^{-f(x)}e^{g(x)} = e^{-f(x)+g(x)} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f''(x) = -g''(x)$, οπότε υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x) = -g'(x) + c_1. \text{ Είναι } f'(e) = e^{g(e)} = e^{-1} \text{ και } g'(e) = -e^{-f(e)} = -e^{-1}, \text{ οπότε η σχέση (3) για } x = e \text{ γίνεται: } f'(e) = -g'(e) + c_1 \Leftrightarrow e^{-1} = e^{-1} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ άρα } f'(x) = -g'(x).$$

$$\text{Είναι: } f'(x) = -g'(x) \Leftrightarrow f(x) = -g(x) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = e \text{ είναι}$$

$$f(e) = -g(e) + c_2 \Leftrightarrow 1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0, \text{ άρα } f(x) = -g(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

γ) Επειδή $f'(x) = e^{g(x)}$ και $f(x) = -g(x)$ είναι:

$$f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = e \text{ είναι: } e^{f(e)} = e + c \Leftrightarrow e = e + c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } e^{f(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = \ln x, \quad x > 0.$$

δ) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$, οπότε

λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e}.$$

$$\text{Είναι } e < \xi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} < \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow (\pi - e) \frac{1}{\pi} < \ln \pi - 1 < (\pi - e) \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi - 1 < \frac{\pi}{e} - 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}.$$

85. **a)** Για κάθε $x < 0$ είναι $e^{2x} - \beta x^2 - 2x - 1 \geq \alpha x^3 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{e^{2x} - \beta x^2 - 2x - 1}{x^3}$,

άρα και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - \beta x^2 - 2x - 1}{x^3} \quad (1)$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - \beta x^2 - 2x - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x^3} - \frac{\beta}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$,

γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} \frac{1}{x^3} = 0 \cdot 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{\beta}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$, οπότε η σχέση (1)

γίνεται $\alpha \geq 0$.

b) Για $x \neq 0$ είναι: $e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1 \geq \beta x^2 \Leftrightarrow \beta \leq \frac{e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1}{x^2}$ και

$\lim_{x \rightarrow 0} \beta \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1}{x^2} \quad (2)$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 3\alpha x^2 - 2}{2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^{2x} - 3\alpha x^2 - 2)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - 6\alpha x}{2} = 2$,

άρα η σχέση (2) γίνεται: $\beta \leq 2$.

y) $f'(x) = 2e^{2x} - 3\alpha x^2 - 2\beta x - 2$, $f''(x) = 4e^{2x} - 6\alpha x - 2\beta$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x} - 6\alpha$

$f''(0) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2$ και $f^{(3)}(0) = 0 \Leftrightarrow 8 - 6\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$.

Τότε $f''(x) = 4e^{2x} - 8x - 4$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x} - 8$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'$ κυρτή στο $[0, +\infty)$ και για $x < 0$ είναι $f^{(3)}(x) < 0 \Rightarrow f'$ κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

$f'' \uparrow$

Για $x > 0 \Leftrightarrow f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f'$ κυρτή στο $[0, +\infty)$ και για $x < 0$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f'$ κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

86. **a)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1 = e^x + 1 + \frac{x+1-x}{x(x+1)} = e^x + 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

γνωσίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

b) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \ln x - \ln(x+1) + x) = -\infty$,

γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \ln \frac{x}{x+1} + x \right) = +\infty ,$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x+1} \stackrel{\frac{x}{x+1}=u}{\underset{u \rightarrow 1}{\rightarrow}} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Το σύνολο τιμών της f είναι: $f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

γ) $e^x + x = \ln \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow e^x + x = \ln(x+1) - \ln x \Leftrightarrow e^x + x - \ln(x+1) + \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

87. **α)** Εστω $g(x) = x^2 f(x) - 1$, $x \in (0, +\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x) = x(2f(x) + xf'(x)) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = f(1) - 1 = 0$.

Για κάθε $x > 1 \stackrel{g \downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow x^2 f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{x^2}$ και

για κάθε $0 < x < 1 \stackrel{g \downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow x^2 f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{x^2}$.

β) Από το θεώρημα μέσης τιμής για την f , υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\alpha}, \alpha \right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \left(f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right) \quad (1)$$

Επειδή $\alpha > 1$ είναι $f(\alpha) < \frac{1}{\alpha^2}$ και επειδή $\frac{1}{\alpha} < 1$, είναι $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) > \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = \alpha^2 \Leftrightarrow -f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < -\alpha^2$,

$$\text{άρα } f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < \frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 = \frac{1 - \alpha^4}{\alpha^2}.$$

Επειδή για $\alpha > 1$ είναι $\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} > 0$, έχουμε: $\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \left(f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right) < \frac{\cancel{\alpha}}{\alpha^2 - 1} \cdot \frac{1 - \alpha^4}{\cancel{\alpha^2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) < \frac{(1 - \alpha^4)(1 + \alpha^2)}{-\cancel{(1 - \alpha^2)\alpha}} \Leftrightarrow f'(\xi) < -\frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) < -1 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) + \alpha^2 + 1 < 0.$$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Επειδή $f(1) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

δ) Επειδή $f(x) > \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, άρα και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, οπότε η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας y' είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επειδή $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, άρα η ευθεία $y = 0$, δηλαδί ο άξονας x' είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

88. **a)** Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

$$\text{Είναι } \alpha < \alpha + 2 \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\alpha + 2) \Leftrightarrow 3f(\alpha + 2) < f(\alpha + 2) \Leftrightarrow 2f(\alpha + 2) < 0 \Leftrightarrow f(\alpha + 2) < 0.$$

Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha, \alpha + 2]$, οπότε υπάρχει

$$\xi \in (\alpha, \alpha + 2) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\alpha + 2) - f(\alpha)}{\alpha + 2 - \alpha} = \frac{f(\alpha + 2) - f(\alpha)}{2}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \xi < \alpha + 2 \Rightarrow f'(\xi) < f'(\alpha + 2) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha + 2) - f(\alpha)}{2} < f(\alpha + 2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(\alpha + 2) - f(\alpha) < 2f(\alpha + 2) \Leftrightarrow f(\alpha) > -f(\alpha + 2) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha + 2]$ και $f(\alpha)f(\alpha + 2) < 0$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \alpha + 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

- b)** Επειδή $f(\alpha + 3) = 0$, $f(\alpha + 2) < 0$ και $f(\alpha) > 0$, είναι $f(\alpha + 2) < f(\alpha + 3) < f(\alpha)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha + 2]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \alpha + 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(\alpha + 3)$ (1).

Αν η f ήταν 1-1, τότε από την (1) θα προέκυπτε ότι $x_1 = \alpha + 3$ που είναι αδύνατο αφού $x_1 \in (\alpha, \alpha + 2)$, άρα η f δεν μπορεί να είναι 1-1.

- γ)** Επειδή $f(\alpha + 2) < f(\alpha + 3) < f(\alpha)$ η f θα έχει ακρότατο σε σημείο x_2 του διαστήματος $[\alpha, \alpha + 3]$ που θα είναι διαφορετικό από τα άκρα του. Από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(x_2) = 0$, δηλαδί η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

- δ)** Επειδή $\alpha < x_2 < \alpha + 3$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$$f'(x_2) < f'(\alpha + 3) \Leftrightarrow f'(\alpha + 3) > 0. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x = \alpha + 3, \text{ είναι:}$$

$$y - f(\alpha + 3) = f'(\alpha + 3)(x - \alpha - 3) \Leftrightarrow y = xf'(\alpha + 3) - (\alpha + 3)f'(\alpha + 3) + f(\alpha + 3)$$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, άρα

$$f(x) \geq xf'(\alpha + 3) - (\alpha + 3)f'(\alpha + 3) + f(\alpha + 3)$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} [xf'(\alpha + 3) - (\alpha + 3)f'(\alpha + 3) + f(\alpha + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xf'(\alpha + 3)] = +\infty$, άρα και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

89. **a)** Είναι (1) $f(x^3 - 2x) = 2f(-x) + 2x^3$, $x \in \mathbb{R}$ και θέτουμε όπου $x = 1$ οπότε

$$f(-1) = 2f(-1) + 2 \Leftrightarrow f(-1) = -2.$$

- β)** Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε

$$f'(x^3 - 2x) \cdot (3x^2 - 2) = -2f'(-x) + 6x^2 \text{ και για } x = 1 \text{ είναι}$$

$$f'(-1) \cdot 1 = -2f'(-1) + 6 \Leftrightarrow 3f'(-1) = 6 \Leftrightarrow f'(-1) = 2$$

γ) Είναι $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 2}{x + 1} = 2$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 1)f(x) + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 f(x) + f(x) + 2x^2 - 2x^2 + 2 + 2}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(f(x) + 2) + (f(x) + 2) - 2(x^2 - 1)}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left[x^2 \frac{f(x) + 2}{x + 1} + \frac{f(x) + 2}{x + 1} - 2(x - 1) \right] = 1 \cdot 2 + 2 + 4 = 8$$

δ) Στην (1) για $x = -1$ προκύπτει $f(1) = 2f(1) - 2 \Leftrightarrow f(1) = 2$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-1, 1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 + 1} = 2$.

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$.

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ είναι

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y + 2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = 2x$$

Επειδή η f κυρτή τότε $f(x) \geq y$ δηλαδή $f(x) \geq 2x \Leftrightarrow f(x) - 2x \geq 0$.

90. **α)** Εστω υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο $f'(\xi_1) = 0$ άποτο. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ θα είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$ οπότε η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Αφού η f είναι συνεχής και 1-1 θα είναι γνησίως μονότονη και αφού $1 < 3$ και $f(1) < f(3)$ τότε η f θα είναι \uparrow στο \mathbb{R} .

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, 3]$ οπότε υπάρχει $\rho \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε

$f'(\rho) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 2}{2} = 2$. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\rho, f(\rho))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$.

δ) Είναι $f(1) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 1$ και $f(3) = 6 \Leftrightarrow f^{-1}(6) = 3$ οπότε η ανίσωση $f(4 - f^{-1}(x - 2)) < 6$ γίνεται $f(4 - f^{-1}(x - 2)) < f(3) \stackrel{+ \uparrow}{\Rightarrow} 4 - f^{-1}(x - 2) < 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x - 2) > 1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x - 2)) > f(1) \Leftrightarrow x - 2 > 2 \Leftrightarrow x > 4$.

ε) Θεωρούμε την $g(x) = 2f(x) - f(e) - f(1,8)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως πράξη συνεχών. Επίσης $g(1) = 2f(1) - f(e) - f(1,8) = f(1) - f(e) + f(1) - f(1,8) < 0$ γιατί $f \uparrow$ και $1 < e \Leftrightarrow f(1) < f(e)$, $1 < 1,8 \Leftrightarrow f(1) < f(1,8)$.

Επίσης $g(3) = 2f(3) - f(e) - f(1,8) = (f(3) - f(e)) + (f(3) - f(1,8)) > 0$ ως άθροισμα θετικών. Οπότε $g(1) \cdot g(3) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$ $2f(\xi) = f(e) + f(1,8)$. Επίσης η g είναι \uparrow στο $[1, 3]$ γιατί για

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) < 2f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(x_1) - f(e) - f(1,8) < 2f(x_2) - f(3) - f(1,8) \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \text{ οπότε η ρίζα } \xi \text{ που}$$

βρήκαμε είναι μοναδική.

στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$ οπότε υπάρχουν

$$\theta_1 \in (1, 2) \text{ και } \theta_2 \in (2, 3) \text{ τέτοια ώστε } f'(\theta_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{4-2}{1} = 2 \text{ και}$$

$$f'(\theta_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{6-4}{1} = 2 \text{ οπότε } f'(\theta_1) = f'(\theta_2) \text{ και εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την } f'$$

στο $[\theta_1, \theta_2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\theta) = 0$. Οπότε η γραφική

παράσταση της f' δέχεται οριζόντια εφαπτομένη για $x = \theta$.

ζ Θεωρώ $h(x) = f(x) - 5$, συνεχής στο $[1, 3]$ με $h(1) = f(1) - 5 = -3 < 0$, $h(3) = f(3) - 5 = 1 > 0$ οπότε $h(1) \cdot h(3) < 0$ ára από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 5$ και αφού η f τότε και η h οπότε το x_0 μοναδικό.

η) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1, x_0]$ και $[x_0, 3]$ οπότε υπάρχουν

$$x_1 \in (1, x_0) \text{ και } x_2 \in (x_0, 3) \text{ τέτοια ώστε}$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{5-2}{x_0 - 1} = \frac{3}{x_0 - 1} \Leftrightarrow \frac{3}{f'(x_1)} = x_0 - 1 \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(3) - f(x_0)}{3 - x_0} = \frac{6-5}{3 - x_0} = \frac{1}{3 - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = 3 - x_0 \quad (2)$$

$$\text{Άρα από (1) και (2) προκύπτει } \frac{3}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = x_0 - 1 + 3 - x_0 = 2.$$

91. **a)** Είναι $5f(x) \leq 3f(2) + 2f(3)$ (1).

Στην (1) θέτουμε $x = 2$ και προκύπτει $5f(2) \leq 3f(2) + 2f(3) \Leftrightarrow f(2) \leq f(3)$ (2)

Επίσης στην (1) θέτουμε $x = 3$ και προκύπτει $5f(3) \leq 3f(2) + 2f(3) \Leftrightarrow f(2) \geq f(3)$ (3)

Οπότε από (2) και (3) προκύπτει $f(2) = f(3)$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

β) Αφού $f(2) = f(3)$ τότε από την (1) προκύπτει $f(x) \leq f(2)$ ή $f(x) \leq f(3)$. Οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στα $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$ ára από Θ. Fermat είναι $f'(2) = 0$ και $f'(3) = 0$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} οπότε και στα διαστήματα $[2, \xi]$ και $[\xi, 3]$. Επίσης $f'(2) = f'(\xi_1) = f'(3) = 0$ ára από Θ. Rolle υπάρχουν $x_1 \in (2, \xi_1)$ και $x_2 \in (\xi_1, 3)$ τέτοια ώστε $f''(x_1) = 0$ και $f''(x_2) = 0$. Αφού η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και $f''(x_1) = f''(x_2)$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

92. **a)** Είναι $f^3(x) + 2f(x) = x^3 + 3$ (1) και θέτουμε όπου x το x_0 ára γίνεται:

$$f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0^3 + 3 \quad (2). \text{ Αφαιρώντας (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:}$$

$$f^3(x) - f^3(x_0) - 2f(x) + 2f(x_0) = x^3 - x_0^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - f(x_0)) [f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2] = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) \quad (3).$$

Η παράσταση $f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) \geq 0$ γιατί έχει $\Delta = -3f^2(x_0) - 8 < 0$

$$\text{οπότε } n(3) \text{ γίνεται: } f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \quad (4)$$

$$\text{οπότε } |f(x) - f(x_0)| = \frac{|x-x_0| \cdot |x^2 + xx_0 + x_0^2|}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \leq \frac{|x-x_0| |x^2 + xx_0 + x_0^2|}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{|x-x_0| |x^2 + xx_0 + x_0^2|}{2} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{|x-x_0| |x^2 + xx_0 + x_0^2|}{2}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{|x-x_0| |x^2 + xx_0 + x_0^2|}{2} \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x-x_0| |x^2 + xx_0 + x_0^2|}{2} = 0 \text{ άρα το κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής και } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\beta) \text{ Για } x \neq x_0 \text{ από τη σχέση (4) έχουμε: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x_0^2 + xx_0 + x_0^2}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2}$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 + xx_0 + x_0^2}{f^2(x_0) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} = \frac{3x_0^2}{3f^2(x_0) + 2}$$

$$\text{άρα } f'(x_0) = \frac{3x_0^2}{3f^2(x_0) + 2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε } n \text{ } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3f^2(x) + 2}.$$

$$\gamma) f'(x) = \frac{3x^2}{3f^2(x) + 2} > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$$

δ) Αφού $n \text{ } f$ είναι \uparrow θα είναι και 1-1 οπότε $n \text{ } f$ αντιστρέφεται και στην (1) θέτω $f(x) = y$ και

$$x = f^{-1}(y) \text{ και έχουμε } y^3 + 2y - 3 = (f^{-1}(y))^3 \Leftrightarrow (f^{-1}(y))^3 = (y-1)(y^2 + y + 3).$$

$$\text{Av } y < 1 \quad f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{-y^3 - 2y + 3}. \text{ Av } y \geq 1 \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y^3 + 2y - 3}.$$

$$\text{Άρα: } f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x^3 - 2x + 3}, & x < 1 \\ \sqrt[3]{x^3 + 2x - 3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

ε) Αφού $n \text{ } f$ είναι \uparrow τότε $n \text{ } f$ εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$ και $n(1)$

$$\text{γίνεται } x^3 + 2x = x^3 + 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \text{ Οπότε το κοινό σημείο των } C_f, C_{f^{-1}} \text{ είναι το}$$

$$\text{σημείο } A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\sigma) \text{ Στην (1) για } x=0 \text{ έχουμε } f^3(0) + 2f(0) = 3 \Leftrightarrow f(0)[f^2(0) + 2] = 3 \Leftrightarrow f(0) = \frac{3}{f^2(0) + 2} > 0.$$

Επίσης στην (1) για $x=-2$ προκύπτει

$$f^3(-2) + 2f(-2) = -5 \Leftrightarrow f(-2)[f^2(-2) + 2] = -5 \Leftrightarrow f(-2) = \frac{-5}{f^2(-2) + 2} < 0$$

Επομένως $f(0) \cdot f(-2) < 0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$. Και επειδή η f είναι ↑ τότε το ρ είναι μοναδικό.

93. **a)** $f'(x) = g(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$. Για $x = 0$: $f(0)f'(0) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(0) \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$ και

για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow (-\infty, 0]$. Ελάχιστο το $g(0)$

b) $f''(x) = g'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα f κυρτή στο $[0, +\infty)$ και

για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) = g'(x) = f(x) < 0$, άρα f κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

$g''(x) = f'(x) = g(x) > 0 \Rightarrow g$ κυρτή στο \mathbb{R} .

γ) Εστω $h(x) = f(x) - xg(0)$, $x \in [0, +\infty)$.

$h'(x) = f'(x) - g(0) = g(x) - g(0) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $h \uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x) > xg(0)$.

94. **a)** Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[1, 5]$ τότε το ελάχιστο της f είναι το 1 και το μέγιστο της f

είναι το 5 και $1 < f(0) < f(2) < 5$ οπότε τα ακρότατα δεν εμφανίζονται στα άκρα 0 και 2,

άρα αφού η f είναι συνεχής υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 5$, οπότε από Θ. Fermat θα είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

b) Αφού $f'(x_1) = f'(x_2)$ και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

γ) Θεωρούμε την $g(x) = 2f(x) + f'(x) - x - 2$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και

$g(x_1) = 2f(x_1) + f'(x_1) - x_1 - 2 = 2 \cdot 1 + 0 - x_1 - 2 = -x_1 < 0$ αφού $x_1 \in (0, 2)$

$g(x_2) = 2f(x_2) + f'(x_2) - x_2 - 2 = 2 \cdot 5 - x_2 - 2 = 8 - x_2 > 0$ αφού $x_2 \in (0, 2)$.

Οπότε $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) + f'(x_0) = x_0 + 2$.

δ) Θεωρούμε την $h(x) = xf'(x) + f(x) - 4$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και

$h(x_1) = x_1 f'(x_1) + f(x_1) - 4 = 0 + 1 - 4 = -3 < 0$, $h(x_2) = x_2 f'(x_2) + f(x_2) - 4 = 5 - 4 = 1 > 0$.

Οπότε $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$h(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho f'(\rho) = 4 - f(\rho)$.

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 1)$

και $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - 2$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 4 - f(1)$

οπότε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(1) - 2 + 4 - f(1) = 2$.

95. **a)** Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την σχέση $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ (1)

$$\text{έχουμε: } f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) \left(1 + e^{-f(x)}\right) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \quad (2).$$

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη τότε από τη (2) προκύπτει ότι και η f' είναι παραγωγίσιμη

$$\text{με } f''(x) = -\frac{(1+e^{-f(x)})'}{(1+e^{-f(x)})^2} = \frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1+e^{-f(x)})^2} > 0 \text{ αφού } n f'(x) > 0 \text{ οπότε } n f \text{ κυρτή άρα } n f' \uparrow.$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Είναι } 0 < \xi < x \text{ οπότε } f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) \quad (3)$$

$$\text{Επίσης } f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}} < 1 \text{ οπότε για } x > 0 \text{ θα είναι } x f'(x) < x \quad (4).$$

$$\text{Άρα από (3) και (4) έχουμε } \frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) < x.$$

γ) Αφού $\frac{x}{2} < f(x) < x$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{f(x)}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^u} = 0. \text{ Από τη σχέση (1) έχουμε:}$$

$$f(x) - (x-1) = e^{-f(x)} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = 0 \text{ άρα } n y = x-1 \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty.$$

96. **a)** Είναι $f(x) = -x^{-v} e^x = \frac{e^x}{x^v}$ οπότε $D_f = \mathbb{R}^*$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* με $f'(x) = \frac{e^x x^v - e^x v x^{v-1}}{x^{2v}} = \frac{e^x x^{v-1}(x-v)}{x^{2v}}$

• Αν v άρτιος τότε $(v-1)$ περιπτώση οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται

στο παρακάτω πίνακα. Και η f έχει Τ.Ε. για $x = v$ το $f(v) = \frac{e^v}{v^v}$.

x	$-\infty$	0	v	$+\infty$
$x-v$	-	-	+	
x^{v-1}	-	+	+	
f'	+	-	+	
f				

- Αν v περιπτώς τότε $(v-1)$ άρτιος οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται στο παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	v	$+\infty$
$x-v$	-	-	+	
x^{v-1}	+	+	+	
f'	-	-	+	
f				

γ) Για $x > 0$ θα ήταν $f(x) \geq f(v) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^v} \geq \frac{e^v}{v^v} \Leftrightarrow e^x \geq \frac{e^v x^v}{v^v} \Leftrightarrow e^x \geq \left(\frac{ex}{v}\right)^v$

δ) Θεωρούμε την $g(x) = \alpha^x - \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^v$ για κάθε $x > 0$. Άρα $g(x) \geq 0$ και $g(v) = 0$, δηλαδή

$$g(x) \geq g(v). \text{ Η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } g'(x) = \alpha^x \ln \alpha - v \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^{v-1} \frac{\alpha}{v}$$

και επειδή έχει ελάχιστο στο $x_0 = v$ από Θ. Fermat θα είναι

$$g'(v) = 0 \Leftrightarrow \alpha^v \ln \alpha - v \left(\frac{\alpha v}{v}\right)^{v-1} \frac{\alpha}{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha^v \ln \alpha - \alpha^v = 0 \Leftrightarrow \alpha^v (\ln \alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

97. α) Από τη σχέση $f^2(x) + \eta \mu^2 x = 2x f(x) \quad (1)$ για $x \neq 0$ προκύπτει

$$\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} = \frac{2x f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^2 = 2 \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \text{ οπότε και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^2 \right] = 2 \lim \left[\frac{f(x)}{x} \right]^2 \text{ δηλαδή } L^2 + 1 = 2L \Leftrightarrow (L-1)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 1$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(\eta \mu x)}{\eta \mu x} \cdot \frac{\eta \mu x}{x(x-1)} \right] = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{\eta \mu x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 1$

θέτοντας $\eta \mu x = u$.

γ) Από τη σχέση (1) $\Leftrightarrow f^2(x) - 2x f(x) + x^2 = x^2 - \eta \mu^2 x \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 - \eta \mu^2 x \quad (2)$.

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $|\eta \mu x| < |x|$ οπότε $\eta \mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta \mu^2 x > 0$ οπότε αν θέσουμε

$h(x) = f(x) - x$ από την (2) θα $h^2(x) = x^2 - \eta \mu^2 x > 0$ οπότε $h(x) \neq 0$ και αφού η h είναι συνεχής τότε η h θα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

δ) Οπότε από (2) είναι $|h(x)| = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}$.

$$\bullet \text{Άρα } h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{οπότε } h(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{Av } h(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{τότε } f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{Av } h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{τότε } f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{Av } h(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{τότε } h(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{οπότε } f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ε) Αφού $f(\pi) = 2\pi$ τότε για $x > 0$ θα είναι

$$\text{i. } f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2x} \text{ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty)$$

$$\text{με } f'(x) = 1 + \frac{2x - 2\eta\mu x \sin x}{2\sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}} = 1 + \frac{x - \eta\mu x \sin x}{2\sqrt{x^2 - \eta\mu^2x}}. \text{ Εστω } \varphi(x) = x - \eta\mu x \sin x, \quad x > 0 \text{ είναι}$$

$$\varphi'(x) = 1 - (\sigma v^2 x - \eta\mu^2 x) = 2\eta\mu^2 x > 0 \text{ άρα } \varphi \uparrow. \text{ Για } x > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$$

οπότε $f'(x) > 0$ άρα f είναι \uparrow στο $(0, +\infty)$.

ii. Είναι $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$ γιατί $\sqrt[12]{3^4} > \sqrt[12]{4^3}$ αφού $81 > 64$ οπότε αφού f είναι \uparrow τότε

$$f(\sqrt[3]{3}) > f(\sqrt[4]{4}).$$

$$98. \quad \text{a)} 2f(x)f'(x) = \sigma v x \Rightarrow (f^2(x))' = (\eta\mu x)' \Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu x + C \stackrel{x=0}{\Rightarrow} C = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu x + 9 \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \text{ και επειδόν } f \text{ είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο.}$$

$$\text{Επειδόν } f(0) = 3, \text{ είναι } f(x) > 0, \text{ άρα } f(x) = \sqrt{\eta\mu x + 9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) i. } \text{Είναι } (f(x) - 2x)e^{-g(x)} = g'(x) \Leftrightarrow e^{g(x)}g'(x) = f(x) - 2x \Leftrightarrow f(x) = e^{g(x)}g'(x) + 2x \Rightarrow$$

$$f(x) = (e^{g(x)} + x^2)'. \text{ Εστω } h(x) = e^{g(x)} + x^2, \quad x \in \mathbb{R} \text{ οπότε } h'(x) = f(x). \text{ Από το ΘΜΤ για την}$$

$$h \text{ υπάρχει } \xi \in (0, x), \quad x > 0: \quad h'(\xi) = \frac{h(x) - h(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{x}(e^{g(x)} + x^2 - e^{g(0)}).$$

Είναι $-1 < \eta\mu\xi < 1 \Leftrightarrow 8 \leq \eta\mu\xi + 9 \leq 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq \sqrt{\eta\mu\xi + 9} \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq f(\xi) \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq \frac{1}{x}(e^{g(x)} + x^2 - e^{g(0)}) \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x \leq e^{g(x)} + x^2 - e^{g(0)} \leq \sqrt{10}x \Leftrightarrow 2\sqrt{2}x - x^2 \leq e^{g(x)} - e^{g(0)} \leq \sqrt{10}x - x^2.$

ii. Εστω ότι έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$. Τότε από θ. Rolle υπάρχει
 $\xi \in (\rho_1, \rho_2) : \varphi'(\xi) = 0$. Όμως $\varphi'(x) = (e^{g(x)} + x^2)' - 2 = f(x) - 2$,
άρα $f(\xi) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\eta\mu\xi + 9} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = -5$ άτοπο.

99. a) Η εξίσωση γίνεται $e^x(xf'(x) - f(x)) = x + 1 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = xe^{-x} + e^{-x} \Leftrightarrow$
 $x(f'(x) - e^{-x}) - (e^{-x} + f(x)) = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} \left(\frac{e^{-x} + f(x)}{x} \right)' = 0$. Εστω $g(x) = \frac{e^{-x} + f(x)}{x}$.
Επειδή $g(1) = \frac{e^{-1} + f(1)}{1}, g(2) = \frac{e^{-2} + f(2)}{2}$ είναι $g(1) = g(2)$ γιατί
 $\frac{1}{e} + f(1) = \frac{e^{-2} + f(2)}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{e} + 2f(1) = \frac{1}{e^2} + f(2) \Leftrightarrow 2e + 2e^2f(1) = 1 + e^2f(2) \Leftrightarrow$
 $e^2 + (2f(1) - f(2)) = 1 - 2e$ που ισχύει,
οπότε από θεώρημα Rolle $\exists \rho \in (1, 2) : g'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho e^\rho f'(\rho) = e^\rho f(\rho) + \rho + 1$
- b) Εστω ότι έχει κι άλλη ρίζα $\rho_1 \neq \rho$ τότε στο (ρ_1, ρ) ή (ρ, ρ_1) τότε για τη συνάρτηση
 $\varphi(x) = xe^x f'(x) - e^x f(x) - x - 1$ εφαρμόζεται το θ. Rolle και υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho)$ ή (ρ, ρ_1) :
 $\varphi'(\xi) = 0$. Είναι $\varphi'(x) = \cancel{e^x f'(x)} + xe^x f'(x) + xe^x f''(x) - \cancel{e^x f(x)} - \cancel{e^x f'(x)} - 1 \Leftrightarrow$
 $\varphi'(x) = xe^x (f'(x) + f''(x)) - e^x f(x) - 1$
 $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) + \xi f''(\xi) - e^{-\xi} - f(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

γ) Από το ΘΜΤ για την f' , $\exists x_0 \in (\rho, 2)$:

$$f''(x_0) = \frac{f'(2) - f'(\rho)}{2 - \rho} \Leftrightarrow f''(x_0) = \frac{\frac{\rho+1}{\rho e^\rho} - \frac{e^\rho f(\rho) + \rho + 1}{\rho}}{2 - \rho} = \frac{f(\rho)}{\rho(2 - \rho)}.$$

Είναι $0 < 2 - \rho < 1 \Rightarrow |2 - \rho| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|2 - \rho|} > 1$, άρα $|f''(x_0)| = \frac{|f(\rho)|}{\rho |2 - \rho|} > \frac{|f(\rho)|}{\rho}$.

100. a) Στην σχέση $f(x+y) = f(x)e^{2y} + f(y)e^{2x} + e^{2x+2y} - 1$ (1) για $x=y=0$ έχουμε:
 $f(0) = f(0) + f(0) + e^0 - 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$.
- b) Παραγωγίζουμε στην (1) οπότε έχουμε $f'(x+y) = f'(x)e^{2y} + 2e^{2x}f(y) + 2e^{2x+2y}$ και
θέτοντας $x=0$ έχουμε $f'(y) = f'(0)e^{2y} + 2e^0f(y) + 2e^{2y} \Leftrightarrow f'(y) = -e^{2y} + 2f(y) + 2e^{2y} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f'(y) = 2f(y) + e^{2y}$ άρα και $f'(x) = 2f(x) + e^{2x}$.
- γ) Είναι $f'(x) - 2f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{-2x}f(x))' = (x)' \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) = x + C$.
Για $x=0$ $f(0) = c \Leftrightarrow c = 0$ άρα $f(x) = xe^{2x}$.

δ) Αν $\alpha < \beta$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$,

$$\text{οπότε υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Όμως } f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} \text{ και } f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x} = 4e^{2x} + 4xe^{2x} > 0$$

αφού $x \in (0, +\infty)$ οπότε f' ↑

$$\text{Είναι } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha}(1+2\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < e^{2\beta}(1+2\beta) \Leftrightarrow (\beta - \alpha)e^{2\alpha}(1+2\alpha) < \beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha} < e^{2\beta}(1+2\beta)(\beta - \alpha)$$

Όμοια αν $\alpha > \beta$ και για $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα. Οπότε για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ είναι

$$e^{2\alpha}(1+2\alpha)(\beta - \alpha) \leq \beta e^{2\beta} - \alpha e^{2\alpha} \leq e^{2\beta}(1+2\beta)(\beta - \alpha).$$

101. **a)** i. Για $y = 1$ και $x > 0$ είναι $f(x) = f(x)f(1) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Rightarrow} f(1) = 1$

$$\text{ii. Για } y = \frac{1}{x} \text{ έχουμε } f\left(x \frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(1) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$$

iii. f συνεχής και $f(x) \neq 0$ και αφού $f(1) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ για $x \in (0, +\infty)$ και $f(0) = 0$ άρα $f(x) \geq 0$ για $x \geq 0$

iv. Είναι $f'(\rho) = \lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho}$. Για $x = x_0 \frac{h}{\rho}$, $h \neq \rho$, έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f\left(x_0 \frac{h}{\rho}\right) - f(x_0)}{x_0 \frac{h}{\rho} - x_0} = \frac{f(x_0) \cdot f\left(\frac{h}{\rho}\right) - f(x_0)}{x_0(h - \rho)} = \frac{\rho f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f\left(\frac{h}{\rho}\right) - 1}{h - \rho} =$$

$$= \frac{\rho f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h)f\left(\frac{1}{\rho}\right) - 1}{h - \rho} = \frac{\rho f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h) - f(\rho)}{h - \rho} = \frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)} \cdot \frac{f(h) - f(\rho)}{h - \rho}$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)} f'(\rho) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)} f'(\rho) \text{ για κάθε } x_0 > 0,$$

$$\text{άρα } x f'(x) f(\rho) = \rho f'(\rho) f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

β) Είναι $x f'(x) f(\rho) = \rho f'(\rho) f(x) \Leftrightarrow x f'(x) \sqrt{\rho} = \rho \frac{1}{2\sqrt{\rho}} f(x) \Leftrightarrow 2x f'(x) \rho' = \rho' f(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln \sqrt{x} + c \stackrel{c=0}{\Rightarrow} f(x) = \sqrt{x}, x > 0.$$

102. **a)** Είναι $f'(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}$.

Επειδή $x > 0$ και $e^{-x} > 0$, είναι και $xe^{-x} > 0$, άρα $f'(x) > 0$.

Ακόμη $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 = 1 \Leftrightarrow xe^{-x} < x$, δηλαδή $f'(x) < x$.

β) Είναι $0 < f'(x) < x$ για κάθε $x > 0$, άρα $f \uparrow (0, +\infty)$, οποτε $f(x) > f(0) = 0$

Εστω $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$. Είναι $h'(x) = f'(x) - x < 0 \Rightarrow h \downarrow (0, +\infty)$, οπότε

$$h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - \frac{x^2}{2} < 0 \Leftrightarrow f(x) < \frac{x^2}{2}$$

γ) $g(x) = 2x^2 - 2(x^2 + 1)e^{-\frac{1}{x^2}} = 2x^2 \left[1 - \frac{x^2 + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \right] = 2x^2 \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right] = 2x^2 f\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Επειδή $0 < f(x) < \frac{x^2}{2}$ για κάθε $x > 0$, αντικαθιστώντας όπου x το $\frac{1}{x^2}$ προκύπτει:

$$0 < f\left(\frac{1}{x^2}\right) < \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{2} \Leftrightarrow 0 < f\left(\frac{1}{x^2}\right) < \frac{1}{2x^4} \Leftrightarrow 0 < 2x^2 f\left(\frac{1}{x^2}\right) < 2x^2 \frac{1}{2x^4} \Leftrightarrow 0 < g(x) < \frac{1}{x^2}$$

103. **a)** Αφού $f'(x) = \frac{e}{e+e^{f(x)}} > 0$ (1) τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τότε και η συνάρτηση $\frac{e}{e+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη

οπότε η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = -\frac{ce^{f(x)}f'(x)}{(e+e^{f(x)})^2} < 0$ οπότε η f είναι κοίλη στο \mathbb{R} .

γ) Είναι $f'(1) = \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \frac{e}{e+e^{f(1)}} = \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow e+e^{f(1)} = e+1 \Leftrightarrow e^{f(1)} = 1 \Leftrightarrow e^{f(1)} = e^0 \Leftrightarrow f(1) = 0$

οπότε το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και αφού η f ↑ τότε το 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

δ) Από (1) $\Leftrightarrow (e+e^{f(x)})f'(x) = e \Leftrightarrow ef'(x) + e^{f(x)}f'(x) = e \Leftrightarrow (ef(x) + e^{f(x)})' = (ex)'$ áρα

$$ef(x) + e^{f(x)} = ex + c. Για x=1 έχουμε e·0 + e^0 = e + c \Leftrightarrow c = 1 - e.$$

Άρα $ef(x) + e^{f(x)} = ex + 1 - e$ (2).

ε) (2) $\Leftrightarrow ex = ef(x) + e^{f(x)} + e - 1 \Leftrightarrow x = f(x) + \frac{ef(x)}{e} + \frac{e-1}{e}$ (3). Αφού η f είναι ↑ θα είναι

και 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτω όπου $f(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$ οπότε

$$f^{-1}(y) = y + \frac{e^y}{e} + \frac{e-1}{e} \text{ áρα } f^{-1}(x) = x + e^{x-1} + \frac{e-1}{e}.$$

104. **a)** $x(x+2)f'(x) + (x+2)f(x) = 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x+2} \Rightarrow$

$$(xf(x))' = (\ln(x+2))' \Leftrightarrow xf(x) = \ln(x+2) + c$$

$$f(e-2) = \frac{1}{e-2} \Leftrightarrow c = 0 \text{ áρα } f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}, x > 0.$$

β) Είναι $f'(x) = \frac{x - (x+2)\ln(x+2)}{x^2(x+2)}$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το

πρόσημο της παράστασης $x - (x+2)\ln(x+2)$. Εστω $g(x) = x - (x+2)\ln(x+2)$, $x > 0$.

Είναι $g'(x) = -\ln(x+2) < 0 \Rightarrow g \downarrow (0, +\infty)$ $x > 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) = -2\ln 2 < 0$

άρα $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (0, +\infty)$

$$\textbf{γ)} (x+2) < (x+3) \Leftrightarrow f(x+2) > f(x+3) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+4)}{x+2} > \frac{\ln(x+5)}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$(x+3)\ln(x+4) > (x+2)\ln(x+5) \Leftrightarrow \ln(x+4)^{x+3} > \ln(x+5)^{x+2} \Leftrightarrow (x+4)^{x+3} > (x+5)^{x+2}$$

$$\textbf{δ)} \text{Είναι } f(e^x) \leq \frac{x+\alpha}{e^x} \Rightarrow \frac{\ln(e^x+2)}{e^x} \leq \frac{x+\alpha}{e^x} \Leftrightarrow \ln(e^x+2) - x \leq \alpha.$$

$$\text{Εστω } h(x) = \ln(e^x+2) - x, x \geq 0. \quad h'(x) = \frac{e^x}{e^x+2} - 1 = \frac{-e^x - 2}{e^x+2} < 0 \text{ άρα } h \downarrow \text{ στο } [0, +\infty)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow h(x) \leq h(0) = \ln 3. \text{ Άρα } \alpha_{\min} = \ln 3$$

$$105. \text{ a)} \Sigma \text{την σχέση } 3f(x) \leq 2f(\alpha) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ θέτουμε διαδοχικά } x = \alpha, x = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ και προκύπτει:}$$

$$f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \text{ Οπότε η ανισότητα γίνεται } f(x) \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \text{ δηλαδή } \text{η } f \text{ έχει μέγιστο στο}$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}. \text{ Επειδή } \frac{\alpha+\beta}{2} \in (\alpha, \beta) \text{ από θ.Fermat είναι } f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

$$\textbf{β)} \text{Από το θ.Rolle για την } f \text{ στο } \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \exists \rho \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) : f'(\rho) = 0 \text{ και αφού } f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$$

$$\text{τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον κρίσιμα σημεία για } x = \rho \text{ και } x = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\textbf{γ)} \text{Από το θ.Rolle για την } f' \text{ στο } \left[\rho, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \exists \xi \in \left(\rho, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) : f''(\xi) = 0$$

$$\textbf{δ)} \text{Από το ΘMT για την } f' \text{ στο } \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$$

$$\exists x_0 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) : f''(x_0) = \frac{f'(\beta) - f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Rightarrow f''(x_0) = 2 \frac{f'(\beta)}{\beta-\alpha}.$$

$$\text{Όμως } |f''(x_0)| \leq \alpha + \beta \quad 2 \left| \frac{f'(\beta)}{\beta-\alpha} \right| \leq \alpha + \beta \stackrel{\beta-\alpha>0}{\Rightarrow} 2|f'(\beta)| \leq (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \Rightarrow 2|f'(\beta)| \leq \beta^2 - \alpha^2.$$

$$106. \text{ a)} \text{Η } h(x) = \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \text{ συνεχής στο } [\alpha, \beta] \text{ ως πολύκο σ.σ.}$$

$$\Sigma \text{το } x = \beta \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow \beta^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} = f'(\beta) = 0 = h(\beta) \text{ άρα } h \text{ συνεχής στο } [\alpha, \beta].$$

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $h'(x) = \frac{f'(x)(x-\beta)-f(x)+f(\beta)}{(x-\beta)^2}$ και

$$h'(\alpha) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2} < 0 \text{ γιατί } f'(\alpha)=0 \text{ και } f(\beta) > f(\alpha).$$

γ) Αφού $h'(\alpha) < 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha} < 0$, άρα $\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha} < 0$ κοντά στο α .

Όμως $x-\alpha > 0$ κοντά στο α , οπότε $h(x)-h(\alpha) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(\alpha)$.

Είναι $h(\alpha) = \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} < 0$ οπότε $h(x) < h(\alpha) < 0 = h(\beta)$ οπότε η f δεν έχει ελάχιστη τιμή στα άκρα α ή β . Όμως είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ οπότε θα έχει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο του (α, β) . Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τότε από Fermat είναι

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)(x_0-\beta)-f(x_0)+f(\beta)}{(x_0-\beta)^2} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(\beta)}{x_0-\beta}.$$

107. **α)** Είναι $f(x) = e^x - 1$ και $f'(x) = e^x$, $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0 = 0$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x-0)$ άρα $\varepsilon : y = x$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $y = x$ εφαπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = -x^2 - x - 1$. Είναι $h'(x) = -2x - 1$. Αν υποθέσουμε ότι $(x_1, h(x_1))$ είναι το σημείο επαφής πρέπει $h'(x_1) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -2x_1 - 1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1$ και $h(-1) = -1$, $h'(-1) = 1$ οπότε η εφαπτομένη της C_h στο $x_1 = -1$ είναι $y - h(-1) = h'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y + 1 = x + 1 \Leftrightarrow y = x$.

β) Έστω $g(x) = f(x) - h(x) = e^x - 1 + x^2 + x + 1 = e^x + x^2 + x$.

Είναι $g'(x) = e^x + 2x + 1$ και $g''(x) = e^x + 2 > 0$ οπότε η g' είναι γνησίως αύξουσα.

$g'(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$, $g'(0) = e^0 + 1 = 2 > 0$. Οπότε $g'(-1) \cdot g'(0) < 0$ και αφού η g' είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα θα υπάρχει μοναδικό $p \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $g'(p) = 0 \Leftrightarrow e^p + 2p + 1 = 0$ (1).

γ) Για $x < p$ είναι $g'(x) < g'(p) \Leftrightarrow g'(x) < 0$ οπότε $g \downarrow$

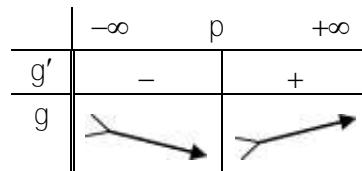
i. Για $x > p$ είναι $g'(x) > g'(p) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ οπότε $g \uparrow$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι $g(x) \geq g(p) \Leftrightarrow g(x) \geq e^p + p^2 + p$.

Όμως από (1) $e^p = -2p - 1$ οπότε $g(x) \geq -2p - 1 + p^2 + p \Leftrightarrow g(x) \geq p^2 - p - 1$.

ii. Για το πρόσημο της g' και την μονοτονία της g

έχουμε το διπλανό πίνακα.



Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x + x^2 + x] = +\infty$

γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2 + x) = +\infty$.

Επίσης $p^2 - p - 1 < 1821 \Leftrightarrow p^2 - p < 1822$ γιατί $p \in (-1, 0)$ και $-2 < p - 1 < -1$ οπότε $p(p-1) < 2 \Leftrightarrow p^2 - p < 2 < 1822$.

Η $g \downarrow$ στο $(-\infty, p]$ με σύνολο τιμών $g(A_1) = [g(p), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)] = [p^2 - p - 1, +\infty)$ και αφού $1821 \in g(A_1)$ τότε υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 1821$ στο $(-\infty, p)$.

Επίσης η $g \uparrow$ στο $[p, +\infty)$ με σύνολο τιμών $g(A_2) = [g(p), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)] = [p^2 - p - 1, +\infty)$ και αφού $1821 \in g(A_2)$ τότε η εξίσωση $g(x) = 1821$ θα έχει άλλη μια ρίζα στο διάστημα $(p, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $g(x) = 1821$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} 108. \text{ a)} \text{ Εξουμε } (f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{4}{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 - 2f'(x) + 1 = 1 - \frac{4}{x^2 + 4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f'(x) - 1)^2 = \frac{x^2}{x^2 + 4}. \text{ Έστω } h(x) = f'(x) - 1 \text{ τότε είναι } h^2(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $h^2(x) > 0$ και αφού η h είναι συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } h(-2) = f'(-2) - 1 < 0 \text{ άρα } h(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 4}} = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 4}} \stackrel{x < 0}{=} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \text{ και}$$

$$\text{και } h(2) = f'(2) - 1 > 0, \text{ άρα } h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}, x > 0. \text{ Δηλαδή}$$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}, x \neq 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + 1, x \neq 0$$

$$\text{Επίσης για } x = 0 \quad h(0) = (f'(0) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1,$$

$$\text{άρα } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b)} \text{ Είναι } f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)' \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4} + C. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = 2 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Άρα } f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}.$$

$$\text{Επίσης } f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{γ)} \text{ Είναι } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0 \quad (1) \text{ άρα η } f \text{ είναι } \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Επίσης } f''(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)' = \frac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}} > 0 \text{ οπότε η } f \text{ κυρτή στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{δ)} \text{ i. } \text{Είναι } g(x) = \ln f(x) \text{ η οποία είναι παραγωγήσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0.$$

$$\text{ii. } \text{Αφού } g'(x) > 0 \text{ τότε η } g \uparrow \text{ οπότε για } x > 0 \text{ θα είναι } g(x) > g(0) = \ln 2 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0.$$

$$\text{Θεωρούμε } \varphi(x) = xg(x) - f(x) + x + 2, x > 0 \text{ είναι}$$

$$\varphi'(x) = g(x) + xg'(x) - f'(x) + 1 = g(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + 1 = g(x) > 0$$

οπότε η $\varphi \uparrow$ άρα για $x > 0$ θα είναι

$$\varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow xg(x) - f(x) + x + 1 > 0 \Leftrightarrow xg(x) > f(x) - x - 2 \Leftrightarrow g(x) > \frac{f(x) - x - 2}{x}$$

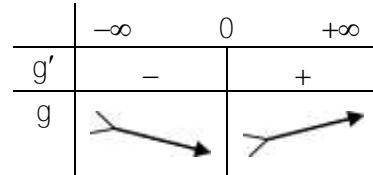
109. a) i. Εστω $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $g'(x) = e^x - 1$ και $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$. Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \quad (1)$$

Θέτουμε στην (1) όπου x το $f(x)$ και γίνεται

$$e^{f(x)} \geq f(x) + 1 \quad (2)$$



ii. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \quad (3)$

$$\text{Οπότε } (2) \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) \geq 2f(x) + 1 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} x + 1 \geq 2f(x) + 1 \Leftrightarrow 2f(x) \leq x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{iii. Εχουμε } (3) \quad e^{f(x)} = x + 1 - f(x) \text{ αφού } f(x) \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow -f(x) \geq -\frac{x}{2} \Leftrightarrow \\ x + 1 - f(x) \geq x + 1 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} \geq \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} \geq \ln \left(\frac{x+2}{2} \right) \Leftrightarrow f(x) \geq \ln(x+2) - \ln 2$$

β) Παραγωγίζοντας την (3) έχουμε: $e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+e^{f(x)}} > 0$ οπότε η f είναι

↑ στο \mathbb{R} . Αφού η συνάρτηση $\frac{1}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τότε και $f'(x)$ είναι

$$\text{παραγωγίσιμη με } f''(x) = -\frac{e^{f(x)} f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} < 0 \text{ οπότε η } f \text{ είναι κοίλη στο } \mathbb{R}.$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $2f(x) \leq x$ οπότε και για $x < 0$ είναι $f(x) \leq \frac{x}{2} < 0$.

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\text{Επίσης για } x \geq 0 \text{ είναι } f(x) \geq \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right). \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = +\infty$$

θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} τότε

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

δ) Αφού η f είναι ↑ θα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Στην (3) θέτουμε όπου $f(x) = y$

$$\text{και } x = f^{-1}(y) \text{ και γίνεται } e^y + y = f^{-1}(y) + 1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + y - 1.$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

110. a) Εστω ότι η f'' δεν είναι 1-1 τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, έστω $x_1 < x_2$ με $f''(x_1) = f''(x_2)$

οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$ (άτοπο).

β) Αφού η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη, $f^{(3)}(x)$ είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αφού $f^{(3)}(3) > 0$ τότε $f^{(3)}(x) > 0$ άρα $f''(x) \uparrow$

γ) Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) + f(6-x) = 5$ (1) έχουμε $f'(x) - f'(6-x) = 0$ και

$$f''(x) + f''(6-x) = 0 \quad (2).$$

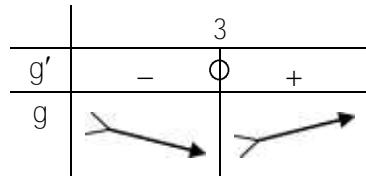
Στην (2) για $x = 3$ προκύπτει $f''(3) = 0$ και οπότε για $x < 3$ θα είναι $f''(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$ οπότε f κοίλη στο $(-\infty, 3]$

ενώ για $x > 3$ είναι $f''(x) > f''(3) \Leftrightarrow f''(x) > 0$ áρα f κυρτή στο $[3, +\infty)$.

Η f έχει Σ.Κ. για $x = 3$ το $(3, f(3)) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$.

δ) Αφού $f(3) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2f(3) = 5$ τότε η εξίσωση $2f(x) = 5$ έχει ρίζα τη $x = 3$.

Επίσης



Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > f'(3) > 0$ οπότε $f'(x) > 0$ áρα η f είναι ↑ οπότε η ρίζα $x = 3$ είναι μοναδική.

ε) Η εξίσωση $2f(x+2) = f(x+1) + f(x+3)$ γίνεται $f(x+2) - f(x+1) = f(x+3) - f(x+2)$ (3).

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x+1, x+2]$ και $[x+2, x+3]$ οπότε υπάρχουν

$\xi_1 \in (x+1, x+2)$ και $\xi_2 \in (x+2, x+3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f(x+2) - f(x+1)$,

$f'(\xi_2) = f(x+3) - f(x+2)$. Άρα (3) προκύπτει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ áτοπο αφού $\xi_1 \neq \xi_2$ και f' ↑ στο $[3, +\infty)$.

$$111. \text{ a)} \text{ Είναι } f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = e^x \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (e^x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^x + c$$

και για $x = 0$ είναι $e^{\ln 2} = e^0 + c \Leftrightarrow c = 1$, οπότε $e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{b)} f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ και } f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ οπότε η } f \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{γ)} f'(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2} \text{ áρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι } y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \ln 2.$$

δ) Αφού η f είναι κυρτή σε κάθε σημείο η εφαπτομένη θα είναι κάτω από C_f

$$\text{άρα } f(x) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2 \quad \ln(e^x + 1) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2.$$

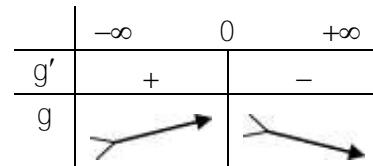
$$\text{ε)} \text{ Είναι } g(x) = 3x - e^{f(x)+x} = 3x - e^{\ln(e^x+1)+x} = 3x - (e^x + 1)e^x = 3x - e^{2x} - e^x \text{ οπότε}$$

$$g'(x) = 3 - 2e^{2x} - e^x, \quad g''(x) = -4e^{2x} - e^x < 0 \text{ οπότε } g' \downarrow.$$

Για $x < 0$ είναι $g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0$ ενώ

για $x > 0$ είναι $g'(x) < g'(0) \Rightarrow g'(x) < 0$ οπότε

έχουμε τον διπλανό πίνακα.



Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq -2$.

Άρα η g έχει μέγιστο στο σημείο $A(0, 2)$.

στ) Είναι $g(x) \leq -2 < 0$ και αφού $1+e^x > 1$ τότε $\ln(1+e^x) > \ln 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$ áρα $f(x) > g(x)$.

112. Ισχύει $\ln x + f(x) = x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Θεωρούμε την $h(x) = \ln x + x$, $x > 0$ είναι $h'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ οπότε η h είναι ↑.

Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε από (1) θα είναι $\ln x_1 + f(x_1) < \ln x_2 + f(x_2)$.

Δηλαδή $h(f(x_1)) < h(f(x_2))$ και αφού η h είναι ↑ τότε θα έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f ↑ στο \mathbb{R} .

β) Αν $f(x) = x$, τότε (1) $\Rightarrow \ln x + x = x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

γ) i. Παραγωγίζουμε στη σχέση (1) και έχουμε:

$$f'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x) \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1} \quad (2).$$

ii. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε από (2) και η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2} > 0 \text{ áρα } f \text{ είναι κυρτή.}$$

113. **α)** Είναι $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ οπότε η f ↑ στο \mathbb{R} .

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1.$$

Αφού η f είναι συνεχής και ↑ στο \mathbb{R} τότε $f(A) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (0, 1)$.

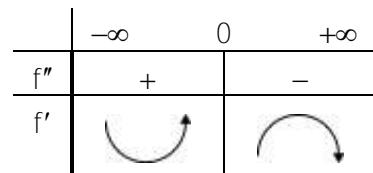
γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1)^2 - e^x 2(e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} \geq 0 \Rightarrow 1 - e^x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0.$$

Οπότε για το πρόσημο της f'' και την κυρτότητα της f έχουμε τον διπλανό πίνακα.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κούλη στο $[0, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής για το $(0, f(0)) \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$.



δ) Αρκεί να δείξουμε ότι: $f(4^x) - f'(4^x) < f(5^x) - f'(5^x)$.

Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - f'(x)$, $x > 0$.

$$\text{Είναι } g'(x) = f'(x) - f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x + 1)^3} = \frac{2e^{2x}}{(1+e^x)^3} > 0 \text{ οπότε } g \uparrow \text{ στο } (0, +\infty).$$

Για $x > 0$ είναι $4 < 5$ και $4^x < 5^x$ áρα $g(4^x) < g(5^x) \Leftrightarrow f(4^x) - f'(4^x) < f(5^x) - f'(5^x)$.

ε) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

$$\text{Είναι } h(0) = f(0) = \frac{1}{2} > 0, \quad h(1) = f(1) - 1 = \frac{e}{e+1} - 1 = -\frac{1}{e+1} < 0 \text{ οπότε αφού } h \text{ συνεχής στο } [0, 1] \text{ και } h(0) \cdot h(1) < 0 \text{ από Θ. Bolzano υπάρχει } x_0 \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0. \text{ Επίσης } h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = -\frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2} < 0 \text{ οπότε } h$$

είναι γνησίως φθίνουσα áρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

114. **a)** i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, 1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1) - f(0) \quad (2).$$

ii. Στη σχέση $2(f'(x) - 1) \geq f^2(0) + f^2(1)$ (1) θέτουμε $x = \xi$ οπότε γίνεται

$$\begin{aligned} 2(f'(\xi) - 1) &\geq f^2(0) + f^2(1) \Leftrightarrow 2f'(\xi) - 2 \geq f^2(0) + f^2(1) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2(f(1) - f(0)) - 2 \geq f^2(0) + f^2(1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^2(0) + f^2(1) - 2f(1) + 2f(0) + 1 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0) + 1)^2 + (f(1) - 1)^2 \leq 0 \text{ óμως} \\ &(f(0) + 1)^2 + (f(1) - 1)^2 \geq 0 \text{ áρα } (f(0) + 1)^2 + (f(1) - 1)^2 = 0 \text{ οπότε } f(0) = -1 \text{ και } f(1) = 1. \end{aligned}$$

iii. Από την (1) έχουμε

$$2f'(x) - 2 \geq f^2(0) + f^2(1) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} 2f'(x) - 2 \geq (-1)^2 + 1^2 \Leftrightarrow 2f'(x) \geq 4 \Leftrightarrow f'(x) \geq 2 \quad (3)$$

b) i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x_0]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0} \Leftrightarrow x_0 f'(\xi_1) = f(x_0) + 1.$$

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0, 1]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} \Leftrightarrow (x_0 - 1) f'(\xi_2) = f(x_0) - 1.$$

iii. Από τη σχέση (3) θα είναι $f'(\xi_1) \geq 2$ και $f'(\xi_2) \geq 2$ δηλαδή

$$\frac{f(x_0) + 1}{x_0} \geq 2 \Leftrightarrow f(x_0) \geq 2x_0 - 1 \quad (4) \text{ και}$$

$$\frac{f(x_0) - 1}{x_0 - 1} \geq 2 \Leftrightarrow f(x_0) - 1 \leq 2(x_0 - 1) \Leftrightarrow f(x_0) \leq 2x_0 - 1 \quad (5)$$

Από (4), (5) είναι $f(x_0) = 2x_0 - 1$ για τυχαίο $x_0 \in (0, 1)$ áρα $f(x) = 2x - 1$, $x \in (0, 1)$ και αφού $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ τότε $f(x) = 2x - 1$, $x \in [0, 1]$.

115. α) Είναι $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 2xe^{\frac{1}{x^2}} - x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = 2e^{\frac{1}{x^2}} \left(x - \frac{1}{x} \right) = 2e^{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2 - 1}{x}$$

οπότε για το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	-	-	+	
x	-	-	+	+	
f'	-	+	-	+	
f					

Η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ και $x = -1$ το $f(-1) = f(1) = e$.

$$\beta) f''(x) = 2e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} \right) \frac{x^2 - 1}{x} + 2e^{\frac{1}{x^2}} \frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{x^2} = 2e^{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2 + 1}{x^2} - 4e^{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2 - 1}{x^4} = \\ = 2e^{\frac{1}{x^2}} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} - \frac{2(x^2 - 1)}{x^4} \right) = 2e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^4} > 0$$

αφού $x^4 - x^2 + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (τριώνυμο ως προς x^2 με $x < 0$). Οπότε η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{+\infty}{\underset{-\infty}{\sim}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} \right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{(+\infty)}{\underset{-\infty}{\sim}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} \right)}{-\frac{2}{x^3}} = +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$$

Από τον πίνακα μονοτονίας και τα προηγούμενα όρια διαπιστώνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = [e, +\infty)$.

$$\delta) \text{Η εξίσωση } e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\lambda}{x^2} \text{ γίνεται } x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

- Αν $\lambda < e$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = e$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 1$
- Αν $\lambda > e$ η εξίσωση έχει τέσσερις λύσεις μία σε κάθε διάστημα:
 $\rho_1 \in (-\infty, -1)$, $\rho_2 \in (-1, 0)$, $\rho_3 \in (0, 1)$ και $\rho_4 \in (1, +\infty)$.

116. α) Η συνάρτηση $f'(x) = \frac{4e^x + x^2}{e^x + x^2}$ είναι παραγωγήσιμη στο \mathbb{R} με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4e^x + 2x)(e^x + x^2) - (e^x + 2x)(4e^x + x^2)}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{4e^{2x} + 4x^2 e^x + 2x e^x + 2x^3 - 4e^{2x} - x^2 e^x - 8x e^x - 2x^3}{(e^x + x^2)^2} = \frac{3x^2 e^x - 6x e^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{3e^x x(x-2)}{(e^x + x^2)^2} \end{aligned}$$

οπότε για το πρόσημο της f'' και την κυρτότητα της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+	-	+	
f				

Η f είναι κυρτή στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$ και κοῖλη στο $[0, 2]$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x + x^2}{e^x + x^2} - 1 = \frac{4e^x + x^2 - e^x - x^2}{e^x + x^2} = \frac{3e^x}{e^x + x^2} > 0$ άρα η h είναι \uparrow στο \mathbb{R} .

γ) Αφού $f'(x) > 0$ τότε η f είναι \uparrow στο \mathbb{R} οπότε το σύνολο τιμών είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + f(0)) = -\infty$ άρα $x + f(0) < 0$ σε περιοχή του $-\infty$ οπότε

$$f(x) < x + f(0) < 0 \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{x + f(0)}.$$

Από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) < 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Επίσης για κάθε $x > 0$ θα είναι $h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x + f(0)$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty$. Άρα $x + f(0) > 0$ σε περιοχή του $+\infty$ άρα $0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x + f(0)}$ οπότε

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Οπότε το σύνολο τιμών της \mathbb{R} είναι $f(A) = \mathbb{R}$.

δ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, x+504]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (x, x+504) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x+504) - f(x)}{x+504 - x} \Leftrightarrow 504f'(\xi) = f(x+504) - f(x).$$

Για $x > 4$ η f είναι κυρτή άρα η $f' \uparrow$ οπότε $4 < x < \xi < x+504 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+504)$

$504f'(x) < 504f'(\xi) < 504f'(x+504)$ άρα $504f'(x) < f(x+504) - f(x) < 504f'(x+504)$.

$$\text{Για } x > 4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + x^2}{e^x + x^2} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + 2x}{e^x + 2x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + 2}{e^x + 2} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x} = 4.$$

Αν $x \rightarrow +\infty$ τότε $x+504 \rightarrow +\infty$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} 504f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [504f'(x+504)] = 4 \cdot 504 = 2016$. Οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+504) - f(x)) = 2016$.

117. a) i. Στη σχέση $f(x) \geq e^{2x}$ (1) θέτω όπου $x=0$ και προκύπτει $f(0) \geq e^0 \Leftrightarrow f(0) \geq 1$ (3).

Επίσης στη σχέση (2) $f(x) \cdot f(-x) = 1$ θέτουμε όπου $x=0$ και προκύπτει $f(0) \cdot f(0) = 1 \Rightarrow f^2(0) = 1$ (4). Από (3) και (4) προκύπτει $f(0) = 1$.

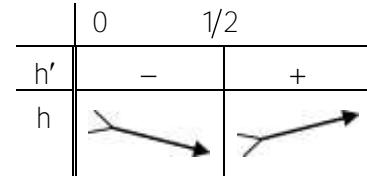
ii. Στην (1) θέτω όπου $x \rightarrow -\infty$ και έχουμε $f(-x) \geq e^{-2x} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{e^{-2x}} \Leftrightarrow f(x) \leq e^{2x}$ (5).

Οπότε από (1) και (5) προκύπτει $f(x) = e^{2x}$.

b) i. Είναι $h(x) = \frac{e^{2x}}{x}$, $x > 0$ και

$$h'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$



Άρα για κάθε $x > 0$ θα είναι $h(x) \geq h\left(\frac{1}{2}\right) = 2e$.

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} e^{2x} \right) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} \stackrel{\left(+\infty\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{1} = +\infty$ οπότε και

από τον πίνακα μονοτονίας της h προκύπτει ότι το σύνολο τιμών είναι $h(A) = [2e, +\infty)$.

iii. Είναι $\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = -2 \Leftrightarrow \ln(\alpha \beta \gamma) = -2 \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = e^{-2}$.

$$\text{Επίσης } h(\alpha) = \frac{e^{2\alpha}}{\alpha} \geq 2e, \quad h(\beta) = \frac{e^{2\beta}}{\beta} \geq 2e, \quad h(\gamma) = \frac{e^{2\gamma}}{\gamma} \geq 2e.$$

$$\text{Επομένως } h(\alpha)h(\beta) + h(\beta)h(\gamma) + h(\gamma)h(\alpha) \geq 12e^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{e^{2\beta}}{\beta} + \frac{e^{2\beta}}{\beta} \cdot \frac{e^{2\gamma}}{\gamma} + \frac{e^{2\gamma}}{\gamma} \cdot \frac{e^{2\alpha}}{\alpha} \geq 12e^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)}}{\alpha \beta \gamma} \geq 12e^2 \Leftrightarrow$$

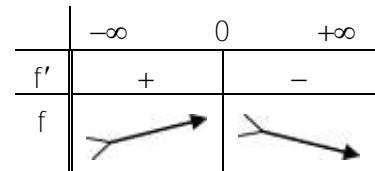
$$\frac{\gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)}}{e^{-2}} \geq 12e^2 \Leftrightarrow \gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)} \geq 12$$

118. a) Η $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 6x + 6)e^{-x} - e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) = \\ &= e^{-x}(3x^2 + 6x + 6 - x^3 - 3x^2 - 6x - 6) = -x^3 e^{-x}. \end{aligned}$$

Οπότε για το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f έχουμε το διπλανό πίνακα.

Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 6$.



β) Η f είναι δύο φορές παραγωγήσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) = -3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = e^{-x}x^2(x-3)$.

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	-	-	+
f''			
f	↙	↙	↗

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 3]$ και κυρτή στο $[3, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $A\left(3, \frac{84}{e^3}\right)$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{e^x} = -\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$.

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 6x + 6}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 6}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

Η f είναι ↑ στο $(-\infty, 0]$ οπότε έχει σύνολο τιμών $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 6]$ και η f είναι ↓ στο $[0, +\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών $f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0)\right] = (0, 6]$ οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 6]$.

δ) Είναι $f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{e^x} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{6} \leq e^x \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1$.

ε) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$e^{h(x)} - h(x) \geq \frac{h^3(x)}{6} + \frac{h^2(x)}{2} + 1 \Leftrightarrow e^{h(x)} - h(x) - \frac{h^3(x)}{6} \geq \frac{h^2(x)}{2} + 1$$

οπότε $e^{h(x)} - h(x) - \frac{h^3(x)}{6} \geq \frac{h^2(x)}{2} + 1 \geq 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h^2(x)}{2} + 1 \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^2(x)}{2} = 0 \text{ áρα } \lim_{x \rightarrow 0} h^2(x) = 0.$$

$$\text{Επειδή } -|h(x)| \leq h(x) \leq h(x) \Leftrightarrow -\sqrt{h^2(x)} \leq h(x) \leq \sqrt{h^2(x)}$$

τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sqrt{h^2(x)}) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{h^2(x)}$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

119. **α)** Είναι $f(x) = (x-2) \ln x + x - 3$, $D_f = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-2) \ln x + x - 3] = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2$$

οπότε η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)\ln x + x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln x - \frac{2\ln x}{x} + 1 - \frac{3}{x} \right] = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty,$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ οπότε δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x - \frac{2}{x} + 2$. Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$ και

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$ οπότε $f' \uparrow$. Άρα $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ οπότε $f \downarrow$ στο $(0, 1]$. Αν $x > 1$ τότε $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$.

γ) Είναι $f(1) = -2 < 0$. Επειδή $f \downarrow$ στο $(0, 1]$ τότε $f(A_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [-2, +\infty)$ και επειδή $0 \in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$. Επίσης $f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$ τότε $f(A_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-2, +\infty)$ και αφού $0 \in f(A_2)$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

δ) Θεωρούμε την $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [x_1, x_2]$ θα είναι $h(x_1) = h(x_2) = 0$ αφού $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Επίσης η h είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ (1). Η εφαπτόμενη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ και αυτή διέρχεται από το $(0, 0)$ αν $0 - f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ που ισχύει από (1). Θεωρούμε τη $\varphi(x) = xf'(x) - f(x)$, $x > 0$ τότε $\varphi'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) > 0$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα το ξ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $xf'(\xi) - f(\xi) = 0$.

ε) Επειδή $f''(x) > 0$ τότε $f' \uparrow$ και αφού $\xi \in (x_1, x_2)$ δηλαδή $\xi < x_2$ τότε

$$f'(\xi) < f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi} < f'(x_2) \Leftrightarrow \xi f'(x_2) - f(\xi) > 0.$$

120. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{\frac{2}{2x}2x - 2\ln 2x}{4x^2} = \frac{2(1 - \ln 2x)}{4x^2} = \frac{1 - \ln 2x}{2x^2} \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 - \ln 2x \geq 0 \Rightarrow \ln 2x \leq \ln e \Leftrightarrow x \leq \frac{e}{2}$.
Η $f \uparrow$ στο $\left(0, \frac{e}{2}\right]$ και \downarrow στο $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$,
παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{e}{2}$ το $f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{e}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2x} \ln 2x \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$.

$f \uparrow$ στο $\left(0, \frac{e}{2}\right]$ με $f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$ και $f \downarrow$ στο $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$ με $f(A_2) = \left(0, \frac{1}{e}\right]$.

Οπότε το σύνολο τιμών $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

γ) Η εξίσωση $\sqrt{2x} = e^{2x}$ γίνεται $2x = (e^{2x})^2 \Leftrightarrow 2x = e^{2x}$ οπότε

$$\ln 2x = \ln e^{2x} \Leftrightarrow 2x = \ln 2x \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2x}{2x} \Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

- Αν $\lambda \leq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση

- Αν $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις

- Αν $\lambda = \frac{1}{e}$ η εξίσωση έχει λύση την $x = \frac{e}{2}$

- Αν $\lambda > \frac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{\ln 2x_0}{2x_0} = \frac{1 - \ln 2x_0}{2x_0^2}(x - x_0).$$

Αν αυτή διέρχεται από το σημείο $(0, -1008)$ τότε

$$-1008 - \frac{\ln 2x_0}{2x_0} = \frac{1 - \ln 2x_0}{2x_0^2}(-x_0) \Leftrightarrow -2016x_0 - \ln 2x_0 = -1 + \ln 2x_0 \Leftrightarrow 2\ln 2x_0 + 2016x_0 - 1 = 0$$

Εστω $g(x) = 2\ln 2x + 2016x - 1$, $x > 0$ με $g'(x) = \frac{2}{x} + 2016 > 0$ άρα η $g \uparrow$ με σύνολο τιμών

$$g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty).$$

Επειδή $0 \in g((0, +\infty))$ υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

ε) Θεωρούμε την $h(t) = \ln^2 2t$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x, x+1]$ με

$$h'(x) = 2\ln 2x \frac{1}{2x} 2 = 4f(x), \text{ οπότε από ΘΜΤ υπάρχει } \xi \in (x, x+1) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$h'(\xi) = \frac{h(x+1) - h(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow 4f(\xi) = \ln^2 2(x+1) - \ln^2 2x.$$

Αφού $x \rightarrow +\infty$ τότε $x > \frac{e}{2}$ όπου $f \downarrow$ οπότε $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow 4f(x) > 4f(\xi) > 4f(x+1)$ οπότε

$$4f(x+1) < \ln^2(2x+1) - \ln^2 2x < 4f(x)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2x}{2x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 0$ άρα από κριτήριο

παρεμβολής και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln^2 2(x+1) - \ln^2 2x] = 0$.

121. **α)** Είναι $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $D_f = \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \ln 1 - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \end{aligned}$$

οπότε η f είναι περιπτή άρα η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

γ) $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ άρα f ↑ στο \mathbb{R} και δεν

παρουσιάζει ακρότατα.

δ) Είναι $f''(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κούλη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $(0, f(0)) \equiv (0, 0)$.

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})^{(\frac{+\infty}{+\infty})}}{\ln 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$.

στ) $f(5x) + 2x = f(3x) \Leftrightarrow f(5x) + 5x - 3x = f(3x) \Leftrightarrow f(5x) + 5x = f(3x) + 3x \quad (1)$.

Αν θεωρήσουμε $g(x) = f(x) + x$ τότε $g'(x) = f'(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 > 0$ άρα g ↑

οπότε και 1-1. Συνεπώς η (1) γίνεται $g(5x) = g(3x) \Leftrightarrow 5x = 3x \Leftrightarrow x = 0$.

122. **α)** $f'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2 + \lambda) = e^{-x}(-x^2 + 2x - \lambda)$ με $f(0) = \lambda$ και $f'(0) = -\lambda$ οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(0, f(0))$ είναι $y - \lambda = -\lambda x \Leftrightarrow y = -\lambda x + \lambda$.

Για να ταυτίζεται με την $y = -3x + 3$ πρέπει $\lambda = 3$.

β) Για $\lambda = 3$ είναι $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x - 3) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα f ↓ στο \mathbb{R} .

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{-x}(x^2 + 3)] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Η f ↓ στο \mathbb{R} άρα $f(A) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (0, +\infty)$

δ) Επειδή $2014 \in (0, +\infty)$ και η f ↓ στο $(0, +\infty)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 2014$ έχει ακριβώς μια λύση στο \mathbb{R} .

123. **a)** $xf'(x) + e = f(x) + e \ln x \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = e(\ln x - 1) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{e(\ln x - 1)}{x^2} \Leftrightarrow$
 $\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(-\frac{e \ln x}{x} \right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\frac{e \ln x}{x} + C \Leftrightarrow f(x) = -e \ln x + Cx.$
 $f(1) = 1 \Leftrightarrow C = 1$, áρα $f(x) = x - e \ln x$, $x > 0$.

b) Είναι $f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$ και $f \downarrow$ στο $(0, e]$ και \uparrow στο $[e, +\infty)$.

Έχει ολικό ελάχιστο για $x = e$ το $f(e) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x - e \ln x] = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{e \ln x}{x} \right) \right] = +\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \ln x}{x} \stackrel{\left(\begin{array}{c} +\infty \\ +\infty \end{array} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$. Οπότε $f(A) = [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow x - e \ln x \geq 0 \Leftrightarrow e \ln x \leq x \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{e}{x} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{x}{e}}$.

γ) $f \uparrow$ στο $[e^2, +\infty)$ με $f(e^2) = e^2 - 2e = e(e-2) > 0$ áρα $0 \notin [f(e^2), +\infty)$.

δ) Αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $f''(x) = \left(1 - \frac{e}{x} \right)' = \frac{e}{x^2} > 0 \Rightarrow f' \uparrow (0, +\infty)$ και $\xi_1 < \xi_2$, áρα

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta).$$

124. **a)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) + 3x^2 \ln x \right] = 0 + 0 = 0$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\begin{array}{c} -\infty \\ +\infty \end{array} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) = 0$

β) i. Εστω $g(x) = x \ln x + 1$, $x \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$. Η g συνεχής στο $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ ως áθροισμα συνεχών και

$$g\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} + \ln \frac{1}{e^2} + 1 = \frac{1}{e^2} - 2 + 1 = \frac{1}{e^2} - 1 < 0, \quad g(1) = 2 > 0. \quad \text{Άρα σύμφωνα με το } \Theta.$$

Bolzano υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi + \ln \xi + 1 = 0$.

Είναι $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, $x \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ οπότε η g είναι ↑ στο $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ άρα η ρίζα ξ είναι

μοναδική.

ii. Είναι $f'(x) = 3x^2 + 6x \ln x + 3x^2 \frac{1}{x} - 3x = 3x^2 + 6x \ln x$,

$$f''(x) = 6x + 6 \ln x + 6x \frac{1}{x} = 6(x + \ln x + 1) = 6g(x)$$

Είναι $f''(\xi) = 6g(\xi) = 0$ και αφού $g \uparrow$, έχουμε:

Για $x < \xi$ είναι $g(x) < g(\xi) \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Για $x > \xi$ είναι $g(x) > g(\xi) \Leftrightarrow f''(x) > 0$

Οπότε η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x = \xi$ άρα το ξ είναι θέση σημείου καμπής.

iii. Είναι $f'(x) = 3x^2 + 6x \ln x$ με $f'(\xi) = 3\xi^2 + 6\xi \ln \xi$. Όμως $\xi + \ln \xi + 1 = 0 \Rightarrow \ln \xi = -1 - \xi$

$$\text{άρα } f'(\xi) = 3\xi^2 + 6\xi(-1 - \xi) = -3\xi^2 - 6\xi < 0 \text{ αφού } \xi > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 6x \ln x) = 0, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \underset{\text{DLH}}{\lim_{x \rightarrow 0^+}} \frac{x}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0$$

Το σύνολο τιμών της f' στο διάστημα $\Delta_1 = (0, \xi)$ είναι $f'(\Delta_1) = (-3\xi^2 - 6\xi, 0)$, άρα

$f'(x) < 0$ στο Δ_1 και $f' \downarrow (0, \xi]$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 6x \ln x) = +\infty$ και $f' \uparrow$ στο Δ_2 ,

άρα $f'(\Delta_2) = [-3\xi^2 - 6\xi, +\infty)$. Επειδή $0 \in f'(\Delta_2)$, υπάρχει $x_0 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε

$f'(x_0) = 0$. Για κάθε $\xi < x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \downarrow [\xi, x_0]$, ενώ για $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \uparrow [x_0, +\infty)$. Οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = x_0$.

125. a) Είναι $g'(x) = f'(x)e^{-f(x)}$ (1), όμως από την υπόθεση $f'(x) = e^{f(x)} - 1$ (2).

Άρα από (1) και (2) θα είναι $g'(x) = (e^{f(x)} - 1)e^{-f(x)} = e^{f(x)}e^{-f(x)} - e^{-f(x)} = 1 - e^{-f(x)}$.

Συνεπώς είναι $g'(x) = g(x)$ άρα $g(x) = ce^x$.

Για $x = 0$ $g(0) = c \Rightarrow 1 - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1 - e^{\ln 2} \Leftrightarrow c = -1$ άρα $g(x) = -e^x$

b) Είναι $g(x) = 1 - e^{-f(x)} \Leftrightarrow -e^x = 1 - e^{-f(x)} \Leftrightarrow e^{-f(x)} = 1 + e^x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\ln(1 + e^x) \Leftrightarrow f(x) = \ln \frac{1}{1 + e^x}.$$

γ) $f'(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1}$ και $f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$. Άρα f είναι κοίλη στο \mathbb{R} .

δ) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ με $f(0) = \ln \frac{1}{2}$
και $f'(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = -\frac{1}{2}$. Άρα $y = -\frac{1}{2}x - \ln 2$.

Άφού f είναι κοίλη τότε $f(x) \leq y$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$\ln \frac{1}{1+e^x} \leq -\frac{1}{2}x - \ln 2 \Leftrightarrow -\ln(1+e^x) \leq -\frac{x}{2} - \ln 2 \Leftrightarrow \ln(1+e^x) \geq \frac{x}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow 2\ln(1+e^x) \geq x + \ln 4.$$

ε) Επειδή f είναι κοίλη, ισχύει ότι: $f(x) \leq -\frac{1}{2}x - \ln 2$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x - \ln 2\right) = -\infty$

είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{e^x}{e^x + 1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1+e^x}\right) = 0.$$

126. **a)** Για $x > 0$ έχουμε

$$x^2 f'(x) + x f(x) = 1 \Leftrightarrow x f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (x f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow x f(x) = \ln x + c$$

Για $x = e$ είναι $e f(e) = \ln e + c \Rightarrow 2e \cdot e^{-1} = 1 + c \Rightarrow c = 1$.

Άρα $x f(x) = \ln x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$

β) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$.

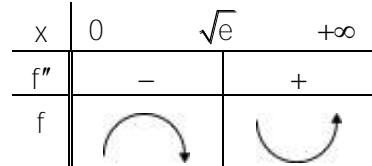
Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, 1]$ και

για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [1, +\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(1) = 1$.

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(2\ln x - 1)}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$$

Η f κοίλη στο $(0, \sqrt{e})$ και κυρτή στο $[\sqrt{e}, +\infty)$ με σημείο καμπής το $\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$.



γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x}(\ln x + 1) \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Είναι $f \uparrow$ στο $A_1 = (0, 1]$ οπότε $f(A_1) = (-\infty, 1]$ και $f \downarrow$ στο $A_2 = [1, +\infty)$ οπότε $f(A_2) = (0, 1]$.

Άρα το σύνολο τιμών $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$.

δ) Αν $\alpha < 0$ τότε $\alpha \in f(A_1)$ και η εξίσωση έχει μια ρίζα $\rho \in (0, 1)$.

Αν $\alpha = 0$ τότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ άρα η εξίσωση έχει ρίζα την $\rho = \frac{1}{e}$.

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\alpha \in f(A_1)$ και $\alpha \in f(A_2)$ και η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$.

Αν $\alpha = 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μόνο μια ρίζα την $\rho = 1$ αφού $f(1) = 1$ και αν $\alpha > 1$ τότε $\alpha \notin f(A)$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

127. a) Είναι $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 3x + 1$, $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = e^{x-1} + 2x - 3$ και $f'(1) = 0$

και $f''(x) = e^{x-1} + 2 > 0$ οπότε η $f' \uparrow$.

Για $x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$

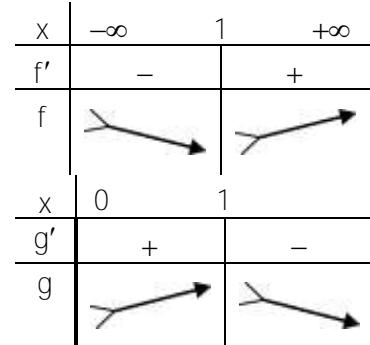
Για $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Οπότε η f έχει ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 0$.

Επίσης $g(x) = \ln x - x + 1$, $Dg = (0, +\infty)$

$$\text{με } g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Η g έχει μέγιστο για $x = 1$ το $g(1) = 0$.



b) Η εξίσωση $e^{x-1} - \ln x + x^2 - 2x = 0$ γίνεται

$$e^{x-1} + x^2 = \ln x + 2x \Leftrightarrow e^{x-1} + x^2 - 3x + 1 = \ln x - x + 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ και αφού } f(1) = g(1) = 0$$

και $g(x) \leq g(1) = 0 = f(1) \leq f(x)$ τότε το $x = 1$ μοναδική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

c) Η εφαπτομένη της C_f στο $(1, 0)$ είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0$ και η εφαπτομένη της C_g στο $(1, 0)$ είναι επίσης $y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0$. Οπότε οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη των άξονα x στο σημείο $(1, 0)$.

128. a) Επειδή $g^2(x) = g'(x) \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)} = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{g(x)}\right)' = (x)' \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} = x + C_1$.

$$\text{Επειδή } g(1) = -1 \text{ τότε } C_1 = 0 \text{ άρα } g(x) = -\frac{1}{x} \quad (2).$$

$$\text{Είναι } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f'(x) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f'(x)\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f(x) = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)f'(x) = -\frac{1}{x^2}f(x) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)f'(x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{1 + \frac{1}{x}}\right)' = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{άρα } f(x) &= C_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f(1) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_2 = 1 \text{ άρα } f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Οπότε $f(x) + g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 1$.

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{-\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right] = e$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{0}{0}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$.

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = -1 - \frac{1}{x^2} \neq 0$ και

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow g'(x) + 1 = 1 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -[g'(x) + 1] = -1 - \frac{1}{x^2}.$$

Οπότε $(f'(x) - 1) = -[g'(x) + 1] < 0$ áρα η εξίσωση γίνεται $x + \ln x + \sigma v x = 0$.

Θεωρούμε $h(x) = x + \ln x + \sigma v x$, $x \in (0, +\infty)$.

Είναι $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \eta \mu x = 1 - \eta \mu x + \frac{1}{x} > 0$ όταν $x \in (0, +\infty)$. Οπότε η h είναι γνησίως

αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x + \sigma v x) = -\infty$.

Επίσης $-1 \leq \sigma v x \leq 1 \Leftrightarrow x + \ln x - 1 \leq x + \ln x + \sigma v x \leq x + \ln x + 1$ και είναι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x - 1) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Επομένως $h(A) = \mathbb{R}$ και $0 \in \mathbb{R}$ και αφού η $h \uparrow$ τότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

129. **α)** $f'(x) = 2 - 2e^{-2x} = 2(1 - e^{-2x}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-2x} \leq e^0 \Leftrightarrow -2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 0]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(0)$, áρα $f(x) \geq f(0) = 1$.

β) Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$, áρα η $y = 2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη,

ενώ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 + \frac{e^{-2x}}{x}\right] = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2e^{-2x}}{1} = -\infty$

οπότε δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

γ) Η εξίσωση γίνεται $[f(x) - 1] + [f(x^2) - 1] + [f(x^3) - 1] + [f(x^4) - 1] = 0$. Επειδή $f(x) \geq 1$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί άθροισμα μη αρνητικών αριθμών το οποίο είναι ίσο με 0. Áρα πρέπει $f(x) - 1 = 0$ και $f(x^2) - 1 = 0$ και $f(x^3) - 1 = 0$ και

$f(x^4) - 1 = 0$. Όμως η f παίρνει ελάχιστη τιμή μόνο για $x = 0$ áρα οι παραπάνω ισότητες ισχύουν αν και μόνο αν $(x = 0$ και $x^2 = 0$ και $x^3 = 0$ και $x^4 = 0) \Leftrightarrow x = 0$.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + e^{-2x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{e^{2x}} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq e^{2x} - 2xe^{2x} \Leftrightarrow 1 \geq e^{2x}(1-2x) \text{ και το = ισχύει}$$

$$\text{μόνο όταν } x=0. \text{ Άρα για } x=\frac{1}{10} \text{ έχουμε: } 1 > e^{\frac{1}{5}} \left(1 - \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow 1 > e^{\frac{1}{5}} \frac{4}{5} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{5}} < \frac{5}{4}.$$

130. **a)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-3)\ln x + 2x - 5] = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-3) = -3$
άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-3)\ln x + 2x - 5] = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-3}{x} \cdot \ln x + \frac{2x-5}{x} \right] = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty. \text{ Άρα η } C_f \text{ δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.}$$

b) $f'(x) = \ln x + (x-3)\frac{1}{x} + 2 = \ln x + 1 - \frac{3}{x} + 2 = \ln x + 3 - \frac{3}{x}$ με $f'(1) = 0$, $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} > 0$
για $x > 0$ οπότε $f' \uparrow$

- $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \downarrow$ στο $[0, 1]$.
- Αν $x > 1$ τότε $f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$.

γ) Είναι $f(1) = -3 < 0$ οπότε η f έχει μια ρίζα $\rho_1 \in (0, 1)$ αφού $f(A_1) = [-3, +\infty)$ και έχει μια ρίζα $\rho_2 \in (1, +\infty)$ αφού $f \uparrow$ στο $A_2 = [1, +\infty)$ και $f(A_2) = [-3, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

δ) Εστω $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$ Από το Rolle για τη g υπάρχει

$$x_0 \in (\rho_1, \rho_2): g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$$

Εστω $\varphi(x) = xf'(x) - f(x)$ με $\varphi'(x) = f'(x) + xf''(x) = xf''(x) > 0 \Rightarrow \varphi \uparrow$ στο $(0, +\infty)$ άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει $0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$ που ισχύει.

131. **a)** Είναι $f(x) = \lambda \sqrt{x} \ln x + 2$, $D_f = (0, +\infty)$. Για να είναι η ευθεία $y = ex - e + 2$ εφαπτομένη της

$$C_f \text{ στο } x_0 = 1 \text{ πρέπει } f(1) = e - e + 2 = 2 \text{ και } f'(1) = e. \text{ Έχουμε } f'(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\lambda \sqrt{x}}{x}.$$

$$\text{Οπότε } f'(1) = \lambda \Leftrightarrow e = \lambda$$

β) i. Είναι $f(x) = e\sqrt{x} \ln x + 2$, $x > 0$

$$f'(x) = e \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x} \right) = \frac{e\sqrt{x}(\ln x + 2)}{2x}$$

x	0	e^{-2}	
f'	-	+	
f	↘	↗	

Οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται στο διπλανό πίνακα.
Η f έχει ολικό ελάχιστο για $x = e^{-2}$ το $f(e^{-2}) = 0$.

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [e\sqrt{x} \ln x + 2] = 2$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{(\sqrt{x})'}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{x}) = 0$$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e\sqrt{x} \ln x + 2) = +\infty$ άρα από τον πίνακα μονοτονίας διαπιστώνουμε ότι το σύνολο τιμών είναι $f(A) = [0, +\infty)$.

iii. Για $x > e^{-2}$ η f είναι \uparrow και αφού $x < x+1$ τότε

$$\begin{aligned} f(x) < f(x+1) &\Leftrightarrow e\sqrt{x} \ln x + 2 < e\sqrt{x+1} \ln(x+1) + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x < \sqrt{x+1} \ln(x+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x^{\sqrt{x}} < \ln(x+1)^{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x^{\sqrt{x}} < (x+1)^{\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

$$132. \text{ a)} \text{Για } x > e \text{ είναι } 2(f'(x)-1)(f(x)-x) = \frac{1}{x} \text{ οπότε}$$

$$[(f(x)-x)^2]' = (\ln x)' \Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = \ln x + c.$$

Για $x = e^5$ είναι $(e^5 + 2 - e^5)^2 = \ln e^5 + c \Rightarrow 4 = 5 + c \Rightarrow c = -1$ άρα $(f(x)-x)^2 = \ln x - 1$ και

αφού $f(e^5) - e^5 = 2 > 0$ τότε $f(x) - x > 0$ αφού και για $x > e$ $\ln x - 1 > 0$ άρα

$$f(x) - x = \sqrt{\ln x - 1} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{\ln x - 1}, \quad x > e.$$

$$\text{b)} f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}} + 1 \text{ και } f''(x) = -\frac{2(\ln x - 1) + 1}{4x^2(\ln x - 1)\sqrt{\ln x - 1}} < 0 \text{ άρα } f \text{ κοῖλη στο } (e, +\infty).$$

$$\text{γ)} \text{Η εφαπτομένη στο } A(e^5, e^5 + 2) \text{ είναι } y = \left(\frac{1}{4e^5} + 1 \right)x + \frac{7}{4} \text{ και αφού η } f \text{ κοῖλη τότε}$$

$$f(x) \leq \left(\frac{1}{4e^5} + 1 \right)x + \frac{7}{4} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (4f(x) - 7)e^5 \leq (4e^5 + 1)x.$$

$$\text{δ)} \text{Είναι } h(x) = \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x}. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}} = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

οπότε η $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη C_h στο $+\infty$.

$$133. \text{ a)} f'(x) = \frac{4}{1+e^{f(x)}} > 0 \text{ άρα } f \uparrow \text{ και } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

$$\text{b)} \text{Αφού η } f \text{ παραγωγίσιμη τότε } f'(x) = \frac{4}{1+e^{f(x)}} \text{ είναι παραγωγίσιμη με}$$

$$f''(x) = \frac{-4e^{f(x)}f'(x)}{(1+e^{f(x)})^2} < 0 \text{ άρα } f \text{ κοῖλη.}$$

$$\text{γ)} \text{Αφού } f'(0) = 2 \text{ τότε } \frac{4}{1+e^{f(0)}} = 2 \Leftrightarrow 2 + 2e^{f(0)} = 4 \Leftrightarrow e^{f(0)} = 1 = e^0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ και αφού η } f \uparrow$$

η ρίζα $x = 0$ μοναδική.

δ) Είναι $f'(x) + f(x)e^{f(x)} = 4 \Leftrightarrow (f(x) + e^{f(x)})' = (4x)'$ άρα $f(x) + e^{f(x)} = 4x + c$ για $x=0 \Rightarrow c=1$

άρα $f(x) + e^{f(x)} = 4x + 1 \Leftrightarrow f(x) - (4x + 1) = -e^{f(x)}$

οπότε $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (4x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{f(x)}) = 0$ άρα η $y = 4x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ε) Από τη σχέση $f(x) + e^{f(x)} = 4x + 1$ (1) για $x \in (0, +\infty)$, έχουμε:

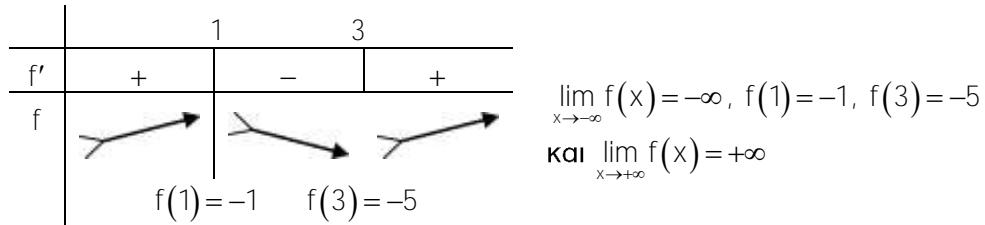
$$\frac{f(x)}{x} + \frac{e^{f(x)}}{x} = 4 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = 4 + \frac{1}{x} - \frac{e^{f(x)}}{x} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 + \frac{1}{x} - \frac{e^{f(x)}}{x} \right] = 0$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)} f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{f(x)}}{e^{f(x)} \left(1 + \frac{1}{e^{f(x)}} \right)} = \frac{4}{1+0} = 4$$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

134. **α)** Είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$



Η $f \uparrow$ στο $(-\infty, 1]$ με $f(A_1) = (-\infty, -1]$.

Η $f \downarrow$ στο $[1, 3]$ με $f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-5, -1]$.

Η $f \uparrow$ στο $[3, +\infty)$ με $f(A_3) = [-5, +\infty)$.

Επειδή $0 \in f(A_3)$ και $0 \notin f(A_1)$, $0 \notin f(A_2)$ τότε υπάρχει μοναδικός $p \in (3, +\infty)$ τέτοιος ώστε $f(p) = 0$.

β) Είναι $g(x) = 3x^4 - 24x^3 + 54x^2 - 60x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 12x^3 - 72x^2 + 108x - 60 = 12(x^3 - 6x^2 + 9x - 5) = 12f(x)$$

• Άν $x \in (-\infty, 1]$ τότε $f(x) \leq -1$ άρα $g'(x) < 0$ οπότε η $g \downarrow$

• Άν $x \in [1, 3]$ τότε $-5 \leq f(x) \leq -1 \Leftrightarrow f(x) < 0$ άρα $g'(x) < 0$ οπότε η $g \downarrow$ στο $[1, 3]$

• Άν $x \in [3, p]$ τότε αφού $f \uparrow$ τότε $f(3) \leq f(x) \leq f(p) - 5 \leq f(x) \leq 0$ άρα $g'(x) < 0$ οπότε η

$g \downarrow$ στο $[3, p]$

Αφού η g συνεχής στο \mathbb{R} τότε η g είναι ↓ στο $(-\infty, p]$.

Επίσης $x \geq p$ θα είναι $f(x) \geq f(p) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$.

Άρα η g ↑ στο $[3, +\infty)$ οπότε η g έχει ολικό ελάχιστο για $x = p$.

γ) Η ζητούμενη σχέση γίνεται $f(\beta) - f(\alpha) + 3(\beta - \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geq -3$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}. \text{ Οπότε αρκεί } f'(\xi) \geq -3$$

$$\text{δηλαδή } 3\xi^2 - 12\xi + 9 \geq -3 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 12\xi + 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3(\xi - 2)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

135. α) Είναι $f(x) = 12x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 30x^2 - 1821$

$$f'(x) = 60x^4 + 60x^3 + 60x^2 + 60x = 60x(x^3 + x^2 + x + 1) = 60x(x+1)(x^2+1)$$

	-1	0	
f'	+	-	+
f			

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f(-1) = -1808 < 0$$

$$f(0) = -1821 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Από τα επιμέρους σύνολα τιμών διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (0, +\infty)$

β) Έχουμε $f''(x) = 240x^3 + 180x^2 + 120x + 60 = 60(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

Εστω $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ και

$g'(x) = 12x^2 + 6x + 1 > 0$ (αφού $\Delta < 0$) άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_2 η οποία $x_2 \in (-1, 0)$ αφού $g(-1) = -2$ και $g(0) = 1$.

Οπότε η $f''(x) = 0$ έχει μοναδικό σημείο καμπής στο σημείο $B(x_2, f(x_2))$.

γ) Αφού $x_1 \in (0, +\infty)$ και $x_2 \in (-1, 0)$ τότε $x_1 > x_2$.