

Θεώρημα Rolle

5.25. α) Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με $f'(x) = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$.

Επειδή $f(0) = f(3) = 0$, εφαρμόζεται για την f το Θ. Rolle και υπάρχει

$$\xi \in (0, 3) : f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3-2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}.$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με $f'(x) = 2x-6$.

Επειδή $f'(2) = f'(4) = 0$, εφαρμόζεται για την f το Θ. Rolle και υπάρχει

$$\xi \in (2, 4) : f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 6 = 0 \Leftrightarrow \xi = 3.$$

γ) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $(0, 1]$ ως πολυωνυμική.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 4) = -4 = f(0)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^3 - 4) = -4$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0, άρα είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4 + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3 - 4 + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2) = 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0]$ και στο $(0, 1)$ με $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ -3x^2, & x > 0 \end{cases}$.

Επειδή $f(-1) = -3$ και $f(1) = -5$, δεν εφαρμόζεται για την f το Θ. Rolle στο $[-1, 1]$.

Αν $\xi \in (-1, 0]$, τότε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ και αν $\xi \in (0, 1)$, τότε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \text{ που απορρίπτεται στη περίπτωση αυτή.}$$

δ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 8x) = -12$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x - 10) = -4$, η f δεν είναι συνεχής στο $[1, 3]$, οπότε δεν εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο διάστημα αυτό.

5.26. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \beta = 1$, $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow \alpha = 5 + \gamma$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \gamma = 4 \text{ και } \alpha = 9$$

5.27. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lambda - \kappa - \mu = -7$ (1), $f(-3) = f(5) \Leftrightarrow 3\kappa + 5\lambda - \mu = 41$ (2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow -\kappa = 4 - \lambda \text{ (3).}$$

Από το σύστημα των (1),(2),(3), προκύπτει: $\kappa = 4$, $\lambda = 8$, $\mu = 11$

5.28. $f(3) = f(6) \Leftrightarrow \sqrt{3\kappa - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{3\kappa - 6}$. Πρέπει $\kappa \geq 1$ και $\kappa \geq 2$. Άρα $\kappa \geq 2$.

$$\text{Tότε } \sqrt[3]{3\sqrt{\kappa-1}} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3\sqrt{\kappa-2}} \Leftrightarrow$$



$$\left(\sqrt{\kappa-1} + \sqrt{\kappa-2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \kappa-1 + 2\sqrt{\kappa-1}\sqrt{\kappa-2} + \kappa-2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\kappa-1)(\kappa-2)} = 2-\kappa$$

πρέπει $2-\kappa \geq 0 \Leftrightarrow \kappa \leq 2$. Όμως $\kappa \geq 2$, άρα $\kappa = 2$.

Τότε $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{6-x}$ υπάρχει $\xi \in (3, 6)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi-3}} - \frac{1}{2\sqrt{6-\xi}} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \xi = \frac{9}{2}$$

5.29. $f(-1) = f(1) = 0$ και Θ.Rolle

$$5.30. f(x^2) \geq 1 + \frac{f^2(x)}{4} \Leftrightarrow f^2(x) - 4f(x^2) + 4 \leq 0.$$

Για $x=0$ είναι $f^2(0) - 4f(0) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0)-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 2$ και

για $x=1$ είναι $f^2(1) - 4f(1) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(1)-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = 2$.

Από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$

5.31. $f(0) = f(1) = 0$, άρα Θ.Rolle

$$5.32. f'(x) = 4(\lambda^2 + 1)x^3 + 6(\lambda + \mu)x^2 + 6(\mu^2 + 1)x + 4,$$

$$f''(x) = 12(\lambda^2 + 1)x^2 + 12(\lambda + \mu)x + 6(\mu^2 + 1) = 6[2(\lambda^2 + 1)x^2 + 2(\lambda + \mu)x + (\mu^2 + 1)]$$

Εστω ότι η f έχει τρείς εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους στα $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Δηλαδή

$f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = f'(\rho_3)$ Τότε λόγω του Θ.Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και

$\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$.

Όμως η f'' έχει $\Delta = 4(\lambda + \mu)^2 - 8(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1) = -4(\lambda - \mu)^2 - 8\lambda^2\mu^2 - 8 < 0$ και δεν έχει ρίζες, άρα η C_f δεν μπορεί να έχει 3 εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους.

5.33. a) Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πολύκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο

(α, β) με $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$. Επειδή $g(\alpha) = g(\beta) = 1$ εφαρμόζεται για τη g το Θ.Rolle και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$.

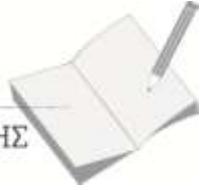
$$\text{b)} g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)e^\xi - f(\xi)e^\xi}{(e^\xi)^2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)e^\xi = f(\xi)e^\xi \Leftrightarrow f'(\xi) = f(\xi)$$

5.34. a) Η g είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως πολύκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο

$(2, 3)$ με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Επειδή $g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{f(3)}{3} = g(3)$, εφαρμόζεται για τη g το

Θ.Rolle και

υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$.



$$\text{β)} \ g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\xi = f(\xi)$$

5.35. **α)** Η g είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ ως πολίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με $g'(x) = f(x) + (x - \alpha)f'(x)$. Επειδή $g(0) = g(\alpha) = 0$, εφαρμόζεται για τη g το Θ.Rolle και υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$.

$$\text{β)} \ g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + (\xi - \alpha)f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = (\alpha - \xi)f'(\xi)$$

5.36. **α)** Η φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\varphi'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$. Επειδή $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ εφαρμόζεται για τη φ το Θ.Rolle και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{β)} \ \varphi'(\xi) = 0 &\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)h(\xi) + f(\xi)g'(\xi)h(\xi) + f(\xi)g(\xi)h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{f'(\xi)g(\xi)h(\xi)}{f(\xi)g(\xi)h(\xi)} + \frac{f(\xi)g'(\xi)h(\xi)}{f(\xi)g(\xi)h(\xi)} + \frac{f(\xi)g(\xi)h'(\xi)}{f(\xi)g(\xi)h(\xi)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} + \frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = 0 \end{aligned}$$

5.37. **α)** Παρατηρούμε ότι για την h εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο $[\alpha, \beta]$ διότι :

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πολίκο συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πολίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha - \rho} = 0 \\ h(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta - \rho} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$,

τέτοιο ώστε : $h'(\xi) = 0$ (1).

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$, θα είναι $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Η (ϵ) θα διέρχεται από το $(\rho, 0)$, όταν ισχύει

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(\rho - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} \quad (2).$$

$$\text{Όμως γνωρίζουμε ότι } h'(x) = \left(\frac{f(x)}{x - \rho} \right)' = \frac{f'(x) \cdot (x - \rho) - f(x)}{(x - \rho)^2}.$$

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)(x_0 - \rho) - f(x_0)}{(x_0 - \rho)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) \cdot (x_0 - \rho) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho}.$$



5.38. Θ.Rolle για την $g(x) = f(x) - x^3 + 2x^2 - 2x$. Είναι $g(1) = f(1) - 1$ και $g(2) = f(2) - 4 = f(1) - 1$

5.39. α) Θ.Rolle για την $g(x) = f(x) - \sin x - 4x^2$, συν $(-2) = \sin 2$ και $f(-2) = f(2)$

β) Θ.Rolle για την $g(x) = f(x) - e^{x^2}$

γ) Θ.Rolle για την $g(x) = f(x) - x \eta x$

δ) Θ.Rolle για την $g(x) = f(x) - \sqrt{x^2 + 1}$

ε) Θ.Rolle για την $g(x) = f(x) - x^2 + x^4$

στ) Θ.Rolle για την $g(x) = \eta f(x) - \sin x$

5.40. α) Θ.Rolle για την $g(x) = xf(x)$

β) Θ.Rolle για την $g(x) = x^v f(x)$

γ) Θ.Rolle για την $g(x) = f(x) \eta x$

δ) Θ.Rolle για την $g(x) = f(x) \sin x$

5.41. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)\epsilon\varphi x + f(x) = 0$ έχει λύση στο (α, β) . Η εξίσωση

ισοδύναμα γίνεται: $f'(x) \frac{\eta x}{\sin x} + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \eta x + f(x) \sin x = 0 \Leftrightarrow (f(x) \eta x)' = 0$, επειδή

$\sin x \neq 0$ όταν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Θεωρούμε την $g(x) = f(x) \eta x$.

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $g'(x) = f'(x) \eta x + f(x) \sin x$.
- Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) \eta \alpha = \beta \eta \alpha$ και $g(\beta) = f(\beta) \eta \beta = \alpha \eta \beta$.

Όμως, από τη σχέση $\frac{\eta \beta}{\eta \alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \eta \beta = \beta \eta \alpha$, δηλαδή $g(\alpha) = g(\beta)$.

Άρα, σύμφωνα με το θ. Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \eta \xi + f(\xi) \sin \xi = 0 \quad (1).$$

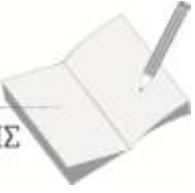
Επειδή $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sin \xi \neq 0$, οπότε, από την (1) έχουμε:

$$f'(\xi) \frac{\eta \xi}{\sin \xi} + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \epsilon \varphi \xi + f(\xi) = 0.$$

5.42. Θ.Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [1, 2]$.

5.43. Εστω $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ως πολύκο συνεχών

συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ με $g'(x) = \frac{f'(x) \sin x + f(x) \eta x}{\sin^2 x}$.



Επειδή $g(0) = f(0) = 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, από το θ. Rolle υπάρχει

$$\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) : g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \eta \mu \xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi) \frac{\eta \mu \xi}{\sin \xi} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi) \varepsilon \varphi \xi = 0$$

5.44. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία ε : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Για να διέρχεται η ε από την αρχή των αξόνων πρέπει:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0. \text{ Είναι}$$

$$f'(x)x - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 0 \text{ ή } \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0. \text{ Εστω } g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [\alpha, \beta].$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$.

Είναι $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$ και $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1$, δηλαδή $g(\alpha) = g(\beta)$.

Λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0.$$

5.45. Θ. Rolle στην $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$,

5.46. Θ. Rolle στην $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in [\alpha, \beta]$.

5.47. Θ. Rolle στην $g(x) = f^2(x) - x^2$, $x \in [\alpha, \beta]$.

5.48. Θ. Rolle στην $g(x) = 2f^2(x) - f^2(2)x$, $x \in [0, 2]$.

5.49. **a)** Θ. Rolle στην $g(x) = \frac{1}{f(x)} + x^2$,

b) Θ. Rolle στην $g(x) = \sqrt{f(x)} - x^4$

γ) Θ. Rolle στην $g(x) = e^{f(x)} - x^6$,

δ) Θ. Rolle στην $g(x) = f^3(x) - x^2$,

ε) Θ. Rolle στην $g(x) = \eta \mu f(x) - \frac{x^4}{2}$,

στ) Θ. Rolle στην $g(x) = e^{f^2(x)} - x^2$,

5.50. **a)** Θ. Rolle στην $g(x) = e^{xf(x)}$, $x \in [-\alpha, \alpha]$

β) Θ. Rolle στην $g(x) = e^{-2xf(x)}$

γ) Θ. Rolle στην $g(x) = e^{x^2} f(x)$

δ) Θ. Rolle στην $g(x) = e^{x^2-x} f(x)$



5.51. Θ. Rolle στη $g(x) = e^{-2x}f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

5.52. Θ. Rolle στη $h(x) = e^{g(x)}f(x)$, στο $[\rho_1, \rho_2]$, όπου ρ_1, ρ_2 ρίζες της f .

5.53. Εστω $g(x) = f(x) - \frac{2x^2}{\alpha+\beta}$, $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι $g(\alpha) = 2\alpha - \frac{2\alpha^2}{\alpha+\beta} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = g(\beta)$ και Θ.Rolle.

5.54. Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) \ln x$, $x \in [2, 4]$.

5.55. Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$, $x \in [2, 3]$.

5.56. Θ. Rolle για την $g(x) = xf(x) - x^2$, $x \in [0, 1]$.

5.57. Θ. Rolle για την $g(x) = (1-x^2)f(x)$, $x \in [-1, 1]$.

5.58. Θ. Rolle για την $g(x) = e^{\frac{\lambda_x}{\kappa}}f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

5.59. Θ. Rolle για την $h(x) = f(x)g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

5.60. Θ. Rolle για την $h(x) = g(x)(\eta \mu x - \sigma v n x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

5.61. **a)** Αν στη σχέση $f'(\xi_1) = 2\xi_1$, αντικαταστήσουμε όπου ξ_1 το x έχουμε:

$$f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) - 2x = 0 \text{ ή } (f(x) - x^2)' = 0.$$

$$\text{Εστω } g(x) = f(x) - x^2, x \in [0, 1].$$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $g'(x) = f'(x) - 2x$.

Είναι $g(0) = f(0)$ και $g(1) = f(1) - 1 = f(0)$, δηλαδή $g(0) = g(1)$. Άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = 2\xi_1$.

b) Αν στη σχέση $f'(\xi_2) = -\frac{f(1)-1-f(\xi_2)}{\xi_2-1}$ αντικαταστήσουμε όπου ξ_2 το x έχουμε:

$$f'(x) = -\frac{f(1)-1-f(x)}{x-1} \Leftrightarrow f'(x)(x-1) + f(x) + 1 - f(1) = 0 \text{ ή } (f(x)(x-1) + (1-f(1))x)' = 0.$$

$$\text{Εστω } h(x) = f(x)(x-1) + (1-f(1))x, x \in [0, 1].$$

Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο



$(0,1)$ με $h'(x) = f'(x)(x-1) + f(x) + 1 - f(1)$. Είναι $h(0) = -f(0)$ και $h(1) = f(1)(1-1) + (1-f(1)) = 1 - f(1) = -f(0)$, δηλαδή $h(0) = h(1)$. Άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2)(\xi_2 - 1) + f(\xi_2) + 1 - f(1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2) = -\frac{f(1) - 1 - f(\xi_2)}{\xi_2 - 1}$.

5.62. Θ. Rolle για την $h(x) = g^2(x)g(1-x)$, $x \in [0,1]$.

5.63. Θ. Rolle για την $h(x) = (g(x) - g(\alpha))(x - \beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

5.64. Θ. Rolle στην $h(x) = f(x)(e^x - e^{x^2})$, $x \in [0,1]$.

5.65. Θ. Rolle στην $h(x) = \frac{g(x)}{e^x}$, $x \in [\alpha, \beta]$, όπου $g(\alpha) = e^\alpha$ και $g(\beta) = e^\beta$.

5.66. $(goh)(x) = (hog)(x) \Leftrightarrow e^\alpha(f(\beta) + 1) = e^\beta(f(\alpha) + 1) \Leftrightarrow e^{-\beta}(f(\beta) + 1) = e^{-\alpha}(f(\alpha) + 1)$.

Θ. Rolle για την $\varphi(x) = e^{-x}f(x) - e^{-x}$, $x \in [\alpha, \beta]$

5.67. α) Εστω $h(x) = g(x) - f(x) = f(2)(4x - x^2 - 3) - f(x)$.

Είναι $g(1) = g(2) = g(3) = 0$, άρα από το Θ. Rolle, υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ και $\xi_2 \in (2,3)$

τέτοια, ώστε $h'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = g'(\xi_1)$ και $h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2) = g'(\xi_2)$.

β) Από το Θ. Rolle για την h' , υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (1,3)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = -2f(2)$.

5.68. Θ. Rolle στην $g(x) = e^{f(x)}f'(x)$.

5.69. Η εφαπτομένη στο M είναι: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Για να διέρχεται από το O , πρέπει:

$$-f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0.$$

Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[1,3]$.

5.70. Η εφαπτομένη στο M είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Για να διέρχεται από το $A(0, x_0^2)$, πρέπει:

$$x_0^2 - f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) + x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} + 1 = 0$$



Εστω $g(x) = \frac{f(x)}{x} + x$, $x \in [1, 3]$. Είναι $g(1) = f(1) + 1$, $g(3) = \frac{f(3)}{3} + 3 = \frac{3f(1) - 6}{3} + 3 = f(1) + 1$ και Θ.Rolle.

5.71. Εστω $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = f(\rho_4) = 0$ και $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 > 0$.

Η εφαπτομένη στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Για να διέρχεται από το O, πρέπει: $-f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

Θ.Rolle για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$ και $[\rho_3, \rho_4]$

5.72. Είναι $(v+1)h(v) - vh(v+1) = 0 \Leftrightarrow (v+1)h(v) = vh(v+1) \Leftrightarrow \frac{h(v)}{v} = \frac{h(v+1)}{v+1}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{h(x)}{x}$, $x \in [v, v+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[v, v+1]$ ως πολύκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(v, v+1)$, με $f'(x) = \frac{xh'(x) - h(x)}{x^2}$.

Επίσης, $f(v) = \frac{h(v)}{v}$, $f(v+1) = \frac{h(v+1)}{v+1}$, δηλαδή $f(v) = f(v+1)$.

Επομένως, εφαρμόζεται για την f το Θ. Rolle σε κάθε διάστημα της μορφής $[v, v+1]$, $v \in \mathbb{N}^*$.

Οπότε, υπάρχει $\xi_v \in (v, v+1)$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi_v) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi_v h'(\xi_v) - h(\xi_v)}{\xi_v^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\xi_v h'(\xi_v) = h(\xi_v)$ (1). Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $M(\xi_v, h(\xi_v))$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y - h(\xi_v, h(\xi_v)) = h'(\xi_v, h(\xi_v))(x - \xi_v)$.

Για να διέρχεται η ε από την αρχή των αξόνων, πρέπει:

$0 - h(\xi_v) = h'(\xi_v)(0 - \xi_v) \Leftrightarrow h(\xi_v) = \xi_v h'(\xi_v)$, που ισχύει, λόγω της σχέσης (1).

Επομένως, η εφαπτομένη της C_h σε κάθε σημείο $M(\xi_v, h(\xi_v))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

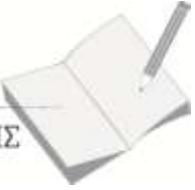
5.73. Θ. Rolle στην f στα $[\alpha, 0]$ και $[0, \beta]$ και Θ. Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ για την f' .

5.74. Από το Θ.Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (2, 6)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

Από το Θ.Rolle για την f' , υπάρχει $\xi_2 \in (2, \xi_1)$ και $\xi_3 \in (\xi_1, 3)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_2) = f''(\xi_3) = 0$.

Από το Θ.Rolle για την f'' , υπάρχει $\xi \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$

5.75. Από το Θ.Rolle για την f , υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = 0$.



Από το Θ.Rolle για την f' , υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha, \xi_1)$ και $\xi_3 \in (\xi_1, \beta)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_2) = f''(\xi_3) = 0$.

Από το Θ.Rolle για την f'' , υπάρχει $\xi \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$

5.76. Είναι $f(3)f(4) < 0$ και $f(5)f(4) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano, υπάρχουν $x_1 \in (3, 4)$ και $x_2 \in (4, 5)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Από το Θ.Rolle για την f , υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$

5.77. $f(1) < \frac{f(1)+f(2)}{2} < f(2)$ ή $f(2) < \frac{f(1)+f(2)}{2} < f(1)$
από ΘΕΤ $\exists x_1 \in (1, 2) : f(x_1) = \frac{f(1)+f(2)}{2}$ και $\exists x_2 \in (3, 4) : f(x_2) = \frac{f(3)+f(4)}{2}$

Άρα $f(x_1) = f(x_2)$ και λόγω του Θ.Rolle στο $[x_1, x_2]$, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) : f'(x_0) = 0$

5.78. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, λόγω του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής, θα υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0, 3]$. Επειδή επιπλέον είναι $f(x) > 0$, θα είναι $m > 0$, δηλαδή $0 < m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

Άρα $m \leq f(0) \leq M$, $m \leq f(1) \leq M$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει ότι:

$m^2 \leq f(0)f(1) \leq M^2 \Leftrightarrow m \leq \sqrt{f(0)f(1)} \leq M$. Επειδή ο αριθμός $\sqrt{f(0)f(1)}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f , υπάρχει $x_1 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \sqrt{f(0)f(1)}$.

Όμοια $m \leq f(2) \leq M$, $m \leq f(3) \leq M$ και $m^2 \leq f(2)f(3) \leq M^2 \Leftrightarrow m \leq \sqrt{f(2)f(3)} \leq M$.

Επειδή ο αριθμός $\sqrt{f(2)f(3)}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f , υπάρχει $x_2 \in [2, 3]$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \sqrt{f(2)f(3)}$.

Είναι $f(0)f(1) = f(2)f(3) \Leftrightarrow \sqrt{f(0)f(1)} = \sqrt{f(2)f(3)} \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Δηλαδή η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

5.79. a) Από το Θ.Rolle για την h υπάρχει $\xi_1 \in (4, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, 5)$ τέτοια, ώστε $h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$.

Από το Θ.Rolle για την h' υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 0$.

$$\text{b) } h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \kappa(x_0 - 4)(x_0 - 5) \Leftrightarrow \kappa = \frac{f(x_0)}{(x_0 - 4)(x_0 - 5)}$$

Είναι $h'(x) = f'(x) - \kappa(x - 4) - \kappa(x - 5)$ και $h''(x) = f''(x) - 2\kappa$.

$$h''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 2\kappa \Leftrightarrow \frac{1}{2}f''(\xi) = \kappa = \frac{f(x_0)}{(x_0 - 4)(x_0 - 5)} \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x_0 - 4)(x_0 - 5)$$



5.80. Είναι $g'(t) = f(x)(t-\beta) + f(x)(t-\alpha) - f'(t)(x-\alpha)(x-\beta)$ και

$$g''(t) = 2f(x) - f''(t)(x-\alpha)(x-\beta)$$

Επίσης $g(\alpha) = g(x) = g(\beta) = 0$

Θ. Rolle για g στα $[\alpha, x] \cup [x, \beta]$ υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$

Οπότε από θ. Rolle για την g' , υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0$

$$\text{Δηλαδή } 2f(x) - f''(\xi)(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\alpha)(x-\beta).$$

5.81. Θ. Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ στο $[\alpha, \beta]$.

$$\exists \xi_1 \in (\alpha, \beta) : h'(\xi_1) = \frac{[f'(\xi_1)]^2 - f(\xi_1)f''(\xi_1)}{(f'(\xi_1))^2} = 0 \Leftrightarrow f(\xi_1)f''(\xi_1) = [f'(\xi_1)]^2 > 0 \quad (1)$$

Θ. Rolle για την $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ στο $[\alpha, \beta]$

$$\exists \xi_2 \in (\alpha, \beta) : g'(\xi_2) = \frac{f''(\xi_2)f(\xi_2) - (f'(\xi_2))^2}{(f(\xi_2))^2} = 0 \Leftrightarrow f''(\xi_2)f(\xi_2) = (f'(\xi_2))^2 > 0 \quad (2)$$

Από (1)+(2) $\Rightarrow f(\xi_1)f''(\xi_1) + f(\xi_2)f''(\xi_2) > 0$

5.82. a) Θ. Rolle στην $h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 1]$.

b) Θ. Bolzano στην $\varphi(x) = g'(x) - 2x$, $x \in [0, \xi]$.

5.83. Εστω $g(x) = f(x) + x^3 - e^x$. Είναι $g(0) = g(1) = g(2) = 0$, άρα από το θ. Rolle υπάρχει

$x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, 2)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$. Από το θ. Rolle για την

$g'(x) = f'(x) + 3x^2 - e^x$, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + 6\xi = e^\xi$

5.84. Εστω $g(x) = f(x) - \ln x - x^2$. Είναι $g(1) = g(2) = g(e) = 0$, άρα από το θ. Rolle υπάρχει

$x_1 \in (1, 2)$ και $x_2 \in (2, e)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$. Από το θ. Rolle για την

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} - 2x, \text{ υπάρχει } \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, e) \text{ τέτοιο, ώστε } g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) - \frac{1}{\xi^2} - 2 = 0.$$

5.85. Αρκεί να υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 1$.

Εστω $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [-2, 2]$. Είναι $g(-2) = g(0) = g(2)$, οπότε από το θ. Rolle υπάρχει



$x_1 \in (-2, 0)$ και $x_2 \in (0, 2)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$. Από το Θ.Rolle για την $g'(x) = f'(x) - x$, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 1$

5.86. **a)** Είναι $f(\alpha) = 3\alpha + 2$, $f(\beta) = 3\beta + 2$, $f(\gamma) = 3\gamma + 2$

Rolle για των $h(x) = f(x) - 3x$ στα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$. Είναι $h(\alpha) = h(\beta) = h(\gamma) = -2$

άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια, ώστε $h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow$

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 3 = \lambda_c$

b) Από το Θ.Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) : f''(\xi) = 0$ και επειδή $f'' \uparrow$ το ξ είναι μοναδικό.

5.87. Αν n δεν ήταν 1-1, θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε όμως από το Θ.Rolle θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

5.88. **a)** Για $x = 2$ και $x = -2$ προκύπτει $f(-2) \neq 0$ και $f(2) \neq 0$.

b) Εστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{3x^2 - 12}{f(x)}$, $x \in [-2, 2]$. Είναι $g(-2) = g(2) = 0$, οπότε από το Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{6\xi f(\xi) - (3\xi^2 - 12)f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow 6\xi f(\xi) = (3\xi^2 - 12)f'(\xi) \text{ που είναι άτοπο.}$$

5.89. **a)** Για $x = 0$ και $x = 1$ προκύπτει $f(0) \neq 0$ και $f(1) \neq 0$.

b) Εστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2 - x}{f(x)}$, $x \in [0, 1]$. Είναι $g(0) = g(1) = 0$, οπότε από το Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

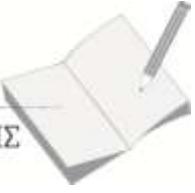
$$\frac{(2\xi - 1)f(\xi) - (\xi^2 - \xi)f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow (2\xi - 1)f(\xi) = (\xi^2 - \xi)f'(\xi) \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

5.90. Εστω $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και έστω ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πολύκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο



(ρ_1, ρ_2) με $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$. Επειδή $h(\rho_1) = \frac{f(\rho_1)}{g(\rho_1)} = 0$ και $h(\rho_2) = \frac{f(\rho_2)}{g(\rho_2)} = 0$,

λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Εστω ότι η $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ με $x_1 < x_2$.

Επειδή τα ρ_1, ρ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της $f(x) = 0$, ισχύει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

Εστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$.

Η φ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

και $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$\varphi'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi_1)f(\xi_1) - g(\xi_1)f'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1)g(\xi_1) - f(\xi_1)g'(\xi_1) = 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η g δεν έχει δύο ρίζες στο (ρ_1, ρ_2) και έχει ακριβώς μία στο διάστημα αυτό.

5.91. a) Θ.Ρ στην $f(x) = x^5 - x^4 - x^2 + x$

γ) Θ.Ρ στην $f(x) = (x - x^2) \sin x$

β) Θ.Ρ στην $f(x) = xe^{1-x} + x^2 - x$

δ) Θ.Ρ στην $f(x) = (x - 1) \eta x$

5.92. Θ.Ρ στην $f(x) = \frac{\alpha}{4}x^4 + \frac{\beta}{3}x^3 + \frac{\gamma}{2}x^2 + \delta x$

5.93. Θ.Ρ στην $g(x) = f(x) + \sin x + 2x$

5.94. Θ.Ρ στην $g(x) = f(x)(x^2 - 3x)$

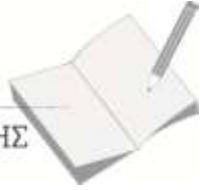
5.95. $f(-4) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f(2) = f(6) = 0$, $f'(x) = (x-2)^2(x-6)(12x^3 - 25x^2 - 68x + 148)$.

Είναι $f'(2) = f'(6) = 0$ και από το Θ.Ρ υπάρχουν $\xi_1 \in (-4, \frac{1}{3})$, $\xi_2 \in (\frac{1}{3}, 2)$, $\xi_3 \in (2, 6)$ τέτοια,

ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$. Η f' είναι 6ου βαθμού και έχει διπλή ρίζα το 2, ρίζα το 6 και τα ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

5.96. Εστω $f(x) = e^x \sin x - 2$, $x \in [x_1, x_2]$, όπου x_1, x_2 ρίζες της f .

Από το Θ.Ρ η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \sin x - e^x \eta x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \eta x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.



5.97. Εστω $g(x) = (x^2 - 4x + 3)\eta\mu(x-2)$. Θ.Ρ στα $[1,2], [2,3]$.

5.98. a) $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και Θ.Ρ στο $[x_1, x_2]$.

b) Εστω ότι $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ που ανήκουν στο (ρ_1, ρ_2) , όπου

ρ_1, ρ_2 διαδοχικές ρίζες της $f'(x) = 0$. Τότε από το Θ.Rolle για την f , υπάρχει

$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφου τα ρ_1, ρ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της $f'(x) = 0$

5.99. Θεωρούμε την $f(x) = \lambda x e^x - e$ για την οποία υποθέτουμε ότι έχει 3 πραγματικές ρίζες

ρ_1, ρ_2, ρ_3

με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, οπότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.

Επειδή f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \lambda e^x + \lambda x e^x = \lambda e^x(1+x)$, θα εφαρμόζεται το Θ. Rolle στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

Όμως, η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ έχει μοναδική λύση την $x = -1$, οπότε δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες ξ_1, ξ_2 .

Άρα, η εξίσωση $\lambda x e^x - e = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

5.100. Εστω ότι $g(x) = \ln x - 2 + x$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , τότε από το Θ.R άτοπο.

5.101. Εστω ότι $f(x) = x^6 - 3\alpha x + 2\beta$ έχει τρεις ρίζες. Τότε από το Θ.R n f' έχει τουλάχιστον δύο ρίζες που είναι άτοπο.

5.102. Εστω ότι $f(x) = e^x - x^2 + x - 2$ έχει τέσσερις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$. Τότε από το Θ.R στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], [\rho_3, \rho_4]$, n f' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. Από το Θ.R για την f' , n f'' έχει τουλάχιστον δύο ρίζες που είναι άτοπο.

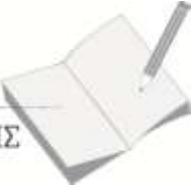
5.103. Εστω ότι έχει 3 ρίζες. Τότε από το Θ.R n f' έχει τουλάχιστον 2 ρίζες και μεταξύ αυτών των ριζών, n f'' έχει τολάχιστον μία ρίζα που είναι άτοπο.

5.104. Εστω ότι έχει δύο, τότε από το Θ.R άτοπο.

5.105. a) Εστω ότι έχει 3 ρίζες. Τότε από το Θ.R n f' έχει τουλάχιστον 2 ρίζες και n f'' τουλάχιστον μία ρίζα, το οποίο όμως είναι άτοπο.

b) Εστω $f(x) = e^x - (e-1)x - 1$. Είναι $f(1) = f(0) = 0$ Άν υπήρχε και τρίτη ρίζα, τότε n f' θα είχε τουλάχιστον 2 ρίζες και n f'' τουλάχιστον μία, που είναι άτοπο.

5.106. $f'(x) = 2$. Άν n $g(x) = f(x) + k + 9x - x^2$ έχει 3 ρίζες, τότε n $g'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες, το οποίο όμως είναι άτοπο.



5.107. Εστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_1) = f'(x_2)$, τότε από το Θ.Ρ, η $f''(x) = 0$ έχει

τουλάχιστον μία ρίζα, που είναι άτοπο.

5.108. Εστω ότι η $g(x) = f(x) - xe^x$ έχει 3 ρίζες. Τότε η g' έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και η g'' τουλάχιστον μία ρίζα, που είναι άτοπο.

5.109. Εστω ότι έχει 2 ρίζες, τότε άτοπο.

5.110. Η $g(x) = f(x) - \varphi(x)$ έχει 4 ρίζες. Τότε η g' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες, η g'' τουλάχιστον 2 ρίζες και η $g^{(3)}(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

5.111. Εστω $f(x) = x^4 + 2x^3 + \alpha x^2 - 12\alpha x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Εστω ότι η f έχει 4 ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$.

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], [\rho_3, \rho_4]$ και παραγωγίσιμη στα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4)$ με $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2\alpha x - 12\alpha$ και

$f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = f(\rho_4) = 0$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$,

$\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ και $\xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$ και $f'(\xi_3) = 0$.

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$ και $[\xi_2, \xi_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(\xi_1, \xi_2), (\xi_2, \xi_3)$ με $f''(x) = 12x^2 + 12x + 2\alpha$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχουν $\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2)$ και $\xi_5 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοια, ώστε: $f''(\xi_4) = 0$ και $f''(\xi_5) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. Όμως η f'' είναι 2^{ου} βαθμού και έχει το πολύ 2 ρίζες. Άρα η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες και ισχύει ότι:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2\alpha > 0 \Leftrightarrow 144 - 96\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{144}{96} = \frac{3}{2}.$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha < \frac{3}{2}$ είναι $\alpha = 1$.

5.112. ΘΒ για την $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta \mu x$ και στη συνέχεια έστω ότι έχει 2 ρίζες, προκύπτει άτοπο.

5.113. Προφανής ρίζα η $x = 0$. Θεωρούμε την $f(x) = xe^x + 1 - e^x$, υποθέτουμε ότι έχει 2 ρίζες και καταλήγουμε σε άτοπο με Θ. Rolle.

5.114. **a)** Αρχικά θ.Β και στη συνέχεια έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα, τότε από θ.Ρ άτοπο.
β) Όμοια

5.115. Τα όρια στο $\pm\infty$ δίνουν ετερόσημες τιμές, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα. Αν υπήρχε δεύτερη ρίζα, τότε από θ.Ρ άτοπο.

5.116. **a)** $x = 0$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα, τότε από θ.Ρ άτοπο.



β) Τα όρια στο $\pm\infty$ δίνουν ετερόσημες τιμές, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα. Αν υπήρχε δεύτερη ρίζα, τότε από Θ.Ρ άτοπο.

γ) $x=0$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα, τότε από Θ.Ρ άτοπο.

5.117. ΘΒ και στη συνέχεια έστω 2 ρίζες άτοπο.

5.118. **α)** Αν n $f(x)=0$ έχει 3 ρίζες, τότε από Θ.Ρ άτοπο.

β) ΘΒ στα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$. Στη συνέχεια έστω ότι έχει 3 ρίζες, τότε από το Θ.Ρ, η παράγωγος έχει τουλάχιστον 2 ρίζες, το οποίο είναι άτοπο.

5.119. Προφανής ρίζα n $x=1$. Θεωρούμε την $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1$, υποθέτουμε ότι έχει 2 ρίζες και καταλήγουμε σε άτοπο με Θ. Rolle.

5.120. **α)** Θ.Ρ για την $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

β) Έστω ότι n $h(x)=xf'(x)-f(x)$ έχει 2 ρίζες, τότε από Θ.Ρ άτοπο.

5.121. Θ.Ρ για την $g(x)=f(x)-x^4$ στο $[-1, 1]$. Έστω ότι n g' έχει 2 ρίζες, τότε από Θ.Ρ άτοπο.

5.122. Θ.Ρ για την $g(x)=f(x)-\eta mx$ στο $[0, \pi]$. Έστω ότι n g' έχει 2 ρίζες, τότε από Θ.Ρ άτοπο.

5.123. **α)** Θ. Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2]$.

β) Είναι $f(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$.

$$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow (\xi-\rho_1)(\xi-\rho_2)=(\xi-\rho_3)(\rho_1+\rho_2-2\xi).$$

Είναι $\xi-\rho_1>0$, $\xi-\rho_2<0$, $\xi-\rho_3<0$, οπότε $\rho_1+\rho_2-2\xi>0 \Leftrightarrow \xi < \frac{\rho_1+\rho_2}{2}$, άρα το ξ

βρίσκεται πιο κοντά στο ρ_1 .

5.124. **α)** Από το Θ. Rolle για την f στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$, όπου $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$

προκύπτει ότι n f' έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. Όμως n f' είναι 2ου βαθμού και έχει το πολύ 2 ρίζες. Άρα n f' έχει ακριβώς 2 ρίζες.

β) Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ και επειδή έχει 2 ρίζες, ισχύει: $\Delta>0 \Leftrightarrow \beta^2>3\alpha\gamma$.

γ) $f''(x)=6\alpha x+2\beta$, $f''(\rho_1)+f''(\rho_2)=6\alpha(\rho_1+\rho_2)+4\beta$.

Όμως, από τους τύπους του Vietta είναι: $\rho_1+\rho_2=-\frac{2\beta}{3\alpha}$, οπότε:

$$f''(\rho_1)+f''(\rho_2)=-6\alpha\frac{2\beta}{3\alpha}+4\beta=0.$$



5.125. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι 1-1.

Εστω ότι η f είναι 1-1, τότε επειδή είναι συνεχής θα είναι γνησίως μονότονη στο $[0, +\infty)$.

δηλαδή για $0 < \alpha < \beta < \gamma$ θα είναι $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ ή $f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma)$.

Αν η f δεν ήταν γνησίως μονότονη τότε θα ήταν $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$, δηλαδή $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών θα υπήρχε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(\gamma)$. Επειδή η f είναι 1-1 θα είναι $x_0 = \gamma$ που είναι άτοπο αφού $\gamma \notin (\alpha, \beta)$. Επειδή $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της θα είναι το $(0, 0]$ ή $[0, 0)$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν είναι 1-1, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Οπότε λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2) , δηλαδή τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

5.126. Εστω $M(\xi, f(\xi))$. Η εφαπτομένη στο M είναι: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Για να διέρχεται από το Ο πρέπει: $-f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ (1)

Από το Θ.Ρ για την $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ισχύει η (1).

Αν η $h(x) = xf'(x) - f(x)$ έχει 2 ρίζες τότε από το Θ.Ρ προκύπτει άτοπο.

5.127. a) Είναι $f(x)f'(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = \frac{2\ln x}{x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (\ln^2 x)' \Leftrightarrow (f^2(x) - \ln^2 x)' = 0$.

Εστω $g(x) = f^2(x) - \ln^2 x, x \in [\alpha, \gamma]$.

Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Η g είναι παραγωγίσιμη στα (α, β) και (β, γ) με $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\frac{\ln x}{x}$. Ακόμη $g(\alpha) = f^2(\alpha) - \ln^2 \alpha = 0$, $g(\beta) = f^2(\beta) - \ln^2 \beta = 0$ και $g(\gamma) = f^2(\gamma) - \ln^2 \gamma = 0$, δηλαδή $g(\alpha) = g(\beta) = g(\gamma)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, \beta)$ και $x_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1) = 0$ και $g'(x_2) = 0$. Δηλαδή

$$g'(x_1) = 2f(x_1)f'(x_1) - 2\frac{\ln x_1}{x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_1)f'(x_1) = \frac{\ln x_1}{x_1} \text{ και}$$

$$g'(x_2) = 2f(x_2)f'(x_2) - 2\frac{\ln x_2}{x_2} = 0 \Leftrightarrow f(x_2)f'(x_2) = \frac{\ln x_2}{x_2}.$$

Δηλαδή η εξίσωση $f(x)f'(x) = \frac{\ln x}{x}$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα (α, γ) .

b) Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο



$$(x_1, x_2) \text{ με } g''(x) = 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) - 2\frac{1-\ln x}{x^2}. \text{ Επειδή } g'(x_1) = g'(x_2) = 0,$$

λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε :

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2(f'(\xi))^2 + 2f(\xi)f''(\xi) - 2\frac{1-\ln \xi}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow (f'(\xi))^2 + f(\xi)f''(\xi) = \frac{1-\ln \xi}{\xi^2}.$$

5.128. **α)** Από το Θ.Ρ υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1) : f'(\xi_1) = 0$. Άν ν f' είχε και άλλη ρίζα ξ_2 , τότε από το Θ.Ρ

στο $[\xi_1, \xi_2]$ προκύπτει άτοπο.

β) $f'(\xi_1) = 0$

γ) Άν ν f' είχε τρείς ρίζες τότε από το Θ.Ρ ή f' θα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και ή f'' τουλάχιστον μία ρίζα, που είναι άτοπο.

δ) Θ.Ρ για την $g(x) = e^{x^2-x}f(x)$

5.129. **α)** Για $x=2$

β) Θ.Ρ στο $[0, 2]$, $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$

γ) δύο Θ.Ρ για την f'

5.130. **α)** Παρατηρούμε ότι $f(0) = g(0) = 1$, $f(1) = g(1) = 5$

β) Θ. Rolle για την $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[0, 1]$

γ) Εστω ότι έχουν 3 ρίζες τότε από το Θ. Rolle για την h στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε $h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$ και λόγω του Θ. Rolle για την h' , υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 5^{\xi} \ln^2 5 = -2$ που είναι αδύνατη.

$$5.131. \text{ a) i. } \frac{e^{f(f(x))}}{e^{f(x)}} = e^{g(f(x))} \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = g(f(x))$$

Όπου x το $f^{-1}(x)$: $f(f(f^{-1}(x))) - f(f^{-1}(x)) = g(f(f^{-1}(x))) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x$

ii. Είναι $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$ και $\rho_1 \rho_2 < 0$. Θ.Β για την f

β) Θ.Ρ για τη g στο $[\rho_1, \rho_2]$

$$5.132. \text{ a) } \Theta. R \text{ για την } g(x) = \frac{f(x)}{x} - x$$

β) Εστω 2 ρίζες, τότε άτοπο.

γ) $y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$ Επαληθεύεται από το O.



Θ.Μ.Τ

5.160. **α)** Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f'(x) = 1 - 2x$ οπότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = f(2) - f(1) \Leftrightarrow 1 - 2\xi = -2 - 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}.$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = e^x$, οπότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = f(1) - f(0) \Leftrightarrow e^\xi = e - 1 \Leftrightarrow \xi = \ln(e - 1)$$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$, οπότε η f είναι συνεχής στο 1 και επειδή είναι συνεχής στα $[0,1]$ και $(1,2]$ ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $[0,2]$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} = 1, \text{ áρα } f'(1) = 1.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in (0,1] \\ -2x+3, & x \in (1,2) \end{cases}$. Από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει

$$\xi \in (0,2) : f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 0.$$

$$\text{Αν } \xi \in (0,1], \text{ τότε: } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 1 = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\text{αν } \xi \in (1,2), \text{ τότε: } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -2\xi + 3 = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}$$

5.161. Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (1,3) : f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 4 = \lambda_\varepsilon$

5.162. Η f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$, επομένως υπάρχει $\xi \in (2,6)$

$$\text{τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{2v - 6v}{4} = -v.$$

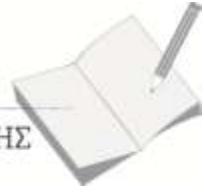
Επομένως η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή

$$\text{διεύθυνσης } f'(\xi) = -v. \text{ Παρατηρούμε ότι η ευθεία } (\varepsilon) \text{ γράφεται } vy - x = v \Leftrightarrow y = \frac{1}{v}x + 1$$

και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{v}$. Όμως τότε $\lambda \cdot f'(\xi) = \frac{1}{v}(-v) = -1$, οπότε η

εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ και η (ε) τέμνονται κάθετα.

5.163. ΘΜΤ για την f' στο $[0,2]$, άτοπο.



5.164. ΘΜΤ για την f στο $[0, 2]$ και αντικατάσταση στη σχέση $|f'(x)| \leq 2$.

5.165. ΘΜΤ για την $g(x) = \inf\{f(x)\}$ στο $[\alpha, \beta]$.

5.166. Επειδή η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, και f' είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και

παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Άρα λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, ώστε να ισχύει :

$$f''(\xi) = \frac{f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f'(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} - f'(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{2[f(\beta) - f(\alpha) - (\beta - \alpha)f'(\alpha)]}{(\beta - \alpha)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}f''(\xi)(\beta - \alpha)^2 = f(\beta) - f(\alpha) - (\beta - \alpha)f'(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{2}f''(\xi)(\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)f'(\alpha) + f(\alpha) = f(\beta).$$

5.167. Η f είναι συνεχής στα $[0, x] \cup [x, 1]$, $x \in (0, 1)$ και παραγωγίσιμη στα $(0, x)$ και $(x, 1)$ οπότε από

$$\text{Θ.Μ.Τ. υπάρχουν } \xi_1 \in (0, x) \text{ και } \xi_2 \in (x, 0) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 3}{x}$$

$$\text{και } f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{5 - f(x)}{1 - x}$$

$$\text{Είναι } f'(\xi_1) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{f(x) - 3}{x} \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 2x + 3 \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{5 - f(x)}{1 - x} \leq 2 \Leftrightarrow 5 - f(x) \leq 2 - 2x \Leftrightarrow f(x) \geq 2x + 3 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) είναι $f(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Επειδή $f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ και $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$, είναι $f(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in [0, 1]$

5.168. Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in [0, x]$: $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x) - \alpha}{x}$.

$$\text{Είναι } f'(\xi) \leq \lambda \Leftrightarrow \frac{f(x) - \alpha}{x} \leq \lambda \Leftrightarrow f(x) \leq \lambda x + \alpha$$

5.169. ΘΜΤ για τις f, g στο $[0, 1]$, αντικατάσταση στις $2 \leq f'(x) \leq 5$, $4 \leq g'(x) \leq 7$ και πρόσθεση κατά μέλη.

5.170. Εστω ότι $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Τότε στο διάστημα $[0, x]$ εφαρμόζεται για την f το Θ.Μ.Τ. και υπάρχει

$$\xi \in (0, x) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow f(x) = xf'(\xi) \quad (1).$$



Είναι $f'(\xi) > \kappa > 0$ και $x \geq \frac{1}{2}$, οπότε: $xf'(\xi) > \kappa \frac{1}{2} \Leftrightarrow xf'(\xi) > \frac{\kappa}{2}$ και λόγω της (1), έχουμε:

$$f(x) > \frac{\kappa}{2}. \text{ Άρα, για κάθε } x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \text{ ισχύει } f(x) > \frac{\kappa}{2}.$$

5.171. Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, x)$ και $\xi_2 \in (x, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f(x) - \alpha}{x - \alpha} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} = \frac{\beta - f(x)}{\beta - x}. \text{ Είναι}$$

$$f'(\xi_1) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(x) - \alpha}{x - \alpha} \leq 1 \Leftrightarrow f(x) - \alpha \leq x - \alpha \Leftrightarrow f(x) \leq x \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\beta - f(x)}{\beta - x} \leq 1 \Leftrightarrow \beta - f(x) \leq \beta - x \Leftrightarrow f(x) \geq x \quad (2). \text{ Από τις (1),(2), είναι } f(x) = x.$$

5.172. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα

$$\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \text{ και } \left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right], \text{ οπότε υπάρχουν } \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \text{ και } \xi_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right), \text{ τέτοια ώστε :}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - 3\beta}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{3\alpha - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

$$\text{Είναι : } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - 3\beta}{\frac{\beta - \alpha}{2}} + \frac{3\alpha - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{-3\beta + 3\alpha}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{-3(\beta - \alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = -6.$$

5.173. ΘΜΤ στα $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$, $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right]$ και πρόσθεση κατά μέλη.

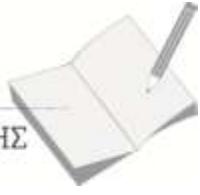
5.174. ΘΜΤ στα $[0, 3]$, $[3, 6]$, $[6, 9]$ και πρόσθεση κατά μέλη.

5.175. ΘΜΤ στα $[1, 3]$, $[3, 6]$, $[6, 10]$ και πρόσθεση κατά μέλη.

5.176. ΘΜΤ στα $\left[\alpha, \frac{2\alpha + 3\beta}{5} \right]$, $\left[\frac{2\alpha + 3\beta}{5}, \beta \right]$ και πρόσθεση κατά μέλη.

5.177. Επιλέγουμε τα σημεία x_1, x_2, x_3 του $[\alpha, \beta]$, ώστε τα πλάτη των υποδιαστημάτων του (α, β) ,

$$\text{που ορίζονται από τα παραπάνω σημεία να είναι, } \delta_1 = \frac{2}{10}(\beta - \alpha), \delta_2 = \frac{3}{10}(\beta - \alpha),$$



$$\delta_3 = \frac{5}{10}(\beta - \alpha) \text{ Δηλαδή :}$$

$$\delta_1 = x_1 - \alpha = \frac{2}{10}(\beta - \alpha), \delta_2 = x_2 - x_1 = \frac{3}{10}(\beta - \alpha), \delta_3 = \beta - x_3 = \frac{5}{10}(\beta - \alpha).$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f στα $[\alpha, x_1] [x_1, x_2] [x_2, \beta]$.

$$\text{Υπάρχει } \xi_1 \in (\alpha, x_1) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{\frac{2}{10}(\beta - \alpha)}$$

$$\text{Υπάρχει } \xi_2 \in (x_1, x_2) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\frac{3}{10}(\beta - \alpha)}$$

$$\text{Υπάρχει } \xi_3 \in (x_2, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(x_2)}{\beta - x_2} = \frac{f(\beta) - f(x_2)}{\frac{5}{10}(\beta - \alpha)}.$$

$$\text{Οπότε: } \begin{cases} \frac{2}{10} f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \\ \frac{3}{10} f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\beta - \alpha} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \frac{2}{10} f'(\xi_1) + \frac{3}{10} f'(\xi_2) + \frac{5}{10} f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \\ \frac{5}{10} f(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(x_2)}{\beta - \alpha} \end{cases}$$

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 5f'(\xi_3) = 10 \frac{(\beta - \alpha)}{(\beta - \alpha)} = 10.$$

5.178. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) < 3 < f(1)$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων

τημών υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 3$.

β) Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσος Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, \xi]$ και $[\xi, 1]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (-1, \xi)$ και $\xi_2 \in (\xi, 1)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(-1)}{\xi + 1} = \frac{3 - 1}{\xi + 1} = \frac{2}{\xi + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{\xi + 1}{2} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{5 - 3}{1 - \xi} = \frac{2}{1 - \xi} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{1 - \xi}{2}.$$

$$\text{Οπότε } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\xi + 1}{2} + \frac{1 - \xi}{2} = \frac{\xi + 1 + 1 - \xi}{2} = 1.$$

γ) Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσος Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-1, 0)$ και $x_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 + 1} = f(0) - 1 \text{ και } f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 5 - f(0).$$



Είναι $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ και επειδόν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$, έχουμε:

$$f'(x_1) > f'(x_2) \Leftrightarrow f(0) - 1 > 5 - f(0) \Leftrightarrow 2f(0) > 6 \Leftrightarrow f(0) > 3.$$

5.179. α) Επειδόν η f είναι συνεχής στο $[1, 9]$ και $f(1) < 6 < 10 < f(9)$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 9)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = 6$ και $f(x_2) = 10$.

β) Από το ΘΜΤ για την f στα $[1, x_1], [x_1, x_2], [x_2, 10]$ υπάρχουν

$\xi_1 \in (1, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2), \xi_3 \in (x_2, 10)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1} = \frac{4}{x_1 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{x_1 - 1}{4},$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{x_2 - x_1}{4} \text{ και}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(9) - f(x_2)}{9 - x_2} = \frac{4}{9 - x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_3)} = \frac{9 - x_2}{4}.$$

$$\text{Με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{1}{f'(\xi_3)} = 2.$$

γ) Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_4 \in (1, 5)$ και $\xi_5 \in (5, 9)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_4) = \frac{f(5) - f(1)}{4} = \frac{f(5) - 2}{4} \text{ και } f'(\xi_5) = \frac{f(9) - f(5)}{4} = \frac{14 - f(5)}{4}.$$

$$\text{Είναι } \xi_4 < \xi_5 \Leftrightarrow f'(\xi_4) < f'(\xi_5) \Leftrightarrow \frac{f(5) - 2}{4} < \frac{14 - f(5)}{4} \Leftrightarrow f(5) < 8$$

5.180. Το διάστημα $[f(0), f(10)] = [0, 20]$, αν το χωρίσουμε σε 4 ίσα υποδιαστήματα, τότε αυτά θα

$$\text{έχουν πλάτος } \frac{20 - 0}{4} = 5. \text{ Επειδόν η } f \text{ είναι συνεχής στο } [0, 10] \text{ και}$$

$f(0) < 5 < f(10), f(0) < 10 < f(10), f(0) < 15 < f(10)$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (0, 10)$ τέτοια, ώστε: $f(x_1) = 5, f(x_2) = 10$, και $f(x_3) = 15$.

Εστω $x_1 < x_2 < x_3$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[0, 10]$, άρα και στα

διαστήματα: $[0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, 10]$, οπότε, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ.

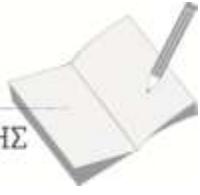
υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2), \xi_3 \in (x_2, x_3), \xi_4 \in (x_3, 10)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{5 - 0}{x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{x_1}{5} (1), \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 5}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{x_2 - x_1}{5} (2)$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{15 - 10}{x_3 - x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_3)} = \frac{x_3 - x_2}{5} (3)$$

$$f'(\xi_4) = \frac{f(x_{10}) - f(x_3)}{10 - x_3} = \frac{20 - 15}{10 - x_3} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_4)} = \frac{10 - x_3}{5} (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), (3), (4), έχουμε:



$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{1}{f'(\xi_3)} + \frac{1}{f'(\xi_4)} = \frac{x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + 10 - x_3}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

5.181. Αρχικά θα μερίσουμε το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)] = [2\alpha, 2\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα

πλάτους $\frac{2\beta - 2\alpha}{ν}$. Λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχουν

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_{ν-1} \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε :

$$f(\kappa_1) = 2\alpha + \frac{2\beta - 2\alpha}{ν}, \quad f(\kappa_2) = 2\alpha + 2 \cdot \frac{2\beta - 2\alpha}{ν}, \dots, \quad f(\kappa_{ν-1}) = 2\alpha + (ν-1) \cdot \frac{2\beta - 2\alpha}{ν}. \quad \text{Έστω}$$

$\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_{ν-1}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσος τιμής για την f , υπάρχουν

$\xi_1 \in (\alpha, \kappa_1), \xi_2 \in (\kappa_1, \kappa_2), \dots, \xi_{ν-1} \in (\kappa_{ν-1}, \beta)$ τέτοια, ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\kappa_1) - f(\alpha)}{\kappa_1 - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{\frac{2\beta - 2\alpha}{ν}}{\kappa_1 - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{\kappa_1 - \alpha}{\frac{2\beta - 2\alpha}{ν}}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\kappa_2) - f(\kappa_1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{\frac{2\beta - 2\alpha}{ν}}{\kappa_2 - \kappa_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\frac{2\beta - 2\alpha}{ν}}$$

.....

.....

$$f'(\xi_{ν-1}) = \frac{f(\beta) - f(\kappa_{ν-1})}{\beta - \kappa_{ν-1}} \Leftrightarrow f'(\xi_{ν-1}) = \frac{\frac{2\beta - 2\alpha}{ν}}{\beta - \kappa_{ν-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_{ν-1})} = \frac{\beta - \kappa_{ν-1}}{\frac{2\beta - 2\alpha}{ν}}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει :

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \dots + \frac{1}{f'(\xi_{ν-1})} = \frac{\kappa_1 - \alpha + \kappa_2 - \kappa_1 + \dots + \beta - \kappa_{ν-1}}{\frac{2\beta - 2\alpha}{ν}} = \frac{ν}{2}$$

5.182. **a)** Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 10]$ και $f(0) < 4 < 10 < f(10)$, λόγω του θεωρήματος

ενδιάμεσων τιμών υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 10)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = 4$ και $f(x_2) = 10$.

b) ΘΜΤ για την f στα $[0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, 10]$

5.183. Αρχικά θα μερίσουμε το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)] = [0, 10]$ σε 4 υποδιαστήματα με αντίστοιχα

πλάτη 1, 2, 3, 4. Λόγω θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in (\alpha, \beta)$

τέτοια, ώστε $f(\kappa_1) = 1, f(\kappa_2) = 3, f(\kappa_3) = 6$. Έστω $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$. Εφαρμόζοντας το

θεώρημα μέσος τιμής για την f , υπάρχουν

$\xi_1 \in (\alpha, \kappa_1), \xi_2 \in (\kappa_1, \kappa_2), \xi_3 \in (\kappa_2, \kappa_3), \xi_4 \in (\kappa_3, \beta)$ τέτοια, ώστε :



$$\begin{aligned} f'(\xi_1) = \frac{f(\kappa_1) - f(\alpha)}{\kappa_1 - \alpha} &\Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{1}{\kappa_1 - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \kappa_1 - \alpha \\ f'(\xi_2) = \frac{f(\kappa_2) - f(\kappa_1)}{\kappa_2 - \kappa_1} &\Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{2}{\kappa_2 - \kappa_1} \Leftrightarrow \frac{2}{f'(\xi_2)} = \kappa_2 - \kappa_1 \\ f'(\xi_3) = \frac{f(\kappa_3) - f(\kappa_2)}{\kappa_3 - \kappa_2} &\Leftrightarrow f'(\xi_3) = \frac{3}{\kappa_3 - \kappa_2} \Leftrightarrow \frac{3}{f'(\xi_3)} = \kappa_3 - \kappa_2 \text{ και} \\ f'(\xi_4) = \frac{f(\beta) - f(\kappa_3)}{\beta - \kappa_3} &\Leftrightarrow f'(\xi_4) = \frac{4}{\beta - \kappa_3} \Leftrightarrow \frac{4}{f'(\xi_4)} = \beta - \kappa_3 \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει :

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{1}{f'(\xi_3)} + \frac{1}{f'(\xi_4)} = \kappa_1 - \alpha + \kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_3 - \kappa_2 + \beta - \kappa_3 = \beta - \alpha = 10$$

- 5.184. **a)** Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής, υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Άρα $m \leq f(\alpha) \leq M \Leftrightarrow 2m \leq 2f(\alpha) \leq 2M$, $m \leq f(\beta) \leq M \Leftrightarrow 3m \leq 3f(\beta) \leq 3M$, οπότε και

$$5m \leq 2f(\alpha) + 3f(\beta) \leq 5M \Leftrightarrow m \leq \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} \leq M.$$

Επειδή ο αριθμός $\frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$, ανήκει στο σύνολο τιμών της f υπάρχει

$$x_0 \in [\alpha, \beta] : f(x_0) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}.$$

Αν $x_0 = \alpha$, τότε $f(\alpha) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta)$ και από το Θ.Rolle υπάρχει

$x_1 \in (\alpha, \beta) : f'(x_1) = 0$ που είναι άτοπο. Όμοια αν $x_0 = \beta$. Άρα τελικά υπάρχει

$$x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$$

b) Από το ΘMT για την f στα $[\alpha, x_0], [x_0, \beta]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, x_0), \xi_2 \in (x_0, \beta)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{\frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{3}{5} \cdot \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} f'(\xi_1)(x_0 - \alpha) = \frac{1}{5} (f(\beta) - f(\alpha)) \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{f(\beta) - \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}}{\beta - x_0} = \frac{2}{5} \cdot \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - x_0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} f'(\xi_2)(\beta - x_0) = \frac{1}{5} (f(\beta) - f(\alpha)) \quad (2).$$



Από τις (1),(2), ισχύει ότι:

$$\frac{1}{3}f'(\xi_1)(x_0 - \alpha) = \frac{1}{2}f'(\xi_2)(\beta - x_0) \Leftrightarrow 2f'(\xi_1)(x_0 - \alpha) = 3f'(\xi_2)(\beta - x_0)$$

$$\gamma) \text{ Από το ΘΜΤ για την } f, \text{ υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{5}{f'(\xi)} = \frac{5(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

$$\text{Είναι } f'(\xi_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} \Leftrightarrow \frac{3}{f'(\xi_1)} = \frac{5(x_0 - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - x_0} \Leftrightarrow \frac{5}{f'(\xi_2)} = \frac{2(\beta - x_0)}{f(\beta) - f(\alpha)}, \text{ άρα}$$

$$\frac{5}{f'(\xi_1)} + \frac{5}{f'(\xi_2)} = \frac{5(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{5}{f'(\xi)}$$

5.185. Από τη σχέση $2f(4) = f(2) + f(6)$ προκύπτει ότι $f(4) - f(2) = f(6) - f(4)$ (1), οπότε θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[2, 4]$, $[4, 6]$, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (2, 4)$ και $\xi_2 \in (4, 6)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{f(4) - f(2)}{2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{f(6) - f(4)}{2}.$$

Οπότε από την (1) προκύπτει ότι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Επίσης, επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq (2, 6)$, άρα σύμφωνα με το θ. Rolle, υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (2, 6)$ τέτοιο, ώστε: $f''(x_0) = 0$.

5.186. ΘΜΤ για την f στα $[0, 1], [2, 3]$ και στη συνέχεια Θ.Ρ για την f' .

5.187. ΘΜΤ για την f στο $[0, 1]$ και στη συνέχεια 2 θεωρήματα Rolle για την f' .

5.188. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$ και παραγωγίσιμη

στα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσος τιμής, υπάρχουν

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \text{ και } \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right) \text{ τέτοια, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\text{και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = -\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$



$$\text{Είναι } f'(\xi_1)f'(\xi_2) = -\left(\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\right)^2 \leq 0.$$

5.189. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$, $[x_0, \beta]$.

Η f συνεχής στο $[\alpha, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x_0) , λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα

$$\text{τουλάχιστον } \xi_1 \in (\alpha, x_0) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha} < 0.$$

$$\text{Ομοίως στο } [x_0, \beta] \text{ υπάρχει } \xi_2 \in (x_0, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = -\frac{f(x_0)}{\beta - x_0} > 0.$$

Η f' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$, λόγω του Θ.Μ.Τ

$$\text{υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in (\xi_1, \xi_2) \text{ τέτοιο, ώστε: } f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} > 0. \text{ Αφού}$$

$$f'(\xi_2) > 0 \text{ και } f'(\xi_1) < 0.$$

5.190. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$, όποτε υπάρχει

$$\xi_1 \in (\alpha, \beta), \text{ τέτοιο ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = -\frac{f(\alpha)}{\beta - \alpha}. \text{ Επειδή } f(\alpha) < 0 \text{ είναι } f'(\xi_1) > 0.$$

Η συνάρτηση f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\xi_1, \beta]$, οπότε υπάρχει

$$\xi \in (\xi_1, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε: } f''(\xi) = \frac{f'(\beta) - f'(\xi_1)}{\beta - \xi_1} = -\frac{f'(\xi_1)}{\beta - \xi_1}.$$

$$\text{Επειδή } f'(\xi_1) > 0 \text{ είναι } f''(\xi) < 0.$$

5.191. Επειδή $\ln 3, \ln 4 \in (-2, 2)$ από ΘΕΤ $\exists x_1, x_2 \in (-3, 1) : f(x_1) = \ln 3, f(x_2) = \ln 4$

$$\text{Από ΘΜΤ στο } [x_1, x_2] \text{ ή } [x_2, x_1] \exists \xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\ln 4 - \ln 3}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Ομοίως } x_2 - x_1 < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2 - x_1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\ln 4 - \ln 3}{x_2 - x_1} > \frac{\ln 4 - \ln 3}{4} \Leftrightarrow f'(\xi) > \frac{\ln \frac{4}{3}}{4}$$

5.192. Από το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και ΘΜΤ στα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

5.193. a) ΘΜΤ στα $[0, 1], [1, 2], [2, 3]$

b) Από το Θ.Bolzano υπάρχει $\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2)$ και $\xi_5 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_4) = f'(\xi_5) = 0$



και Θ.Ρ στο $[\xi_4, \xi_5]$.

5.194. α) ΘΒ για την $g(x) = f(x) - 3x + 2$.

β) ΘΜΤ στα $[1, x_0]$ και $[x_0, 2]$.

5.195. α) $f(\xi) = \beta - 2\xi \Leftrightarrow f(\xi) - \beta + 2\xi = 0$. Εστω $g(x) = f(x) - \beta + 2x$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) - \beta + 2\alpha = -\beta - \beta + 2\alpha = 2(\alpha - \beta) < 0$,

$g(\beta) = f(\beta) - \beta + 2\beta = \beta - 2\alpha - \beta + 2\beta = 2(\beta - \alpha) > 0$, και $g(\alpha)g(\beta) < 0$, άρα λόγω του

θεωρήματος Bolzano υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \beta - 2\xi$.

β) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \xi]$ και $[\xi, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα (α, ξ) και (ξ, β) . Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \xi)$ και $\xi_2 \in (\xi, \beta)$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha} = \frac{\beta - 2\xi + \beta}{\xi - \alpha} = \frac{2(\beta - \xi)}{\xi - \alpha} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\xi)}{\beta - \xi} = \frac{\beta - 2\alpha - \beta + 2\xi}{\beta - \xi} = \frac{2(\xi - \alpha)}{\beta - \xi}. \text{ Είναι: } f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{2(\beta - \xi)}{\xi - \alpha} \frac{2(\xi - \alpha)}{\beta - \xi} = 4.$$

5.196. α) ΘΒ για την $f(x) = g(x) - \kappa x$

β) ΘΜΤ στα $[0, \xi]$ και $[\xi, 1]$.

5.197. α) $\frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\beta - \xi} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f(\xi) - f(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - \xi) \Leftrightarrow$

$$f(\xi) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - \xi) = 0 \quad (1)$$

Εστω $g(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως

άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$$g(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cancel{(\beta - \alpha)} = - (f(\beta) - f(\alpha)) \text{ και}$$

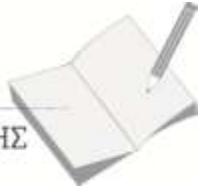
$$g(\beta) = f(\beta) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - \beta) = f(\beta) - f(\alpha), \text{ δηλαδή}$$

$$g(\alpha)g(\beta) = - (f(\beta) - f(\alpha))^2 < 0,$$

οπότε, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - \xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\beta - \xi} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

β) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \xi]$ και $[\xi, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα



(α, ξ) και (ξ, β) , άρα λόγω του θεωρήματος μέσος τιμής υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \xi)$ και

$$\xi_2 \in (\xi, \beta) \text{ τέτοια, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\xi)}{\beta - \xi}.$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι $f(\xi) = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - \xi)$, οπότε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - \xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\beta - \xi}{\xi - \alpha} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - \xi)}{\beta - \xi} = \frac{[f(\beta) - f(\alpha)](\beta - \alpha) - [f(\beta) - f(\alpha)](\beta - \xi)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_2) = \frac{[f(\beta) - f(\alpha)](\beta - \alpha - \beta + \xi)}{(\beta - \alpha)(\beta - \xi)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\xi - \alpha}{\beta - \xi}$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\cancel{\beta - \xi}}{\cancel{\xi - \alpha}} \cdot \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\cancel{\xi - \alpha}}{\cancel{\beta - \xi}} = \left(\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right)^2$$

5.198. **a)** $g'(x+1) = 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow \frac{g'(x+1)}{f'(x)} = 2f(x)$

Είναι $\frac{g'(1)}{f'(0)} = 2f(0)$, $\frac{g'(2)}{f'(1)} = 2f(1)$ και $\frac{g'(1)}{f'(0)} = \frac{g'(2)}{f'(1)}$ $\Leftrightarrow g'(1)f'(1) = g'(2)f'(0)$, άρα $f(0) = f(1)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, εφαρμόζεται το Θ.Rolle για την f στο $[0, 1]$.

b) Από το ΘMT για την f στα $[0, 0,5]$ και $[0,5, 1]$, υπάρχουν $\rho_1 \in (0, 0,5)$ και $\rho_2 \in (0,5, 1)$

$$\text{τέτοια, ώστε: } f'(\rho_1) = \frac{f(0,5) - f(0)}{0,5} \text{ και } f'(\rho_2) = \frac{f(1) - f(0,5)}{0,5}.$$

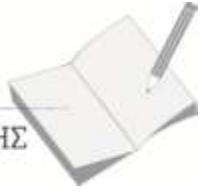
$$\text{Είναι } f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = \frac{f(0,5) - f(0)}{0,5} + \frac{f(1) - f(0,5)}{0,5} = 0$$

5.199. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = e^x - 2x$, οπότε από το θεώρημα μέσος τιμής, υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta - \beta^2 - e^\alpha + \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} - \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(x_1) = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} - \beta - \alpha \quad (1).$$

Εστω η συνάρτηση $g(x) = e^x$, $x \in [\alpha, \beta]$. Από το θεώρημα μέσος τιμής για την g , υπάρχει



$$x_2 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(x_2) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{x_2} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} \quad (2).$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει: } f'(x_1) = e^{x_2} - \beta - \alpha \Leftrightarrow f'(x_1) + \alpha + \beta = e^{x_2}.$$

5.200. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$f'(x) = \left(\frac{x \eta \mu x + 1}{x} \right)' = \left(\eta \mu x + \frac{1}{x} \right)' = \sigma v n x - \frac{1}{x^2},$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{\beta \eta \mu \beta + 1}{\beta} - \frac{\alpha \eta \mu \alpha + 1}{\alpha}}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha \beta \eta \mu \beta + \alpha - \alpha \beta \eta \mu \alpha - \beta}{\alpha \beta \beta - \alpha \beta \alpha} \Leftrightarrow \\ f'(x_1) &= \frac{\alpha \beta (\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha) - (\beta - \alpha)}{\alpha \beta (\beta - \alpha)} = \frac{\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{1}{\alpha \beta} \quad (1) \end{aligned}$$

Εστω η συνάρτηση $g(x) = \eta \mu x$, $x \in [\alpha, \beta]$. Από το θεώρημα μέσης τιμής για την g , υπάρχει

$$x_2 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(x_2) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \sigma v n x_2 = \frac{\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha}{\beta - \alpha} \quad (2).$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει: } f'(x_1) = \sigma v n x_2 - \frac{1}{\alpha \beta} \Leftrightarrow f'(x_1) + \frac{1}{\alpha \beta} = \sigma v n x_2$$

5.201. **a)** ΘΜΤ στο $[1,4]$

β) Από Θ.Ρ υπάρχει $x_1 \in (3, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$.

$$\text{Είναι } f'(x_1) < \frac{1}{2} < f'(\xi), \text{ από ΘΕΤ υπάρχει } \rho \in (1, 4) : f'(\rho) = \frac{1}{2}.$$

5.202. **a)** $0 \leq f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και $0 \leq f(-1) \leq 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.

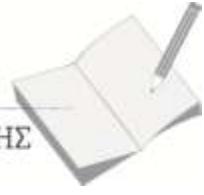
$$\text{Για } x > -1 \text{ είναι } \frac{x^2 - 1}{x + 1} \leq f(x) \leq \frac{x^2(x^2 - 1)}{x + 1} \Leftrightarrow x - 1 \leq \frac{f(x)}{x + 1} \leq x^2(x - 1) \text{ και από Κ.Π είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{x + 1} = 2. \text{ Άρα } f'(-1) = -2. \text{ Όμοια } f'(1) = 2$$

β) ΘΜΤ για την f' στο $[-1, 1]$.

5.203. Για $x = -1$ είναι $f(-2) - f(0) = 2$ και για $x = 1$ είναι $f(0) - f(2) = 2$.

Από το ΘΜΤ για την f , υπάρχουν $x_1 \in (-2, 0)$ και $x_2 \in (0, 2)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = 1$ και $f'(x_2) = -1$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $f'(x_1) f'(x_2) < 0$, από το Θ.Bolzano υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.



5.204. Από το ΘΜΤ για τη g υπάρχει $x_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_1) = \frac{g(2) - g(0)}{2} = \frac{-f(0) + f(4)}{2}$ και

$$x_2 \in (2, 4) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(x_2) = \frac{g(4) - g(2)}{2} = \frac{f(4) - f(0)}{2}.$$

Επειδή $g'(x_1) = g'(x_2)$ υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = f''(4 - \xi)$.

5.205. **a)** Εστω $g(x) = 2f(x) - f(\alpha) - f(\beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) - f(\beta)$,

$g(\beta) = f(\beta) - f(\alpha) = -(f(\alpha) - f(\beta))$, δηλαδή $g(\alpha)g(\beta) = -(f(\alpha) - f(\beta))^2 < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, από το Θ.Bolzano υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$:

$$g(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi_1) = f(\alpha) + f(\beta)$$

b) Από το ΘΜΤ για την f στα $[\alpha, \xi_1]$ και $[\xi_1, \beta]$ υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, \xi_1)$ και $x_2 \in (\xi_1, \beta)$ τέτοια,

$$\text{ώστε: } f'(x_1) = \frac{f(\xi_1) - f(\alpha)}{\xi_1 - \alpha} = \frac{\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} - f(\alpha)}{\xi_1 - \alpha} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(\xi_1 - \alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{2\xi_1 - 2\alpha}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f(\xi_1)}{\beta - \xi_1} = \frac{f(\beta) - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}}{\beta - \xi_1} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(\beta - \xi_1)} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2\beta - 2\xi_1}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)+(2)} \Rightarrow \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

5.206. **a)** Από ΘΒ υπάρχει $x_1 \in (\gamma, \delta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

b) Εστω $\gamma < \delta$. Επειδή $f(\gamma)f(\delta) < 0$ τα $f(\gamma), f(\delta)$ είναι ετερόσημοι. Έστω $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$.

$$\text{Από το ΘΜΤ για την } f \text{ υπάρχει } \xi_3 \in (\alpha, \gamma) : f'(\xi_3) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} > 0,$$

$$\text{υπάρχει } \xi_4 \in (\gamma, \delta) : f'(\xi_4) = \frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} < 0 \text{ και υπάρχει } \xi_5 \in (\delta, \beta) : f'(\xi_5) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} > 0.$$

$$\text{Από το ΘΜΤ για την } f', \text{ υπάρχει } \xi_1 \in (\xi_3, \xi_4) : f''(\xi_1) = \frac{f'(\xi_4) - f'(\xi_3)}{\xi_4 - \xi_3} < 0 \text{ και } \xi_2 \in (\xi_4, \xi_5) :$$

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\xi_5) - f'(\xi_4)}{\xi_5 - \xi_4} > 0$$

Όμοια αν $f(\gamma) < 0$ και $f(\delta) > 0$ και όμοια αν $\delta < \gamma$.

γ) Επειδή $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$ και η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$.

5.207. Εστω ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), C(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι



συνευθειακά. Τότε $\lambda_{AB} = \lambda_{BG} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Από το ΘΜΤ υπάχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \text{ Επειδή } f'(\xi_1) = f'(\xi_2), \text{ από το Θ.Ρ η}$$

$f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

5.208. Εστω ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), C(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι

συνευθειακά. Τότε $\lambda_{AB} = \lambda_{BC} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ και παραγωγίσιμη στα

$(x_1, x_2), (x_2, x_3)$, λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και

$\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$, άρα $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και

παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , άρα λόγω του θεωρήματος Rolle η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει

τουλάχιστον μία ρίζα στο (ξ_1, ξ_2) που είναι άτοπο. Άρα τρία οποιαδήποτε σημεία της γραφικής παράστασης της f , δεν μπορούν να είναι συνευθειακά.

5.209. Εστω ε μία τυχαία εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$. Τότε αυτή έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Τα κοινά σημεία της ϵ με την C_f , προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{cases}$$

Η εξίσωση $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ έχει προφανή ρίζα $x = x_0$. Έστω ότι έχει και άλλη λύση $\rho \neq x_0$, τότε θα ισχύει :

$$f(\rho) = f'(x_0)(\rho - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow f(\rho) - f(x_0) = f'(x_0)(\rho - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} \quad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , οπότε θα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και στο διάστημα $[\rho, x_0]$ ή $[x_0, \rho]$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., θα υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (\rho, x_0) \text{ ή } \xi \in (x_0, \rho) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} \quad (2).$$

Από (1), (2), προκύπτει $f'(x_0) = f'(\xi)$ και επειδή η f' είναι 1-1, ισχύει $x_0 = \xi$ που είναι άτοπο, γιατί $\xi \in (\rho, x_0)$ ή $\xi \in (x_0, \rho)$. Άρα, κάθε εφαπτομένη της C_f έχει μοναδικό κοινό σημείο με αυτήν.



5.210. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Εστω ότι $n \in \mathbb{N}$ τέμνει την C_f στα $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$.

$$\text{Τότε, } f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ και}$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(x_0)(x_2 - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Εστω ότι $x_1 < x_0 < x_2$. Λόγω Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, x_2)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = f'(x_0).$$

Δηλαδή, $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(x_0)$, άρα λόγω Θ. Rolle υπάρχουν $\xi \in (\xi_1, x_0)$ και $\xi' \in (x_0, \xi_2)$,

$f''(\xi) = f''(\xi') = 0$. Δηλαδή f'' έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Αν f'' ήταν γνησίως μονότονη,

τότε η εξίσωση $f''(x) = 0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα που είναι άτοπο. Άρα, f'' δεν είναι

γνησίως μονότονη.

5.211. Εστω ότι υπάρχει ευθεία ε , που εφάπτεται της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και

$$B(x_2, f(x_2)) \text{ με } x_1 < x_2. \text{ Τότε, } \theta \text{ είναι } f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1).$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$, οπότε σύμφωνα με το

$$\text{Θ.Μ.Τ. } \theta \text{ υπάρχει } \xi \in (x_1, x_2) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2).$$

Από (1), (2) είναι $f'(x_1) = f'(\xi) = f'(x_2)$.

Για τη συνάρτηση f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στα διαστήματα $[x_1, \xi]$ και

$[\xi, x_2]$, οπότε θα υπάρχουν $\rho_1 \in (x_1, \xi)$, $\rho_2 \in (\xi, x_2)$ τέτοια, ώστε $f''(\rho_1) = f''(\rho_2) = 0$.

Η f'' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\rho_1, \rho_2]$ και $f''(\rho_1) = f''(\rho_2)$, άρα σύμφωνα με το

Θ. Rolle θα υπάρχει $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(x_0) = 0$, άτοπο, γιατί $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5.212. **a)** Εστω ότι για την h εφαρμόζεται Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$h(\alpha) = h(\beta) \Leftrightarrow f^2(\alpha) - \alpha = f^2(\beta) - \beta \quad (1).$$

Επειδή όμως ισχύει το Θ. Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$ είναι: $f(\alpha) = f(\beta)$ και η (1) γίνεται: $\alpha = \beta$, άτοπο.

b) Είναι $h'(x) = 2f(x)f'(x) - 1$ και $h''(x) = 2[f'(x)]^2 + 2f(x)f''(x)$ (2).

Για την h ισχύει το Θ. Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = 0$. Για $x = \xi$ η (2) γίνεται:

$$h''(\xi) = 2f(\xi)f''(\xi).$$

γ) Λόγω του Θ.Μ.Τ. για την h , υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:



$$h'(x_0) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f^2(\beta) - \beta - f^2(\alpha) + \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{-\beta + \alpha}{\beta - \alpha} = -1.$$

5.213. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ με $x > 0$. Επομένως, λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f(x) - f(0) = xf'(\xi) \Leftrightarrow f(x) = xf'(\xi) + f(0).$$

Επειδή $f'(x) \leq -x^2 + x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για $x = \xi$ έχουμε: $f'(\xi) \leq -\xi^2 + \xi - 4 < -1$ γιατί $-\xi^2 + \xi - 4 < -1 \Leftrightarrow \xi^2 - \xi + 3 > 0$ που ισχύει αφού έχει $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$

Άρα $xf'(\xi) < -x \Leftrightarrow xf'(\xi) + f(0) < -x + f(0)$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + f(0)) = -\infty, \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

5.214. Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (0, x)$, $x > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f(x) = xf'(\xi) + f(0).$$

Είναι $f'(\xi) \geq e^\xi + 1 > 1$, άρα και $f(x) = xf'(\xi) + f(0) > x + f(0)$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5.215. Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, $x > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x).$$

Εστω ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \kappa$.

Επειδή οι τιμές του ξ εξαρτώνται από τις τιμές του x , είναι $x < \xi(x) < x+1$ και όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε και $\xi(x) \rightarrow +\infty$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi(x)) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} f'(\omega) = 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

5.216. Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (5, x)$, $x > 5$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \Leftrightarrow f(x) = xf'(\xi) + f(5) - 5f'(\xi).$$

$$\xi > 5 \Leftrightarrow f'(\xi) > f'(5) > 0 \Rightarrow xf'(\xi) > xf'(5) \Leftrightarrow$$

$$xf'(\xi) + f(5) - 5f'(\xi) > xf'(5) + f(5) - 5f'(\xi) \Leftrightarrow f(x) > xf'(5) + f(5) - 5f'(\xi)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf'(5) + f(5) - 5f'(\xi)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(5) = +\infty \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$



5.217. Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f(x+1) - f(x) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{x+2-x-1} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = f(x+2) - f(x+1)$$

Επειδή οι τιμές των ξ_1, ξ_2 εξαρτώνται από τις τιμές του x , είναι $x < \xi_1(x) < x+1$ και $x+1 < \xi_2(x) < x+2$ και όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε και $\xi_1(x) \rightarrow +\infty$, $\xi_2(x) \rightarrow +\infty$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi_1(x)) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} f'(\omega) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2) - f(x+1)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi_2(x)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+2) + f(x) - 2f(x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+2) - f(x+1) - (f(x+1) - f(x))] = 0$$

5.218. **a)** Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x < x$. Έστω $f(t) = e^t$. Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει

$$\xi \in (\eta\mu x, x) : f'(\xi) = \frac{e^{\eta\mu x} - e^x}{\eta\mu x - x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^{\eta\mu x} - e^x}{\eta\mu x - x}$$

$$\textbf{b)} \quad \eta\mu x < \xi < x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} < e^\xi < e^x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} < \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} < e^x.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\eta\mu x}, \text{ οπότε από ΚΠ είναι και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = 1$$

5.219. Από το ΘΜΤ για την $f(x) = \varepsilon\varphi x$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \frac{1}{\sigma v^2 \xi} = \frac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha}{\beta - \alpha}$.

$$\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow \sigma v \alpha > \sigma v \xi > \sigma v \beta \Leftrightarrow \sigma v^2 \alpha > \sigma v^2 \xi > \sigma v^2 \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma v^2 \alpha} < \frac{1}{\sigma v^2 \xi} < \frac{1}{\sigma v^2 \beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma v^2 \alpha} < \frac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sigma v^2 \beta} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\sigma v^2 \alpha} < \varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sigma v^2 \beta}$$

5.220. **a)** Από το ΘΜΤ για την $f(x) = \sqrt{x}$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha}$

$$\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha} < 2\sqrt{\xi} < 2\sqrt{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} > \frac{1}{2\sqrt{\xi}} > \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\beta}} < \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha} < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\beta}} < \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\textbf{b)} \quad \text{Από το ΘΜΤ για την } f(x) = x^v \text{ υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = v\xi^{v-1} = \frac{\beta^v - \alpha^v}{\beta - \alpha}$$

$$\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow v\alpha^{v-1} < v\xi^{v-1} < v\beta^{v-1} \Leftrightarrow v(\beta - \alpha)\alpha^{v-1} < \beta^v - \alpha^v < v(\beta - \alpha)\beta^{v-1}$$



5.221. Εστω $\alpha < \beta$. Από το ΘΜΤ για την $f(x) = \sin x$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

$$f'(\xi) = -\eta \mu \xi = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\text{Είναι } |f'(\xi)| = |-\eta \mu \xi| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |\sin \beta - \sin \alpha| \leq |\beta - \alpha|$$

Όμοια αν $\alpha > \beta$. Τέλος αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

5.222. Από το ΘΜΤ για την $f(x) = x \sin x$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = \frac{\beta \varepsilon \varphi \beta - \alpha \varepsilon \varphi \alpha}{\beta - \alpha}$.

$$\text{Όμως } f'(\xi) = \varepsilon \varphi \xi + \frac{\xi}{\sin^2 \xi} > 0, \text{ αφού } \xi \in (\alpha, \beta) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ áρα}$$

$$\frac{\beta \varepsilon \varphi \beta - \alpha \varepsilon \varphi \alpha}{\beta - \alpha} > 0 \Leftrightarrow \beta \varepsilon \varphi \beta - \alpha \varepsilon \varphi \alpha > 0 \Leftrightarrow \beta \varepsilon \varphi \beta > \alpha \varepsilon \varphi \alpha \Leftrightarrow \frac{\varepsilon \varphi \alpha}{\varepsilon \varphi \beta} < \frac{\beta}{\alpha}$$

5.223. **a)** Από το ΘΜΤ για την f , υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta)$$

b) Εφαρμογή του a) σκέλους για την $f(x) = -e^{-x}$

5.224. **a)** Από το ΘΜΤ για την $f(x) = \eta \mu x$ υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{15}\right)$:

$$f'(\xi) = \sin \xi = \frac{\eta \mu \frac{7\pi}{15} - \eta \mu \frac{\pi}{6}}{\frac{7\pi}{15} - \frac{\pi}{6}} = \frac{\eta \mu \frac{7\pi}{15} - \frac{1}{2}}{\frac{3\pi}{10}}$$

$$\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{7\pi}{15} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} > \sin \xi > \sin \frac{7\pi}{15}, \text{ áρα } \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\eta \mu \frac{7\pi}{15} - \frac{1}{2}}{\frac{3\pi}{10}} \Leftrightarrow \eta \mu \frac{7\pi}{15} - \frac{1}{2} < \frac{3\sqrt{3}\pi}{20}$$

b) Από το ΘΜΤ για την $f(x) = \eta \mu x$ υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}\right)$:

$$f'(\xi) = \sin \xi = \frac{\eta \mu \frac{5\pi}{18} - \eta \mu \frac{\pi}{4}}{\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\eta \mu \frac{5\pi}{18} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{36}}$$



$$\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{5\pi}{18} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{4} > \sin \xi > \sin \frac{5\pi}{18}, \text{ áρα } \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\eta \mu \frac{5\pi}{18} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{36}} \Leftrightarrow \eta \mu \frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi \sqrt{2}}{72}$$

5.225. **a)** Από το ΘΜΤ για την $f(x) = \ln x$, υπάρχει $\xi \in (e, \pi)$ $f'(\xi) = \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e}$.

$$e < \xi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} < \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$$

b) $e^e \pi^\pi > e^{2\pi} \Leftrightarrow \ln(e^e \pi^\pi) > 2\pi \Leftrightarrow e \ln e + \pi \ln \pi > 2\pi \Leftrightarrow e \ln e - \pi \ln e > \pi \ln \pi - \pi \ln \pi \Leftrightarrow (e - \pi) \ln e > \pi (\ln e - \ln \pi)$.

Εστω $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Λόγω Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (e, \pi)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - \ln e}{\pi - e} \Leftrightarrow \ln \pi - \ln e = \frac{1}{\xi} (\pi - e).$$

$$\text{Είναι } e < \xi < \pi, \text{ áρα } \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} (\pi - e) > \frac{\pi - e}{\pi} \Leftrightarrow \ln \pi - \ln e > \frac{\pi - e}{\pi} \Leftrightarrow \pi (\ln e - \ln \pi) < e - \pi$$

5.226. Από τη συγκεκριμένη ανίσωση δεν μπορούμε να αναγνωρίσουμε τη συνάρτηση για την οποία θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. Λογαριθμίζοντας τα μέλη της ανίσωσης, έχουμε:

$$\begin{aligned} \ln(ey) &< \ln\left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}} < \ln(ex) \Leftrightarrow \ln e + \ln y < \frac{1}{x-y} \ln\left(\frac{x^x}{y^y}\right) < \ln e + \ln x \Leftrightarrow \\ 1 + \ln y &< \frac{\ln x^x - \ln y^y}{x-y} < 1 + \ln x \Leftrightarrow 1 + \ln y < \frac{x \ln x - y \ln y}{x-y} < 1 + \ln x \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t \ln t$, $t \in [y, x]$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, με

$$f'(t) = \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = \ln t + 1. \text{ Λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει}$$

$$\xi \in (y, x): f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Leftrightarrow 1 + \ln \xi = \frac{x \ln x - y \ln y}{x - y} \quad (1).$$

Επειδή $y < \xi < x$ και η $\ln t$ είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$\ln y < \ln \xi < \ln x \Leftrightarrow 1 + \ln y < 1 + \ln \xi < 1 + \ln x$ και από την (1) προκύπτει:

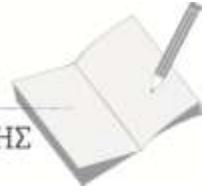
$$1 + \ln y < \frac{x \ln x - y \ln y}{x - y} < 1 + \ln x.$$

5.227. Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \ln(\ln x)$ στο $[\alpha, \alpha+1]$.

5.228. Εστω $x_1 < x_2$. Από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$: $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Είναι

$$|f'(\xi)| \leq \kappa \Leftrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \kappa |x_1 - x_2|$$

Όμοια αν $x_1 > x_2$ και για $x_1 = x_2$ ισχύει η ισότητα.



$$5.229. \text{ a) } \text{Είναι } \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

Εστω $f(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$, $x > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $f'(t) = \frac{1}{t}$, λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

$$\text{Είναι } 0 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

β) Από το ΘΜΤ για την $f(t) = \ln t$, υπάρχει $\xi \in (x-1, x+1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{x+1 - x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$x-1 < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} < \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x-1} < \frac{2}{x-1}$$

$$5.230. \text{ Εστω } x > 0. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } h(t) = e^t \text{ με } t \in [0, x], \text{ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο } [0, x], \text{ με } h'(t) = e^t. \text{ Άρα, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει } \xi \in (0, x) \text{ τέτοιο, ώστε } h'(\xi) = \frac{h(x) - h(0)}{x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1).$$

$$\text{Είναι } 0 < \xi < x \Leftrightarrow e^0 < e^\xi < e^x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x < e^x - 1 < xe^x \Leftrightarrow x+1 < e^x < xe^x + 1.$$

Όμοια, με χρήση του Θ.Μ.Τ. στο $[x, 0]$ δείχνουμε ότι ισχύει η προηγούμενη για $x < 0$.

Για $x=0$ είναι $x+1 = e^x = xe^x = 1$. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x+1 \leq e^x \leq xe^x + 1$.

$$5.231. \text{ Από το ΘΜΤ για την } f(t) = \ln t, \text{ υπάρχει } \xi_1 \in (x-1, x) : f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_1} = \ln \frac{x}{x-1}$$

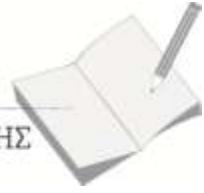
$$\text{Από το ΘΜΤ για την } f(t) = \ln t, \text{ υπάρχει } \xi_2 \in (x, x+1) : f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_2} = \ln \frac{x+1}{x}$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < x < \xi_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi_1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x} < \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$5.232. \text{ a) } \text{Από το ΘΜΤ για την } f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ υπάρχει } \xi_1 \in (3, 4) \text{ και } \xi_2 \in (6, 7) :$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_1^2}} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(7) - f(6)}{7 - 6} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_2^2}} = \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{6}. \text{ Είναι}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_1^2 < \xi_2^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\xi_1^2} < \sqrt[3]{\xi_2^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_2^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_1^2}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow$$



$$\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

β) Από το ΘΜΤ για την $f(x) = \sqrt[4]{x}$ υπάρχει $\xi_1 \in (2, 3)$ και $\xi_2 \in (4, 5)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} \Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt[4]{\xi_1^3}} = \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(4)}{5-4} \Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt[4]{\xi_2^3}} = \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{4}. \quad \text{Είναι}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_1^3 < \xi_2^3 \Leftrightarrow 4\sqrt[4]{\xi_1^3} < 4\sqrt[4]{\xi_2^3} \Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt[4]{\xi_2^3}} < \frac{1}{4\sqrt[4]{\xi_1^3}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{4} < \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3}$$

5.233. **α)** Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (-2, -1)$ και $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1+2} = f(-1) - f(-2) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1)$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(-1) - f(-2) > f(2) - f(1) \Leftrightarrow f(-1) + f(1) > f(2) + f(-2) \Leftrightarrow B > A$$

β) Αρκεί να βρούμε το πρόσημο της διαφοράς

$$\Gamma - \Delta = f(2) + f(3) - f(1) - f(4) = f(2) - f(1) - (f(4) - f(3)).$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 2]$, $[3, 4]$, οπότε

υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 2)$ και $\xi_2 \in (3, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(3)}{4-3} = f(4) - f(3).$$

$$\text{Είναι } 1 < \xi_1 < 2 < 3 < \xi_2 < 4 \stackrel{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(2) - f(1) > f(4) - f(3) \Leftrightarrow \\ f(2) - f(1) - (f(4) - f(3)) > 0 \Leftrightarrow \Gamma - \Delta > 0 \Leftrightarrow \Gamma > \Delta.$$

5.234. Είναι $\sqrt[3]{\alpha+1} + \sqrt[3]{\alpha+2} > \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha+3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha+1} - \sqrt[3]{\alpha} > \sqrt[3]{\alpha+3} - \sqrt[3]{\alpha+2} \quad (1).$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$. Τότε η (1) γίνεται:

$$f(\alpha+1) - f(\alpha) > f(\alpha+3) - f(\alpha+2).$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την f .

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \alpha+1]$ και

$[\alpha+2, \alpha+3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \alpha+1)$ και $\xi_2 \in (\alpha+2, \alpha+3)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha+1) - f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha} = \sqrt[3]{\alpha+1} - \sqrt[3]{\alpha} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha+3) - f(\alpha+2)}{\alpha+3-\alpha-2} = \sqrt[3]{\alpha+3} - \sqrt[3]{\alpha+2}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_1^2 < \xi_2^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\xi_1^2} < \sqrt[3]{\xi_2^2} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\xi_1^2} < 3\sqrt[3]{\xi_2^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_1^2}} > \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_2^2}} \Leftrightarrow$$



$$\sqrt[3]{\alpha+1} - \sqrt[3]{\alpha} > \sqrt[3]{\alpha+3} - \sqrt[3]{\alpha+2}.$$

5.235. **a)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(t) = xt^{x-1}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[7, 8]$ και $[9, 10]$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ.

υπάρχουν $\xi_1 \in (7, 8)$ και $\xi_2 \in (9, 10)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = f(8) - f(7) \Leftrightarrow x\xi_1^{x-1} = 8^x - 7^x \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = f(10) - f(9) \Leftrightarrow x\xi_2^{x-1} = 10^x - 9^x.$$

Οπότε, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$x\xi_1^{x-1} = x\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \quad (2).$$

Από την (2) έχουμε $\frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1} = 1$ και επειδή $\frac{\xi_1}{\xi_2} \neq 1$ γιατί $\xi_1 \neq \xi_2$ θα είναι

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, $x=0$ ή $x=1$.

b) Η εξίσωση γίνεται $5^x - 4^x = 7^x - 6^x$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(t) = xt^{x-1}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[4, 5]$ και $[6, 7]$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ.

υπάρχουν $\xi_1 \in (4, 5)$ και $\xi_2 \in (6, 7)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = f(5) - f(4) \Leftrightarrow x\xi_1^{x-1} = 5^x - 4^x \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = f(7) - f(6) \Leftrightarrow x\xi_2^{x-1} = 7^x - 6^x.$$

Οπότε, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$x\xi_1^{x-1} = x\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \quad (2).$$

Από την (2) έχουμε $\frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1} = 1$ και επειδή $\frac{\xi_1}{\xi_2} \neq 1$ γιατί $\xi_1 \neq \xi_2$ θα είναι

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, $x=0$ ή $x=1$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(t) = xt^{x-1}$.

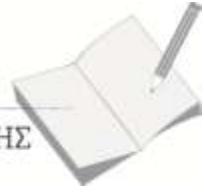
Από το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi \in (2, 3) : f'(\xi) = f(3) - f(2) \Leftrightarrow x\xi^{x-1} = 3^x - 2^x$.

$$x+2^x = 3^x \Leftrightarrow x = 3^x - 2^x \Leftrightarrow x = x\xi^{x-1} \Leftrightarrow x - x\xi^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x(1 - x\xi^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή}$$

$$\xi^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

5.236. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $f'(x) = 2x(\ln x + 1) + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln x + 3)$.

Επειδή $1 < x < e$ είναι: $0 < \ln x < 1 \Leftrightarrow 3 < 2\ln x + 3 < 5$, άρα $3 < x(2\ln x + 3) < 5e \Leftrightarrow 3 < f'(x) < 5e$ για κάθε $x \in (1, e)$ (1).



Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, x]$, $x \in [1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, άρα λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2(\ln x + 1) + 1 - 1^2(\ln 1 + 1) - 1}{x - 1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{x^2(\ln x + 1) - 1}{x - 1}$$

$$\text{Όμως } 3 < f'(\xi) < 5e, \text{ άρα } 3 < \frac{x^2(\ln x + 1) - 1}{x - 1} < 5e \Leftrightarrow 3(x - 1) < x^2(\ln x + 1) - 1 < 5e(x - 1) \Leftrightarrow 3x - 2 < x^2(\ln x + 1) < 5e(x - 1) + 1.$$

5.237. Από το ΘΜΤ για την f , υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$.

$$\text{Είναι } x < \xi < x+1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$$

5.238. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x-1, x]$, οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi_1 \in (x-1, x) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - x+1} = f(x) - f(x-2).$$

Επίσης, για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x, x+1]$, οπότε υπάρχει

$$\xi_2 \in (x, x+1) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x).$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < x < \xi_2 \text{ και επειδή } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα, είναι } f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x) - f(x-1) < f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow 2f(x) < f(x+1) + f(x-1)$$

5.239. Από το ΘΜΤ για την f υπάρχουν $\xi_1 \in (2, 4)$ και $\xi_2 \in (4, 6)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(2)}{4-2} = \frac{4-f(2)}{2}$ και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(4)}{6-4} = \frac{f(6)-4}{2}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{4-f(2)}{2} > \frac{f(6)-4}{2} \Leftrightarrow f(2) + f(6) < 8$$

5.240. Από το ΘΜΤ για την f υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 5)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = -\frac{f(0)}{2}$ και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(2)}{5-2} = \frac{f(5)}{3}. \text{ Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f(0)}{2} > \frac{f(5)}{3} \Leftrightarrow$$

$$3f(0) + 2f(5) < 0$$

5.241. Από το ΘΜΤ για την f υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = -\frac{f(\alpha)}{\gamma - \alpha}$ και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma}. \text{ Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow (\beta - \gamma)f(\alpha) + (\gamma - \alpha)f(\beta) > 0$$



5.242. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[0, x]$ και $[x, 1]$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} \text{ και } \xi_2 \in (x, 1), \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x)}{1-x} = \frac{1-f(x)}{1-x}.$$

$$\text{Επειδή } \xi_1 < \xi_2 \text{ και } n f' \uparrow, \text{ είναι: } f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < \frac{1-f(x)}{1-x} \stackrel{x(1-x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$(1-x)f(x) < x(1-f(x)) \Leftrightarrow f(x) - xf(x) < x - xf(x) \Leftrightarrow f(x) < x.$$

$$\text{Άρκει να δείξουμε ότι } x < \frac{1}{2-x} \Leftrightarrow (2-x)x < 1.$$

$$\text{Είναι } 2x - x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \text{ που ισχύει στο } (0, 1).$$

5.243. ΘΜΤ στο $[0, 1]$ $\exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1) - f(0)$

$$\text{Αφού } f'(\xi) \geq \frac{f^2(1) + f^2(0) + 2f(0) + 5}{2} \text{ τότε}$$

$$f(1) - f(2) \geq \frac{f^2(1) + f^2(0) + 2f(0) + 5}{2} \Leftrightarrow 2f(1) - 2f(0) \geq f^2(1) + f^2(0) + 2f(0) + 5 \Leftrightarrow$$

$$(f(1)-1)^2 + (f(0)-2)^2 \leq 0 \text{ áρα } f(1)=1 \text{ και } f(0)=-2. \text{ Άρα } n \text{ αρχική γίνεται } f'(x) \geq 3$$

$$\text{Για } x \in (0, 1) \text{ ΘΜΤ στο } [0, x] : \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\xi_1) \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3x - 2 \quad (1)$$

$$\text{ΘΜΤ στο } [x, 1] : \frac{f(1) - f(x)}{1-x} = f'(\xi_2) \geq 3 \Leftrightarrow f(1) - f(x) \geq 3 - 3x \Leftrightarrow f(x) \leq 3x - 2 \quad (2)$$

Άρα από (1),(2) $f(x) = 3x - 2$

5.244. a) Εστω ότι $n f$ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in [\alpha, \beta]$ με $\rho_1 < \rho_2$. Τότε λόγω του θεωρήματος Rolle για την f , υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι αδύνατο. Άρα $n f$ δεν έχει δύο ρίζες στο $[\alpha, \beta]$ και έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

b) i. Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία $y = f'(x_0)(x - x_0)$.

Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(x_0)(x - x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = f'(x_0)(x - x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) - f'(x_0)(x - x_0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Η (1) έχει προφανή ρίζα το x_0 . Εστω τώρα ότι υπάρχει και άλλη ρίζα $\rho < x_0$, τότε λόγω του θεωρήματος Rolle για την $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ στο $[\rho, x_0]$ υπάρχει $\xi_1 \in (\rho, x_0)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) - f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f'(x_0)$.

Επειδή $n f'$ είναι 1-1 ισχύει $\xi_1 = x_0$ που είναι άτοπο. Άρα το $A(x_0, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με την C_f .

ii. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσος τιμής στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε



υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε: $f'(x_1) = -\frac{f(\alpha)}{x_0 - \alpha}$ και $f'(x_2) = \frac{f(\beta)}{\beta - x_0}$.

Επειδή $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, είναι $f(\alpha) \neq 0$ και $f(\beta) \neq 0$. Οπότε

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = -\frac{x_0 - \alpha}{f(\alpha)} + \frac{\beta - x_0}{f(\beta)} = \frac{-f(\alpha)\beta + f(\alpha)x_0 + f(\beta)x_0 - \alpha f(\beta)}{f(\alpha)f(\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = -x_0 \left(\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{f(\alpha)f(\beta)} \right) = -x_0 \left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} \right)$$

- 5.245. **α)** Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha, 0]$ και $f(-\alpha) < f(\alpha) < f(0)$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0 \in (-\alpha, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(\alpha)$ (1).

Αν η f ήταν 1-1 τότε από τη σχέση (1) θα προέκυπτε ότι $x_0 = \alpha$ που είναι άτοπο.

Άρα η f δεν είναι 1-1.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$ και $f(x_0) = f(\alpha)$, από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_0, \alpha) \subseteq (-\alpha, \alpha)$.

γ) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-\alpha, 0]$, $[0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στα $(-\alpha, 0)$ και $(0, \alpha)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσος τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in (-\alpha, 0)$ και $\xi_2 \in (0, \alpha)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-\alpha)}{\alpha}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}$. Όμως $f(-\alpha) < f(\alpha) < f(0)$ και $\alpha > 0$, άρα $f'(\xi_1) > 0$ και $f'(\xi_2) < 0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε λόγω του

θεωρήματος μέσος τιμής, υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$.

- 5.246. **α)** Λόγω του θεωρήματος μέσος τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{2\beta - 2\alpha}{\beta - \alpha} = 2 = \lambda_\varepsilon$, άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία ε : $2x - y + 1 = 0$.

β) Εστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Για να διέρχεται η ε_1 από την αρχή των αξόνων, πρέπει:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

$$\text{Είναι } x f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow x f'(x) - x' f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x f'(x) - x' f(x)}{x^2} = 0 \text{ ή } \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0.$$

$$\text{Εστω } g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [\alpha, \beta].$$



Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

Είναι $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2$, $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{2\beta}{\beta} = 2$, δηλαδή $g(\alpha) = g(\beta)$, άρα λόγω του

θεωρήματος Rolle, η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β) .

γ) Εστω $h(x) = f(x) - \alpha - \beta$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

$h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha - \beta = 2\alpha - \alpha - \beta = \alpha - \beta < 0$, $h(\beta) = f(\beta) - \alpha - \beta = 2\beta - \alpha - \beta = \beta - \alpha > 0$,

δηλαδή $h(\alpha)h(\beta) < 0$.

Λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \alpha + \beta$

δ) Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε υπάρχουν $\rho_1 \in (\alpha, x_0)$ και $\rho_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\rho_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{\alpha + \beta - 2\alpha}{x_0 - \alpha} = \frac{\beta - \alpha}{x_0 - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\rho_1)} = \frac{x_0 - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ και}$$

$$f'(\rho_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{2\beta - \alpha - \beta}{\beta - x_0} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\rho_2)} = \frac{\beta - x_0}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{f'(\rho_1)} + \frac{1}{f'(\rho_2)} = \frac{x_0 - \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\beta - x_0}{\beta - \alpha} = \frac{x_0 - \alpha + \beta - x_0}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1.$$

5.247. **α)** Εστω ότι η f δεν είναι “1-1”. Θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Εστω $x_1 < x_2$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής. Οπότε από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Άτοπο γιατί $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

β) Επειδή η f είναι 1-1 ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης η οποία είναι επίσης 1-1.

Αφού η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 1)$, ισχύει: $f(1) = 5$ και $f^{-1}(5) = 1$,

$f(-2) = 1$ και $f^{-1}(1) = -2$. Η εξίσωση γίνεται:

$$f^{-1}(-4 + f(x^2 - 8)) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-4 + f(x^2 - 8)) = f^{-1}(1) \Leftrightarrow -4 + f(x^2 - 8) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 - 8) = 5 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = f(1) \Leftrightarrow x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3.$$

γ) Εστω $M(\xi, f(\xi))$ το σημείο της C_f . Πρέπει να ισχύει $f'(\xi) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{4}{3}$.

Η f είναι συνεχής στο $[-2, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 1)$, άρα λόγω του θεωρήματος μέσης

$$\text{τιμής, υπάρχει } \xi \in (-2, 1) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 + 2} = \frac{5 - 1}{3} = \frac{4}{3}.$$



5.248. **a)** Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 3$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$. Επίσης $h(0) = f(0) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$ και $h(1) = f(1) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$, οπότε $h(0)h(1) < 0$.

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ το x_0 είναι μοναδικό.

b) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι: $f(0) < f(x) < f(1)$

$$\text{για } x = \frac{1}{5} \text{ είναι: } f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1)$$

$$\text{για } x = \frac{2}{5} \text{ είναι: } f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1)$$

$$\text{για } x = \frac{3}{5} \text{ είναι: } f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1) \text{ και}$$

$$\text{για } x = \frac{4}{5} \text{ είναι: } f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, λόγω του θεωρήματος

$$\text{μέσης τιμής υπάρχει } x_2 \in (0, 1) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 4 - 2 = 2 = \lambda_\varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

5.249. **a)** Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x]$

και $[x, \beta]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, x)$ και $\xi_2 \in (x, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f(x)}{x - \alpha} \quad (1) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} = \frac{-f(x)}{\beta - x} \quad (2). \quad \text{Επειδή } f'(x) \leq 0 \text{ για}$$

$$\text{κάθε } x \in (\alpha, \beta) \text{ είναι: } \begin{cases} f'(\xi_1) \leq 0 \\ f'(\xi_2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)}{x - \alpha} \leq 0 \\ \frac{-f(x)}{\beta - x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$



Άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και αφού $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

β) i. Για την g εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσος Τιμής στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Επειδή $g'(x) \leq 6$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, ισχύει ότι:

$$g'(\xi) \leq 6 \Leftrightarrow \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq 6 \Leftrightarrow g(\beta) - g(\alpha) \leq 6(\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + 9 + \alpha^2 - 2\alpha + 4 \leq 6\beta - 6\alpha \Leftrightarrow \beta^2 - 6\beta + 9 + \alpha^2 + 4\alpha + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (\beta - 3)^2 + (\alpha + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \text{ και } \beta = 3.$$

ii. Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$ είναι $g(-2) = -12$ και $g(3) = 18$.

Θεωρούμε την $f(x) = g(x) - 6x$, η οποία είναι συνεχής στο $[-2, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(-2, 3)$, $f(-2) = g(-2) + 12 = -12 + 12 = 0$ και $f(3) = g(3) - 18 = 18 - 18 = 0$.

Επειδή $f'(x) = g'(x) - 6 \leq 0$, λόγω του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει: $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [-2, 3]$, δηλαδή $g(x) = 6x$ για κάθε $x \in [-2, 3]$.

5.250. **a)** Για $x = 1$ είναι $f^3(1) + f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$.

$$(f^3(x) + f(x))' = (x-1)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1, \text{ άρα } 3f^2(1)f'(1) + f'(1) = 1 \Leftrightarrow f'(1) = 1. \\ \text{ε: } y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x-1$$

b) Είναι $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1} \leq 1$. Από το ΘΜΤ για την f , υπάρχει $\xi \in (1, x)$: $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

$$\text{Είναι } f'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq x-1. \text{ Για } x = 1 \text{ ισχύει η ισότητα.}$$

γ) Για $x = \alpha$ και για $x = \beta$ είναι $f^3(\alpha) + f(\alpha) = \alpha - 1$, $f^3(\beta) + f(\beta) = \beta - 1$ και με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$$f^3(\beta) - f^3(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha) = \beta - \alpha \Leftrightarrow (f(\beta) - f(\alpha))(f^2(\beta) + f(\beta)f(\alpha) + f^2(\alpha) + 1) = \beta - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{f^2(\beta) + f(\beta)f(\alpha) + f^2(\alpha) + 1}. \text{ Από το ΘΜΤ υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{f^2(\beta) + f(\beta)f(\alpha) + f^2(\alpha) + 1}$$

δ) Εστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ και $f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - 1 \geq x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο.

ε) Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) = 0$

5.251. **a)** Για κάθε $\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{4}$ είναι $\sin x_1 > \sin x_2 \Leftrightarrow -\sin x_1 < -\sin x_2$, άρα και



$x_1 - \sigma v x_1 < x_2 - \sigma v x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6} < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} > 0 \text{ από το Θ.Β και επειδή } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$: $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sigma v x_0 = x_0$

β) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in \left(x_0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(x_0)}{\frac{\pi}{4} - x_0} \Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(\xi)$$

γ) i. $f'(\xi) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4} - x_0} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{3\pi}{8} - \frac{3x_0}{2} \Leftrightarrow x_0 > \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Επειδή $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$, αρκεί $x_0 > \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 4\sqrt{2} > \pi$ που ισχύει

ii. $f'(\xi) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4} - x_0} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) \Leftrightarrow \frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{\pi}{4} - x_0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right) < x_0$ και

επειδή $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right) < x_0 < \frac{\pi}{4}$

5.252. a) Εστω ότι $\exists \rho \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\rho) \leq 0$

$$\text{ΘΜΤ } [\alpha, \rho]: f'(\xi_1) = \frac{f(\rho) - f(\alpha)}{\rho - \alpha} = \frac{f(\rho)}{\rho - \alpha} \leq 0$$

$$\text{ΘΜΤ } [\rho, \beta]: f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\rho)}{\beta - \rho} \geq 0. \text{ Είναι } \xi_1 < \xi_2 \text{ και } f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \text{ που είναι άτοπο}$$

αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$

γ) ΘΜΤ για f στα $[\alpha, x_0], [x_0, \beta]$ $f'(x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha}, f'(x_2) = \frac{-f(x_0)}{\beta - x_0}$ οπότε

$$f'(x_1) - f'(x_2) = f(x_0) \left[\frac{1}{x_0 - \alpha} + \frac{1}{\beta - x_0} \right] \text{ αρκεί ν.δ.ο}$$

$$\frac{1}{x_0 - \alpha} + \frac{1}{\beta - x_0} \geq \frac{4}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{(x_0 - \alpha)(\beta - x_0)} \geq \frac{4}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$(\beta - \alpha)^2 \geq 4(x_0 - \alpha)(\beta - x_0) \Leftrightarrow [(\beta - x_0) + (x_0 - \alpha)]^2 \geq 4(\beta - x_0)(x_0 - \alpha) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$



$$[(\beta - x_0) + (x_0 - \alpha)]^2 \geq 0$$

$$\text{δ)} \text{i) ΘΜΤ για } f' \text{ στο } [x_1, x_2] \quad f''(\xi) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \text{ αφού } f'(x_1) - f'(x_2) \geq \frac{4f(x_0)}{\beta - \alpha} > 0$$

γιατί $f(x) > 0$

ii) Είναι $f'(x_1) - f'(x_2) = -f''(\xi)(x_2 - x_1)$ οπότε

$$\begin{aligned} -f''(\xi)(x_2 - x_1) &\geq \frac{4f(x_0)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow -f''(\xi)(\beta - \alpha) \geq \frac{4f(x_0)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \\ -f''(\xi)\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^2 &\geq f(x_0)\frac{(\beta - \alpha)}{x_2 - x_1} > f(x_0) \text{ αφού } \frac{\beta - \alpha}{x_2 - x_1} > 1 \end{aligned}$$

5.253. a) ΘΜΤ για f στο $[2, 3]$ $\exists \xi \in (2, 3) : f'(\xi) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$

β) Στη σχέση $2f'(x) \geq f^2(2) + f^2(3) + 2$ για $x = \xi$ έχουμε:

$$2f'(\xi) \geq f^2(2) + f^2(3) + 2 \stackrel{(A)}{\Leftrightarrow} 2(f^2(2) - f^2(3)) \geq f^2(2) + f^2(3) + 2 \Leftrightarrow$$

$$(f(3) - 1)^2 + (f(2) + 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(3) = 1, f(2) = -1$$

v) i) ΘΜΤ στο $[2, x_0]$: $f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(2)}{x_0 - 2} = \frac{f(x_0) + 1}{x_0 - 2} \Leftrightarrow f(x_0) + 1 + 2f'(\xi_1) = f'(\xi_1)x_0$

ii) Είναι $\begin{cases} 2f'(x) \geq f^2(2) + f^2(3) + 2 \\ f(2) = -1, f(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2f'(x) \geq 4 \Leftrightarrow f'(x) \geq 2$

Άρα $f'(\xi_1) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{f(x_0) + 1}{x_0 - 2} \geq 2 \Leftrightarrow f(x_0) + 1 \geq 2x_0 - 4 \Leftrightarrow f(x_0) \geq 2x_0 - 5 \quad (1)$

Όμοια ΘΜΤ στο $[x_0, 3]$: $f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(x_0)}{3 - x_0} = \frac{1 - f(x_0)}{3 - x_0} \geq 2 \Leftrightarrow$

$1 - f(x_0) \geq 6 - 2x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \leq 2x_0 - 5 \quad (2)$ άρα από (1), (2) $f(x_0) = 2x_0 - 5$ για κάθε

$x_0 \in (2, 3)$, άρα και $f(x) = 2x - 5, x \in (2, 3)$.

ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\begin{aligned}
 5.276 \quad f'(x) &= 6\eta\mu^5 x \sin v x - 6\sin v^5 x \eta\mu x + 6\eta\mu x \sin v^3 x - 6\eta\mu^3 x \sin v x \Leftrightarrow \\
 f'(x) &= 6\eta\mu x \sin v x (\eta\mu^4 x + \sin v^2 x) - 6\eta\mu x \sin v x (\sin v^4 x + \eta\mu^2 x) \Leftrightarrow \\
 f'(x) &= 6\eta\mu x \sin v x \left[(\eta\mu^4 x - \sin v^4 x) + \sin v^2 x - \eta\mu^2 x \right] \\
 f'(x) &= 6\eta\mu x \sin v x \left[(\eta\mu^2 x - \sin v^2 x) \cancel{(\eta\mu^2 x + \sin v^2 x)}^1 + \sin v^2 x - \eta\mu^2 x \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.277 \quad f'(x) &= 8\eta\mu^3 x \sin v x - 4\sin v^3 x \eta\mu x + 6\eta\mu x \sin v^3 x - 6\eta\mu^3 x \sin v x - 2\eta\mu x \sin v x \Leftrightarrow \\
 f'(x) &= 2\eta\mu^3 x \sin v x + 2\eta\mu x \sin v^3 x - 2\eta\mu x \sin v x \Leftrightarrow \\
 f'(x) &= 2\eta\mu x \sin v x \cancel{(\eta\mu^2 x + \sin v^2 x)}^1 - 2\eta\mu x \sin v x = 0
 \end{aligned}$$

$$5.278 \quad h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
 5.279 \quad \textbf{a)} \quad h'(x) &= 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x) \cancel{(f(x) + f''(x))}^0 = 0 \\
 \textbf{b)} \quad h(1) &= 0, \text{ áρα } h(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$5.280 \quad h'(x) = 3f^2(x)f'(x) + 3g^2(x)g'(x) = -3f^2(x)g^2(x) + 3g^2(x)f^2(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
 5.281 \quad f'(x) &= 3f(x) \text{ και } f'(-x) = 3f(-x) \\
 g'(x) &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 3f(x)f(-x) - 3f(x)f(-x) = 0 \\
 g(0) &= 1, \text{ áρα } g(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$5.282 \quad \text{Παραγωγίζοντας προκύπτει: } f'(x) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow xf''(x) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = c$$

$$\begin{aligned}
 5.283 \quad \text{Παραγωγίζοντας προκύπτει: } 2f'(x) &= f'(x) + xf''(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x) = xf''(x) - 1 \text{ και} \\
 \text{παραγωγίζοντας ξανά: } f''(x) &= f''(x) + xf^{(3)}(x) \Leftrightarrow xf^{(3)}(x) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f^{(3)}(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.284 \quad \text{Αρκεί } g(x) &= f(x) - \frac{e^{x^2}}{x+1} = 0 \text{ για κάθε } x > -1. \\
 g'(x) &= f'(x) - \frac{2x(x+1)e^{x^2} - e^{x^2}}{(x+1)^2} = \frac{f'(x)(x+1)^2 - e^{x^2}(2x^2 + 2x - 1)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = c \\
 \text{Επειδή } g(0) &= 0 \text{ είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{x^2}}{x+1}, \quad x > -1
 \end{aligned}$$

5.285 Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \alpha^2 g^2(x) + [g'(x)]^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $h'(x) = \alpha^2 2g'(x)g(x) + 2g'(x)g''(x) = 2g'(x)[\alpha^2 g(x) + g''(x)] = 0$. Άρα, $h(x) = c$.

$$\text{Είναι } \alpha^2 g^2(x) + [g'(x)]^2 = c \text{ και για } x=0: \alpha^2 g^2(0) + [g'(0)]^2 = c \Leftrightarrow 0 = c.$$

Άρα, $\alpha^2 g^2(x) + [g'(x)]^2 = 0$, οπότε $g(x) = 0$ και $g'(x) = 0$. Άρα η g σταθερή.

5.286 Εστω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Εστω $t(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$t'(x) = f''(x)g(x) + \cancel{f'(x)g'(x)} - \cancel{f'(x)g'(x)} - f(x)g''(x) = 0 \Leftrightarrow t(x) = c.$$

Επειδή $t(0) = 0$ είναι $t(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$, άρα $h'(x) = 0$ και $h(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

5.287 Για $y = x_0$ και $x \neq x_0$, έχουμε:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|$$

Από ΚΠ είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, άρα $f'(x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = c$.

5.288 Εστω $f(x) = (\kappa + \lambda - x)^3 + (\lambda + x - \kappa)^3 + (x + \kappa - \lambda)^3 - (x + \kappa + \lambda)^3 + 24\kappa\lambda x$.

$$f'(x) = -3(\kappa + \lambda - x)^2 + 3(\lambda + x - \kappa)^2 + 3(x + \kappa - \lambda)^2 - 3(x + \kappa + \lambda)^2 + 24\kappa\lambda \text{ και}$$

$$f''(x) = 6(\kappa + \lambda - x) + 6(\lambda + x - \kappa) + 6(x + \kappa - \lambda) - 6(x + \kappa + \lambda) \Leftrightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = c_1$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f'(x) = -3(\kappa + \lambda)^2 + 3(\lambda - \kappa)^2 + 3(\kappa - \lambda)^2 - 3(\kappa + \lambda)^2 + 24\kappa\lambda = \dots = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = c_2. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } f(x) = (\kappa + \lambda)^3 + (\lambda - \kappa)^3 + (\kappa - \lambda)^3 - (\kappa + \lambda)^3 = \dots = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (\kappa + \lambda - x)^3 + (\lambda + x - \kappa)^3 + (x + \kappa - \lambda)^3 = (x + \kappa + \lambda)^3 - 24\kappa\lambda x$$

5.289 Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι σταθερή.

Αν $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι πάλι σταθερή.

5.290 $(f(x) - x \ln x)(f'(x) - \ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - x \ln x)(f(x) - x \ln x)' = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{(f(x) - x \ln x)^2}{2} \right]' = 0 \Leftrightarrow \frac{(f(x) - x \ln x)^2}{2} = c \Leftrightarrow (f(x) - x \ln x)^2 = 2c$$

Για $x=1$ είναι $(f(1) - \ln 1)^2 = 0$, άρα $c=0$ και

$$(f(x) - x \ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - x \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \ln x \text{ για κάθε } x > 0.$$

5.291 $(f(x) - e^x)(f'(x) - e^x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - e^x)(f(x) - e^x)' = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f(x) - e^x}{2} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) - e^x}{2} = c \Leftrightarrow f(x) - e^x = 2c$$

Για $x=0$ είναι $f(0) - e^0 = 0$ αρα $c=0$ και $f(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

- 5.292 Εστω ότι $f''(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $f'(x)=c, c \in \mathbb{R}$. Επειδή $f'(\alpha)=0$ είναι $c=0$ και $f'(\alpha)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $f(x)=c_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Όμως $f(\alpha)=0$, αρα $c_1=0$ και $f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που είναι άτοπο.

5.293 a) $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = \frac{2x \cancel{f^2(x)}}{\cancel{f^2(x)}} - 2x = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$

b) $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$, αρα $g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} \eta\mu 2x \right) = 0$, γιατί για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\left| \frac{x}{x^2+1} \eta\mu 2x \right| = \frac{x}{x^2+1} |\eta\mu 2x| \leq \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \eta\mu 2x \leq \frac{x}{x^2+1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x^2+1} \right), \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} \eta\mu 2x \right) = 0$$

5.294 Είναι $g(x) = f(x)(e^x + e^{-x}) = f(x) \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) = f(x) \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$, οπότε:

$$g'(x) = f'(x) \frac{e^{2x} + 1}{e^x} + f(x) \frac{(e^{2x} + 1)' e^x - (e^x)' (e^{2x} + 1)}{(e^x)^2} =$$

$$f'(x) \frac{e^{2x} + 1}{e^x} + f(x) \frac{2e^{2x}e^x - e^x e^{2x} - e^x}{(e^x)^2} =$$

$$f'(x) \frac{e^{2x} + 1}{e^x} + f(x) \frac{e^x (e^{2x} - 1)}{(e^x)^2} = \frac{f'(x)e^{2x} + f'(x)e^x + f(x)e^{2x} - f(x)}{e^x} =$$

$$\frac{(f'(x) + f(x))e^{2x} + f'(x) - f(x)}{e^x}.$$

Όμως, $(f'(x) + f(x))e^{2x} = f(x) - f'(x)$, οπότε: $g'(x) = \frac{f(x) - f'(x) + f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$, αρα

$g(x) = c \Leftrightarrow f(x)(e^x + e^{-x}) = c$. Για $x=0$ είναι $f(0)(e^0 + e^0) = c \Leftrightarrow 1 \cdot 2 = c \Leftrightarrow c = 2$.

Άρα, $f(x)(e^x + e^{-x}) = 2$, οπότε $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

5.295 $g'(x) = [2f(x)f'(x) + 2h(x)h'(x)]e^{-2ax} - 2ae^{-2ax}[f^2(x) + h^2(x)] \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{-2\alpha x} [f(x)f'(x) + h(x)h'(x) - \alpha f^2(x) - \alpha h^2(x)] \Leftrightarrow \\ g'(x) &= 2e^{-2\alpha x} [f(x)(f'(x) - \alpha f(x)) + h(x)(h'(x) - \alpha h(x))] \Leftrightarrow \\ g'(x) &= 2e^{-2\alpha x} [f(x)h(x) - h(x)f(x)] = 0 \Leftrightarrow g(x) = c. \text{ Είναι } h(0) = 1, g(0) = 1, \\ \text{άρα } g(x) &= 1 \Leftrightarrow f^2(x) + h^2(x) = e^{2\alpha x} \end{aligned}$$

5.296 **a)** Εστω $g(x) = [f^2(x) + (f'(x))^2]e^{-x}$. Είναι

$$g'(x) = [2f(x)f'x + 2f'(x)f''(x)]e^{-x} - [f^2(x) + (f'(x))^2]e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = [2f(x)f'x + 2f'(x)f''(x) - f^2(x) - (f'(x))^2]e^{-x} = [2f'(x)f''(x) - (f(x) - f'(x))^2]e^{-x} = 0$$

άρα $g(x) = c \Leftrightarrow f^2(x) + [f'(x)]^2 = ce^x$

b) Για $x = 0$ είναι $c = 0$, άρα $f^2(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5.297 **a)** $g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} - e^x = \frac{x^2 e^x}{x^2} - e^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$

b) Θέτουμε $\frac{f(x) - e - 1}{x^2 - 1} = h(x) \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - 1)h(x) + e + 1$.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x^2 - 1)h(x) + e + 1) = e + 1, \text{ άρα } g(1) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ και}$$

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = xe^x + x$$

γ) Εστω $t(x) = xe^x + x - 2$, $x \in [0, 1]$.

$$t(0) = -2, t(1) = e - 1, \text{ άρα από ΘΒ n } t(x) = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.}$$

Εστω ότι n t έχει 2 ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1)$ με $\rho_1 < \rho_2$. Τότε από το Θ.Ρ υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $t'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi + \xi e^\xi + 1 = 0$ που είναι άτοπο, αφού $t'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

5.298 **a)** $f(x) = \eta \mu x + x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 4x^4 + 3x^2 + 2$ **γ)** $f(x) = \frac{1}{2} \eta \mu 2x - \frac{1}{3} \sigma v v 3x + \frac{4}{3}$

δ) $f'(x) = 2e^{2x} + x^{\frac{1}{2}} = \left(e^{2x} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)' \Leftrightarrow f(x) = e^{2x} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c. f(1) = e^2 \Leftrightarrow c = -\frac{2}{3}$

άρα $f(x) = e^{2x} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{2}{3}$

ε) $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} = 2 \ln x (\ln x)' = (\ln^2 x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln^2 x + c. f(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0, f(x) = \ln^2 x$

στ) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = (\ln(x^2 + 1))' \Leftrightarrow f(x) = \ln(x^2 + 1) + c, f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

ζ) $f'(x) = 3\eta\mu^2 x \sigma v v x = 3\eta\mu^2 x (\eta\mu x)' (\eta\mu^3 x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu^3 x + c, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow c = 0,$

$$f(x) = \eta\mu^3 x$$

η) $f'(x) = 12\eta\mu^2 4x \sigma v v 4x = 3\eta\mu^2 4x (\eta\mu 4x)' = (\eta\mu^3 4x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu^3 4x + c,$
 $f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

θ) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = (\sqrt{x^2 + 1})' \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c,$
 $f(1) = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \sqrt{2}$

ι) $f'(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 - 3x + 4)^2 (x^2 - 3x + 4)' = \left(\frac{(x^2 - 3x + 4)^3}{3} \right)' \Leftrightarrow$
 $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 4)^3 + c, f(0) = 16 \Leftrightarrow c = -\frac{16}{3}, f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 4)^3 - \frac{16}{3}$

5.299 **α)** $f(x) = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = (e^x \ln x)' \Leftrightarrow f(x) = e^x \ln x + c, f(1) = -1 \Leftrightarrow c = -1$

β) $f'(x) = \frac{x(e^x)' - e^x(x)'}{x^2} = \left(\frac{e^x}{x} \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x} + c, f(1) = e \Leftrightarrow c = 0, f(x) = \frac{e^x}{x}$

γ) $f(x) = -\frac{(x)' \ln x - x(\ln x)'}{x^2} = \left(-\frac{\ln x}{x} \right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{\ln x}{x} + c, f(1) = 1 \Leftrightarrow c = 1, f(x) = -\frac{\ln x}{x} + 1$

δ) $f'(x) = (e^x)' x + e^x (x)' = (x e^x)' \Leftrightarrow f(x) = x e^x + c, f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, f(x) = x e^x + 1$

ε) $f'(x) = (x)' \eta\mu x + x(\eta\mu x)' = (x \eta\mu x)' \Leftrightarrow f(x) = x \eta\mu x + c, f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, f(x) = x \eta\mu x + 1$

στ) $f'(x) = e^{-x} (\eta\mu x)' + \eta\mu x (e^{-x})' = (e^{-x} \eta\mu x)' \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} \eta\mu x + c, f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

ζ) $f'(x) = (x)' \ln^2 x + 2x \frac{1}{x} \ln x = (x)' \ln^2 x + x(\ln^2 x)' = (x \ln^2 x)' \Leftrightarrow f(x) = x \ln^2 x + c$
 $f(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0, f(x) = x \ln^2 x$

η) $f'(x) = \frac{4(\ln x + 1)^3}{x} = 4(\ln x + 1)^3 (\ln x + 1)' = ((\ln x + 1)^4)' \Leftrightarrow f(x) = (\ln x + 1)^4 + c,$
 $f(1) = 3 \Leftrightarrow c = 2, f(x) = (\ln x + 1)^4 + 2$

5.300 **α)** $f'(4x - 3) = 2x + 5 \Leftrightarrow 4f'(4x - 3) = 8x + 20 \Leftrightarrow (f(4x - 3))' = (4x^2 + 20x)' \Leftrightarrow$

$f(4x - 3) = 4x^2 + 20x + c. \text{Θέτουμε } 4x - 3 = u \Leftrightarrow x = \frac{u+3}{4}, \text{ τότε}$

$$f(u) = 4\left(\frac{u+3}{4}\right)^2 + 20 \cdot \frac{u+3}{4} + c = \frac{u^2 + 6u + 9}{4} + 5u + 15 + c, \text{ áρα}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 9) + 5x + 15 + c, f(-3) = 1 \Leftrightarrow c = 1, \text{άρα}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 9) + 5x + 16$$

B) $f'(x^2) = 3x - 9 \Leftrightarrow 2xf'(x^2) = 6x^2 - 18x \Leftrightarrow (f(x^2))' = (2x^3 - 9x^2)' \Leftrightarrow f(x^2) = 2x^3 - 9x^2 + c$

Θέτουμε $x^2 = u \Leftrightarrow x = \sqrt{u}$, τότε $f(u) = 2u\sqrt{u} - 9u + c$, άρα $f(x) = 2x\sqrt{x} - 9x + c, x > 0$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0, \text{άρα } f(x) = 2x\sqrt{x} - 9x$$

y) $f'(x^3) = 4 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow 3x^2 f'(x^3) = 12x^2 + 3\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (f(x^3))' = \left(4x^3 + 3\ln x + \frac{3}{x}\right)' \Leftrightarrow$

$$f(x^3) = 4x^3 + 3\ln x + \frac{3}{x} + c. \text{ Θέτουμε } x^3 = u \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{u}, \text{ τότε}$$

$$f(u) = 4u + 3\ln u + \frac{3}{\sqrt[3]{u}} + c = 4u + \ln u + \frac{3}{\sqrt[3]{u}} + c, f(1) = 7 \Leftrightarrow c = 0,$$

$$\text{άρα } f(u) = \frac{8}{3}u + \ln u + \frac{3}{\sqrt[3]{u}}$$

5.301 **a)** $f''(x) = 6x \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + c_1, f'(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 = 2, \text{άρα}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + 2x + c_2$$

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow c_2 = 2, \text{άρα } f(x) = x^3 + 2x + 2$$

B) $f''(x) = 12x^2 - 9 \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3 - 9x + c_1, f'(0) = 4 \Leftrightarrow c_1 = 4 \text{ και } f'(x) = 4x^3 - 9x + 4 \Leftrightarrow$

$$f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 4x + c_2, 4f(0) = 4 \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1, \text{άρα } f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 4x + 1$$

y) $f''(x) = 4e^{2x} = (2e^{2x})' \Leftrightarrow f'(x) = 2e^{2x} + c_1, f'(0) = 3 \Leftrightarrow c_1 = 1 \text{ και}$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 1 = (e^{2x} + x)' \Leftrightarrow f(x) = e^{2x} + x + c_2, f(0) = 3 \Leftrightarrow c_2 = 2 \text{ και } f(x) = e^{2x} + x + 2$$

δ) $f''(x) = -9\mu 3x = (3\sigma v 3x)' \Leftrightarrow f'(x) = 3\sigma v 3x + c_1, f'(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = -2, \text{άρα}$

$$f'(x) = 3\sigma v 3x - 2 = (\eta \mu 3x - 2x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta \mu 3x - 2x + c_2, f(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1 \text{ και}$$

$$f(x) = \eta \mu 3x - 2x + 1$$

5.302 $f''(x) = 12x^2 + 6x - 1 = (4x^3 + 3x^2 - x)' \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + c_1, f'(1) = 7 \Leftrightarrow c_1 = 1, \text{άρα}$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 1 = \left(x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)' \Leftrightarrow f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c_2,$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c_2 = -2, \text{άρα } f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2$$

5.303 $f''(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} = \left(\frac{3}{x-2}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{x-2} + c_1, f'(3) = 4 \Leftrightarrow c_1 = 1, \text{άρα } f'(x) = \frac{3}{x-2} + 1 \Leftrightarrow$

$$f(x) = 3\ln(x-2) + x + c_2, f(3) = 5 \Leftrightarrow c_2 = 2, \text{άρα } f(x) = 3\ln(x-2) + x + 2$$

$$5.304 \quad xf'(\ln x) = xe^x - e^x \Leftrightarrow \frac{1}{x}f'(\ln x) = \frac{x(e^x)' - e^x(x)'}{x^2} \Leftrightarrow (f(\ln x))' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' \Leftrightarrow f(\ln x) = \frac{e^x}{x} + c$$

Θέτουμε $\ln x = u \Leftrightarrow x = e^u$, τότε $f(u) = \frac{e^{e^u}}{e^u} + c = e^{e^u-u} + c$, άρα και $f(x) = e^{e^x-x} + c, x > 0$.
 $f(1) = e \Leftrightarrow e^{e-1} + c = e \Leftrightarrow c = e - e^{e-1}$, άρα $f(x) = e^{e^x-x} + e - e^{e-1}, x > 0$.

$$5.305 \quad f'(x^2 + 4x) = 6x^2 - 5x + 3 \stackrel{x>-2}{\Leftrightarrow} (2x+4)f'(x^2 + 4x) = (2x+4)(6x^2 - 5x + 3) \Leftrightarrow \\ (2x+4)f'(x^2 + 4x) = 12x^3 + 14x^2 - 14x + 12 \Leftrightarrow$$

$$(f(x^2 + 4x))' = \left(3x^4 + \frac{14}{3}x^3 - 7x^2 + 12x\right)' \Leftrightarrow f(x^2 + 4x) = 3x^4 + \frac{14}{3}x^3 - 7x^2 + 12x + c$$

Για $x=0$ είναι $f(0) = c \Leftrightarrow c = 0$.

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } f'(5) = 4 \text{ και } f(5) = 3 + \frac{14}{3} - 7 + 12 = \frac{38}{3}$$

$$\text{Η εφαπτομένη στο } A \text{ είναι } \varepsilon: y - f(5) = f'(5)(x-5) \Leftrightarrow y = 4x - \frac{22}{3}.$$

$$5.306 \quad \mathbf{a)} \quad xf'(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 = (x^3 - 2x^2 + 2x)' \Leftrightarrow \\ f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + c_1, & x > 0 \\ x^3 - 2x^2 + 2x + c_2, & x < 0 \end{cases}. \quad f(1) = 6 \Leftrightarrow c_1 = 5 \text{ και } f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 5, & x > 0 \\ x^3 - 2x^2 + 2x + c_2, & x < 0 \end{cases} \\ f \text{ συνεχής, οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c_2 = 5 = f(0), \text{ άρα} \\ f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5, x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{b)} \quad (x+1)f'(x) = 2x^2 - 8x - 10 \stackrel{x \neq -1}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{2(x-5)(x+1)}{x+1} = (x^2 - 10x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10x + c_1, & x > -1 \\ x^2 - 10x + c_2, & x < -1 \end{cases}. \quad f(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 = 2 \text{ και } f(x) = \begin{cases} x^2 - 10x + 2, & x > -1 \\ x^2 - 10x + c_2, & x < -1 \end{cases}.$$

f συνεχής, οπότε $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow c_2 = 2 = f(-1)$, άρα

$$f(x) = x^2 - 10x + 2, x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{y)} \quad x^2 f'(x) = 4x^5 - 2x^3 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = 4x^3 - 2x = (x^4 - x^2)' \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 + c_1, & x > 0 \\ x^4 - x^2 + c_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1 \text{ και } f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 + 1, & x > 0 \\ x^4 - x^2 + c_2, & x < 0 \end{cases}.$$

f συνεχής, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c_2 = 1 = f(0)$, άρα $f(x) = x^4 - x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

$$5.307 \quad \mathbf{a)} \quad f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-4)+6}{x+1} = x-4 + \frac{6}{x+1} = \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 6 \ln(x+1)\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 6\ln(x+1) + C, f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1, \text{ áρα } f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 6\ln(x+1) + 1$$

$$\textbf{β)} f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x+1} = \frac{(x+1)(x-6)+12}{x+1} = x-6 + \frac{12}{x+1} = \left(\frac{x^2}{2} - 6x + 12\ln(x+1) \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 12\ln(x+1) + C, f(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \text{ και } f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 12\ln(x+1)$$

5.308 $f''(x) = g''(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + C = (g(x) + cx)' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + cx + C_1.$
 $f(0) = g(0) \Leftrightarrow C_1 = 0 \text{ και } f(1) = g(1) + C \Leftrightarrow C = 1, \text{ áρα } f(x) = g(x) + cx, x \in \mathbb{R}.$

5.309 a) $f''(x) = g''(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + C = (g(x) + cx)' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + cx + C_1$
 $f(0) = g(0) \Leftrightarrow C_1 = 0 \text{ και } f(x) = g(x) + cx.$

β) $g(\rho_1) = \cancel{f(\rho_1)^0} - C\rho_1 = -C\rho_1, g(\rho_2) = \cancel{f(\rho_2)^0} - C\rho_2 = -C\rho_2, g(\rho_1)g(\rho_2) = C^2\rho_1\rho_2 \leq 0.$

Άν $g(\rho_1)g(\rho_2) = 0$ τότε η g έχει ρίζα το ρ_1 ή το ρ_2 .

Άν $g(\rho_1)g(\rho_2) < 0$, τότε από το Θ.Β η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

5.310 a) $f(x) + xf'(x) = 3x^2 + 1 \Leftrightarrow (xf(x))' = (x^3 + x)' \Leftrightarrow xf(x) = x^3 + x + C \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 1 + \frac{C}{x}$
 $f(1) = 2 \Leftrightarrow C = 0 \text{ και } f(x) = x^2 + 1.$

β) $xf'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow (xf(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow xf(x) = e^x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x + C}{x}$
 $f(1) = e + 1 \Leftrightarrow C = 1 \text{ και } f(x) = \frac{e^x + 1}{x}.$

γ) $xf'(x) + x^2 = f(x) + x^2e^x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = e^x - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (e^x - x)' \Leftrightarrow$
 $\frac{f(x)}{x} = e^x - x + C \Leftrightarrow f(x) = x(e^x - x + C), f(1) = e - 1 \Leftrightarrow C = 0 \text{ και } f(x) = x(e^x - x)$

δ) $f'(x) = 3x - \frac{1+f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow$
 $(xf(x))' = (x^3 - x)' \Leftrightarrow xf(x) = x^3 - x + C \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 1 + \frac{C}{x}.$
 $f(1) = 1 \Leftrightarrow C = 1 \text{ και } f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x}$

ε) $xf'(x) - f(x) = x^2\eta\mu x + x^3\sigma\nu v x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \eta\mu x + x\sigma\nu v x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (x\eta\mu x)' \Leftrightarrow$
 $\frac{f(x)}{x} = x\eta\mu x + C \Leftrightarrow f(x) = x^2\eta\mu x + CX, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow C = 0 \text{ και } f(x) = x^2\eta\mu x.$

$$5.311 \quad g'(x)\sigma_{vnx} - g(x)\eta_{vx} = g(x)\sigma_{vnx} \Leftrightarrow (g(x)\sigma_{vnx})' = g(x)\sigma_{vnx} \Leftrightarrow g(x)\sigma_{vnx} = ce^x \Leftrightarrow g(x) = \frac{ce^x}{\sigma_{vnx}}$$

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ και } g(x) = \frac{e^x}{\sigma_{vnx}}$$

$$5.312 \quad \mathbf{a)} \quad g'(x) = (f''(x) - f'(x))e^{-x} - e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x}(f''(x) - 2f'(x) + f(x)) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$$

$$\mathbf{b)} \quad g(x) = c \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = c + 2. \quad \text{Για } x = 0 \text{ είναι } c = 0, \text{ áρα}$$

$$f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 2 \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = (2x)' \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = 2x + c_1 \Leftrightarrow f(x) = 2xe^x + c_1 e^x.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } c_1 = 0, \text{ áρα } f(x) = 2xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$5.313 \quad f'(x) = \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x) = 1 \quad (1) \text{ και } g'(x) = -\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)g'(x) = -1 \quad (2).$$

$$\text{Από (1) + (2)} \Rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)g(x))' = 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) = c$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } c = 1, \text{ áρα } f(x)g(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

5.314 Παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση $f(x)g(x) = e^{-2x}$, προκύπτει:

$$(f(x)g(x))' = (e^{-2x})' \Leftrightarrow (1) \quad f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = -2e^{-2x}$$

$$\text{Όμως } f(x)g(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow g(x) = \frac{e^{-2x}}{f(x)} \text{ και } f'(x)g'(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{e^{-2x}}{f'(x)},$$

$$\text{οπότε η σχέση (1) γίνεται: } f'(x)\frac{e^{-2x}}{f(x)} + f(x)\frac{e^{-2x}}{f'(x)} = -2e^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f'(x)} = -2 \Leftrightarrow (f'(x))^2 + (f(x))^2 = -2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 + (f(x))^2 + 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow (f'(x) + f(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = ce^0 = c \Leftrightarrow c = 1 \text{ και } f(x) = e^{-x}. \quad \text{Τότε: } f(x)g(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}g(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow g(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$5.315 \quad \mathbf{a)} \quad xf'(x) + (1-x)f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = xf(x) \Leftrightarrow (xf(x))' = xf(x) \Leftrightarrow xf(x) = ce^x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{ce^x}{x}, \quad x > 0. \quad f(1) = e \Leftrightarrow c = 1, \text{ áρα } f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

$$\mathbf{b)} \quad xf'(x) = (x+1)f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = xf(x) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}ce^x \Leftrightarrow f(x) = cx e^x, \quad x > 0. \quad f(1) = e \Leftrightarrow c = 1, \text{ áρα } f(x) = xe^x.$$

$$\gamma) f'(x)\sigma_{uvx} - f(x)(\eta\mu x + \sigma_{uvx}) = 0 \Leftrightarrow f'(x)\sigma_{uvx} - f(x)\eta\mu x = f(x)\sigma_{uvx} \Leftrightarrow$$

$$(f(x)\sigma_{uvx})' = f(x)\sigma_{uvx} \Leftrightarrow f(x)\sigma_{uvx} = ce^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{ce^x}{\sigma_{uvx}}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, \text{ αρα } f(x) = \frac{e^x}{\sigma_{uvx}}$$

$$\delta) f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma_{uvx} = f(x)\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma_{uvx}}{\eta\mu^2 x} = \frac{f(x)\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = ce^x \Leftrightarrow f(x) = ce^x \eta\mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow c = 2, \text{ αρα } f(x) = 2e^x \eta\mu x.$$

$$5.316 (x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f''(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$((x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x))' = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = c. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } c = 2, \text{ αρα}$$

$$(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = 2 \Leftrightarrow ((x^2 + 1)f(x))' = (2x)' \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) = 2x + c_1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x + c_1}{x^2 + 1}$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ αρα } f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$5.317 f(x) + xf'(x) + f''(x) = 0 \Leftrightarrow [xf(x) + f'(x)]' = 0 \Leftrightarrow xf(x) + f'(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = c \Leftrightarrow c = 0$.

$$\text{Οπότε, } xf(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + xe^{\frac{x^2}{2}}f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}}f(x) = c_1,$$

$$c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = c_1 e^{-\frac{x^2}{2}}. \text{ Επειδή } f(0) = 2 \text{ είναι } c_1 = 2 \text{ και } f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$5.318 f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f''(x) + e^x f'(x) + e^x f'(x) + e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x f'(x))' + (e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow (e^x f'(x) + e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x) + e^x f(x) = c \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (cx)' \Leftrightarrow e^x f(x) = cx + c_1 \Leftrightarrow f(x) = (cx + c_1)e^{-x}.$$

$$\text{Επειδή } f(0) = f'(0) = 1 \text{ είναι } c = 2 \text{ και } c_1 = 1, \text{ αρα } f(x) = (2x + 1)e^{-x}$$

$$5.319 \text{ a) } f(x) + xf'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x \Leftrightarrow (xf(x))' = (x^6 + x^4 + x^2)' \Leftrightarrow xf(x) = x^6 + x^4 + x^2 + c$$

Για $x = 0$ είναι $0 = c$, αρα για $x \neq 0$ είναι $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Για $x = 0$ η αρχική σχέση γίνεται $f(0) = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ είναι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^5 + x^3 + x) = 0, \text{ αρα}$$

$$f(x) = x^5 + x^3 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } (x-1)f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 - f(x) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) + f(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$((x-1)f(x))' = (x^3 - 3x^2 + x)' \Leftrightarrow (x-1)f(x) = x^3 - 3x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , είναι και συνεχής στο 1, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + x + c) \Leftrightarrow 0 = c - 1 \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Άρα για } x \neq 1 \text{ είναι } f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{x-1} = x^2 - 2x - 1.$$

$$\text{Επίσης } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 1) = -2, \text{ άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(x) = x^2 - 2x - 1.$$

$$\textbf{y) } (x+1)f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 - f(x) \Leftrightarrow ((x+1)f(x))' = (x^4 + x^3 + x^2 + x)' \Leftrightarrow$$

$$(x+1)f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + c. \text{ Για } x = -1: 0 = c, \text{ άρα για } x \neq -1 \text{ είναι}$$

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x+1} = \frac{x(x^3 + x^2 + x + 1)}{x+1} = x^3 + x$$

$$\text{Επειδή } \eta \text{ είναι συνεχής στο } x = -1 \text{ είναι } f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x) = -2, \text{ άρα}$$

$$f(x) = x^3 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\textbf{d) } 2f(x) + xf'(x) = 6x^4 + 4x^2 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) = 6x^5 + 4x^3 \Leftrightarrow$$

$$(x^2f(x))' = (x^6 + x^4)' \Leftrightarrow x^2f(x) = x^6 + x^4 + c. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } 0 = c, \text{ άρα για } x \neq 0 \text{ είναι}$$

$$f(x) = x^4 + x^2. \text{ Επειδή } \eta \text{ είναι συνεχής στο } x = 0 \text{ είναι } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + x^2) = 0,$$

$$\text{άρα } f(x) = x^4 + x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$5.320 \text{ a) } \text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = 0.$$

$$f(x) = xf'(x) - x^2e^x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} e^x + c_1, & x > 0 \\ e^x + c_2, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} xe^x + c_1x, & x > 0 \\ xe^x + c_2x, & x < 0 \end{cases}, f(1) = e \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(e^x + c_2)}{x} \Leftrightarrow 1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0, \text{ άρα}$$

$$f(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\textbf{b) } f(x) = xf'(x) (1) \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} c_1x, & x < 0 \\ c_2x, & x > 0 \end{cases}, f(1) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η (1) γίνεται } f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{c_1x}{x} = c_1, \text{ άρα } c_1 = 1, \text{ άρα } f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$$\textbf{y) } \text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = 0.$$

$$xf'(x) - 2f(x) = x^3e^x \Leftrightarrow x^2f'(x) - 2xf(x) = x^4e^x \Leftrightarrow \frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = e^x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} e^x + c_1, & x > 0 \\ e^x + c_2, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 e^x + c_1 x^2, & x > 0 \\ x^2 e^x + c_2 x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(1) = e \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ áρα } f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 e^x + c_2 x^2, & x < 0 \end{cases}$$

δ) Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$.

$$xf'(x) - x^2 \eta \mu x = x^3 \sigma v v x + f(x) \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (x \eta \mu x)' \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu x + c_1 x, & x > 0 \\ x^2 \eta \mu x + c_2 x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \eta \mu x + c_2}{x} \Leftrightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Άρα } f(x) = x^2 \eta \mu x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.321 **a)** $f'(x) - 2f(x) = e^{3x} \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = e^x \Leftrightarrow (e^{-2x} f(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow e^{-2x} f(x) = e^x + c \Leftrightarrow f(x) = e^{3x} + ce^{2x}, \quad f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 1 \text{ και } f(x) = e^{3x} + e^{2x}.$

b) $f(x) + 2xf'(x) = 2x \Leftrightarrow e^{x^2} f(x) + xe^{x^2} f'(x) = 2xe^{x^2} \Leftrightarrow (e^{x^2} f(x))' = (e^{x^2})' \Leftrightarrow e^{x^2} f(x) = e^{x^2} + c \Leftrightarrow f(x) = 1 + ce^{-x^2}, \quad f(0) = 1 + e \Leftrightarrow c = e \text{ και } f(x) = 1 + e^{1-x^2}.$

v) $2f'(x) + 4f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{2x} f'(x) + 2e^{2x} f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \Leftrightarrow (e^{2x} f(x))' = \left(\frac{1}{4} e^{2x} \right)' \Leftrightarrow e^{2x} f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{4} + ce^{-2x}, \quad f(0) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4} \text{ και } f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-2x}.$

δ) $f'(x) - f(x) = 2 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 2e^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (-2e^{-x})' \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = -2e^{-x} + c \Leftrightarrow f(x) = -2 + ce^x, \quad f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 4 \text{ και } f(x) = -2 + 4e^x.$

ε) $f'(x) - f(x) \eta \mu x = e^{x-\sigma uvx} \Leftrightarrow e^{\sigma uvx} f'(x) - e^{\sigma uvx} f(x) \eta \mu x = e^x \Leftrightarrow (e^{\sigma uvx} f(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow e^{\sigma uvx} f(x) = e^x + c \Leftrightarrow f(x) = e^{x-\sigma uvx} + ce^{-\sigma uvx}, \quad f(0) = e^{-1} \Leftrightarrow c = 0 \text{ και } f(x) = e^{x-\sigma uvx}.$

στ) $f'(x) + f(x) \sigma uvx = \sigma uvx \Leftrightarrow e^{\eta \mu x} f'(x) + e^{\eta \mu x} f(x) \sigma uvx = e^{\eta \mu x} \sigma uvx \Leftrightarrow (e^{\eta \mu x} f(x))' = (e^{\eta \mu x})' \Leftrightarrow e^{\eta \mu x} f(x) = e^{\eta \mu x} + c \Leftrightarrow f(x) = 1 + ce^{-\eta \mu x}, \quad f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 1 \text{ και } f(x) = 1 + e^{-\eta \mu x}.$

5.322 $xf'(x) = 3f'(x) + f(x) \Leftrightarrow (x-3)f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{3-x} f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{-\ln|x-3|} f'(x) - \frac{1}{x-3} e^{-\ln|x-3|} f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-\ln|x-3|} f(x))' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{|x-3|} = \begin{cases} c_1, & x > 3 \\ c_2, & x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} c_1(x-3), & x > 3 \\ c_2(3-x), & x < 3 \end{cases} \cdot f \text{ συνεχής στο } 3 \text{ áρα } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow f(3) = 0$$

$$f'(3) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-c_1(x-3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{c_2(x-3)}{\cancel{x-3}} = 2, \text{ αρα } c_1 = -2 \text{ και } c_2 = 2, \text{ αρα}$$

$$f(x) = 2(x-3) = 2x - 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

5.323 **a)** $f'(x) = \frac{x - e^{-x}}{f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2x - 2e^{-x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (x^2 + 2e^{-x})' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 2e^{-x} + C$
 $f(0) = 2 \Leftrightarrow C = 2 \text{ και } f^2(x) = x^2 + 2e^{-x} + 2 \neq 0, \text{ αρα } f(x) \neq 0. \text{ Επειδή } n f \text{ είναι συνεχής και}$
 $f(0) = 2 > 0 \text{ είναι } f(x) > 0 \text{ και } f(x) = \sqrt{x^2 + 2e^{-x} + 2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$

b) Είναι $f'(x) = \frac{2x^3 + e^x}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = 2x^3 + e^x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 4x^3 + 2e^x \Leftrightarrow$
 $[f^2(x)]' = (x^4 + 2e^x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^4 + 2e^x + C, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$

Για $x=0$ είναι $f^2(0) = 2+C \Leftrightarrow 2=2+C \Leftrightarrow C=0$ αρα $f^2(x) = x^4 + 2e^x, x \in \mathbb{R}.$

Επειδή $f^2(x) > 0$, είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού $n f$ είναι συνεχής

στο \mathbb{R} θα διατηρεί σταθερό το πρόσομό της. Όμως $f(0) = \sqrt{2} > 0$ αρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε: $f(x) = \sqrt{x^4 + 2e^x}.$

y) $2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2f'(x)e^{f(x)} = e^x \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = \left(\frac{1}{2}e^x\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^x + C$
 $f(0) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \text{ και } e^{f(x)} = \frac{1}{2}(e^x + 1) \Leftrightarrow f(x) = \ln\left[\frac{1}{2}(e^x + 1)\right]$

δ) $f'(x) = \frac{2x \ln(x^2 + 1)f(x)}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1} \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \left(\frac{1}{2}\ln^2(x^2 + 1)\right)' \Leftrightarrow$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x^2 + 1) + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}\ln^2(x^2 + 1) + C}, f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 0 \text{ και } f(x) = e^{\frac{1}{2}\ln^2(x^2 + 1)}$$

ε) $f(x) = \frac{-xf'(x)\ln x}{2} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{2}{x\ln x}f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2\ln(\ln x)}f'(x) + e^{2\ln(\ln x)} \frac{2}{x\ln x}f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(e^{2\ln(\ln x)}f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{\ln^2 x}f(x) = C \Leftrightarrow f(x) = Ce^{-\ln(\ln^2 x)}, f(e) = 1 \Leftrightarrow C = 1 \text{ και}$$

$$f(x) = e^{-\ln(\ln^2 x)} = \frac{1}{e^{\ln(\ln^2 x)}} = \frac{1}{\ln^2 x}.$$

στ) $f'(x) = \frac{4x^3 + 2x}{3f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) = 4x^3 + 2x \Leftrightarrow (f^3(x))' = (x^4 + x^2)' \Leftrightarrow f^3(x) = x^4 + x^2 + C$

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow C = 6 \text{ και } f^3(x) = x^4 + x^2 + 6 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2 + 6}$$

ζ) $f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = (x^2)' \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + C}$

$$f(0) = -1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ και } f(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$\textbf{n)} f'(x) = 4x\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow (\sqrt{f(x)})' = (x^2)' \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + c$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ και } f(x) = (x^2 + 1)^2$$

5.324 **a)** $f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + c$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 0$ και $f^2(x) = e^{2x} \neq 0$, άρα $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί πρόσωμο. Επειδή $f(0) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = \sqrt{e^{2x}} = e^x$.

b) $f'(x)f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 4x + 2 \Leftrightarrow (f^2(x))' = (2x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f^2(x) = 2x^2 + 2x + c$
 $f(0) = -1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f^2(x) = 2x^2 + 2x + 1 \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί πρόσωμο. Επειδή $f(0) = -1 < 0$ είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = -\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

5.325 **a)** $f''(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{f'(x)}{2} \right)^2 + f^2(x) \right]' = 0 \Leftrightarrow$
 $\left(\frac{f'(x)}{2} \right)^2 + f^2(x) = c$. Για $x = 0$ είναι $c = 0$ και $\left(\frac{f'(x)}{2} \right)^2 + f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ και
 $f(x) = 0$. Άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

b) $f''(x) + f^{199}(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x)f'(x) + f^{199}(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left((f'(x))^2 + \frac{f^{200}(x)}{200} \right)' = 0 \Leftrightarrow$
 $(f'(x))^2 + \frac{f^{200}(x)}{200} = c$ Για $x = 0$ είναι $c = 0$ και $(f'(x))^2 + \frac{f^{200}(x)}{200} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ και
 $f(x) = 0$. Άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5.326 Είναι $(f''(x) - f'(x)f(x))f(x) - (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow f''(x)f(x) - f'(x)f^2(x) - (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $f''(x)f(x) - (f'(x))^2 = f'(x)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = f'(x) \Leftrightarrow$
 $\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$, είναι $\frac{f'(1)}{f(1)} = f(1) + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = (x)' \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

Για $x = 1$, είναι $-\frac{1}{f(1)} = 1 + c_1 \Leftrightarrow -1 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2$, άρα

$$-\frac{1}{f(x)} = x - 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2-x}, \quad x < 2.$$

$$5.327 \quad f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \Leftrightarrow (f(x)f'(x))' = f(x)f'(x) \Leftrightarrow f(x)f'(x) = ce^x$$

Για $x=0$ είναι $c=2$ και

$$f(x)f'(x) = 2e^x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 4e^x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (4e^x)' \Leftrightarrow f^2(x) = 4e^x + c_1.$$

$f(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 = 0$ και $f^2(x) = 4e^x \neq 0$. Επειδή f είναι συνεχής διατηρεί

πρόσομο και αφού $f(0) = 2 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = \sqrt{4e^x} = 2e^{\frac{x}{2}}$.

$$5.328 \quad \text{a) } \Gammaia x=0 \text{ είναι } f(0)=0$$

$$\text{b) } xf'(x) - (x+1)f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = xf(x) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{γ) } \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = ce^x \Leftrightarrow f(x) = cx e^x, \quad f(1) = e \Leftrightarrow c = 1, \quad \text{άρα } f(x) = xe^x.$$

$$5.329 \quad \text{Είναι } g'(x)g''(x) = g^2(x) \Leftrightarrow 3g'(x)g'(x)g''(x) = 3g'(x)g^2(x) \Leftrightarrow$$

$$3(g'(x))^2 g''(x) = 3g'(x)g^2(x) \Leftrightarrow \left[(g'(x))^3 \right]' = (g^3(x))', \quad \text{άρα } [g'(x)]^3 = g^3(x) + c.$$

Για $x=0$, $(g'(0))^3 = g^3(0) + c \Leftrightarrow (-1)^3 = (-1)^3 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα

$$\left. \begin{aligned} (g'(x))^3 &= g^3(x) \Leftrightarrow g'(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = c_1 e^x \\ g'(0) &= -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow c_1 = -1. \quad \text{Άρα, } g(x) = -e^x.$$

$$5.330 \quad \frac{f(x)}{f'(x)} + x \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = -x \ln x < 0 \text{ για κάθε } x > 1, \quad \text{άρα } f(x) \neq 0, \text{ οπότε}$$

$f'(x) \neq 0$ και f' συνεχής, άρα f' διατηρεί πρόσομο. Επειδή $f'(e) = -1$ είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x \ln x} \Leftrightarrow (\ln(-f(x)))' = (-\ln(\ln x))' \Leftrightarrow \ln(-f(x)) = -\ln(\ln x) + c_1 \Leftrightarrow$$

$$-f(x) = e^{-\ln(\ln x) + c_1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{c_1}}{\ln x}.$$

Για $x=e$ η αρχική γίνεται: $\frac{f(e)}{f'(e)} + e \ln e = 0 \Leftrightarrow f(e) = e$, άρα $e^{c_1} = e \Leftrightarrow c_1 = 1$, άρα

$$f(x) = \frac{e}{\ln x}$$

5.331 α) $f'(x) = -4xf^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 4x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (2x^2)' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = 2x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2x^2 + c}$

$$f(1) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = 1, \text{ áρα } f(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}.$$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2xf(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{2x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{2x^2 + 1} \right]. \text{ Για } x > 0 \text{ είναι}$

$$\left| \frac{2x}{2x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{2x^2 + 1} \right| = \frac{2x}{2x^2 + 1} \left| \eta \mu \frac{1}{2x^2 + 1} \right| \leq \frac{2x}{2x^2 + 1} \Leftrightarrow -\frac{2x}{2x^2 + 1} \leq \frac{2x}{2x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{2x^2 + 1} \leq \frac{2x}{2x^2 + 1}$$

Από ΚΠ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2xf(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right] = 0$

5.332 α) $2f'(x)f(x) = 2e^{2x} + 8e^x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x} + 8e^x)' \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + 8e^x + c$

$$f(0) = 5 \Leftrightarrow c = 16, \text{ áρα } f^2(x) = e^{2x} + 8e^x + 16 = (e^x + 4)^2$$

β) $f^2(x) = (e^x + 4)^2 \neq 0, \text{ áρα } f(x) \neq 0.$ Επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0) = 5 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, áρα $f(x) = e^x + 4, x \in \mathbb{R}$.

5.333 α) $xf(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow f(x)f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 1$, áρα $f(x) \neq 0$ και επειδή είναι

συνεχής, διατηρεί πρόσημο. $f(e^2) = 2 > 0$, áρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $2f(x)f'(x) = \frac{2}{x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (2\ln x)' \Leftrightarrow f^2(x) = 2\ln x + c.$ Για $x = e^2$ είναι $c = 0$, áρα $f^2(x) = 2\ln x \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{2\ln x}.$

5.334 $(f'(x) - f(x))(x^2 + 1) = 2xf(x) \Leftrightarrow f'(x)(x^2 + 1) - 2xf(x) = f(x)(x^2 + 1) \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)(x^2 + 1) - 2xf(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{f(x)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2 + 1} \right)' = \frac{f(x)}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2 + 1} = ce^x \Leftrightarrow f(x) = ce^x(x^2 + 1).$$

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3, \text{ áρα } f(x) = 3e^x(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}.$$

5.335 $xf''(x) = vf'(x) \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x^{-v}f''(x) - vx^{-v-1}f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^{-v}f'(x))' = 0 \Leftrightarrow x^{-v}f'(x) = \begin{cases} C_1, & x > 0 \\ C_2, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$f'(x) = \begin{cases} C_1 x^v, & x > 0 \\ C_2 x^v, & x < 0 \end{cases}. f'(1) = 2013 \Leftrightarrow C_1 = 2013, \text{ áρα } f'(x) = \begin{cases} 2013x^v, & x > 0 \\ C_2 x^v, & x < 0 \end{cases}.$$

Η αρχική για $x = 0$, δίνει $f'(0) = 0$, áρα $f'(x) = \begin{cases} 2013x^v, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ C_2 x^v, & x < 0 \end{cases}$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{2013}{v+1}x^{v+1} + C_3, & x > 0 \\ \frac{C_2}{v+1}x^{v+1} + C_4, & x < 0 \end{cases} . \text{ Είναι } f(0) = 2014 \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής, είναι}$$

$$C_3 = C_4 = 2014, \text{ άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{2013}{v+1}x^{v+1} + 2014, & x > 0 \\ 2014, & x = 0 \\ \frac{C_2}{v+1}x^{v+1} + 2014, & x < 0 \end{cases} .$$

5.336 Αν στη σχέση $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = x$ (1), αντικαταστήσουμε όπου x το $\frac{1}{x}$, προκύπτει: $f'\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$ (2).

Αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (1) με $-\frac{1}{x^2}$, έχουμε: $-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = -\frac{1}{x}$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (3), προκύπτει:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = 0 \Leftrightarrow f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = c \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{f(x)}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=1, \text{ είναι: } f(1) = \frac{c}{f(1)} \Leftrightarrow 1 = \frac{c}{1} \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}.$$

Αν το τελευταίο συμπέρασμα το αντικαταστήσουμε στη σχέση (2), προκύπτει:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left[\ln(f(x))\right]' = (\ln x)' \Leftrightarrow \ln(f(x)) = \ln x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=1, \text{ είναι: } \ln(f(1)) = \ln 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

$$\text{Tότε } \ln(f(x)) = \ln x \Leftrightarrow f(x) = x, x \in (0, +\infty).$$

5.337 Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f'(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ (1).

Επειδή οι συναρτήσεις f και $\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ και η σύνθεση τους $f\left(\frac{1}{x}\right)$

είναι

παραγωγίσιμη, οπότε η f' είναι παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = \left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = f\left(\frac{1}{x}\right) + xf'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow xf''(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Αντικαθιστώντας } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f'(x)}{x}, \text{ έχουμε:}$$

$$xf''(x) = x \frac{f'(x)}{x} - f'\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow xf''(x) = f'(x) - f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$, προκύπτει: $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}f(x)$ και αντικαθιστώντας στη

$$(2), \text{έχουμε: } xf''(x) = f'(x) - \frac{1}{x}f(x) \Leftrightarrow x^2f''(x) = xf'(x) - f(x) \Leftrightarrow f''(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \\ (f'(x))' = \left(\frac{f(x)}{x} \right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ η σχέση (1) γίνεται: } f'(1) = 1 \cdot f(1) = 1. \text{ Όμως } f'(1) = \frac{f(1)}{1} + C \Leftrightarrow 1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0,$$

$$\text{άρα } f'(x) = \frac{f(x)}{x}. \text{ Είναι}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f(x) = C_1 x. \text{ Είναι } f(1) = C_1 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 = C_1, \text{ άρα } f(x) = x, \quad x > 0.$$

$$5.338 \quad \text{Είναι } g^2(x) = g'(x) \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{g(x)} \right)' = (x)' \Leftrightarrow -\frac{1}{g(x)} = x + C_1 \quad \text{Για } x = 1 \text{ είναι}$$

$$1 = 1 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0, \text{ άρα } g(x) = -\frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

$$\text{Επίσης } \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \left(-\frac{1}{x} \right) - f(x) \frac{1}{x^2} = f'(x) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x} f'(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \left(1 + \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} f(x) \Leftrightarrow f'(x) \left(1 + \frac{1}{x} \right)' = \left(1 + \frac{1}{x} \right)' f(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x) \left(1 + \frac{1}{x} \right)' - f(x) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{1 + \frac{1}{x}} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1 + \frac{1}{x}} = C_2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = C_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow C_2 = 1 \text{ άρα } f(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \left(-\frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow f(x) = 1 - g(x)$$

$$5.339 \quad \textbf{a)} \quad f'(x)f(x) + f(x) + x = -xf'(x) \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) + 2xf(x) + x^2)' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = C$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow C = 1, \text{ άρα } f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = 1 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = 1 \neq 0, \text{ άρα } f(x) + x \neq 0 \text{ και}$$

επειδή είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f(1) + 1 = 1 > 0$, είναι $f(x) + x > 0$ και

$$f(x) + x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\textbf{b)} \quad f'(x)f(x) - e^{-x}(f(x) - f'(x)) - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2f'(x)f(x) + 2(f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}) - 2e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) + 2f(x)e^{-x} + e^{-2x})' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)e^{-x} + e^{-2x} = C \Leftrightarrow (f(x) + e^{-x})^2 = C$$

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow C = 9, \text{ άρα } (f(x) + e^{-x})^2 = 9 \neq 0, \text{ άρα } f(x) + e^{-x} \neq 0 \text{ και επειδή είναι συνεχής,}$$

διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f(0) + e^0 = 3 > 0$, είναι $f(x) + e^{-x} > 0$, άρα

$$f(x) + e^{-x} = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$$

γ) $2f'(x)f(x) - 2(f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\mu v x) + 2\eta\mu x\sigma\mu v x = 0 \Leftrightarrow (f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x)' = 0 \Leftrightarrow$
 $f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x = c \Leftrightarrow (f(x) - \eta\mu x)^2 = c$. $f(0) = 4 \Leftrightarrow c = 16$, άρα
 $(f(x) - \eta\mu x)^2 = 16 \neq 0$, άρα $f(x) - \eta\mu x \neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο.
Επειδή $f(0) - \eta\mu 0 = 4 > 0$ είναι $f(x) - \eta\mu x > 0$, άρα
 $f(x) - \eta\mu x = 4 \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x + 4, x \in \mathbb{R}$

5.340 Είναι $(f'(x))^2 - 4f'(x) + 4 = 4 - \frac{4}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (f'(x) - 2)^2 = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$

Εστω $g(x) = f'(x) - 2$ τότε $g^2(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $\frac{4x^2}{x^2 + 1} > 0$ οπότε $g^2(x) > 0$ άρα $g(x) \neq 0$ και $g(-2) = f'(-2) - 2 < 0$
άρα $g(x) < 0$.

$$g(x) = -\sqrt{\frac{4x^2}{x^2 + 1}} = -\frac{2|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Για $x \in (0, +\infty)$ $\frac{4x^2}{x^2 + 1} > 0$ άρα $g^2(x) > 0$ οπότε $g(x) \neq 0$ και αφού $g(2) = f'(2) - 2 > 0$ τότε

$$g(x) > 0 \text{ άρα ... } f'(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \text{ Επίσης } x=0 \quad (f'(0))^2 - 4f'(0) + 4 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 2$$

Συνεπώς $f'(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$$f'(x) = (2x + 2\sqrt{x^2 + 1})' \Leftrightarrow f(x) = 2x + 2\sqrt{x^2 + 1} + c \Leftrightarrow f(0) = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Συνεπώς $f(x) = 2x + 2\sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

5.341 α' τρόπος

Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = 1$. $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + f(h) + 2x_0 h - 1 - \cancel{f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h) - 1}{h} + 2x_0 \right) = 1 + 2x_0$$

Δηλαδή $f'(x_0) = 1 + 2x_0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, άρα και $f'(x) = 1 + 2x, x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = (x + x^2)' \Leftrightarrow f(x) = x + x^2 + c, f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

β' τρόπος

Παραγωγίζοντας ως προς y έχουμε: $f'(x+y) = f'(y) + 2x$ και για $y=0$ είναι

$$f'(x) = f'(0) + 2x = 1 + 2x = (x + x^2)' \Leftrightarrow f(x) = x + x^2 + c, f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα}$$

$$f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$$

5.342 Για $x=y=0$ είναι $f(0)=0$. $f'(0)=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)+f(h)+x_0h+h-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)}{h} + x_0 + 1 \right) = x_0 + 1$$

Δηλαδή $f'(x_0)=x_0+1$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, άρα και $f'(x)=x+1, x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)' \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}+x+c, f(0)=0 \Leftrightarrow c=0 \text{ και } f(x)=\frac{x^2}{2}+x, x \in \mathbb{R}.$$

5.343 α) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)+f(h)-6x_0h-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)}{h} - 6x_0 \right) = 12 - 6x_0$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x)=12-6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)=12-6x$ ή $f'(x)=(12x-3x^2)' \Leftrightarrow f(x)=12x-3x^2+c, c \in \mathbb{R}$.

Η σχέση (1) για $x=y=0$ γίνεται: $f(0)=f(0)+f(0)-6 \cdot 0 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

Όμως $f(0)=c$, άρα $c=0$ και $f(x)=12x-3x^2, x \in \mathbb{R}$.

5.344 Παραγωγίζοντας ως προς y , έχουμε:

$$(f(xy))'=(xf(y)+yf(x))' \Leftrightarrow f'(xy)(xy)'=xf'(y)+f(x) \Leftrightarrow xf'(xy)=xf'(y)+f(x).$$

Αν στη τελευταία αντικαταστήσουμε $y=1$, προκύπτει:

$$xf'(x)=xf'(1)+f(x) \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\ln x+c \Leftrightarrow f(x)=x \ln x + cx, c \in \mathbb{R}.$$

Για $x=1$ είναι $f(1)=\ln 1+c \Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=x \ln x, x > 0$.

5.345 $K'(x)=6x^2+4x \Leftrightarrow K'(x)=(2x^3+2x^2)' \Leftrightarrow K(x)=2x^3+2x^2+c$

$K(0)=2500 \Leftrightarrow c=2500$, άρα $K(x)=2x^3+2x^2+2500$

5.346 Εστω $f(t)$ η τιμή πώλησης του Η/Υ t έτη από την αγορά του.

Είναι $f'(t)=\lambda f(t) \Leftrightarrow e^{-\lambda t}f'(t)-\lambda e^{-\lambda t}f(t)=0 \Leftrightarrow (e^{-\lambda t}f(t))'=0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t}f(t)=c \Leftrightarrow f(t)=ce^{\lambda t}$
 $f(0)=1312$ και $f(2)=820$, άρα $c=1312$ και $\lambda=-0,235$. Άρα $f(t)=1312e^{-0,235t}$

5.347 $Q'(t)=\lambda Q(t) \Leftrightarrow Q'(t)-\lambda Q(t)=0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t}Q'(t)-\lambda e^{-\lambda t}Q(t)=0 \Leftrightarrow$

$$(e^{-\lambda t}Q(t))'=0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t}Q(t)=c \Leftrightarrow Q(t)=ce^{\lambda t}.$$

$$Q(5)=2Q(0) \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{5}\ln 2, \text{ άρα } Q(t)=ce^{\frac{t}{5}\ln 2}$$

$$Q(t_1)=5Q(0) \Leftrightarrow ce^{\frac{t_1}{5}\ln 2}=5c \Leftrightarrow \frac{t_1}{5}\ln 2=\ln 5 \Leftrightarrow \frac{t_1}{5}=\frac{\ln 5}{\ln 2}=2,32 \Leftrightarrow t_1=11,5 \text{ ώρες.}$$

5.348 α) Για κάθε $x \in [-2, 2]$, έχουμε:

$$f'(x) + f'(-x) = 0 \quad (1) \Leftrightarrow f'(x) = -f'(-x) \Leftrightarrow f'(x) = [f(-x)]' \Leftrightarrow f(x) = f(-x) + C,$$

Θέτουμε $x = 0$, οπότε $f(0) = f(0) + C \Leftrightarrow C = 0$, άρα $f(x) = f(-x)$, που σημαίνει ότι η f είναι άρτια.

β) Στη σχέση (1), για $x = 0$ έχουμε $f'(0) + f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$. Οπότε, το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$. Έστω ότι υπάρχει $\rho \in (-2, 2)$, με $\rho \neq 0$, ο οποίος είναι ρίζα της $f'(x) = 0$. Δηλαδή, $f'(\rho) = f'(0) = 0$. Επίσης, η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \rho]$ ή $[\rho, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$, οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ ή $\xi \in (\rho, 0)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$, άτοπο, γιατί $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$.

Άρα, το 0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$.

γ) Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0, 2]$, θα υπάρχει $\xi_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(2) - f'(0)}{2} = \frac{f'(2)}{2} \Leftrightarrow 2f''(\xi_1) = f'(2) \quad (2).$$

Επειδή $0 < \xi_1 < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{\xi_1}{2} < 1$, άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{\xi_1}{2} = x_0 \Leftrightarrow \xi_1 = 2x_0 \quad (3). \text{ Άρα, } n(2), \text{ με βάση } n(3) \text{ γίνεται } 2f''(2x_0) = f'(2).$$

5.349 α) $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - e^x = \frac{x^2 e^x}{x^2} - e^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$

$$\beta) f(1) = e + 1 \Leftrightarrow c = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) = x(e^x + 1)$$

γ) Εστω $g(x) = f(x) - 2$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x(e^x + 1) - 2] = -2$, οπότε υπάρχει $\alpha > 0$ και πολύ κοντά στο 0, τέτοιο, ώστε $g(\alpha) < 0$. Είναι $g(1) = f(1) - 2 = e - 1 > 0$ και $g(\alpha)g(1) < 0$, άρα λόγω Θ.Β. n $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha, 1) \subseteq (0, 1)$. Εστω δύο ρίζες Rolle και άτοπο.

5.350 Είναι $2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2x + 4 \Leftrightarrow (f^2(x) + g^2(x))' = (x^2 + 4x)' \Leftrightarrow$
 $f^2(x) + g^2(x) = x^2 + 4x + C \quad (1)$

Είναι $f^2(x) + g^2(x) \geq 0$ οπότε από (1) $x^2 + 4x + C \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 16 - 4C \leq 0 \Leftrightarrow 4C \geq 16 \Leftrightarrow C \geq 4 \text{ οπότε } f^2(0) + g^2(0) \geq 4 \text{ και } (f^2(0) + g^2(0))_{\min} = 4$$

5.351 α) i) $x = y = 0: f(0) = 1$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0) f(h)] = \dots = f(x_0)$$

β) f συνεχής και $f(x) \neq 0$ αφού $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$

$$\gamma) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) f(h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \frac{(f(h) - 1)}{h} = f(x_0) f'(0) = f(x_0) \text{ άρα}$$

$$f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$ και επειδή $f(0) = 1$, είναι $c = 1$, áρα $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5.352 **α) i)** Εστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) + y = f(x_2) + y \Rightarrow f(f(x_1) + y) = f(f(x_2) + y) \Leftrightarrow x_1 + f(y) = x_2 + f(y) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

ii) Για $x = y = 0$ $f(f(0) + 0) = 0 + f(0) \Leftrightarrow f(f(0)) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

Οπότε στην (1) για $y = 0$ $f(f(x)) = x + f(0) \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = x$

iii) Στην (1) όπου x το $f(x)$, έχουμε: $f(f(f(x)) + y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$ (2)

β) Παραγωγίζοντας τη (2) ως προς y , έχουμε: $f'(x+y) = 0 + f'(y)$ και για $y = 0$, είναι:

$$f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = x + c.$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ áρα } f(x) = x, x \in \mathbb{R}$$

5.353 **α)** ια $x = y = 0$ είναι $f(0) = 0$. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

Η εφαπτομένη της C_f είναι η ϵ : $y = x$

Για να εφάπτεται στη C_g πρέπει $g'(x_0) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$

Η εφαπτομένη της C_g στο $x = 1$ είναι η $y = x$ και στο $x = \frac{1}{3}$ είναι η $y = x + \frac{4}{27}$

β) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h f(x_0) + e^{x_0} f(h) - f(x_0)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x_0) \frac{e^h - 1}{h} + e^{x_0} \frac{f(h)}{h} \right) = f(x_0) + e^{x_0}$$

Αν $g(x) = e^x$, τότε $g'(x) = e^x$, $g'(0) = 1 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

γ) $f'(x) - f(x) = e^x \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (x)' \Leftrightarrow$

$$e^{-x} f(x) = x + c \Leftrightarrow f(x) = (x + c)e^x, f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ και } f(x) = x e^x, x \in \mathbb{R}$$

5.354 **α) i)** Για $x = 0$ $f(\kappa) = f(\kappa)f(0) \stackrel{f(\kappa) \neq 0}{\Rightarrow} f(0) = 1$

ii) Παραγωγίζοντας και στα δύο μέλη έχουμε $f'(\kappa + x) = f(\kappa)f'(x)e^{2\kappa x} + f(\kappa)f(x) \cdot e^{2\kappa x} \cdot 2\kappa$

Για $x = 0$ $f'(\kappa) = f(\kappa)f'(0) + f(\kappa)f(0)2\kappa \Leftrightarrow f'(\kappa) = 2f(\kappa) + 2\kappa f(\kappa) \Leftrightarrow f'(\kappa) = 2(\kappa + 1)f(\kappa)$

οπότε $f'(x) = 2(x + 1)f(x)$

iii) $h'(x) = \frac{f'(x) \cancel{e^{x^2+2x}} - f(x) \cancel{e^{x^2+2x}} (2x+2)}{\left(e^{x^2+2x}\right)^2} = \frac{2f(x)(x+1) - f(x)(2x+2)}{e^{x^2+2x}} = 0 \Leftrightarrow h(x) = c$ και

για $x = 0$ είναι $h(0) = 1$, áρα $h(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) $h(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2+2x}$

5.355 **α)** Επειδή $\ln x > 0$ για κάθε $x > 1$, είναι $f(x)f'(x) > 0$, áρα $f(x) \neq 0$ και επειδή είναι

συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f(e) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

β) $xf(x)f'(x) = \ln x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = \frac{2\ln x}{x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (\ln^2 x)' \Leftrightarrow f^2(x) = \ln^2 x + c$
 $f(e) = 1 \Leftrightarrow c = 0$ και $f(x) = \ln x$.

γ) Άν $\alpha < \beta$, τότε από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \frac{\beta}{\alpha}}{\beta - \alpha}$

$$\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{\ln \frac{\beta}{\alpha}}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{\beta} \leq \ln \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{\beta}{\alpha} - 1$$

5.356 Επειδή το $f(x) + 2$ διαιρείται με το $(x-1)^2$, ισχύει: $f(x) + 2 = (x-1)^2 g(x)$ (1), όπου $g(x)$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Επειδή το $f(x) - 2$ διαιρείται με το $(x+1)^2$, ισχύει: $f(x) - 2 = (x+1)^2 h(x)$ (1), όπου $h(x)$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει:

$$f'(x) = (x-1)[2g(x) + (x-1)^2 g'(x)] \text{ και } f'(x) = (x+1)[2h(x) + (x+1)^2 h'(x)]$$

Δηλαδή η f' έχει παράγοντες τα $(x-1)$ και $(x+1)$.

Επειδή η f είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, η f' είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, οπότε: $f(x) = (x-1)(x+1)(\alpha x + \beta)$, $\alpha \neq 0$. Δηλαδή

$$f'(x) = (x-1)(x+1)(\alpha x + \beta) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \alpha x - \beta \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\frac{\alpha}{4} x^4 + \frac{\beta}{3} x^3 - \frac{\alpha}{2} x^2 - \beta x \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{\alpha}{4} x^4 + \frac{\beta}{3} x^3 - \frac{\alpha}{2} x^2 - \beta x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επειδή } f(0) = 1 \text{ είναι } c = 1 \text{ και } f(x) = \frac{\alpha}{4} x^4 + \frac{\beta}{3} x^3 - \frac{\alpha}{2} x^2 - \beta x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε $x = 1$ και στη σχέση (2) $x = -1$, προκύπτει: $f(1) = -2$ και $f(-1) = 2$. Όμως

$$f(1) = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} - \frac{\alpha}{2} - \beta + 1 = -2 \Leftrightarrow 3\alpha + 4\beta - 6\alpha - 12\beta + 12 = -24 \Leftrightarrow -3\alpha - 8\beta = -36 \quad (3) \text{ και}$$

$$f(-1) = \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{3} - \frac{\alpha}{2} + \beta + 1 = 2 \Leftrightarrow 3\alpha - 4\beta - 6\alpha + 12\beta + 12 = 24 \Leftrightarrow -3\alpha + 8\beta = 12 \quad (4).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3),(4) προκύπτει: $-6\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και από την (4) είναι $\beta = 3$. Άρα $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

5.357 Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x]$, $[x, \alpha+1]$, $x \in (\alpha, \alpha+1)$ και παραγωγίσιμη στα (α, x) και $(x, \alpha+1)$, οπότε από το θεώρημα μέσονς τιμής, υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, x)$ και $\xi_2 \in (x, \alpha+1)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha+1) - f(x)}{\alpha+1 - x} = \frac{f(\alpha) + 2 - f(x)}{\alpha+1 - x}$$

Όμως $f'(x) \geq 2$ για κάθε $x \in (\alpha, \alpha+1)$, άρα $f'(\xi_1) \geq 2$ και $f'(\xi_2) \geq 2$.

$$\text{Είναι } f'(\xi_1) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 2 \Leftrightarrow f(x) - f(\alpha) \geq 2x - 2\alpha \Leftrightarrow f(x) \geq 2x - 2\alpha + f(\alpha) \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha) + 2 - f(x)}{\alpha + 1 - x} \geq 2 \Leftrightarrow f(\alpha) + 2 - f(x) \geq 2\alpha + 2 - 2x \Leftrightarrow f(x) \leq 2x - 2\alpha + f(\alpha) \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(x) = 2x - 2\alpha + f(\alpha)$ (3) για κάθε $x \in (\alpha, \alpha + 1)$.

Επειδή η σχέση (3) επαληθεύεται και για $x = \alpha$ και για $x = \alpha + 1$, τελικά είναι

$f(x) = 2x - 2\alpha + f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \alpha + 1]$.

5.358 α) Αφού $4f''(x)f^3(x) = -1 \neq 0$ τότε $f^3(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $f(x) \neq 0$

$$\beta) 4f''(x) = -\frac{1}{f^3(x)} \Leftrightarrow 4f''(x)f'(x) = -\frac{f'(x)}{f^3(x)} \Leftrightarrow 2\left[f'(x)\right]^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{2f'(x)}{f^3(x)}\right) \Leftrightarrow$$

$$2\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f^2(x)}\right)' \Leftrightarrow 2\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{f^2(x)} + C \stackrel{x=1}{\Rightarrow} 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Άρα } \left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{4f^2(x)}$$

γ) Είναι $\left(2f'(x)f(x)\right)^2 = 1$ οπότε $2f'(x)f(x) \neq 0$ και αφού $2f'(1)f(1) > 0$ τότε

$$2f'(x)f(x) = 1 \Rightarrow \left(f^2(x)\right)' = (x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \text{άρα } f^2(x) = x, x \in (0, +\infty).$$

Επειδή $f(x) \neq 0$ και $f(1) > 0$, είναι $f(x) > 0$, άρα $f(x) = \sqrt{x}$ στο $(0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής, ισχύει ότι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, οπότε $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.

5.359 α) $8f'(x) = f^3(x) - 4f(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 8f'(x)f(x) = f^4(x) - 4f^2(x) \Leftrightarrow$

$$4 \cdot 2f(x)f'(x) = f^4(x) - 4f^2(x) \stackrel{4f^4(x)}{\Leftrightarrow} \frac{2f(x)f'(x)}{f^4(x)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{f^2(x)} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2f'(x)}{f^3(x)} = \frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f^2(x)}\right)' - \frac{1}{f^2(x)} = -\frac{1}{4} \stackrel{e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\frac{1}{f^2(x)}\right)' e^{-x} - e^{-x} \frac{1}{f^2(x)} = -\frac{1}{4} e^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f^2(x)} e^{-x}\right)' = \left(\frac{e^{-x}}{4}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f^2(x)} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{4} + C \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = \frac{1}{4} \quad \text{άρα}$$

$$\frac{1}{f^2(x)} e^{-x} = \frac{e^{-x} + 1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = \frac{1 + e^{-x}}{4} \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{4}{1 + e^{-x}}$$

Είναι $f(x) \neq 0$ και η f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0) = \sqrt{2}$ είναι

$$f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad \text{Άρα } f(x) = \frac{2}{\sqrt{e^x + 1}}$$

β) Είναι $g'(x) = -f(x)g^2(x) \Leftrightarrow -\frac{g'(x)}{g^2(x)} = f(x) \Rightarrow \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f(x)$

$$\text{Εστω } \varphi(x) = \frac{1}{g(x)} \quad \text{τότε } \varphi'(x) = f(x)$$

$$\text{ΘΜΤ για το } \varphi \text{ στο } [-x, 0] \text{ υπάρχει } \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(0) - \varphi(-x)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{g(0)} - \frac{1}{g(-x)} \right)$$

$$\text{όμως } -x < \xi < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < e^{\xi} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{e^{-x} + 1} < \sqrt{e^{\xi} + 1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{e^{\xi} + 1}} < \frac{2}{\sqrt{e^{-x} + 1}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} < f(\xi) < \frac{2\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{2} < \frac{1}{x} \left(\frac{1}{g(0)} - \frac{1}{g(-x)} \right) < f(x)\sqrt{e^x} \Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{2} < \frac{1}{g(0)} - \frac{1}{g(-x)} < xf(x)\sqrt{e^x}$$

5.360 **α)** $g(x) = (f'(x) - f''(x))e^x + (f(x) - f'(x) - 1)e^x = (f(x) - f''(x) - 1)e^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$

β) $g(0) = 2 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = -1 - 2e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

γ) $f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = -e^{-x} - 2e^{-2x} \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = (e^{-x} + e^{-2x})' \Leftrightarrow$

$$f(x)e^{-x} = e^{-x} + e^{-2x} + c \Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{-x} + ce^x, f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = 1 + e^{-x}$$

δ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$-x_1 \neq -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} \neq e^{-x_2} \Leftrightarrow 1 + e^{-x_1} \neq 1 + e^{-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ άρα } f \text{ είναι 1-1 και}$$

$$\text{αντιστρέφεται. } f(x) = y \Leftrightarrow 1 + e^{-x} = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1.$$

$$\text{Τότε } -x = \ln(y-1) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y-1), \text{ άρα } f^{-1}(x) = -\ln(x-1), x > 1$$

5.361 **α)** $f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 4x > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα $f(x) \neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f(1) = 2 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

β) Οπου x το $\frac{1}{x}$: $f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x}$ (1) και $f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 4x \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = -\frac{4}{x}$ (2)

$$\text{Από (1) + (2)} \Rightarrow f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f\left(\frac{1}{x}\right)f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = c$$

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow c = 4, \text{ άρα } f\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 4 \text{ για κάθε } x > 0.$$

γ) $f\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 4 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{f(x)}$, αντικαθιστώντας στην (1), έχουμε:

$$f'(x)\frac{4}{f(x)} = \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln x + c_1$$

$$\text{Για } x = 1: c_1 = \ln 2, \text{ άρα } \ln f(x) = \ln x + \ln 2 = \ln(2x) \Leftrightarrow f(x) = 2x, x > 0.$$

5.362 **α)** $f'(-x)f(x) = 4 > 0$, άρα $f(x) \neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f(0) = 2 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Οπου x το $-x$: $f'(x)f(-x) = 4$, άρα

$f'(x)f(-x) = f'(-x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(-x)f(x))' = 0 \Leftrightarrow f(-x)f(x) = c$
 Για $x = 0$, είναι $c = 4$, αρα $f(-x)f(x) = 4$.

γ) $f(-x)f(x) = 4 \Leftrightarrow f(-x) = \frac{4}{f(x)}$, αρα $f'(x)f(-x) = 4 \Rightarrow f'(x)\frac{4}{f(x)} = 4 \Leftrightarrow$
 $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$. $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$, αρα $f(x) = 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5.363 α) $f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} + \frac{e^{\ln x^2}}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x) = e^x + x^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(x) = \ln\left(e^x + \frac{x^3}{3}\right)$

β) Εστω ότι εφαρμόζετε το Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^\xi + \xi^2}{e^\xi + \frac{\xi^3}{3}} = 0 \Leftrightarrow e^\xi + \xi^2 = 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

γ) Θέτουμε $e^x + \frac{x^3}{3} = u$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \frac{x^3}{3}\right) = +\infty$, αρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(e^x + \frac{x^3}{3}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

δ) $f'(1) = \frac{e+1}{e+\frac{1}{3}} = \frac{3(e+1)}{3e+1} = \frac{3e+3}{3e+1}$, $\lambda_e = -\frac{3e+1}{3e+3}$, $f'(1)\lambda_e = -1$

5.364 α) Αφού f, g παραγωγίσιμες τότε f, g συνεχής και αφού $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ τότε διατηρούν πρόσημο. Αφού $f(0) = g(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0, g(x) > 0$.

β) $2f'(x) + f^2(x)g(x) = 0 \stackrel{g(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 2f'(x)g(x) + f^2(x)g^2(x) = 0 \quad (1)$

Επίσης $2g'(x) + g^2(x)f(x) = 0 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 2g'(x)f(x) + g^2(x)f^2(x) = 0 \quad (2)$

Από (1), (2) $f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0 \stackrel{g^2(x) \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } c = 1$$

αρα $f(x) = g(x)$.

γ) Είναι $2f'(x) + f^2(x)g(x) = 0 \stackrel{f(x)=g(x)}{\Rightarrow} 2f'(x) + f^3(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{-2f'(x)}{f^3(x)} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{f^2(x)}\right)' = (x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = x + C_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \frac{1}{f^2(x)} = x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

5.365 α) Αφού $f \uparrow$ θα είναι και $1-1$

β) Για $x = 1$ $f(f'(1)) + f(1) = 0 \Leftrightarrow f(f'(1)) = 0 \Leftrightarrow f(f'(1)) = f(1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} f'(1) = 1$

γ) Στην αρχική για $x \rightarrow f'(x)$ έχουμε:

$$f(f'(f'(x))) + f(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow f(f'(f'(x))) + \underbrace{f(f'(x)) + f(x)}_0 = f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(f'(f'(x))) = f(x) \Leftrightarrow f'(f'(x)) = x, \quad x \in (0, +\infty)$$

δ) Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(f'(x)) + f(x) = 0$ έχουμε:

$$f'(f'(x))f''(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow xf''(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$(xf'(x))' = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = c_1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} f'(1) = c_1 \Rightarrow xf'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c_2. \text{ Είναι } f(1) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0 \text{ αρα } f(x) = \ln x.$$

5.366 **α)** $h'(x) = f'(x) + 1 - \ln x - x \frac{1}{x} = f'(x) - \ln x$

$$h(1) = f(1) + 1 - 1 + 1 = 0, \quad h(e) = f(e) + e - e \ln e = e - e = 0 \text{ αρα υπάρχει}$$

$$\xi \in (1, e) : h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \ln \xi \quad (1)$$

β) Στην $e^{f'(x)} = x + \lambda e^{g(x)}$ για $x = \xi$ έχουμε:

$$e^{f'(\xi)} = \xi + \lambda e^{g(\xi)} \Leftrightarrow e^{\ln \xi} = \xi + \lambda e^{g(\xi)} \Leftrightarrow \lambda e^{g(\xi)} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

γ) Είναι $e^{f'(x)} = x \Rightarrow f'(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x) = x \ln x - x + c, \quad f(1) = -1 \Leftrightarrow c = 0 \text{ αρα}$

$$f(x) = x \ln x - x$$

MONOTONIA

5.402. **a)** $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$, $\downarrow(-\infty, -1], [0, 1]$ και $\uparrow[-1, 0], [1, +\infty)$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ για κάθε $x > -1$, άρα $f \uparrow [-1, +\infty)$

y) $f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+8}}$. Είναι $f \downarrow (-\infty, 2]$ και $\uparrow [4, +\infty)$

δ) $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$, είναι $\uparrow(-\infty, 1], [3, +\infty)$ και $\downarrow[1, 2), (2, 3]$

ε) $f'(x) = (3x^2-12)e^{x^3-12x}$, $\uparrow(-\infty, -2], [2, +\infty)$ και $\downarrow[-2, 2]$

στ) $f'(x) = \ln x + 1$, $\downarrow\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και $\uparrow\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

ζ) $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, $\uparrow(0, \sqrt{e}]$ και $\downarrow[\sqrt{e}, +\infty)$

η) $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $\downarrow(-\infty, 0), (0, 1]$ και $\uparrow[1, +\infty)$

θ) $f'(x) = \frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$. Εστω $g(x) = x - \ln x - 1$, $x > 0$. Είναι $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Για $x > 1$ είναι $g'(x) > 0$, άρα $g \uparrow [1, +\infty)$. Για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > g(1) = 0$,

άρα $f'(x) > 0$ και $f \uparrow [1, +\infty)$. Για $0 < x < 1$ είναι $g'(x) < 0$, άρα $g \downarrow (0, 1]$. Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g(x) > g(1) = 0$, άρα $f'(x) > 0$ και $f \uparrow (0, 1]$.

ι) $f'(x) = (x-1)^2(x-3)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1, x \neq 3$ και αφού f συνεχής είναι $\uparrow \mathbb{R}$

κ) $f'(x) = \frac{1-\varepsilon\varphi x}{\sigma v v^2 x}$, $f \uparrow\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ και $\downarrow\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

5.403. **a)** $f \uparrow (-\infty, 1], \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ και $\downarrow\left[1, \frac{5}{2}\right]$

β) $f \uparrow (-\infty, 2)$ και $\uparrow (2, +\infty)$

γ) $f \uparrow (-\infty, -1], \left[\frac{1}{2}, 4\right)$, $(4, +\infty)$ και $\downarrow[-1, 0], \left[0, \frac{1}{2}\right]$

δ) $f \downarrow (-\infty, 0], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και $\uparrow\left[0, \frac{1}{2}\right], [1, +\infty)$

ε) $\downarrow(-\infty, 1]$ και $\uparrow[1, +\infty)$

στ) $f \downarrow (-\infty, -3], [0, 3]$ και $\uparrow[-3, 0], [3, +\infty)$

5.404. **a)** $f'(x) = 2e^{x+1} - 2x - 4$, $f''(x) = 2e^{x+1} - 2$.

Για $x > -1$ είναι $f''(x) > 0$, άρα $f' \uparrow [-1, +\infty)$, άρα $f'(x) > f'(-1) = 0$, άρα $f \uparrow [-1, +\infty)$

Για $x < -1$ είναι $f''(x) < 0$, άρα $f' \downarrow (-\infty, -1]$, άρα $f'(x) > f'(-1) = 0$, άρα $f \uparrow [-1, +\infty)$

β) $f'(x) = 2\ln x + 2 - 2x$, $f''(x) = 2 \frac{1-x}{x}$

Για κάθε $x > 1$ είναι $f''(x) < 0$, άρα $f' \downarrow [1, +\infty)$, άρα $f'(x) < f'(1) = 0$, άρα $f \downarrow [1, +\infty)$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f''(x) > 0$, άρα $f' \uparrow (0, 1]$, άρα $f'(x) < f'(1) = 0$ και $f \downarrow (0, 1]$

γ) $f'(x) = 4e^x + 4x - 4$, $f''(x) = 4e^x + 4 > 0 \Rightarrow f' \uparrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ και $f \uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$ και $f \downarrow (-\infty, 0]$.

δ) $f'(x) = x - 1 + \sigma v x$, $f''(x) = 1 - \eta \mu x > 0$ για κάθε $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, άρα $f' \uparrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ και $f \uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$ και $f \downarrow (-\infty, 0]$.

ε) $f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(\ln x)^2}$. Εστω $g(x) = \frac{x-1}{x} - \ln x$, $x > 0$. Είναι $g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$, άρα $g \downarrow [1, +\infty)$, οπότε $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

άρα $f \downarrow [1, +\infty)$. Για κάθε $0 < x < 1$, είναι $g'(x) > 0$ άρα $g \uparrow (0, 1]$ οπότε

$g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \downarrow (0, 1]$.

στ) $f'(x) = \frac{2(x-1) + \ln x}{4x\sqrt{x}}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $x-1 > 0$, $\ln x > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και $f \uparrow [1, +\infty)$. Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $x-1 < 0$, $\ln x < 0$, άρα $f'(x) < 0$ και $f \downarrow (0, 1]$.

ζ) $f'(x) = 6\sigma v x - 6 + 3x^2$, $f''(x) = 6x - 6\eta \mu x$, $f^{(3)}(x) = 6 - 6\sigma v x > 0$ για κάθε

$x \neq 2k\pi$, άρα $f'' \uparrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > f''(0) = 0$ και $f' \uparrow [0, +\infty)$. Άρα

$f'(x) > f'(0) = 0$ και $f \uparrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < f''(0) = 0$ και $f' \downarrow (-\infty, 0]$.

Άρα $f'(x) > f'(0) = 0$ και $f \uparrow (-\infty, 0]$.

η) $f'(x) = \frac{x\sigma v x - \eta \mu x}{x^2}$. Εστω $g(x) = x\sigma v x - \eta \mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$g'(x) = -x\eta \mu x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $g \downarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(x) < g(0) = 0$, άρα $f'(x) < 0$ και $f \downarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

5.405. **α)** $f'(x) = 2\ln(x+1) - 2x$, $f''(x) = -\frac{2x}{x+1} < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $f' \downarrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$, άρα $f \downarrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \leq f(0) = -5 < 0$, άρα $f(x) < 0$.

β) $f'(x) = 1 - 2x - e^x$, $f''(x) = -2 - e^x < 0 \Rightarrow f' \downarrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$f'(x) < f'(0) = 0$, άρα $f \downarrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$.

γ) $f'(x) = 2e^x + 2x - 2$, $f''(x) = 2e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \uparrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$f'(x) > f'(0) = 0$, άρα $f \uparrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq f(0) = 5 > 0$.

δ) $f'(x) = e^x + 18x^5 + 4x - 1$, $f''(x) = e^x + 90x^4 + 4 > 0 \Rightarrow f' \uparrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$f'(x) > f'(0) = 0$, άρα $f \uparrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 0]$, οπότε $f(x) \geq f(0) = 0$.

Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) $f'(x) = \frac{1}{x} + v > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$, οπότε για $x > 1$

είναι $f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$

στ) $f'(x) = x \eta \mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, άρα $f \uparrow [0, \pi]$.

Για κάθε $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < f(0) < f(x) < f(\pi)$

$$5.406. \quad f'(x) = 2 \frac{1 + \ln x - x}{x}. \text{Έστω } g(x) = 1 + \ln x - x, x > 0. \text{ Είναι } g'(x) = \frac{1-x}{x}.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$, άρα $g \downarrow [1, +\infty)$, οπότε $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

άρα $f \downarrow [1, +\infty)$. Για κάθε $0 < x < 1$, είναι $g'(x) > 0$ άρα $g \uparrow (0, 1]$ οπότε

$g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \downarrow (0, 1]$.

$$5.407. \quad f'(x) = 3\lambda^2 x^2 - 2\lambda x + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ γιατί έχει } \Delta = -8\lambda^2 < 0$$

$$5.408. \quad f'(x) = 6(2x^2 - \lambda x + 2), \Delta = (\lambda - 4)(\lambda + 4).$$

Είναι $\lambda \in [-4, 4]$ διακρίνοντας περιπτώσεις.

$$5.409. \quad \text{a)} \quad f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x + 3, \Delta = 4(\lambda - 3)(\lambda + 3), \text{διακρίνοντας περιπτώσεις: } \lambda \in [-3, 3]$$

$$\text{b)} \quad f'(x) = -\frac{\lambda^2 x^2 - 2x + \lambda^4}{x^2 + \lambda^2}. \text{ Το τριώνυμο } \lambda^2 x^2 - 2x + \lambda^4 \text{ έχει } \Delta = 4(1 - \lambda^3)(1 + \lambda^3)$$

και όταν $\lambda \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ είναι $\Delta \leq 0$, οπότε $f \downarrow \mathbb{R}$

$$5.410. \quad f'(x) = \frac{\lambda^2 - 4}{(x+1)^2}. \text{ Άν } \lambda \in (-2, 2), \text{ τότε } f'(x) < 0,$$

Άν $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, τότε $f'(x) > 0$ και αν $\lambda = 2$ ή -2 , τότε $f'(x) = 0$

$$5.411. \quad 3f^2(x)f'(x) - 4f(x)f'(x) + 5f'(x) = e^x + 5 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) - 4f(x) + 5) = e^x + 5$$

Είναι $e^x + 5 > 0$ και $3f^2(x) - 4f(x) + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

$$5.412. \text{ a)} \quad 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow [(x^2 + 1)f(x)]' = (e^x)' \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1)f(x) = e^x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x + c}{x^2 + 1}. \quad f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{b)} \quad f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 1 \quad \text{και αφού } n \text{ } f \text{ είναι συνεχής, είναι } \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$5.413. \text{ a)} \quad e^{f(x)} - 4x - 4e^{-f(x)} = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} - 4x - \frac{4}{e^{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 4xe^{f(x)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})^2 - 4xe^{f(x)} + 4x^2 = 4x^2 + 4 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - 2x)^2 = 4x^2 + 4 \quad (1)$$

Για $x = 0$, η (1) γίνεται $e^{2f(0)} = 4 \Leftrightarrow 2f(0) = \ln 4 \Leftrightarrow f(0) = \ln 2$

Επειδή $4x^2 + 4 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι και $e^{f(x)} - 2x \neq 0$. Επειδή η $e^{f(x)} - 2x$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσοντο. $e^{f(0)} - 2 \cdot 0 = 2 > 0$, άρα $e^{f(x)} - 2x > 0$ και $e^{f(x)} - 2x = \sqrt{4x^2 + 4} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \sqrt{4x^2 + 4} + 2x$.

Είναι $4x^2 + 4 > 4x^2 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 4} > |2x| \Leftrightarrow -\sqrt{4x^2 + 4} < 2x < \sqrt{4x^2 + 4}$, άρα

$$\sqrt{4x^2 + 4} + 2x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε } f(x) = \ln(\sqrt{4x^2 + 4} + 2x).$$

$$\text{b)} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 4}} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$$

$$5.414. \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x + \ln k}{(x-k)^2}. \quad \text{Έστω } g(x) = \frac{1}{x} - \ln x + \ln k, x \in (0, k].$$

$$g'(x) = \frac{k-x}{x^2} > 0, \quad \text{άρα } g \uparrow (0, k]. \quad \text{Για κάθε } 0 < x < k \quad \text{είναι } g(x) < g(k) = 0, \quad \text{άρα}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{και } f \downarrow (0, k).$$

$$5.415. \quad h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}. \quad \text{Από το ΘΜΤ υπάρχει } \xi \in (0, x), \quad x \in (0, x_0) \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \quad 0 < \xi < x \Leftrightarrow f'(0) > f'(\xi) > f'(x), \quad \text{άρα } \frac{f(x)}{x} > f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) < 0,$$

$$\text{άρα } h'(x) < 0 \quad \text{και } h \downarrow (0, x_0].$$

$$5.416. \quad g'(x) = e^{2x} + \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \ln 2. \quad \text{Από το ΘΜΤ υπάρχει } \xi \in (0, x), \quad x > 0 \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \quad 0 < \xi < x \Leftrightarrow f'(0) < f'(\xi) < f'(x), \quad \text{άρα } \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0,$$

άρα $g'(x) > 0$ και $g \uparrow (0, +\infty)$

5.417. α) $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

β) Λόγω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[e, x]$,

$x > e$, υπάρχει $\xi \in (e, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \frac{\ln^2 x - 1}{x - e}.$$

$$\text{Είναι } f''(x) = \frac{\frac{2}{x}x - 2\ln x}{x^2} = 2\frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \text{ για κάθε } x > e, \text{ άρα } f' \downarrow \text{ στο } [e, +\infty).$$

$$\text{Επειδή } \xi < x, \text{ είναι } f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - 1}{x - e} > \frac{2\ln x}{x} \Leftrightarrow x(\ln^2 x - 1) > 2\ln x(x - e).$$

x	0	1	$+\infty$
f'	-	Φ	+
f			

5.418. α) $f'(x) = -\eta\mu x \sin x - \eta\mu x + e^{\sigma v x} \eta\mu x = \eta\mu x (e^{\sigma v x} - \sin x - 1)$, έστω

$$g(x) = e^{\sigma v x} - \sin x - 1, x \in [0, \pi]. \text{ Είναι } g'(x) = -\eta\mu x e^{\sigma v x} + \eta\mu x = \eta\mu x (1 - e^{\sigma v x}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{\sigma v x} \leq 1 \Leftrightarrow \sigma v x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Είναι } g(0) \geq g(x) > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-1} > 0 \text{ και}$$

$$0 < g\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq g(x) \leq g(\pi), \text{ άρα } g(x) > 0 \text{ για}$$

κάθε $x \in [0, \pi]$, άρα $f'(x) > 0$ και $f \uparrow$ στο $[0, \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
g'	-	Φ	+
g			

$$\beta) \text{ Είναι } \frac{5\pi}{9} > 0, \text{ άρα } f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > f(0) = \frac{3}{2} > 0.$$

$$\gamma) \frac{1}{2} < 1 \text{ και } f \uparrow \text{ στο } [0, \pi], \text{ άρα } f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1).$$

5.419. α) $f(x) = e^x + 2e^{2x} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$

$$\beta) -\frac{1}{100} < 0 < \frac{1}{100} \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(-\frac{1}{100}\right) < f(0) < f\left(\frac{1}{100}\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{100}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\gamma) \text{ Εστω } g(x) = x^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{\ln x}{2x}}, x > 0$$

$$g'(x) = e^{\frac{\ln x}{2x}} \frac{2 - 2\ln x}{x^2} < 0 \text{ για κάθε } x > e, \text{ άρα } g \downarrow [e, +\infty)$$

$$5 < 10 < 15 \stackrel{g \downarrow}{\Leftrightarrow} g(5) > g(10) > g(15) \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{10}} > 10^{\frac{1}{20}} > 15^{\frac{1}{30}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[10]{5} > \sqrt[20]{10} > \sqrt[30]{15} \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(\sqrt[10]{5}\right) > f\left(\sqrt[20]{10}\right) > f\left(\sqrt[30]{15}\right)$$

5.420. Επειδή $f''(x) \neq 0$ και η f'' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσωπο.

$$\text{Άν } f''(x) > 0, \text{ τότε } f' \uparrow [\alpha, \beta], \text{ ενώ αν } f''(x) < 0, \text{ τότε } f' \downarrow [\alpha, \beta]$$

5.421. **a)** Η g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} \Leftrightarrow$

$$g'(x) = \frac{e^x(f'(x) - f(x))}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0 \quad \text{Επομένως } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

β) Εστω ότι δεν υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε: $f(\xi) \geq f'(\xi)$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα ισχύει $f(x) < f'(x)$. Όμως τότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} οπότε

$$g(0) < g(2) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{e^0} < \frac{f(2)}{e^2} \Leftrightarrow 4 < 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $f(\xi) \geq f'(\xi)$.

5.422. $f'(x) > (1-x) \cdot f''(x) \Leftrightarrow f''(x) - (1-x) \cdot f''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) + (x-1) \cdot f''(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)' \cdot f'(x) + (x-1) \cdot (f'(x))' > 0 \Leftrightarrow [(x-1)f'(x)]' > 0. \quad (1)$$

Θέτουμε $g(x) = (x-1) \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g'(x) = ((x-1)f'(x))' > 0$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Οπότε:

Άν $x > 1$, τότε $g(x) > g(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ (αφού $x-1 > 0$)

Άν $x < 1$, τότε $g(x) < g(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ (αφού $x-1 < 0$).

Άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} είναι και συνεχής,, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

5.423. Εστω $g(x) = (x-3)f'(x)$. Είναι $g'(x) > 0$, άρα $g \uparrow \mathbb{R}$.

$$\text{Άν } x > 3 \Leftrightarrow g(x) > g(3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [3, +\infty)$$

$$\text{Άν } x < 3 \Leftrightarrow g(x) < g(3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow (-\infty, 3]$$

5.424. Είναι $f'(x) = -f'(2-x)$ και για $x=1$ είναι $f'(1)=0$. $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \downarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Για κάθε } x > 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 1].$$

$$\text{Για κάθε } x < 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \uparrow [1, +\infty)$$

5.425. **a)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Επειδή $f'(x) > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Επειδή $1 < \alpha < \beta$ είναι $f(1) < f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow 0 < f(\alpha) < f(\beta)$, άρα:

$$\begin{cases} f(\alpha)f(\alpha) < f(\alpha)f(\beta) \\ f(\alpha)f(\beta) < f(\beta)f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(\alpha) < f(\alpha)f(\beta) \\ f(\alpha)f(\beta) < f^2(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) < \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} \\ \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} < f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \\ f(\alpha) < \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} < f(\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(\alpha) ≠ f(\beta)$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} \Leftrightarrow f^2(\xi) = f(\alpha)f(\beta).$$

5.426. **a)** $[f'(x)]^2 = 5x^2 - 15x = 5x(x-3) > 0$ για κάθε $x ∈ (3, +∞)$, άρα $f'(x) ≠ 0$ για κάθε $x ∈ (3, +∞)$

b) Επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί πρόσομο. Επειδή επιπλέον $f'(5) < 0$, είναι

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (3, +∞)$$

5.427. **a)** ΘΜΤ στο $[κ, κ+1]$ $\exists \xi ∈ (κ, κ+1) : f'(\xi) = \frac{f(κ+1) - f(κ)}{1}$. Ομως $f'(\xi) < f(κ+1)$ άρα $f(\cancel{κ+1}) - f(κ) < f(\cancel{κ+1}) \Leftrightarrow -f(κ) < 0 \Leftrightarrow f(κ) > 0$ και αφού $f'(x) > f(κ) > 0$ τότε $f'(x) > 0$ και $f \uparrow$.

b) $h'(x) = f'(x) - f(κ) > 0$ άρα $h \uparrow$

c) $h(κ) < h(κ+1) \Leftrightarrow f(κ) - κf(κ) < f(κ+1) - (κ+1)f(κ) \Leftrightarrow$

$$f(κ) - \cancel{κf(κ)} < f(κ+1) - \cancel{κf(κ)} - f(κ) \Leftrightarrow 2f(κ) < f(κ+1) \Leftrightarrow f(κ) < \frac{f(κ+1)}{2}$$

5.428. **a)** $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +∞)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -∞$, $\lim_{x \rightarrow +∞} f(x) = +∞$, $f(A) = ℝ$.

b) $f'(x) = 4x^3 - 4$, $f \downarrow (-∞, 1]$ και $\uparrow [1, +∞)$. $\lim_{x \rightarrow -∞} f(x) = +∞$, $\lim_{x \rightarrow +∞} f(x) = +∞$, $f(1) = 3$ άρα $f(A) = [3, +∞)$

c) $f'(x) = -\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} < 0 \Rightarrow f \downarrow ℝ$.

$$\lim_{x \rightarrow -∞} f(x) = \lim_{x \rightarrow -∞} \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -∞} \frac{\cancel{e}^{\cancel{x}}}{\cancel{e}^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -∞} \frac{1 - \cancel{e}^{\cancel{x}^0}}{\cancel{e}^{\cancel{x}^0} + 1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +∞} f(x) = \lim_{x \rightarrow +∞} \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +∞} \frac{e^{\cancel{x}^0} \left(\cancel{e}^{\cancel{x}^0} - 1 \right)}{e^{\cancel{x}^0} \left(1 + \cancel{e}^{\cancel{x}^0} \right)} = -1, \text{ άρα } f(A) = (-1, 1)$$

d) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $f \downarrow (-∞, -1] \cup [1, +∞)$ και $\uparrow [-1, 1]$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, f(-1) = -\frac{1}{2}, f(1) = \frac{1}{2}, \text{άρα } f(A) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

ε) $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - \eta \mu x > 0$, αφού $1 - \eta \mu x \geq 0$ και $\frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $f \uparrow (0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + x \left(1 + \frac{\sigma v \nu x}{x} \right) \right) = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\left| \frac{\sigma v \nu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma v \nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \text{ και με K.P είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma v \nu x}{x} = 0, \text{ άρα } f(A) = \mathbb{R}.$$

στ) $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(A) = \mathbb{R}$.

5.429. **α)** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, άρα f συνεχής στο 0 και επειδή είναι συνεχής στο \mathbb{R}^* ως

πράξεις συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) $f'(x) = \frac{x \sigma v \nu x - \eta \mu x + x^2}{x^2}$. Έστω $g(x) = x \sigma v \nu x - \eta \mu x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$g'(x) = -x \eta \mu x + 2x = x(2 - \eta \mu x).$$

Για $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$, οπότε $g(x) > g(0) = 0$, άρα $f'(x) > 0$

και $f \uparrow (0, +\infty)$.

Για $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow (-\infty, 0)$, οπότε $g(x) > g(0) = 0$, άρα $f'(x) > 0$ και $f \uparrow (-\infty, 0)$.

Είναι $\left| \frac{\eta \mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ και από K.P είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(A) = \mathbb{R}$.

5.430. **α)** $f(x) = x^{e^x} = e^{e^x \ln x}$, $x > 0$, $f'(x) = e^{e^x \ln x} e^x \frac{x \ln x + 1}{x}$. Έστω $g(x) = x \ln x + 1$, $x > 0$.

Είναι $g'(x) = \ln x + 1$. Για κάθε $x > \frac{1}{e}$, είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow \left[\frac{1}{e}, +\infty \right)$, άρα

$$g(x) > g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e} > 0, \text{ άρα } f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left[\frac{1}{e}, +\infty \right).$$

Για κάθε $0 < x < \frac{1}{e}$, είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow \left[\frac{1}{e}, +\infty \right)$, άρα

$$g(x) > g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e} > 0, \text{ άρα } f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left[0, \frac{1}{e} \right].$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, άρα $f(A) = (0, +\infty)$.

5.431. $f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'' \uparrow [\alpha, \beta]$.

Από το Θ.Rolle για την f' , υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Για κάθε $x \in (\alpha, \xi)$ είναι $f''(x) < f''(\xi) = 0 \Rightarrow f' \downarrow [\alpha, \xi]$, οπότε $f'(\xi) < f'(\alpha) = \beta$.

Για κάθε $x \in (\xi, \beta)$ είναι $f''(x) > f''(\xi) = 0 \Rightarrow f' \uparrow [\xi, \beta]$, οπότε $f'(x) < f'(\beta) = \beta$.

Είναι $g'(x) = f'(x) - \beta < 0 \Rightarrow g \downarrow [\alpha, \beta]$.

Το σύνολο τιμών της g , είναι $g([\alpha, \beta]) = [g(\beta), g(\alpha)] = [\beta(2-\beta), \alpha(2-\beta)]$

5.432. **a)** $f(x) = \ln(x-1) - x + 2, x \geq 2$. Είναι $f'(x) = \frac{2-x}{x-1} < 0 \Rightarrow f \downarrow [2, +\infty)$

Για κάθε $x > 2 \Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow \ln(x-1) < x-2$.

b) $f(x) = e^x(x+1) - 1, x \geq 0$. Είναι $f'(x) = e^x(x+2) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) > 1$

c) $f(x) = x \sin x - \eta x, x \in [0, \pi]$. $f'(x) = -x \eta \mu x < 0 \Rightarrow f \downarrow [0, \pi]$.

Για κάθε $0 < x < \pi \Leftrightarrow f(\pi) < f(x) < f(0) \Rightarrow x \sin x < \eta x$

d) $f(x) = e^x - ex, x \in [1, +\infty)$. $f'(x) = e^x - e > 0$ για κάθε $x > 1$, άρα $f \uparrow [1, +\infty)$.

Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 0 \Leftrightarrow e^x > ex$

e) $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}, x > 0$. $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$. Για κάθε

$x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 0$.

f) $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x, x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} < 0$ για κάθε $x \neq 1$ άρα $f \downarrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) < x$.

g) $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}, x \geq 0$. $f'(x) = e^x - 1 - x, f''(x) = e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα $f' \uparrow [0, +\infty)$. Για $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \uparrow [0, +\infty)$, άρα $f(x) > f(0) = 0$.

h) Επειδή και στα δύο μέλη της ανίσωσης βρίσκονται εκθετικές συναρτήσεις, είναι πιο εύκολο να μετασχηματίσουμε την ανίσωση λογαριθμώντας.

Δηλαδή, $e^x < (1+x)^{1+x} \Leftrightarrow \ln e^x < \ln(1+x)^{1+x} \Leftrightarrow x < (1+x)\ln(1+x), x > 0$.

Εστω $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x, x \in [0, +\infty)$.

Είναι $f'(x) = \ln(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x} - 1 = \ln(x+1)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 0$, οπότε $f'(x) > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow (1+x)\ln(1+x) - x > 0 \Leftrightarrow (1+x)\ln(1+x) > x$.

i) $f(x) = \ln x - e^{x-1} + 1, x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - e^{x-1}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{x-1} < 0 \Rightarrow f' \downarrow (0, +\infty)$

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \downarrow [1, +\infty)$. Άρα $f(x) < f(1) = 0$.

ι) $f(x) = 2x^4 + 5x^2 + \sigma v v x - 1, x \geq 0.$

$$f'(x) = 8x^3 + 10x - \eta \mu x, f''(x) = 24x^2 + (10 - \sigma v v x) > 0 \Rightarrow f' \uparrow [0, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(0) = 0 \Rightarrow f' \uparrow [0, +\infty)$ και $f(x) > f(0) = 0$

κ) Εστω $f(x) = x^2 - \ln(\eta \mu x), x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right].$

$$\text{Είναι } f'(x) = 2x - \frac{(\eta \mu x)'}{\eta \mu x} = 2x - \frac{\sigma v v x}{\eta \mu x} = 2x - \sigma \phi x \text{ και } f''(x) = 2 + \frac{1}{\eta \mu^2 x} > 0 \Rightarrow f' \uparrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Για κάθε $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < f'(x) < f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 1 < f'(x) < \pi$, άρα

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$. Για κάθε $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ είναι

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f\left(\frac{\pi}{4}\right). \text{ Είναι } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16} - \ln \eta \mu \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi^2}{16} - \ln \sqrt{2} + \ln 2 = \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \ln 2 > 0, \text{ οπότε } f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow \\ &x^2 - \ln(\eta \mu x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > \ln(\eta \mu x). \end{aligned}$$

5.433. α) $f(x) = \sigma v v x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}, x \geq 0, f'(x) = -\eta \mu x + x - \frac{x^3}{6}, f''(x) = -\sigma v v x + 1 - \frac{x^2}{2},$

$$f^{(3)}(x) = \eta \mu x - x < 0 \Rightarrow f'' \downarrow [0, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow f' \downarrow [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \downarrow [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow \sigma v v x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

β) $f(x) = x + \eta \mu x + \sigma v v x - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], f'(x) = 1 + \sigma v v x - \eta \mu x > 0$ γιατί

$1 - \eta \mu x > 0, \sigma v v x > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. Άρα $f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, άρα $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow x + \eta \mu x + \sigma v v x > 1$.

γ) Εστω $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, x \in [0, +\infty), f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}, f''(x) = e^x - 1 - x,$

$$f^{(3)}(x) = e^x - 1 > 0 \text{ άρα } f'' \uparrow \text{ στο } [0, +\infty). \text{ Για } x > 0 \text{ είναι } f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f' \uparrow [0, +\infty).$$

Για $x > 0$ είναι $f'(0) = 0$, άρα $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$. Για $x > 0$

είναι $f(x) > f(0) = 0$.

δ) $f(x) = 2 \ln(\eta \mu x) - \eta \mu^2 x, x \in (0, \pi), f'(x) = 2 \frac{\sigma v v x}{\eta \mu x} - 2 \eta \mu x \sigma v v x = \frac{2 \sigma v v^3 x}{\eta \mu x}$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$.

Για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, άρα $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$

ε) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$, $x \in [0, 1]$. $f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2} - 2 - 2x^2 < 0 \Rightarrow f \downarrow [0, 1]$

Για κάθε $0 \leq x < 1$ είναι $f(x) \leq f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leq 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$.

5.434. Εστω $h(x) = f(0) + g(x) - g(0) - f(x)$, $x \geq 0$, $h'(x) = g'(x) - f'(x) = -\eta\mu^2 x - e^x < 0$, άρα $h \downarrow [0, +\infty)$. Για $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) = 0$.

5.435. **a)** Θεωρούμε την $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g'(x) = e^x - 1$, οπότε $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow (-\infty, 0]$, οπότε για $x \leq 0$ είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$, Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 > 0$

Άρα $e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = 2e^{f(x)}f'(x) - 2f(x)f'(x) = 2f'(x)(e^{f(x)} - f(x))$

Όμως $f'(x) > 0$ και από το (a) ερώτημα που είναι $e^x - x \geq 1$ αν θέσουμε όπου x το $f(x)$ θα είναι $e^{f(x)} - f(x) \geq 1 > 0$, άρα $h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

5.436. **a)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 1] \cup (1, +\infty).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq x^2 + 1$.

5.437. Εστω $f(x) = 2x - x^2 - 2\ln(x+1)$, $x \geq 0$. Είναι

$$f'(x) = 2 - 2x - \frac{2}{x+1} = -\frac{2x^2}{x+1} < 0, x > 0 \Rightarrow f \downarrow [0, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0$ $f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 < 2\ln(x+1)$

Εστω $g(x) = 2\ln(x+1) - 2x$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) = -\frac{2x}{x+1} < 0$, $x > 0 \Rightarrow g \downarrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x+1) < 2x$

- 5.438. Εστω $f(x) = \sin x - \eta \mu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $f'(x) = -\eta \mu x - \sin x < 0$ γιατί $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $f \downarrow$ στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή για $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sin x < \eta \mu x$, έχουμε:
- $$f(\sin x) > f(\eta \mu x) \Leftrightarrow \sin(\sin x) - \eta \mu(\sin x) > \sin(\eta \mu x) - \eta \mu(\eta \mu x) \Leftrightarrow \\ \eta \mu(\eta \mu x) - \eta \mu(\sin x) > \sin(\eta \mu x) - \sin(\sin x).$$

- 5.439. **a)** $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, +\infty)$
- b)** $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow f(|\alpha + \beta|) \leq f(|\alpha| + |\beta|) \Leftrightarrow$
- $$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha| + |\beta|} + \frac{|\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}$$

- 5.440. **a)** Εστω $f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \uparrow [1, +\infty)$.
- Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 - \frac{1}{x}$
- b)** $g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow g \downarrow (1, +\infty)$
- γ)** $(\kappa - 1)\ln \lambda = (\lambda - 1)\ln \kappa \Leftrightarrow \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} = \frac{\ln \kappa}{\kappa - 1} \Leftrightarrow g(\lambda) = g(\kappa) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \lambda = \kappa$

- 5.441. **a)** Είναι $f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$.
- Για κάθε $x > 1$ είναι $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 1$, άρα $f'(x) > 0$ και $f \uparrow$ στο $(1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } g'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \ln x - \ln(x+1) \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x} \Leftrightarrow \\ g'(x) = \frac{f(x) - f(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x}.$$

Είναι $1 < x < x+1$ και $f \uparrow$, οπότε $f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow f(x) - f(x+1) < 0$, άρα $g'(x) < 0$ και $g \downarrow$ στο $(1, +\infty)$.

- β)** Είναι $f(x) < f(x+1)$ για κάθε $x > 1$, οπότε: $x \ln x < (x+1) \ln(x+1) \Leftrightarrow$
- $$\ln x^x < \ln(x+1)^{x+1} \Leftrightarrow x^x < (x+1)^{x+1}.$$
- γ)** Είναι: $(\alpha+1)^{\ln \beta} > (\beta+1)^{\ln \alpha} \Leftrightarrow \ln[(\alpha+1)^{\ln \beta}] > \ln[(\beta+1)^{\ln \alpha}] \Leftrightarrow$

$$\ln\beta \cdot \ln(\alpha+1) > \ln\alpha \cdot \ln(\beta+1) \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha+1)}{\ln\alpha} > \frac{\ln(\beta+1)}{\ln\beta} \Leftrightarrow g(\alpha) > g(\beta) \text{ που ισχύει,}$$

γιατί $1 < \alpha < \beta$ και $g \downarrow$.

5.442. **a)** Πρέπει $\frac{1-\ln x}{\ln x} > 0 \Leftrightarrow x \in (1, e)$. Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x(1-\ln x)\ln x} < 0 \Rightarrow f \downarrow (1, e)$

b) $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \ln \frac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha} > \ln \frac{1-\ln\beta}{\ln\beta} \Leftrightarrow \frac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha} > \frac{1-\ln\beta}{\ln\beta} \Leftrightarrow \frac{\ln\beta}{\ln\alpha} > \frac{1-\ln\beta}{1-\ln\alpha}$

5.443. **a)** $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(8-x)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(8-x)^2}}, x \in (0, 8)$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(8-x)^2} \geq \sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow 64 - 16x + x^2 \geq x^2 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, 4]$ και για κάθε $x \in (4, 8)$ είναι

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [4, 8]$$

b) $2 < 3 \Leftrightarrow f(2) < f(3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow \alpha < \beta$

5.444. Εστω $g(x) = f(x) - x, x \in [0, +\infty)$.

Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 > 0$, άρα $g \uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f(x) > x$.

5.445. Εστω $h(x) = f(x) - g(x), x \in [\alpha, \beta]$.

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0, \text{ άρα } h \downarrow \text{ στο } [\alpha, \beta].$$

Για κάθε $\alpha < x < \beta$ είναι $h(x) > h(\beta) = 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$.

5.446. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{2x}, x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = f'(x) - 2e^{2x}$.

Είναι $f'(x) < 2e^{2x} \Leftrightarrow f'(x) - 2e^{2x} < 0$, οπότε $g'(x) < 0$ και η g είναι \downarrow στο \mathbb{R} .

a) Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) > g(0)$.

Όμως, $g(0) = f(0) - e^0 = 0$, άρα $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > e^{2x}$.

b) Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) - e^{2x} < 0 \Leftrightarrow f(x) < e^{2x}$.

5.447. Εστω $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Είναι $g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f^2(x)} > 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$.

$$\text{Για κάθε } x > 0 \quad g(x) > g(0) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} > \frac{f'(0)}{f(0)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} > 2.$$

Επειδή $f(x) \neq 0$ και f συνεχής θα διατηρεί πρόσωπο και αφού $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$.

Άρα $f'(x) > 2f(x) \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) > 0 \Rightarrow (e^{-2x}f(x))' > 0$

Εστω $h(x) = e^{-2x}f(x)$. Είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow [0, +\infty)$

Για $x \geq 0$ $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq e^{2x}$

5.448. **a)** Από το Θ. R υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = 0$

$\alpha < x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \downarrow [\alpha, \xi]$. Για κάθε $\alpha < x \leq \xi \Rightarrow f(x) < f(\alpha)$.

Για κάθε $\xi < x < \beta \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [\xi, \beta]$, άρα $f(x) < f(\beta) = f(\alpha)$,
άρα $f(x) < f(\alpha)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

b) $\alpha < x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \uparrow [\alpha, \xi]$. Για κάθε $\alpha < x \leq \xi \Rightarrow f(x) > f(\alpha)$.

Για κάθε $\xi < x < \beta \Rightarrow f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [\xi, \beta]$, άρα $f(x) > f(\beta) = f(\alpha)$,
άρα $f(x) > f(\alpha)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

5.449. $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \downarrow [\alpha, \beta]$. Από το Θ. R υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = 0$

$\alpha < x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \uparrow [\alpha, \xi]$. Για κάθε $\alpha < x \leq \xi \Rightarrow f(x) > f(\alpha) = 0$.

Για κάθε $\xi < x < \beta \Rightarrow f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [\xi, \beta]$, άρα $f(x) > f(\beta) = 0$,
άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

5.450. Επειδή $f(\alpha) = f(\beta)$ και f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, λόγω του Θ. Rolle,
υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Επειδή ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, η
συνάρτηση f' είναι \uparrow στο $[\alpha, \beta]$.

Για κάθε $\alpha < x < \xi$ είναι $f'(x) < f'(\xi) = 0$,
οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \xi]$.

Για κάθε $\alpha \leq x \leq \xi$ είναι $f(x) \leq f(\alpha) < 0$.

Για κάθε $\xi < x < \beta$ είναι $f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ και $f \uparrow$ στο $[\xi, \beta]$.

Για κάθε $\xi < x \leq \beta$ είναι $f(x) \leq f(\beta) < 0$. Άρα, $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

x	α	ξ	β
f''	+		+
f'	-	↑	+
f	↙		↗

5.451. $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \downarrow [\alpha, \beta]$. Από το Θ. R υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = 0$

$\alpha < \xi < \beta \Rightarrow f'(\alpha) > f'(\xi) > f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\alpha) > 0 > f'(\beta)$, άρα $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$.

5.452. $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \downarrow [0, 3]$. Από το Θ.Ρ υπάρχει $\xi \in (1, 2) : f'(\xi) = 0$

$$0 < x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \uparrow [0, \xi]. \quad 0 < 1 < \xi \Rightarrow f(0) < f(1) = 0$$

$$\text{Για κάθε } \xi < x < 3 \Rightarrow f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [\xi, 3],$$

$$\xi < 2 < 3 \Rightarrow f(2) > f(3) \Leftrightarrow f(3) < 0. \text{ Άρα } f(0)f(3) > 0.$$

5.453. Από το ΘΜΤ $\exists \xi_1 \in (0, 2) : f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = 4$.

$$\text{Από το ΘΜΤ υπάρχει } \xi \in (0, \xi_1) : f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{\xi_1} = \frac{4}{\xi_1}.$$

$$\text{Είναι } 0 < \xi_1 < 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\xi_1} > 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\xi_1} > 2 \Leftrightarrow f''(\xi) > 2$$

5.454. α) $f''(x) > 0$, άρα $f' \uparrow$ στο $[0, 2]$.

$$0 < 1 < 2 \Leftrightarrow f'(0) < f'(1) < f'(2) \Leftrightarrow f'(0) < 0 < f'(2).$$

β) Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$, άρα $f \downarrow$ στο $[0, 1]$. Για κάθε $0 \leq x < 1$ είναι $f(x) > f(1)$.

Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$, άρα $f \uparrow$ στο $[1, 2]$. Για κάθε $1 \leq x \leq 2$ είναι $f(x) \geq f(1)$. Άρα, $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

5.455. Εστω $g(x) = f(x) - \frac{\alpha}{\beta}x$. Είναι $g'(x) = f'(x) - \frac{\alpha}{\beta}$ και $g''(x) = f''(x)$. Είναι $g''(x) < 0$, άρα $g' \downarrow$

στο $[\alpha, \beta]$. Είναι $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, άρα λόγω θ. Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : g'(\xi) = 0$.

Για κάθε $\alpha < x < \xi$ είναι $g'(x) > g'(\xi) > 0$, άρα $g \uparrow$ στο $[\alpha, \xi]$.

Για κάθε $\xi < x < \beta$ είναι $g'(x) < g'(\xi) = 0$, άρα $g \downarrow$ στο $[\xi, \beta]$.

Για κάθε $\alpha < x < \xi$ είναι $g(x) > g(\alpha) > 0$ και για κάθε $\xi \leq x < \beta$ είναι $g(x) > g(\beta) > 0$, άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

5.456. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0 \Rightarrow h \downarrow \mathbb{R}$.

$$0 < 1 \Leftrightarrow h(0) > h(1) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{g(0)} > \frac{f(1)}{g(1)} \Leftrightarrow f(0) > f(1)$$

5.457. Οι εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ γράφονται:

$$\varepsilon_1 : x - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = x - 6 \Leftrightarrow y = \frac{x-6}{2} \text{ και}$$

$$\varepsilon_2 : x - 8y - 30 = 0 \Leftrightarrow 8y = x - 30 \Leftrightarrow y = \frac{x - 30}{8}.$$

Αν θεωρήσουμε τη διαφορά $\frac{x-6}{2} - \frac{x-30}{8} = \frac{3x+6}{8} > 0$ όταν $x \in (2, 8)$, αρα $\frac{x-6}{2} > \frac{x-30}{8}$.

Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{x-30}{8} < \frac{8}{x-2} \ln \frac{4}{x+2} < \frac{x-6}{2}$.

Αρχικά θα δείξουμε $\frac{8}{x-2} \ln \frac{4}{x+2} > \frac{x-30}{8} \Leftrightarrow \ln \frac{4}{x+2} > \frac{(x-2)(x-30)}{64}$.

Θεωρούμε την $g(x) = \ln \frac{4}{x+2} - \frac{(x-2)(x-30)}{64}$ και

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{4}{x+2}} \left(\frac{4}{x+2} \right)' - \frac{x-30+x-2}{64} = \frac{x+2}{4} \left(-\frac{4}{(x+2)^2} \right) - \frac{2x-32}{64} = -\frac{1}{x+2} - \frac{x-16}{32} =$$

$$\frac{-32 - (x-16)(x+2)}{32(x+2)} = \frac{-32 - (x^2 - 14x - 32)}{32(x+2)} = \frac{-x(-x+14)}{32(x+2)} < 0, \text{ όταν } x \in (2, 8), \text{ οπότε } g \downarrow,$$

άρα για $x > 2$ είναι $g(x) < g(2) \Leftrightarrow \ln \frac{4}{x+2} - \frac{(x-2)(x-30)}{64} < 0$.

Όμοια, αποδεικνύουμε ότι $\frac{8}{x-2} \ln \frac{4}{x+2} < \frac{x-6}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{4}{x+2} < \frac{(x-6)(x-2)}{16}$, θεωρώντας την

$h(x) = \ln \frac{4}{x+2} - \frac{(x-6)(x-2)}{16}$ και δείχνοντας ότι η h είναι \downarrow στο $(2, 8)$.

5.458. **a)** $f'(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x \ln \frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^x \frac{4}{7} < 0 \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$, γιατί $\ln \frac{3}{7} < \ln 1 = 0$, $\ln \frac{4}{7} < \ln 1 = 0$ και

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x, \left(\frac{4}{7}\right)^x > 0$$

b) $\frac{3^{x-5}}{7^{x-5}} + \frac{4^{x-5}}{7^{x-5}} > \frac{3^{4-2x}}{7^{4-2x}} + \frac{4^{4-2x}}{7^{4-2x}} \Leftrightarrow f(x-5) > f(4-2x) \Leftrightarrow x-5 < 4-2x \Leftrightarrow x < 3$

5.459. Εστω $f(x) = \ln x + 2^x$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$.

$$\ln(x^2 - 3x + 7) + 2^{x^2 - 3x + 7} < \ln(2x + 1) + 2^{2x+1} \Leftrightarrow f(x^2 - 3x + 7) < f(2x + 1) \Leftrightarrow \\ x^2 - 3x + 7 < 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

5.460. **a)** Εστω $f(x) = x \ln x$, $x > 1$. Είναι $f'(x) = \ln x + 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow (1, +\infty)$.

$$1 < \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha < \beta \ln \beta \Leftrightarrow \frac{\ln \beta}{\alpha} > \frac{\ln \alpha}{\beta}$$

b) Είναι $\ln(\alpha+1) + \beta > \alpha + \ln(\beta+1) \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) - \alpha > \ln(\beta+1) - \beta$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$. Είναι

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0 \text{ όταν } x > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, οπότε για $\alpha < \beta$ είναι :

$$f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) - \alpha > \ln(\beta+1) - \beta.$$

$$\text{γ) } f(x) = e^{-x} + e^{-2x} - x, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(x) = -e^{-x} - 2e^{-2x} - 1 < 0 \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} - \alpha > e^{-\beta} + e^{-2\beta} - \beta \Leftrightarrow \\ &e^{-\alpha} - e^{-\beta} + e^{-2\alpha} - e^{-2\beta} - (\alpha - \beta) > 0 \end{aligned}$$

$$5.461. 2\ln\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \Leftrightarrow 2\ln\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow 2\ln\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$$\text{Εστω } f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}, x \geq 1.$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και επειδή } \eta f \text{ είναι συνεχής στο } x=1, \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [1, +\infty).$$

$$\text{Είναι } 0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} > 1, \text{ άρα } f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < f(1) \Leftrightarrow 2\ln\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 0$$

$$5.462. 27^{27} > 28^{26} \Leftrightarrow 27\ln 27 > 26\ln 28 \Leftrightarrow \frac{\ln 27}{26} > \frac{\ln 28}{27}.$$

$$\text{Εστω } f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}. \text{ Εστω } g(x) = x-1-x\ln x, x > 0.$$

$$\text{Είναι } g'(x) = -\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow (0, 1]$, οπότε $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (0, 1)$

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow [1, +\infty)$, οπότε $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (1, +\infty)$

$$\text{Είναι } 27 < 28, \text{ άρα: } f(27) > f(28) \Leftrightarrow \frac{\ln 27}{26} > \frac{\ln 28}{27} \Leftrightarrow 27\ln 27 > 26\ln 28 \Leftrightarrow \ln 27^{27} > \ln 28^{26} \Leftrightarrow 27^{27} > 28^{26}.$$

$$5.463. \text{ Av } x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ τότε } \eta \text{ ισότητα αληθεύει.}$$

$$\text{Av } x > -1, \text{ τότε } \ln 2^{x^2} \geq \ln(x+1) \Leftrightarrow x^2 \ln 2 \geq \ln(x+1) \Leftrightarrow x^2 \ln 2 - \ln(x+1) \geq 0.$$

$$\text{Εστω } f(x) = x^2 \ln 2 - \ln(x+1), x > -1.$$

$$\text{Είναι } f(0) = f(1) = 0, \text{ οπότε από το Θ.Rolle υπάρχει } x_0 \in (0, 1) \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$f'(x_0) = 0. \text{ Είναι } f'(x) = 2x \ln 2 - \frac{1}{x+1} \text{ και } f''(x) = 2 \ln 2 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f' \uparrow (-1, +\infty).$$

$$\text{Για κάθε } -1 < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \downarrow (-1, x_0].$$

$$\text{Για κάθε } -1 < x < 0 \text{ είναι } f(x) > f(0) = 0, \text{ για κάθε } 0 < x < x_0 \text{ είναι } f(x) < f(0) = 0.$$

Για κάθε $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \uparrow [x_0, +\infty)$.

Για κάθε $x_0 < x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$.

Άρα η σχέση $f(x) = x^2 \ln 2 - \ln(x+1) \geq 0$ ισχύει όταν $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

5.464. Εστω $f(x) = \eta \mu^v x + \sigma v^v x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$$f'(x) = v \eta \mu x \sigma v^v x (\eta \mu^{v-2} x - \sigma v^{v-2} x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta \mu^{v-2} x - \sigma v^{v-2} x \geq 0 \Leftrightarrow \eta \mu^{v-2} x \geq \sigma v^{v-2} x \Leftrightarrow \varepsilon \varphi^{v-2} x \geq 1 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x \geq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, οπότε $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{1-\frac{v}{2}}$.

Για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{1-\frac{v}{2}}$.

Πρέπει $f(x) > \frac{1}{2}$. Επειδή $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{1-\frac{v}{2}}$, ισχύει ότι $f(x) \geq 2^{1-\frac{v}{2}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$2^{1-\frac{v}{2}} > 2^{-1} \Leftrightarrow 1 - \frac{v}{2} > -1 \Leftrightarrow v < 4. \text{ Όμως } v > 2, \text{ άρα } v = 3.$$

5.465. Εστω $f(x) = (2-x)g(x)$, $x \in [0, 2]$. Είναι $f'(x) = (2-x)g'(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [0, 2]$

$$0 < 2 \Leftrightarrow f(0) > f(2) \Leftrightarrow 2g(0) > 0 \Leftrightarrow g(0) > 0$$

5.466. Εστω $f(x) = \frac{g(x)}{2^x}$ είναι $f'(x) = \frac{g'(x) - \ln 2 g(x)}{2^x} < 0$, άρα $f \downarrow$ στο $[\alpha, \beta]$, οπότε

$$f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \frac{g(\alpha)}{2^\alpha} > \frac{g(\beta)}{2^\beta} \Leftrightarrow g(\alpha) > g(\beta) 2^{\alpha-\beta}.$$

5.467. Εστω $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - x$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) > \frac{x^3}{3} + x + f(0)$

Εστω $h(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$, $x \geq 0$. Είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \downarrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) < \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + f(0)$, άρα

$$\frac{x^3}{3} + x + f(0) < f(x) < \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + f(0) \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3} < \frac{f(x)}{x^3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3} \text{ Από}$$

$$\text{ΚΠ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

5.468. Εστω $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) > \frac{x^2}{2} + f(0)$

Εστω $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} - x$, $x \geq 0$. Είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \downarrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) < \frac{x^2}{2} + x + f(0)$, άρα

$$\frac{x^2}{3} + f(0) < f(x) < \frac{x^2}{2} + x + f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{f(0)}{x^2} < \frac{f(x)}{x^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{f(0)}{x^2} \text{ Από ΚΠ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

5.469. $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \downarrow \mathbb{R}$. Από το ΘΜΤ $\exists \xi_1 \in (-2, -1) : f'(\xi_1) = f(-1) - f(-2)$ και

$\exists \xi_2 \in (1, 2) : f'(\xi_2) = f(2) - f(1)$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(-1) - f(-2) > f(2) - f(1) \Leftrightarrow f(-1) + f(1) > f(-2) + f(2) \Leftrightarrow A > B$

5.470. $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \uparrow \mathbb{R}$.

Επειδή τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, είναι διαδοχικοί όροι μίας γνησίως αύξουσας αριθμητικής προσόδου, ισχύει ότι $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ και $\beta - \alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma$.

Από το ΘΜΤ υπάχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\gamma, \delta) : f'(\xi_1) = f(\beta) - f(\alpha)$ και

$f'(\xi_2) = f(\delta) - f(\gamma)$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) > f(\delta) - f(\gamma) \Leftrightarrow f(\beta) + f(\gamma) > f(\alpha) + f(\delta)$

5.471. a) $h'(x) = 4f'(x) - 4x^3 = 4[f'(x) - x^3] < 0 \Rightarrow h \downarrow \mathbb{R}$

b) ΘΜΤ στο $[2, 3]$ $f'(\xi) = \frac{f(3) - f(12)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$

$$2 < 3 \Leftrightarrow h(2) > h(3) \Rightarrow 4f(2) - 16 > 4f(3) - 81 \Leftrightarrow f(3) - f(2) < \frac{65}{4} < 17 \text{ άρα } f'(\xi) < 17$$

5.472. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right]$ και

$\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$. Οπότε, λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$

$$\text{τέτοια, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Επειδή $f''(x) > 0$, f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και επειδή

$$\alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta \Leftrightarrow \xi_1 < \xi_2, \text{ θα είναι:}$$

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) &\Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow \\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) &\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta). \end{aligned}$$

5.473. **a)** Εστω $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} > 0, \text{ οπότε } g \text{ είναι } \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \textbf{b) Είναι: } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &\leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \Leftrightarrow f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq f(x_1)f(x_2) \Leftrightarrow \\ \ln f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &\leq \ln(f(x_1)f(x_2)) \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \ln f(x_1) + \ln f(x_2) \Leftrightarrow \\ \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \ln f(x_1) &\leq \ln f(x_2) - \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Βάσει της προηγούμενης ανίσωσης, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την $h(x) = \ln f(x)$.

Εστω $x_1 < x_2$. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και

$\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ με

$$h'(x) = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = g(x).$$

Οπότε, λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ τέτοια, ώστε:

$$h'(\xi_1) = \frac{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - h(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = \frac{\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \ln f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}} \text{ και}$$

$$h'(\xi_2) = \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{\ln f(x_2) - \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2-x_1}{2}}.$$

Είναι $h'(x) = g(x)$ και η g είναι \uparrow στο \mathbb{R} , οπότε και η h' είναι \uparrow στο \mathbb{R} . Επειδή $\xi_1 < \xi_2$

ισχύει:

$$h'(\xi_1) < h'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \ln(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}} < \frac{\ln(x_2) - \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2-x_1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \ln(x_1) < \ln(x_2) - \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \ln(x_1) + \ln(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\ln^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \ln(f(x_1)f(x_2)) \Leftrightarrow f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_1)f(x_2) \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

Όμοια, αν $x_1 > x_2$.

$$\text{Αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \Leftrightarrow f(x_1) = \sqrt{f^2(x_1)} \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Άρα, για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ ισχύει: } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

5.474. Λόγω Θ.Μ.Τ. για την g στο $[-\rho, x]$, $x \in (-\rho, \rho)$, υπάρχει

$$\xi \in (-\rho, x) : g'(\xi) = \frac{g(x) - g(-\rho)}{x + \rho}. \text{ Είναι } -\rho < \xi < x < \rho, \text{ άρα:}$$

$$g'(\xi) < g'(\rho) \Leftrightarrow \frac{g(x) - g(-\rho)}{x + \rho} < g'(\rho) \Leftrightarrow g(x) < (x + \rho)g'(\rho) + g(-\rho).$$

5.475. **α' τρόπος**

$$\text{Εστω } g(x) = 6f(x) - (f(8) - f(2))x - 8f(2) + 2f(8), x \in [2, 8]$$

$$g'(x) = 6f'(x) - (f(8) - f(2))$$

$$\text{Από το ΘΜΤ } \exists \xi \in (2, 8) : f'(\xi) = \frac{f(8) - f(2)}{6}.$$

$$\text{Για } 2 < x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) < \frac{f(8) - f(2)}{6} \Leftrightarrow 6f'(x) - f(8) + f(2) < 0,$$

$$\text{άρα } g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow [2, 8]. \text{ Για κάθε } 2 < x < 8 \text{ είναι } g(x) < g(2) = 0$$

β' τρόπος

Εστω $x \in (2, 8)$, σε καθένα από τα διαστήματα $[2, x]$ και $[x, 8]$ η f ικανοποιεί τις

προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Συνεπώς υπάρχουν $\xi_1 \in (2, x)$ και $\xi_2 \in (x, 8)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(8) - f(x)}{8 - x}.$$

Επειδή $f''(x) > 0$, τότε η f' θα είναι γνησίως αύξουσα και αφού $\xi_1 < \xi_2$, θα είναι

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} < \frac{f(8) - f(x)}{8 - x} \Leftrightarrow$$

$$(8 - x)[f(x) - f(2)] < (x - 2)[f(8) - f(x)] \Leftrightarrow$$

$$8f(x) - 8f(2) - xf(x) + xf(2) < xf(8) - xf(x) - 2f(8) + 2f(x) \Leftrightarrow$$

$$6f(x) < xf(8) - xf(2) + 8f(2) - 2f(8) \Leftrightarrow f(x) < \frac{f(8) - f(2)}{6}x + \frac{8f(2) - 2f(8)}{6}$$

5.476. **a)** $f'(x) = \frac{e^x - e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2} < 0$, αφού $e^x < e^{x+1}$, áρα $f \downarrow \mathbb{R}$.

b) Για $x < 0$ είναι $5^x > 6^x \Leftrightarrow f(5^x) < f(6^x)$ και $7^x > 8^x \Leftrightarrow f(7^x) < f(8^x)$, áρα και $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$

5.477. **a)** $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \quad f \uparrow$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\theta\epsilon\tau\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{\omega + 1} = 1$. Άρα $f(A) = (0, 1)$.

y) Εστω $h(x) = f(x) - f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \dots = \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$

$h'(x) = \dots = \frac{2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} > 0$ áρα $h \uparrow$. Είναι $3^x < 5^x$ για $x > 0$ áρα $h(3^x) < h(5^x)$

$f(3^x) - f'(3^x) < f(5^x) - f'(5^x) \Leftrightarrow f(3^x) + f'(5^x) < f(5^x) + f'(3^x)$

5.478. Επεδή η f είναι áρτια, η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Αφού $f'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, 0)$, θα είναι η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και λόγω συμμετρίας της C_f ως προς τον $y'y$, θα είναι η f γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Είναι $x^2 + 3x + 5 > 0$, $x^2 - 4x + 19 > 0$ γιατί έχουν $\Delta < 0$, οπότε $x^2 + 3x + 5 \in (0, +\infty)$ και $x^2 - 4x + 19 \in (0, +\infty)$, όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, η ανίσωση γίνεται $f(x^2 + 3x + 5) < f(x^2 - 4x + 19) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 > x^2 - 4x + 19 \Leftrightarrow 3x + 4x > 19 - 5 \Leftrightarrow 7x > 14 \Leftrightarrow x > 2$.

5.479. Εστω $g(x) = f(x) - x^3 - 1$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 3x^2$ και

$g''(x) = f''(x) - 6x < 0 \Rightarrow g' \downarrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$g'(x) < g'(0) = 0 \Rightarrow g \downarrow [0, +\infty)$, áρα $g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) < x^3 + 1$.

Εστω $h(x) = f(x) - (x-1)^2$, $x \geq 0$. Είναι $h'(x) = f'(x) - 2(x-1)$ και

$h''(x) = f''(x) - 2 > 0 \Rightarrow h' \uparrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > h'(0) = 2 > 0 \Rightarrow h \uparrow [0, +\infty)$,

áρα $h(x) > h(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > (x-1)^2$.

5.480. Εστω $f(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = g'(x) - x > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

$$2 < 4 \Leftrightarrow f(2) < f(4) \Leftrightarrow g(2) - 2 < g(4) - 8 \Leftrightarrow g(4) - g(2) > 6.$$

- 5.481. **a)** Εστω $g(x) = f(x) - e^x + x^2$, $x \in [0, 1]$. Είναι $g'(x) = f'(x) - e^x + 2x$ και $g''(x) = f''(x) - e^x + 2 > 0 \Rightarrow g' \uparrow [0, 1]$. Για κάθε

$$x > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(0) = 1 > 0 \Rightarrow g \uparrow [0, 1], \text{ áρα } g(0) < g(1) \Leftrightarrow f(0) - f(1) < 2 - e < 0.$$

b) Από το προηγούμενο σκέλος ισχύει ότι $g'(x) > 1 \Leftrightarrow f'(x) > e^x - 2x + 1$.

Εστω $h(x) = e^x - 2x + 1$, $x \in [0, 1]$. Είναι $h'(x) = e^x - 2$.

Για κάθε $x \in (0, \ln 2)$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \downarrow [0, \ln 2]$ και για κάθε $x \in (\ln 2, 1)$

είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow [\ln 2, 1]$. Για κάθε $0 < x < \ln 2 \Rightarrow h(x) > h(\ln 2) = \ln \frac{e^2}{4} > 0$ και

για κάθε $\ln 2 \leq x < 1 \Rightarrow h(x) \geq h(\ln 2) = \ln \frac{e^2}{4} > 0$.

Άρα $h(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2x + 1 > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, áρα $f'(x) > e^x - 2x + 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, 1]$.

- 5.482. **a)** $f''(x) - 12x + 6 > 0$ ή $(f'(x) - 6x^2 + 6x)' > 0$ ή $(f(x) - 2x^3 + 3x^2)'' > 0$.

Εστω $g(x) = f(x) - 2x^3 + 3x^2$, $x \in [1, 5]$.

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 5]$ με $g'(x) = f'(x) - 6x^2 + 6x$ και

$g''(x) = f''(x) - 12x + 6$. Είναι $g''(x) > 0$, áρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 5]$.

Για κάθε $1 < x < 5$ είναι $g'(1) < g'(x) \Leftrightarrow g'(x) > f'(1) - 6 + 6 = f'(1) > 0$, áρα η g

είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 5]$. Επομένως είναι

$$g(1) < g(5) \Leftrightarrow f(1) - 2 + 3 < f(5) - 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 \Leftrightarrow f(1) + 1 < f(5) - 175 \Leftrightarrow f(5) - f(1) > 176.$$

b) Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - 6x^2 + 6x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 6x(x-1) > 0$ για κάθε $x \in (1, 5]$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι \uparrow στο $[1, 5]$

- 5.483. **a)** Εστω $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln \frac{3}{4} - 4 < 0 \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$, áρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

b) Εστω $f(x) = 2\eta\mu x - 2x - 7$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 2\sigma\nu x - 2 < 0$ για κάθε $x \neq 2k\pi$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , áρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

γ) Εστω $f(x) = 4x^3 + 21x^2 + 18x - 50$, $x \in (1, 2)$. Είναι $f'(x) = 12x^2 + 42x + 18 > 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, áρα $f \uparrow (1, 2)$, áρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

5.484. Αρκεί ν εξίσωσην $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ να έχει το πολύ μία ρίζα.

Εστω $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow \mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

5.485. α) Εστω $f(x) = x^5 + 4x^3 + 7x + \eta\mu x - 1$, $x \in [0, 1]$. Είναι $f(0) = -1 < 0$,

$f(1) = 11 + \eta\mu > 0$ και f συνεχής, άρα από το ΘΒ η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Επειδή

$f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 7 - \sigma v x = (5x^4 + 12x^2 + 6) + (1 - \sigma v x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, 1]$ η ρίζα του Bolzano είναι μοναδική.

β) Εστω $f(x) = 6x^3 + 5x - 3x^2 - 3$, $x \in [0, 1]$. $f(0) = -3$, $f(1) = 5 > 0$ και f συνεχής άρα από το ΘΒ η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Επειδή

$f'(x) = 18x^2 - 6x + 5 > 0$ ($\Delta < 0$) άρα $f \uparrow [0, 1]$ η ρίζα του Bolzano είναι μοναδική.

γ) Εστω $f(x) = x^4 + 7\ln x - 16$, $x \in [1, 2]$. Είναι $f(1) = -15 < 0$, $f(2) = 7\ln 2 > 0$ και f συνεχής, άρα από το ΘΒ η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$. Επειδή

$f'(x) = 4x^3 + \frac{7}{x} > 0 \Rightarrow f \uparrow [1, 2]$ η ρίζα του Bolzano είναι μοναδική.

δ) Εστω $f(x) = 3e^x - x - 2$, $x \in [-3, 0]$. Είναι $f(-3) = \frac{3}{e^3} - 5 < 0$, $f(0) = 1 > 0$ και f συνεχής, άρα από το ΘΒ η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-3, 0)$.

Επειδή $f'(x) = 3e^x - 1 < 0 \Rightarrow f \downarrow (-3, 0)$ η ρίζα του Bolzano είναι μοναδική.

5.486. Εστω $g(x) = f(x) - x(1 - \ln x)$, $x \in [1, e]$. Είναι $g'(x) = f'(x) + \ln x > 0$ για κάθε

$x \in (1, e)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, e]$, είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα αυτό. $g(1) = f(1) - 1 < 0$, $g(e) = f(e) > 0$, δηλαδή $g(1)g(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Β, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, e)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

5.487. α) $f'(x) = 3x^2 + 2 - 2\sigma v 2x = 3x^2 + 2(1 - \sigma v 2x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, είναι $\uparrow \mathbb{R}$.

β) $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 - \eta\mu 2 > 0$ και f συνεχής, άρα από το ΘΒ η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Επειδή $f \uparrow (0, 1)$ η ρίζα είναι μοναδική.

5.488. α) Εστω $f(x) = \varepsilon\phi x - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f'(x) = \frac{1}{\sigma v^2 x} - 1 = \frac{1 - \sigma v^2 x}{\sigma v^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma v^2 x}$.

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $f(0) < f(x) \Leftrightarrow \varepsilon \phi x - x > 0 \Leftrightarrow \varepsilon \phi x > x$.

β) Εστω $g(x) = 2\sin x + x \eta \mu x - \pi$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{με } g'(x) = -2\eta \mu x + \eta \mu x + x \sin x = x \sin x - \eta \mu x = \sin x(x - \varepsilon \phi x).$$

Είναι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Για κάθε $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ είναι $g(0) \geq g(x) \Leftrightarrow g(x) \leq 2 - \pi < 0 \Leftrightarrow 2\sin x + x \eta \mu x - \pi < 0$,

άρα η εξίσωση $2\sin x + x \eta \mu x - \pi = 0 \Leftrightarrow 2\sin x + x \eta \mu x = \pi$ είναι αδύνατη στο

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

5.489. Εστω $h(x) = f(x) - \ln(x^2 + 2x + 5) - 2$. Είναι $h'(x) > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η $h(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα

5.490. **α)** Για $x = 0$: $f^3(0) + f(0) = 0 \Rightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Για $x = 2$: $f^3(2) + f(2) = 10 \Rightarrow (f(2) - 2)(f^2(2) - 2f(2) + 5) = 0 \Rightarrow f(2) = 2$

β) Παραγωγίζοντας: $3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{3f^2(x) + 1} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

γ) Rolle για την $h(x) = f(x) - x$ στο $[0, 2]$, οπότε $h'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) - 1 = 0$ έχει λύση στο $(0, 2)$ άρα και στο \mathbb{R} .

5.491. Για $x = 0$: $f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + \beta f(0) + \gamma) = -1$ (1).

Το τριώνυμο $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma$ έχει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma = \beta^2 - 3\gamma - \gamma < 0$, γιατί

$\beta^2 < 3\gamma \Leftrightarrow \gamma > \frac{\beta^2}{3} \geq 0$, άρα $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$ και από την (1) είναι $f(0) < 0$.

Για $x = 1$ είναι $f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1)(f^2(1) + \beta f(1) + \gamma) = 4$ και επειδή $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$, είναι και $f(1) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, από το Θ.Β η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) = 3x^2 - 4x + 6. \text{ Επειδή } 3x^2 - 4x + 6 > 0 \text{ και}$$

$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$ ($\Delta < 0$), είναι και $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, 1]$ και η ρίζα του Bolzano είναι μοναδική.

5.492. Εστω $g(x) = f(x) - 4x$, $x \in [1, 3]$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 4 > 0 \Rightarrow g \uparrow [1, 3]$.

$1 < 3 \Leftrightarrow g(1) < g(3) \Leftrightarrow f(1) - 4 < f(3) - 12 \Leftrightarrow f(3) > 5$. Από το Θ.B n $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 3)$. Επειδή $f'(x) > 4 > 0 \Rightarrow f \uparrow [1, 3]$ n ρίζα είναι μοναδική.

5.493. Εστω $g(x) = f(x) - x$, $x \in [1, 2]$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 > 0 \Rightarrow g \uparrow [1, 2]$.

$1 < 2 \Leftrightarrow g(1) < g(2) \Leftrightarrow f(1) - 1 < f(2) - 2 \Leftrightarrow f(2) > 0$. Από το Θ.B n $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$. Επειδή $f'(x) > 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow [1, 2]$ n ρίζα είναι μοναδική.

5.494. Εστω $f(x) = 2e^{x+1} + 3\ln(3x+4) - 2$, $x \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

Είναι $f'(x) = 2e^{x+1} + \frac{9}{3x+4} > 0 \Rightarrow f \uparrow \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$. Επειδή $f(-1) = 0$, n $x = -1$ είναι μοναδική.

5.495. Εστω $f(x) = x + \sigma v x - e^{-x}$. Είναι $f'(x) = (1 - \eta \mu x) + e^{-x} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

Επειδή $f(0) = 0$, n $x = 0$ είναι μοναδική.

5.496. a) $f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2-x} < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 2)$

b) Πρέπει $\frac{5-2x}{4-3x} > 0 \Leftrightarrow (5-2x)(4-3x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

$e^{2-3x} - e^{3-2x} = \ln \frac{5-2x}{4-3x} \Leftrightarrow e^{-(3x-2)} + \ln[2 - (3x-2)] = e^{-(2x-3)} + \ln[2 - (2x-3)] \Leftrightarrow$

$f(3x-2) = f(2x-3) \Leftrightarrow 3x-2 = 2x-3 \Leftrightarrow x = -1$ δεκτή

5.497. Πρέπει $\frac{3x+1}{2x+3} > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

$\ln \frac{3x+1}{2x+3} = \sigma v(3x+1) - \sigma v(2x+3) \Leftrightarrow$

$\ln(3x+1) - \sigma v(3x+1) = \ln(2x+3) - \sigma v(2x+3)$ (1)

Εστω $f(x) = \ln x - \sigma v x$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + \eta \mu x > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, \pi)$

Πρέπει $0 < 3x+1 < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{\pi-1}{3}$ και $0 < 2x+3 < \pi \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{\pi-3}{2}$ και με

συναλήθευση: $-\frac{1}{3} < x < \frac{\pi-3}{2}$

(1) $\Rightarrow f(3x+1) = f(2x+3) \Leftrightarrow 3x+1 = 2x+3 \Leftrightarrow x = 2$ που απορρίπτεται

αφού $2 \notin \left(-\frac{1}{3}, \frac{\pi-3}{2}\right)$.

5.498. a) Εστω $f(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

$f \uparrow [0, +\infty)$ και $f \downarrow (-\infty, 0]$. Για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) = 2 > 0$ και για κάθε

$x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 2 > 0$. Άρα $f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Εστω $g(x) = 2e^x + 2x - x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = 2e^x - 2x + 2 = 2f(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow \mathbb{R}$.

Επειδή $g(0) = 0$ και $x = 0$ είναι μοναδική.

5.499. **α)** Εστω $f(x) = 2x^2 + x + \ln x - 3$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$.

Επειδή $f(1) = 0$, και $x = 1$ είναι μοναδική.

β) Εστω $f(x) = e^x + e^{3x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = e^x + 3e^{3x} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

Επειδή $f(0) = 0$, και $x = 0$ είναι μοναδική.

γ) Εστω $f(x) = 3^{-x} + 3^{-2x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = -3^{-x} \ln 3 - 3^{-2x} \ln 3 < 0 \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$.

Επειδή $f(0) = 0$, και $x = 0$ είναι μοναδική.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x^4 - x^4 + 1$, $x \neq 0$.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$ και $f(-1) = 0$, δηλαδή το 1 και το -1 είναι προφανείς ρίζες της εξίσωσης. Η

	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	f	είναι
\mathbb{R}^* με:	f'	+	-	+	-	f	παραγωγίσιμη	στο

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4} - 4x^3 = \frac{4}{x} - 4x^3 = \frac{4 - 4x^4}{x} = \frac{4(1-x)(1+x)(1+x^2)}{x}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) \geq 0.$$

Οπότε, ο πίνακας προσήμου της f' , της μονοτονίας και των ακροτάτων της f είναι:

Για κάθε $x < -1$ είναι $f(x) < f(-1) = 0$ και για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $f(x) < f(-1) = 0$. Άρα το -1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(-\infty, 0)$. Όμοια το 1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(0, +\infty)$. Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, το -1 και το 1.

ε) Εστω $f(x) = 4^x + 4^{\frac{1}{x}} - 18$, $x > 0$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 4^x \ln 4 + 4^{\frac{1}{x}} \ln 4 \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{\ln 4 \left(x^2 4^x - 4^{\frac{1}{x}} \right)}{x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $x^2 4^x - 4^{\frac{1}{x}}$.

Οπότε, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 4^x - 4^{\frac{1}{x}}, x > 0$.

Είναι $g'(x) = 2x4^x + x^2 4^x \ln 4 + 4^{\frac{1}{x}} \ln 4 \frac{1}{x^2} > 0$, οπότε η g είναι \uparrow στο $(0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $g(1) = 4 - 4 = 0$, οπότε για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > g(1) = 0$, άρα και $f'(x) > 0$, οπότε f \uparrow στο $[1, +\infty)$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g(x) < g(1) = 0$, άρα και $f'(x) < 0$, οπότε f \downarrow στο $(0, 1]$.

Στο διάστημα $[1, +\infty)$ η f έχει προφανή ρίζα την $x = 2$, γιατί

$$f(2) = 4^2 + 4^{\frac{1}{2}} - 18 = 16 + 2 - 18 = 0. \text{ Επειδή } \eta f \text{ είναι } \uparrow \text{ στο } [1, +\infty), \text{ η } x = 2 \text{ είναι } \eta$$

μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό. Στο διάστημα $(0, 1]$ η f έχει ρίζα την $x = \frac{1}{2}$,

$$\text{γιατί } f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} + 4^2 - 18 = 2 + 16 - 18 = 0.$$

Επειδή η f είναι \downarrow στο $(0, 1]$, η $x = \frac{1}{2}$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4^x + 4^{\frac{1}{x}} = 18$ αληθεύει μόνο για $x = 2$ ή $x = \frac{1}{2}$.

στ) Εστω $f(x) = \ln(x-1) + x^2 + x - 6, x > 1$. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x-1} + 2x + 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow (1, +\infty)$

Επειδή $f(2) = 0$, η $x = 2$ είναι μοναδική.

ζ) Εστω $f(x) = \ln(x-1) + e^{x-2} - 1 + (x-2)^{1821}, x > 1$.

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1}{x-1} + e^{x-2} + 1821(x-2)^{1820} > 0 \Rightarrow f \uparrow (1, +\infty).$$

Επειδή $f(2) = 0$, η $x = 2$ είναι μοναδική.

$$5.500. e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - x = e^{x+3} + (x+3)^3 + x + 3 \quad (1)$$

Εστω $f(x) = e^x + x^3 + x, x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

$$(1) \Rightarrow f(x^2 - x) = f(x+3) \stackrel{f \text{ is } 1-1}{\Leftrightarrow} x^2 - x = x+3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -1.$$

$$5.501. \text{ a) } f'(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x \ln \frac{5}{13} + \left(\frac{12}{13}\right)^x \ln \frac{12}{13} < 0 \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$$

$$\text{b) } 5^x + 12^x = 13^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \stackrel{f \text{ is } 1-1}{\Leftrightarrow} x = 2$$

$$5.502. \text{ a)} 3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \stackrel{f \text{ is } 1-1}{\Leftrightarrow} x = 2$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0 \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$$

$$\text{b)} 4^x + 2^x = 6^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{2}{6}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ is } 1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$$

$$f'(x) = \left(\frac{4}{6}\right)^x \ln \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^x \ln \frac{2}{6} < 0 \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$$

$$5.503. \text{ a)} \text{Εστω } f(x) = 3^x - 2x^2 - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Προφανείς ρίζες οι $x = 0, x = 1, x = 2$. Έστω ότι υπάρχει και 4^η ρίζα, η ρ , με $\rho > 2$. Τότε, λόγω Θ. Rolle η f' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες, η f'' τουλάχιστον 2 ρίζες και η $f^{(3)}$ τουλάχιστον μία. Όμως, $f^{(3)} = 3^x \ln^3 3 > 0$, άρα άτοπο.

$$\text{b)} \text{Εστω } f(x) = 2^x + 2 \cdot 3^x - 5x - 3, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f(0) = 2^0 + 2 \cdot 3^0 - 5 \cdot 0 - 3 = 0 \text{ και}$$

$$f(1) = 2^1 + 2 \cdot 3^1 - 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 6 - 5 - 3 = 0$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = 2^x \ln 2 + 2 \cdot 3^x \ln 3 - 5 \text{ και}$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 \cdot 3^x \ln^2 3 > 0, \text{ άρα } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = f(1) = 0$ ικανοποιούνται για την f οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0. \text{ Για κάθε } x > \xi \Rightarrow f'(x) \stackrel{f' \uparrow}{>} f'(\xi) = 0, \text{ άρα } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα } [\xi, +\infty).$$

Επειδή το 1 περιέχεται στο διάστημα $(\xi, +\infty)$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το 1 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(\xi, +\infty)$.

$$\text{Για κάθε } x < \xi \Rightarrow f'(x) \stackrel{f' \uparrow}{<} f'(\xi) = 0, \text{ άρα } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (-\infty, \xi].$$

Επειδή το 0 περιέχεται στο διάστημα $(-\infty, \xi)$ και f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το 0 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(-\infty, \xi)$. Επειδή $\xi < 1$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi, +\infty)$ ισχύει ότι

$$f(\xi) < f(1) \Leftrightarrow f(\xi) < 0, \text{ οπότε } f \text{ εξίσωση } f(x) = 0 \text{ έχει ρίζες τα } 0 \text{ και } 1.$$

$$5.504. \text{ Οι τετμημένες των σημείων τομής των } C_f, C_g, \text{ είναι οι λύσεις της εξίσωσης}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2(2 \ln x - 1) = 2x^3 - 6x + 1 \Leftrightarrow 6x^2 \ln x - 3x^2 - 2x^3 + 6x - 1 = 0.$$

$$\text{Εστω } h(x) = 6x^2 \ln x - 3x^2 - 2x^3 + 6x - 1, x > 0. \text{ Η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty)$$

$$\text{με } h'(x) = 12x \ln x + 6x^2 \frac{1}{x} - 6x - 6x^2 + 6 = 12x \ln x - 6x^2 + 6. \text{ Η } h' \text{ είναι παραγωγίσιμη}$$

στο $(0, +\infty)$ με $h''(x) = 12 \ln x + 12x \frac{1}{x} - 12x = 12 \ln x + 12 - 12x$ και

$$h^{(3)}(x) = \frac{12}{x} - 12 = \frac{12 - 12x}{x} = \frac{12(1-x)}{x}.$$

Ακόμη παρατηρούμε ότι $h^{(3)}(1) = h''(1) = h'(1) = h(1) = 0$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h^{(3)}(x) > 0$, άρα $h'' \uparrow$ στο

$(0, 1]$. Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h''(x) < h''(1) = 0$,

άρα $h' \downarrow$ στο $(0, 1]$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h'(x) > h'(1) = 0$, άρα $h \uparrow$ στο $(0, 1]$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h(x) < h(1) = 0$ (1).

Για κάθε $x > 1$ είναι $h^{(3)}(x) < 0$, άρα $h''(x) \downarrow$ στο $[1, +\infty)$. Για κάθε $x > 1$ είναι $h''(x) < h''(1) = 0$, άρα $h' \downarrow$ στο $[1, +\infty)$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $h'(x) < h'(1) = 0$, άρα $h \downarrow$ στο $[1, +\infty)$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $h(x) < h(1) = 0$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και επειδή $h(1) = 0$, ή $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

5.505. α) Η εξίσωση γίνεται $3^x - 2^x = 5^x - 4^x$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^x$, ή

οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(t) = xt^{x-1}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[2, 3]$ και $[4, 5]$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα

υπάρχουν $\xi_1 \in (2, 3)$ και $\xi_2 \in (4, 5)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4}$, δηλαδή $x\xi_1^{x-1} = 3^x - 2^x$ και $x\xi_2^{x-1} = 5^x - 4^x$.

Οπότε, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$x\xi_1^{x-1} = x\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \quad (2).$$

Από την (2) έχουμε $\frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1} = 1$ και επειδή $\frac{\xi_1}{\xi_2} \neq 1$ γιατί $\xi_1 \neq \xi_2$ θα είναι

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, $x = 0$ ή $x = 1$.

β) Θ.Μ.Τ. στα $[7, 8]$ και $[9, 10]$ για την $f(x) = t^x$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Θ.Μ.Τ. στο $[2, 3]$ για την $f(x) = t^x$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

5.506. $f(x) = \frac{x^{1822} - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$, $f(1) = 1822$, $f'(x) = \frac{1821x^{1822} - 1822x^{1821} + 1}{(x - 1)^2}$.

Εστω $g(x) = 1821x^{1822} - 1822x^{1821} + 1$, $g'(x) = 1821 \cdot 1822x^{1820}(x - 1)$.

Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνωσίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$. Άρα $g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow(-\infty, 1)$.

Επειδή $f(-1) = 0$, η $x = -1$ μοναδική.

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [1, +\infty)$, οπότε $g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow (1, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1822$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε $f(1(0, +\infty)) = (1822, +\infty)$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

5.507. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με:

$$f'(x) = \frac{(\eta\mu x)'(1+\sigma v x) - \eta\mu x(1+\sigma v x)'}{(1+\sigma v x)^2} = \frac{\sigma v x(1+\sigma v x) + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{(1+\sigma v x)^2} \text{ ή}$$

$$f'(x) = \frac{\sigma v x + \sigma v^2 x + \eta\mu^2 x}{(1+\sigma v x)^2} = \frac{\sigma v x + 1}{(1+\sigma v x)^2} = \frac{1}{1+\sigma v x}.$$

Επειδή $x \in [0, \pi]$, είναι $\sigma v x > -1 \Leftrightarrow \sigma v x + 1 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$.

β) $\eta\mu x < 1 + \sigma v x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma v x} < 1 \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5.508. α) Εστω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

β) $f(x)g(1) = f(1)g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(1)}{g(1)} \Leftrightarrow h(x) = h(1) \Leftrightarrow x = 1$.

5.509. α) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7 > 0$ ($\Delta < 0$) $\Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, είναι $f(A) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f(A)$

υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A = \mathbb{R}$: $f(x_0) = 0$.

β) Εστω $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$, $f(0) = -2$, άρα $f(\Delta_1) = [-2, +\infty)$.

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$: $f(x_1) = 0$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $\Delta_2 = [0, 1]$.

Είναι $f(1) = -1$, άρα $f(\Delta_2) = [-2, -1]$. Επειδή $0 \notin f(\Delta_2)$ η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_2 .

Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο $\Delta_3 = [1, 2]$. Είναι $f(2) = -2$, άρα

$f(\Delta_3) = [-2, -1]$. Επειδή $0 \notin f(\Delta_3)$ η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_3 .

Για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $\Delta_4 = [2, +\infty)$. Είναι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$, αρα $f(\Delta_4) = [-2, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_4)$, υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_4 : f(x_2) = 0$. Άρα $n f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες.

$$\text{γ) } \frac{2x^3 + 3x^2}{6} = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6 = 0.$$

Εστω $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 1$.

Για κάθε $x < -2$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, -2]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-2) = 26$, οπότε $f(\Delta_1) = [26, +\infty)$. Επειδή $0 \notin f(\Delta_1)$ και $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_1 .

Για κάθε $-2 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο $\Delta_2 = [-2, 1]$. Είναι $f(1) = -1$, αρα $f(\Delta_2) = [-1, 26]$. Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_2 : f(x_1) = 0$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, αρα $f(\Delta_3) = [-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_3)$, υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_3 : f(x_2) = 0$.

Άρα $n f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες.

$$5.510. \quad 2x^3 + 6\lambda x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda x^2 = 1 - 2x^3 \Leftrightarrow \frac{1 - 2x^3}{6x^2} = \lambda.$$

$$\text{Εστω } f(x) = \frac{1 - 2x^3}{6x^2}, \quad x \neq 0. \quad \text{Είναι } f'(x) = -\frac{x^3 + 1}{3x^3} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$$

Για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{6x^2} = +\infty, \quad f(-1) = \frac{1}{2}, \quad \text{άρα } f(\Delta_1) = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

Για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $\Delta_2 = [-1, 0)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left((1 - 2x^3) \frac{1}{6x^2} \right) = +\infty, \quad \text{άρα } f(\Delta_2) = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο $\Delta_3 = (0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1 - 2x^3) \frac{1}{6x^2} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{6x^2} = -\infty, \quad \text{άρα } f(\Delta_3) = \mathbb{R}.$$

Αν $\lambda < \frac{1}{2}$, τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$, $\lambda \notin f(\Delta_2)$ και $\lambda \in f(\Delta_3)$, οπότε υπάρχει μοναδικός $x_1 \in \Delta_3$

τέτοιος ώστε $f(x_1) = \lambda$.

Αν $\lambda \geq \frac{1}{2}$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$ και $\lambda \in f(\Delta_3)$, οπότε $n f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς τρείς λύσεις, μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 .

$$5.511. \quad \text{α) } f'(x) = 4x^3 - 4(2-x)^3 = 4[x^3 - (2-x)^3] > 0 \Rightarrow x^3 > (2-x)^3 \Leftrightarrow x > 2-x \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{β) } f \downarrow (-\infty, 1] \text{ με } f(A_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [2, +\infty)$$

$$f \uparrow [1, +\infty) \text{ με } f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [2, +\infty), \quad f(A) = [2, +\infty)$$

γ) $\lambda x^4 + \lambda(2-x)^4 = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda}$

Av $\frac{1}{\lambda} < 2 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ καμία λύση.

Av $\frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ μία λύση $x = 1$

Av $\frac{1}{\lambda} > 2 \Rightarrow \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ δύο λύσεις.

5.512. **α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - \lambda, x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$12(x^2 - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f

Δίνονται στο διπλανό πίνακα και είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty,$$

$$f(-1) = -19 - \lambda, \quad f(1) = 13 - \lambda \text{ και}$$

$$f(2) = 8 - \lambda.$$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
f'	-	+	-	+	
f					

Av $-19 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < -19$, τότε $13 - \lambda > 0, 8 - \lambda > 0$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα.

Av $\lambda = -19$, τότε $13 - \lambda > 0, 8 - \lambda > 0$ και η εξίσωση έχει μία ρίζα, την $\rho_1 = -1$.

Av $-19 < \lambda < 8$, τότε $-19 - \lambda < 0$ και $13 - \lambda > 0, 8 - \lambda > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες, $\rho_1 \in (-\infty, -1)$ και $\rho_2 \in (-1, 1)$.

Av $\lambda = 8$, τότε $-19 - \lambda < 0, 8 - \lambda = 0$ και $13 - \lambda > 0$ και η εξίσωση έχει 3 ρίζες, $\rho_1 \in (-\infty, -1), \rho_2 \in (-1, 1)$ και $\rho_3 = 2$.

Av $8 < \lambda < 13$, τότε $-19 - \lambda < 0, 8 - \lambda < 0$ και $13 - \lambda > 0$ και η εξίσωση έχει 4 ρίζες, $\rho_1 \in (-\infty, -1), \rho_2 \in (-1, 1), \rho_3 \in (1, 2)$ και $\rho_4 \in (2, +\infty)$.

Av $\lambda = 13$, τότε $-19 - \lambda < 0, 8 - \lambda < 0$ και $13 - \lambda = 0$ και η εξίσωση έχει 3 ρίζες, $\rho_1 \in (-\infty, -1), \rho_2 = 1$ και $\rho_3 \in (2, +\infty)$.

Τέλος, αν $\lambda > 13$, τότε $13 - \lambda < 0, -19 - \lambda < 0$ και $8 - \lambda < 0$ και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, $\rho_1 \in (-\infty, -1)$ και $\rho_2 \in (2, +\infty)$.

β) $f(x) = x^4 - 4x + \lambda, x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 4x^3 - 4, f'(-\infty, 1] \text{ και } \uparrow [1, +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(1) = \lambda - 3, f((-\infty, 1]) = [\lambda - 3, +\infty)$ και

$f([1, +\infty)) = [\lambda - 3, +\infty)$. Av $\lambda > 3$, τότε $0 \notin f(A)$, áρα η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Av $\lambda = 3$ τότε Επειδή για κάθε $x > 1$ ή $x < 1$ είναι $f(x) > \lambda - 3$, η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 1$. Av $\lambda < 3$ τότε $\exists x_1 \in (-\infty, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = 0 = f(x_2)$ και επειδή στα αντίστοιχα διαστήματα η f είναι γνήσια μονότονη, οι

ρίζες αυτές είναι μοναδικές.

$$\text{γ) Εστω } f(x) = 2\ln x - 1 + \lambda x^2, x > 0. \text{ Είναι } f'(x) = \frac{2}{x} + 2\lambda x > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f(A) = \mathbb{R}, \text{ άρα } f(x) = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα.}$$

5.513. **α)** $x e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{2}{x} = 0$

$$\text{Εστω } f(x) = e^x - \frac{2}{x}, x > 0. f'(x) = e^x + \frac{2}{x^2} > 0, \text{ άρα } f \text{ γνησίως αύξουσα.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } f(A) = \mathbb{R}.$$

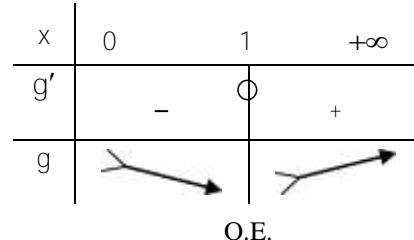
$$0 \in f(A), \text{ άρα υπάρχει μοναδικό } x_0 \in A : f(x_0) = 0$$

$$\text{β) } f(x) = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 4, x > 0$$

$$f'(x) = 48x^3 - 42x^2 - 6x = 6x(8x^2 - 7x - 1)$$

$$\text{Είναι } f([0, 1]) = [-9, -4] \text{ και } 0 \notin f([0, 1]) \text{ και}$$

$$f([1, +\infty)) = [-4, +\infty) \text{ και } 0 \in f([1, +\infty))$$



5.514. Εστω $f(x) = x^3 - 3x + 1,$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

$$f((-\infty, -1]) = (-\infty, 3].$$

$$0 \in (-\infty, 3), \text{ άρα υπάρχει μοναδικός } x_1 \in (-\infty, -1),$$

$$\text{άρα } x_1 < 0 \text{ τέτοιος, ώστε } f(x_1) = 0.$$

$$f([-1, 1]) = [-1, 3], 0 \in (-1, 3), \text{ άρα υπάρχει } x_2 \in (-1, 1) : f(x_2) = 0.$$

$$f(0) = 1 \text{ και } f(1) = -1, \text{ δηλαδή } f(0)f(1) < 0, \text{ άρα υπάρχει μοναδικός } x_2 \in (0, 1) \text{ άρα } x_2 > 0 : f(x_2) = 0.$$

$$f([1, +\infty)) = [-1, +\infty), 0 \in (-1, +\infty), \text{ άρα υπάρχει μοναδικός } x_3 \in (1, +\infty), \text{ άρα } x_3 > 0 : f(x_3) = 0.$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f				

5.515. **α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x(e^x - e^{-x}) - e^x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$

$$f'(x) = e^x - e^{-x} + x(e^x + e^{-x}) - e^x + e^{-x} = x(e^x + e^{-x}).$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(e^x + e^{-x}) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, +\infty)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^x - e^{-x}) - e^x - e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x - (x+1)e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x-1) \left(e^x - \frac{x+1}{x-1} e^{-x} \right) \right].$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x+1}{x-1} e^{-x} \right) = -\infty. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^x - (x+1)e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1) \left(\frac{x-1}{x+1} e^x - e^{-x} \right) \right] = +\infty.$$

Στο $(-\infty, 0)$ το σύνολο τιμών είναι $f(A_1) = (-2, +\infty)$ και επειδή το $0 \in f(A_1)$ και $f \downarrow$, υπάρχει μοναδική ρίζα της f στο $(-\infty, 0)$.

Στο $(0, +\infty)$ το σύνολο τιμών είναι $f(A_2) = (-2, +\infty)$, $0 \in f(A_2)$ και $f \uparrow$, άρα υπάρχει μοναδική ρίζα της f στο $(0, +\infty)$.

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

β) Εστω $f(x) = x^2 - x\mu x - \sigma v x$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x - \eta\mu x - x\sigma v x + \eta\mu x = x(2 - \sigma v x)$. Επειδή $2 - \sigma v x > 0$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ είναι $f \downarrow(-\infty, 0]$ και $\uparrow[0, +\infty)$.

$$f(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma v x = x^2 \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\sigma v x}{x^2} \right), \quad x \neq 0.$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$ και από ΚΠ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Όμοια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma v x}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma v x}{x^2} = 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = -1$. $f((-\infty, 0]) = [-1, +\infty)$ και

$f([0, +\infty)) = [-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in [-1, +\infty)$, υπάρχουν μοναδικά $x_1 \in (-\infty, 0)$ και $x_2 \in (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$.

5.516. Εστω $f(x) = x^4 - 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 4x^3 - 4$, $f \uparrow[1, +\infty)$ και $f \downarrow(-\infty, 1]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = 2$, άρα $f(A) = [2, +\infty)$.

Επειδή $0 \notin f(A)$ η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

5.517. **a)** Εστω $f(x) = \ln x^2 - x - 2 = 2 \ln |x| - x - 2$, $x \neq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 0$ με

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$

Όταν $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

Όταν $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$.

Είναι $f(x) < f(2) < 0$

Όταν $x \in (2, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Είναι $f(x) < f(2) < 0$

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	Φ	+	
2-x	+		+	-
f'	-		Φ	-
f				

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln x^2 - x - 2) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 2) = +\infty$.

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln x^2 - x - 2) = -\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x^2 = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x - 2) = -2$.

Για το σύνολο τιμών του διαστήματος $(-\infty, 0)$, έχουμε:

$$f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

5.518. **α)** $f'(x) = e^{x-3} + 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, άρα $f(A) = \mathbb{R}$.

γ) Είναι $f(3) = 0$ και επειδή $f \uparrow \mathbb{R}$, το 3 είναι η μοναδική ρίζα της f .

δ) $e^{2x^2} - e^{2x+12} = 2x - 2x^2 + 12 \Leftrightarrow$

$$e^{(2x^2+3)-3} + (2x^2+3) - 4 = e^{(2x+15)-3} + (2x+15) - 4 \Leftrightarrow$$

$$f(2x^2+3) = f(2x+15) \Leftrightarrow 2x^2+3 = 2x+15 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-2.$$

5.519. **α)** $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Άρα $D_f = \mathbb{R}$

β) $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \neq -1$ άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

γ) $x-3 = \ln 10 - \ln(x^2+1) \Rightarrow x + \ln(x^2+1) = 3 + \ln(3^2+1)$ άρα $f(x) = f(3) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x=3$

δ) $\ln(x^2+1) - \ln(x^6+1) < x^3 - x \Leftrightarrow x + \ln(x^2+1) < x^3 + \ln(x^6+1) \Leftrightarrow f(x) < f(x^3) \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

5.520. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$. Είναι $f'(x) > 0$,

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

β) $2^{x^2-3x} - 2^{2x-4} = 3^{2x-4} - 3^{x^2-3x} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} + 3^{x^2-3x} = 2^{2x-4} + 3^{2x-4} \Leftrightarrow$

$$2^{x^2-3x} + 3^{x^2-3x} - 1 = 2^{2x-4} + 3^{2x-4} - 1 \Leftrightarrow f(x^2-3x) = f(2x-4).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1, οπότε: $f(x^2-3x) = f(2x-4) \Leftrightarrow$

$$x^2-3x = 2x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=4$$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + 3^x - 1) = -1$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 3^x - 1) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$, οπότε για το σύνολο

τιμών της f έχουμε: $f((-\infty, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, +\infty)$.

δ) Επειδή το a ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , υπάρχει μοναδικός $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = a$.

5.521. **a)** $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και αφού f συνεχής, είναι $f \uparrow \mathbb{R}$.

b) $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ οπότε $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{4} > \frac{e^{\sqrt{2}}}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{2}}} > \frac{4}{3} \Leftrightarrow e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > \frac{4}{3}$

γ) $e^{x^2-x} > \frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^x} > \frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4+1} > \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x^2) > f(x) \Leftrightarrow x^2 > x \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

δ) $e^x = \frac{4x^2+4x+1+1}{x^2+2x+1+1} \Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x+1)} = \frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}} = \frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{(2x+1)^2+1} = \frac{e^x+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow f(2x+1) = f(x+1) \Leftrightarrow 2x+1 = x+1 \Leftrightarrow x = 0$

5.522. $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta - \ln \alpha - \ln \beta = \ln \alpha (\alpha^x - 1) + \ln \beta (\beta^x - 1)$. Επειδή $\alpha, \beta > 1$, είναι $\ln \alpha > 0$ και $\ln \beta > 0$, οπότε:

Αν $x > 0$, τότε $\alpha^x > 1$, $\beta^x > 1$ και $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 2 > 0$.

Αν $x < 0$, τότε $\alpha^x < 1$, $\beta^x < 1$ και $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 0]$.

Για κάθε $x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 2 > 0$.

Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η C_f δεν τέμνει τον x' .

5.523. Αρκεί η $f'(x) = \lambda e^x + 2x + 5 = 0$ να έχει μοναδική ρίζα. $f''(x) = \lambda e^x + 2 > 0$, άρα $f' \uparrow$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$. $f'(A) = \mathbb{R}$ και $0 \in f'(A)$, άρα υπάρχει μοναδικός $x_0 \in A = \mathbb{R} : f'(x_0) = 0$.

5.524. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$ να έχει το πολύ 1 ρίζα.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = 2x - x \ln x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} + \ln x - 2 = 0.$$

Εστω $h(x) = \frac{f(x)}{x} + \ln x - 2$, $x > 0$, $h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} + \frac{1}{x}$.

Λόγω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ υπάρχει $\xi \in (0, x) : f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$.

Είναι $\xi < x$ και $f' \uparrow$ άρα $f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0$, άρα και $h'(x) > 0$ και $h \uparrow$ στο $(0, +\infty)$, οπότε η $h(x) = 0$ έχει το πολύ 1 ρίζα στο $(0, +\infty)$.

5.525. Αρκεί να δείξουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = \alpha$ σε ένα

σημείο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Από τη σχέση $f'(x) > e^x + 2$ έχουμε $f'(x) - e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow (f(x) - e^x - 2)' > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - e^x - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, για την οποία είναι $h'(x) > 0$, áρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x) - e^x - 2x > 0 \Leftrightarrow f(x) > e^x + 2x$ και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Επίσης, για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - e^x - 2x < 0 \Leftrightarrow f(x) < e^x + 2x$ και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x) = -\infty, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f'(x) > e^x + 2 > 0$ οπότε $f'(x) > 0$, áρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Οπότε, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ θα έχει ακριβώς μία ρίζα.

5.526. Εστω $g(x) = f(x) - 4x - 1821$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 4 > 1 > 0 \Rightarrow g \uparrow \mathbb{R}$.

Λόγω ΘΜΤ για την f στο $[0, x]$, $x > 0$, υπάρχει

$$\xi \in (0, x) : g'(\xi) = \frac{g(x) - g(0)}{x} \Leftrightarrow g(x) = xg'(\xi) + g(0)$$

Είναι $g'(\xi) > 1 \Leftrightarrow xg'(\xi) + g(0) > x + g(0)$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + g(0)) = +\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Όμοια για $x < 0$, προκύπτει $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, οπλότε η g έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

Επειδή $0 \in g(A)$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A = \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

5.527. Εστω $f(x) = x^7 + 7x - \lambda$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 7x^6 + 7 > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

$f(0) = -\lambda$, $f(1) = 8 - \lambda$, áρα $f((0, 1)) = (-\lambda, 8 - \lambda)$. Για να έχει η $f(x) = 0$ μία ρίζα στο $(0, 1)$,

πρέπει $0 \in (-\lambda, 8 - \lambda)$ και αυτό συμβαίνει όταν $\begin{cases} \lambda < 0 \\ 8 - \lambda > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < \lambda < 8$

5.528. a) Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$, τότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ και επειδή η $f \circ g$ είναι 1-1, είναι $x_1 = x_2$, áρα g 1-1.

b) $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$

Εστω $h(x) = x^3 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$,

$f((-\infty, -1]) = (-\infty, 3]$.

$0 \in (-\infty, 3)$, áρα υπάρχει μοναδικός

$x_1 \in (-\infty, -1)$, áρα $x_1 < 0$ τέτοιος ώστε $f(x_1) = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	+	○	-	○	+
f					

$$f([-1, 1]) = [-1, 3], \quad 0 \in (-1, 3), \text{ áρα υπάρχει } x_2 \in (-1, 1) : f(x_2) = 0.$$

$$f(0) = 1 \text{ και } f(1) = -1, \text{ δηλαδή } f(0)f(1) < 0, \text{ áρα υπάρχει μοναδικός } x_2 \in (0, 1)$$

$$\text{áρα } x_2 > 0 : f(x_2) = 0$$

$$f([1, +\infty)) = [-1, +\infty)), \quad 0 \in (-1, +\infty), \text{ áρα υπάρχει μοναδικός } x_3 \in (1, +\infty),$$

$$\text{áρα } x_3 > 0 : f(x_3) = 0$$

5.529. Εστω $M(x_0 f(x_0))$. Η εφαπτομένη στο M είναι: $\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

$$\text{Για να διέρχεται από το } O, \text{ πρέπει: } x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0}(x_0 - 1) + e^{-x_0}(x_0 + 1) = 0.$$

$$\text{Εστω } g(x) = e^x(x - 1) + e^{-x}(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{Είναι } g'(x) = x(e^x - e^{-x}) > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0,$$

άρα $g \uparrow \mathbb{R}$. Επειδή $g(0) = 0$ και $x = 0$ είναι μοναδική.

5.530. a) $3f^2(x)f'(x) + 4f(x)f'(x) + 3f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 4f(x) + 3) = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x}$

$$\text{Επειδή } 3f^2(x) + 4f(x) + 3 > 0 \text{ και } \frac{(e^x - 1)^2}{e^x} > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0, \text{ είναι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R} \text{ (f συνεχής).}$$

b) Για $x = 0$ είναι $f^3(0) + 2f^2(0) + 3f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 2f(0) + 3) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ και επειδή η f είναι $\uparrow \mathbb{R}$ το 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

c) Για $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$ και για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$.

5.531. a) Παραγωγίσιμη, οπότε $3f^2(x)f'(x) + 2f'(x) + 3 = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{3f^2(x) + 2} < 0$ áρα $f \downarrow \mathbb{R}$

b) Για $x = 1$ είναι $f^3(1) + 2f(1) + 3 = 0$.

$$\text{Εστω } f(1) = \omega \text{ τότε } \omega^3 + 2\omega + 3 = (\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 3) = 0, \quad \omega = 1 \text{ áρα } f(1) = -1$$

c) Εστω $h(x) = f(x) + 3 - x \cdot 4^x$, $h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 3 - \frac{1}{2}2 = f\left(\frac{1}{2}\right) + 2 > 0$ γιατί

$$\frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > -1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + 2 > 1 > 0$$

$$h(1) = f(1) + 3 - 4 = f(1) - 1 = -2 < 0.$$

Είναι $h(1)h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ και η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, οπότε από το Θ.Bolzano υπάρχει

$$\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ τέτοιο ώστε } h(\rho) = 0.$$

5.532. Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x), x > 0$ οπότε από το θεώρημα

$$\text{μέσοις τιμής υπάρχει } \xi \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Είναι $f'(\xi) > k \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} > k \Leftrightarrow f(x) > kx + f(0)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [kx + f(0)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} kx = +\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Η f είναι συνεχής στο $[x, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$, $x < 0$ οπότε από το θεώρημα

μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x}$.

Είναι $f'(\xi) > k \Leftrightarrow \frac{f(0) - f(x)}{-x} > k \Leftrightarrow -f(x) > -kx - f(0) \Leftrightarrow f(x) < kx + f(0)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} [kx + f(0)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} kx = -\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Επειδή $f'(x) > k > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και επειδή είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι: $f(A) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Επειδή το 0 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f , υπάρχει μοναδικός x_0 για τον οποίο ισχύει $f(x_0) = 0$.

5.533. **a)** Εστω $g(x) = x + e^x - 1$, $g(0) = 0$ και $g'(x) = 1 + e^x > 0$ άρα $g \uparrow$,

οπότε $x = 0$ μοναδική ρίζα

B) i. Εστω ότι f δεν είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ για τα οποία θα είναι $f(x_1) \geq f(x_2)$. Τότε $e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_2)}$ και $e^{f(x_1)} + f(x_1) \geq e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x_1 + 1 \geq 3x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο.

ii. Για $x = 0$ είναι $f(0) + e^{f(0)} = 1$ και λόγω του α σκέλους, είναι $f(0) = 0$

iii. Από το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = f'(x+1) - f'(x)$.

Είναι $f'(x) + e^{f(x)}f'(x) = 3 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{f(x)}) = 3 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{1 + e^{f(x)}}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) = -\frac{3e^{f(x)}f'(x)}{(1 + e^{f(x)})^2} < 0 \Rightarrow f' \downarrow \mathbb{R}$.

Είναι $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) > f(x+1) - f(x) > f'(x+1)$

5.534. **a)** Εστω $g(x) = f(x) - x^2$ και $g'(x) = f(x) - 2x > 0$ άρα $g \uparrow [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x^2 > 2 \Leftrightarrow f(x) > x^2 + 2$.

Εστω $h(x) = f(x) - e^x$, $x \geq 0$. Είναι $h'(x) = f'(x) - e^x < 0$ οπότε $h \downarrow [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) \Rightarrow f(x) - e^x < 1 \Rightarrow f(x) < e^x + 1$.

Άρα $x^2 + 2 < f(x) < e^x + 1$ (1)

B) Είναι $f'(x) > 2x > 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα $f \uparrow$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$, οπότε από το Κ.Π είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Είναι $f(A) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [2, +\infty)$

γ) Εστω $\varphi(x) = f(x) - 3x^2$

$$\varphi(1) = f(1) - 3 > 0 \text{ αφού } f(1) > 1^2 + 2 \Rightarrow f(1) > 3$$

$$\varphi(2) = f(2) - 12 < 0 \text{ γιατί } f(2) < e^2 + 1 < 12$$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

5.535. **a)** Εστω $g(x) = f(x) - x^3$, $x \geq 0$.

$$\text{Είναι } g'(x) = f'(x) - 3x^2, \quad g''(x) = f''(x) - 6x > 0 \Rightarrow g' \uparrow [0, +\infty).$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty).$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f(x) > x^3. \text{ Όμοια για την } h(x) = f(x) - x^4$$

b) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Είναι } g'(x) > g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(x) > 3x^2 \text{ και } h'(x) < h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(x) < 4x^3$$

$$\text{Είναι } 3x^2 < f'(x) < 4x^3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty, \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

c) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

$$\text{Είναι } 3\xi^2 < f'(\xi) < 4\xi^3 \text{ και επειδή } x < \xi < x+1, \text{ όταν } x \rightarrow +\infty \text{ είναι } \xi \rightarrow +\infty, \text{ οπότε και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3\xi^2) = +\infty, \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$$

d) Εστω $t(x) = f(x) - 1 + e^x$, $x \geq 0$. Είναι $t'(x) = f'(x) + e^x > 0 \Rightarrow t \uparrow [0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } t(0) = 0 \text{ και για } x > 0 \text{ είναι } t(x) > t(0) = 0, \text{ άρα η } x = 0 \text{ είναι μοναδική.}$$

5.536. **a)** Είναι $f(0) = 1$ και $f'(0) = e^0 - f(0) = 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 0$

b) $f''(x) = e^x - f'(x) = e^x - (e^x - f(x)) = f(x)$

c) $f'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' \Leftrightarrow f(x)e^x = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \text{ και } f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

d) $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ οπότε $f'(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = \eta\mu x$.

Παρατηρώ ότι το 0 είναι ρίζα. Έστω $g(x) = e^x - e^{-x} - \eta\mu x$ και

$$g'(x) = e^x + e^{-x} - \sigma\mu\nu x = e^x + \frac{1}{e^x} - 1 + 1 - \sigma\mu\nu x = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x} + (1 - \sigma\mu\nu x) > 0,$$

άρα $g \uparrow$ οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

5.537. **a)** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0) + g(h) + 2x_0h - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(h)}{h} + 2x_0 \right) = 6 + 2x_0$

άρα g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = 6 + 2x$

b) Για κάθε $x > -3$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [-3, +\infty)$ και για κάθε $x < -3$ είναι

$$g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow (-\infty, -3]$$

γ) $g'(x) = 6 + 2x = (6x + x^2)' \Leftrightarrow g(x) = 6x + x^2 + c.$

Για $x=0$ είναι $g(0)=g(0)+g(0)+2\cdot 0\cdot 0 \Leftrightarrow g(0)=0$,

άρα $c=0$ και $g(x)=6x+x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

5.538. α) Για την h ισχύει Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x-1, x]$, $[x, x+1]$.

$h'(\xi_1) = \frac{h(x) - h(x-1)}{1}$, $h'(\xi_2) = \frac{h(x+1) - h(x)}{1}$. Είναι $h'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$ και
 $h''(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) + e^x f'(x) + e^x f''(x) = e^x (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) > 0$, άρα $h' \uparrow$.

Είναι $\xi_1 < x < \xi_2 \Leftrightarrow h'(\xi_1) < h'(x) < h'(\xi_2) \Leftrightarrow$

$$(2) \quad h(x) - x(x-1) < e^x f(x) + e^x f'(x) < h(x+1) - h(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow e^x f(x) - e^{x-1} f(x-1) < e^x f(x) + e^x f'(x) < e^{x+1} f(x+1) - e^x f(x) \stackrel{:e^x}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{f(x-1)}{e} < f(x) + f'(x) < e f(x+1) - f(x).$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x-1) = 2, \dots, \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x+1) = 2$,

άρα από την (2) και με κ.π. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x) + e^x f'(x)) = 0$.

Εστω $\varphi(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) = \varphi(x) - e^x f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x f'(x) = 0 - 2 = -2$.

γ) Εστω $e^x f'(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = g(x)e^{-x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x)e^{-x}) = 0$

5.539. α) Επειδή $f'(x) \neq 0$ και συνεχής, η f' διατηρεί πρόσημο άρα η f είναι γνήσια μονότονη.

β) $f(1) = 0$ και f γνησίως μονότονη, άρα η $x=1$ είναι μοναδική.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x-1} \frac{1}{f'(x)} \right) = f'(1) \frac{1}{f'(1)} = 1$$

5.540. α) $g'(x) = f'(x) - 2 = -\frac{1}{e^x + 1} < 0 \Rightarrow g \downarrow \mathbb{R}$

β) Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα, η $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x$ έχει το πολύ μία ρίζα.

γ) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$.

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \Rightarrow f' \uparrow \mathbb{R}. \quad \text{Είναι } x < \xi < x+1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x+1}}{e^{x+1}} = 2,$$

άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2$.

5.541. α) $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{x(x-1)^2} < 0 \Rightarrow f \downarrow (0,1) \text{ και } \downarrow (1,+\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, f(A) = (-\infty, +\infty)$$

β) $0 \in f((0,1)) = \mathbb{R}$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1) : f(x_1) = 0$.

$0 \in f((1,+\infty)) = \mathbb{R}$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1,+\infty) : f(x_2) = 0$.

γ) $\varepsilon_1 : y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x + \ln \alpha - 1$,

$$\varepsilon_2 : y - e^\beta = e^\beta(x - \beta) \Leftrightarrow y = e^\beta x + e^\beta(1 - \beta).$$

Επειδή οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ταυτίζονται, είναι:

$$\begin{cases} e^\beta = \frac{1}{\alpha} \\ \ln \alpha - 1 = e^\beta(1 - \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\ln \alpha \\ \ln \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha}(1 + \ln \alpha) \end{cases} \Rightarrow \alpha \ln \alpha - \alpha = 1 + \ln \alpha \Leftrightarrow (\alpha - 1)\ln \alpha = \alpha + 1 \quad (1).$$

Αν $\alpha = 1$, τότε η (1) είναι αδύνατη. Για $\alpha \neq 1$ έχουμε: $\ln \alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$.

δ) Επειδή η $f(x) = 0$ έχει 2 ρίζες, υπάρχουν 2 τιμές του α για τις οποίες οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη.

5.542. **α)** $f(x)(f^2(x) - f(x) + 2) = x^3 + 2 > 0$ για κάθε $x \geq 1$, αφού $f^2(x) - f(x) + 2 > 0$ ($\Delta < 0$)

β) $3f^2(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) + 2f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) - 2f(x) + 2) = 3x^2$

Επειδή $3x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και $3f^2(x) - 2f(x) + 2 > 0$ ($\Delta < 0$),

είναι και $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [1,+\infty)$

γ) Επειδή η f είναι γνωσίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για $f(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$ είναι $x^3 = y^3 - y^2 + 2y - 2 = (y-1)(y^2 + 2)$, άρα $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y^3 - y^2 + 2y - 2}$, $y > 1$.

δ) Επειδή $f \uparrow [1,+\infty)$, τα κοινά σημεία των C_f, C_{f-1} βρίσκονται στην $y = x$, άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ είναι αδύνατη.

Είναι $x^3 - x^2 + 2x = x^3 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$ που είναι αδύνατη.

5.543. **α)** Είναι $2f^3(x) + 3f(x) = x + 4$ και για $x = x_0$ είναι $2f^3(x_0) + 3f(x_0) = x_0 + 4$ και με αφαίρεση

κατά μέλη, έχουμε: $2f^3(x) - 2f^3(x_0) + 3f(x) - 3f(x_0) = x - x_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f(x) - f(x_0))(2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3) = x - x_0$$

Είναι $2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) \geq 0$, αφού $\Delta = -12f^2(x_0) \leq 0$,

άρα $f(x) - f(x_0) = \frac{x - x_0}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3} \quad (1)$.

$$\text{Είναι } |f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3|} \leq \frac{|x - x_0|}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{|x - x_0|}{3} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{|x - x_0|}{3}.$$

Από το ΚΠ είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα f συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

β) (1) $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3}$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3} = \frac{1}{6f^2(x_0) + 3},$$

άρα $f'(x_0) = \frac{1}{6f^2(x_0) + 3}$.

γ) Εστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε $2f^3(x_1) \geq 2f^3(x_2)$ και $2f^3(x_1) + f(x_1) \geq 2f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 4 \geq x_2 + 4 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1) < f(x_2)$ και $f \uparrow \mathbb{R}$.

δ) Επειδή η f είναι \uparrow είναι και 1-1 και αντιστρέφεται. Για $f(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$ είναι $2y^3 + 3y = f^{-1}(y) + 4 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 2y^3 + 3y - 4$, $y \in \mathbb{R}$.

ε) Επειδή $f \uparrow$, τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην $y = x$, άρα, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x$. Η σχέση $2f^3(x) + 3f(x) = x + 4$, γίνεται: $2x^3 + 3x = x + 4 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Κοινό σημείο το $(1, 1)$.

στ) $2f^3(-5) + 3f(-5) = -1 \Leftrightarrow f(-5)(2f^2(-5) + 3) = -1 \Rightarrow f(-5) < 0$

$2f^3(0) + 3f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0)(2f^2(0) + 3) = 2 \Rightarrow f(0) > 0$ και Θ.Β....

ζ) $f^{-1}(1) = 1$ και $(f^{-1})'(x) = 6x^2 + 3$, $(f^{-1})'(1) = 9$

$$\varepsilon: y - f^{-1}(1) = (f^{-1})'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 9x - 8$$

η) Εστω $g(x) = 9f(x) - x - 8$, $x \geq 1$. Είναι $g'(x) = 9f'(x) - 1 = \frac{6(1-f^2(x))}{6f^2(x)+3} < 0$, αφού για κάθε

$x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 1$. Άρα $g \downarrow [1, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 1$ είναι $g(x) \leq g(1) = 0$

5.544. **α)** $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \downarrow \mathbb{R}$. Για κάθε $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f'(1) \geq f'(x) \geq f'(2) = 2 > 0 \Rightarrow f \uparrow [1, 2]$.

β) Εστω $g(x) = f(x) - 2x + 4$, $x \in [1, 2]$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 2 > 0 \Rightarrow g \uparrow [1, 2]$

Για κάθε $1 < x < 2$ είναι $g(x) > g(1) = f(1) + 2 = 3 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x - 4$

γ) Από το ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x)$ και $\xi_2 \in (x, 2)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 1}{x - 1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \frac{7 - f(x)}{2 - x}.$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x - 1} > \frac{7 - f(x)}{2 - x} \Leftrightarrow (2 - x)(f(x) - 1) > (x - 1)(7 - f(x))$$

δ) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_3 \in (1, 2) : f'(\xi_3) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = 6$ και υπάρχει $\xi \in (\xi_3, 2)$ τέτοιο

$$\text{ώστε: } f''(\xi) = \frac{f'(2) - f'(\xi_3)}{2 - \xi_3} = \frac{-4}{2 - \xi_3} < -4 \Leftrightarrow -4 < -8 + 4\xi_3 \Leftrightarrow \xi_3 > 1 \text{ που ισχύει}$$

5.545. **α)** $2f'(x) + \sigma v f(x) f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(2 + \sigma v f(x)) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2 + \sigma v f(x)} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$

β) Για $x = y$ ισχύει η ισότητα. Για $x < y$, από το Θ.Μ.Τ. στο $[x, y]$

$$\exists \xi \in (x, y) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Rightarrow \frac{1}{2 + \sigma v f(\xi)} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$$\text{όμως } \left| \frac{1}{2 + \sigma v f(\xi)} \right| \leq 1 \text{ γιατί } |2 + \sigma v f(\xi)| \geq 1 \text{ αφού } -1 \leq \sigma v f(\xi) \leq 1$$

$$\text{άρα } \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

γ) Είναι $2f(x) = x - \eta \mu f(x)$ αφού $-1 \leq \eta \mu f(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\eta \mu f(x) \leq 1$ τότε:

$$x - 1 \leq x - \eta \mu f(x) \leq x + 1 \Rightarrow x - 1 \leq 2f(x) \leq x + 1 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2}$$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2} = +\infty$ άρα Κ.Π. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Όμοια με Κ.Π. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ αφού $f \uparrow$ και συνεπώς $f(A) = \mathbb{R}$.

ε) $f \uparrow$ άρα και $1 - 1$, θέτω $x \rightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow 2x + \eta \mu x = f^{-1}(x)$

στ) Για $x = 0$ είναι $2f(0) + \eta \mu(f(0)) = 0$ (1). Είναι $(f^{-1})'(x) = 2 + \sigma v v x > 0 \Rightarrow f^{-1} \uparrow \mathbb{R}$ και

$$f^{-1}(0) = 0, \text{άρα (1)} \Rightarrow f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0) \stackrel{f^{-1} \uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y + \eta \mu y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(2 + \frac{\eta \mu y}{y} \right) = 3.$$

5.546. **α)** Είναι $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = -1 \Leftrightarrow f(x)f''(x) = -1 - (f'(x))^2 < 0$. Άντας $f''(x) > 0$ τότε $f' \uparrow$,

οπότε για $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < f'(2) = 0 \Rightarrow f \downarrow [0, 2]$, άρα $f(x) > f(2) = 2 > 0$

Για κάθε $2 < x < 4 \Rightarrow f'(x) > f'(2) = 0 \Rightarrow f \uparrow [2, 4]$, άρα $f(x) > f(2) = 2 > 0$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$ που είναι άτοπο γιατί $f''(x) \cdot f(x) > 0$.

Οπότε $f''(x) < 0$ άρα $f(x) > 0$.

β) Είναι $(f'(x)f(x))' = (-x)' \Leftrightarrow f'(x)f(x) = -x + C_1 \stackrel{x=2}{\Rightarrow} C_1 = 2$

$$\text{Άρα } 2f'(x)f(x) = -2x + 4 \Rightarrow (f^2(x))' = (4 - x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = 4x - x^2 + C_2$$

Για $x = 2 \quad C_2 = 0$ άρα $f^2(x) = 4x - x^2$ και αφού $f(x) > 0$ τότε $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

γ) Εστω $f(x) = y$ τότε $y = \sqrt{4x - x^2} \Rightarrow y^2 = 4x^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

Οπότε $n \in \mathbb{C}_f$ είναι το ημικύκλιο του κύκλου με διάμετρο $\Gamma\Delta$, όπου $\Gamma(2,0)$ και $\Delta(0,4)$.

Για οποιαδήποτε χορδή AB του ημικυκλίου, ισχύει: $|AB| \leq |\Gamma\Delta|$. Άρα $(|AB|) \leq 4$

5.547. α) Είναι $f(-x)f'(x) = x$ (1).

Για $x \neq 0$ είναι $f(-x)f'(x) \neq 0$ άρα $f(-x) \neq 0$ οπότε και $f(x) \neq 0$. Αφού $n \in f$ συνεχής θα διατηρεί πρόσομο και επειδή $f(0) = 2 > 0$ τότε $f(x) > 0$

$$\text{β)} h'(x) = \frac{-f'(x)f(x) - f'(x)f(-x)}{f^2(x)}. \text{ Στην (1) όπου } x \text{ το } -x, \text{ έχουμε: } f(x)f'(-x) = -x \quad (2)$$

$$\text{Οπότε από (1). (2)} \Rightarrow h'(x) = \frac{-(-x) - x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow h(x) = c$$

$$\text{γ)} h(x) = c \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)} = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \frac{f(0)}{f(0)} = c \Rightarrow c = 1 \text{ άρα } \frac{f(-x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \quad (3)$$

$$\text{δ)} \text{ Η (1) με βάση την (3) γίνεται } f(x)f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2x$$

$$f^2(x) = x^2 + c_1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} c_1 = 4 \text{ άρα } f^2(x) = x^2 + 4 \stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\text{ε)} \text{ Η εξίσωση έχει προφανή λύση } x = 0 \text{. Είναι } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Για $x < 0$ είναι:

$$\left. \begin{array}{l} 2013x > 2015x \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(2013x) < f(2015x) \\ 2014x > 2016x \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(2014x) < f(2016x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(2013x) + f(2014x) < f(2015x) + f(2016x)$$

Ομοίως για $x > 0$. Άρα μοναδική λύση $x = 0$

5.548. α) Αφού $f(x) > 0$ τότε $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1$ οπότε $-\frac{1}{f(x)} = x + c \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = -x - c$

$$\text{Άρα } \frac{1}{f(\alpha)} - \frac{1}{f(\beta)} = (-\alpha - c) - (-\beta - c) = \beta - \alpha$$

β) Είναι $f'(x) = f^2(x) > 0$ αφού $f(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $[\alpha, \beta]$ και $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)]$

$$\begin{aligned} \text{γ)} \text{ Bolzano για την } g(x) = f^2(x) - f(\alpha)f(\beta), \text{ οπότε } \exists \rho(\alpha, \beta) : g(\rho) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f^2(\rho) - f(\alpha)f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f^2(\rho) = f(\alpha)f(\beta) \Leftrightarrow \ln f^2(\rho) = \ln[f(\alpha)f(\beta)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\ln f(\rho) = \ln f(\alpha) + \ln f(\beta) \end{aligned}$$

δ) Θ.Μ.Τ. για την $h(x) = \ln f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$

$$h'(\xi) = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln 2014f(\alpha) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln 2014 + \ln f(\alpha) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(A)}{\Rightarrow} f(\xi) = \frac{\ln 2014}{\frac{1}{f(\alpha)} - \frac{1}{f(\beta)}} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\ln 2014 f(\alpha) f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

5.549. **a)** Επειδή $f''(x) < 0$ τότε $f' \downarrow$ για $x \in (2, 3)$, οπότε για

$$2 < x < 3 \Rightarrow f'(x) > f'(3) = 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow [2, 3]$$

b) $f(A) = [f(2), f(3)] = [0, 2]$

γ) $\varepsilon_1: y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x - 3) \Leftrightarrow y = x - 1$

δ) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2, 3]$ $\exists x_1 \in (2, 3): f'(x_1) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{2 - 0}{1} = 2$

Θ.Μ.Τ. για f' στο $[x_1, 3]$ υπάρχει $\xi \in (x_1, 3): f''(\xi) = \frac{f'(3) - f'(x_1)}{3 - x_1} = \frac{1 - 2}{3 - x_1} = \frac{-1}{3 - x_1}$

$$f''(\xi) < -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{3 - x_1} < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{3 - x_1} > 1 \Leftrightarrow 3 - x_1 < 1 \Leftrightarrow x_1 > 2 \text{ που ισχύει}$$

ε) Από το ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in (2, x)$ και $\xi_2 \in (x, 3)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x)}{x - 2}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \frac{2 - f(x)}{3 - x}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x - 2} > \frac{2 - f(x)}{3 - x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) > 2(x - 2)$$

και για $x = 2, x = 3$ ισχύει το " $=$ ".

Άρα $f(x) \geq 2(x - 2) \quad \forall x \in [2, 3]$.