ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Λύση

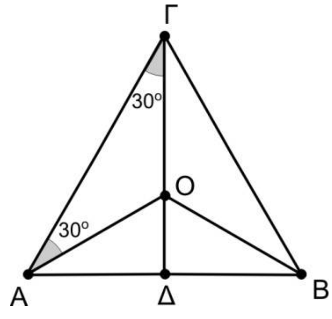
$$A=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$=\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^3+\left(\frac{-15}{-3}\right)^3\right)\cdot(-2)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-(-4)^2$$

$$=\left((-5)^3+(+5)^3\right)\cdot(-2)^3+(-4)^2-(-4)^2$$

$$=\left(-5^3+5^3\right)\cdot(-2)^3+16-16=0\cdot(-2)^3+0=0.$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:
(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.
(β) Αν $O\hat{A}\Gamma=O\hat{\Gamma}A=30^0$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

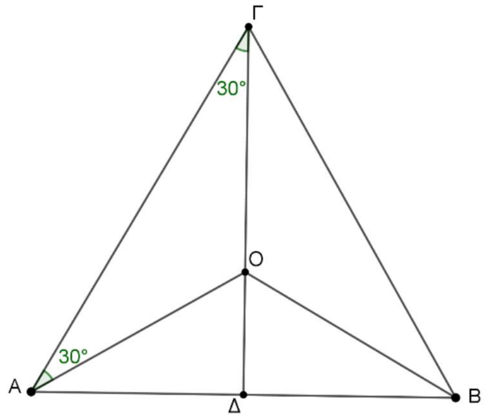


Λύση
(α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση τη ΑΒ, έχουμε ότι $\Gamma A=\Gamma B$ και $OA=OB$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του ΑΒ, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως τέμνει κάθετα την ΑΒ στο μέσο της, δηλαδή ΑΔ = ΔΒ.

(β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ$ Επομένως

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma,$$

οπότε η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200 \cdot \frac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200 + 288 = 1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488 \cdot \frac{5}{100} = \frac{7440}{100} = 74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ},$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4 : 12 = 130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο Α έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 0$ ή $x = 9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018\\
&=\left(\left(-\frac{10}{2}\right)^{2\nu+1}+\left(+\frac{15}{3}\right)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^{2\nu}-\left(-\frac{4}{1}\right)^{2\nu}+2018\\
&=\left((-5)^{2\nu+1}+(+5)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+(-4)^{2\nu}-(-4)^{2\nu}+2018\\
&=\left(-5^{2\nu+1}+5^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+2018=-5^{2\nu-1}\left(5^2-1\right)2017^2+2018\\
&=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot2017^2+2018=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot4068289+2018.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε A,B το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι $(2x)\cdot \mathrm{B}=80$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $\mathrm{A}=9\mathrm{B}$. Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι $x\mathrm{A}=x(9\mathrm{B})=9x\mathrm{B}=9\cdot 40=360$. Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι $360+80=440$ τ.μ.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

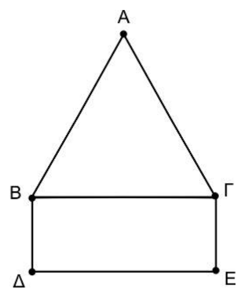
πολ.6+4 = πολ.3+3+1 =πολ.3+1,

οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.

Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,4,7,8.

Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4 , 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Πρόβλημα 4



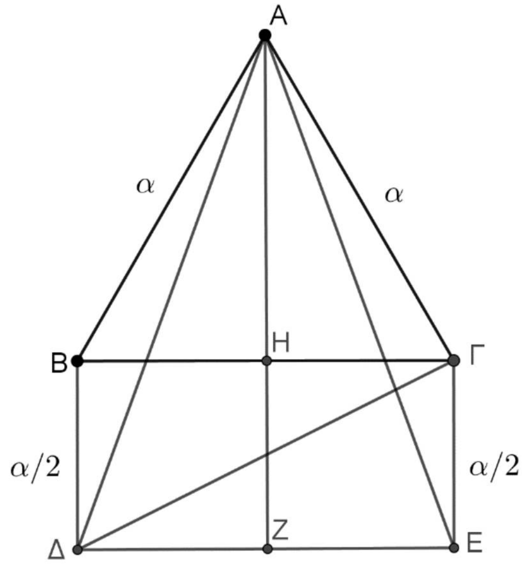
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά $\mathrm{B\Delta}=\dfrac{\alpha}{2}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$.

(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.

Λύση

(α) (1ος τρόπος) Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ την τέμνει στο Η και έστω επίσης τέμνει την πλευρά ΔΕ του ορθογωνίου στο Ζ. Τότε η ΑΗ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ, οπότε ΒΗ = ΗΓ. Επειδή η ΑΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔΕ. Επομένως και τα τετράπλευρα ΒΔΖΗ, ΗΖΕΓ είναι ορθογώνια, οπότε ΒΗ = ΔΖ και ΗΓ = ΖΕ. Επομένως θα είναι και ΔΖ = ΖΕ. Έτσι η ΑΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΔΕ, οπότε ΑΔ = ΑΕ.



Σχήμα 2

(2^{ος} τρόπος) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν ίσες πλευρές $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \alpha$ και $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Gamma E} = \frac{\alpha}{2}$, ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} + \mathrm{B\hat{\Gamma}E} = \mathrm{A\hat{\Gamma}E}.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$.

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(\mathrm{AB\Delta}) = (\mathrm{ABH}) + (\mathrm{B\Delta ZH}) - (\mathrm{A\Delta Z}),$$

όπου

$$(\mathrm{ABH}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8},\ (\mathrm{B\Delta ZH}) = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$(\mathrm{A\Delta Z}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha+\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{8} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(\mathrm{AB\Delta}) = (\mathrm{ABH}) + (\mathrm{B\Delta ZH}) - (\mathrm{A\Delta Z}) = \frac{\alpha^2}{8}.$$

Έχουμε επίσης $(\mathrm{A\Delta\Gamma}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{B\Delta\Gamma}) - (\mathrm{AB\Delta})$. Όμως είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},(\mathrm{B\Delta\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},(\mathrm{AB\Delta}) = \frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(\mathrm{A\Delta\Gamma}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{B\Delta\Gamma}) - (\mathrm{AB\Delta}) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{8}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Λύση

Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε x τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι $16x$. Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι $90\cdot 11$. Συνεπώς πρέπει $16x = 90\cdot 11$, που δίνει $x = \frac{90\cdot 11}{16} = \frac{45\cdot 11}{8}$, που δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Λύση

Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) = 3 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 = 3$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$.
Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(3,1,-1), (1,1,-1), (3,0,-1), (1,0,-1)$.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

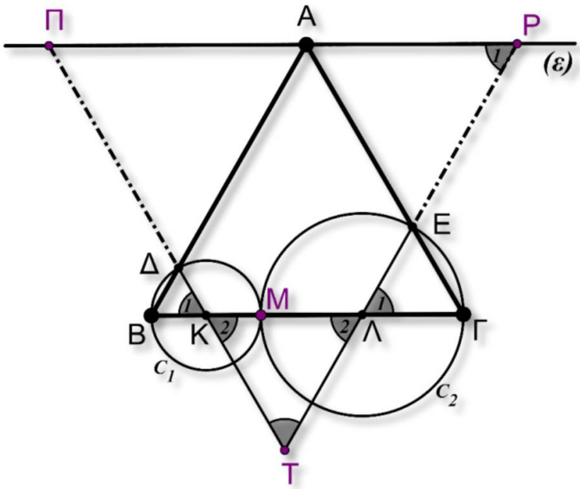
Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός Α δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο Α δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του Α να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Στη πλευρά $ΒΓ$ ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$, θεωρούμε σημείο M (διαφορετικό από το μέσο της $ΒΓ$) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στη $ΒΓ$. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο K του MB και ακτίνα KB) τέμνει την AB στο $Δ$. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο $Λ$ του $ΜΓ$ και ακτίνα $ΛΓ$) τέμνει την $ΑΓ$ στο E. Οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία $Π$ και P αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνονται στο σημείο T, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΠPT$ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς $ΒΓ$.

Λύση
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $TKΛ$ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο $KBΔ$ είναι ισοσκελές (διότι $KΔ, KB$ ακτίνες του κύκλου C_1). Επειδή όμως $\widehat{B} = 60°$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $KBΔ$ είναι (τελικά) ισόπλευρο.
Οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2 = 60°$.
Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{Λ}_1 = \hat{Λ}_2 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $KBΔ$ είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:
$$KΛ = MK + MΛ = \frac{MB}{2} + \frac{MΓ}{2} = \frac{MB + MΓ}{2} = \frac{BΓ}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον $AP \parallel B\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο (διότι και $\hat{T} = 60°$).
Το τετράπλευρο $AP\Lambda B$ είναι παραλληλόγραμμο (διότι $\hat{B} = \hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60°$).
Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς:

$$TP = T\Lambda + \Lambda P = T\Lambda + AB = \frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{3\alpha}{2}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $TP\Pi$ είναι:

$$(TP\Pi) = \frac{\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

.

Λύση
Εφόσον ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $\rho \neq 0$ και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

Άρα $(\rho^3)^3 = (\rho+1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

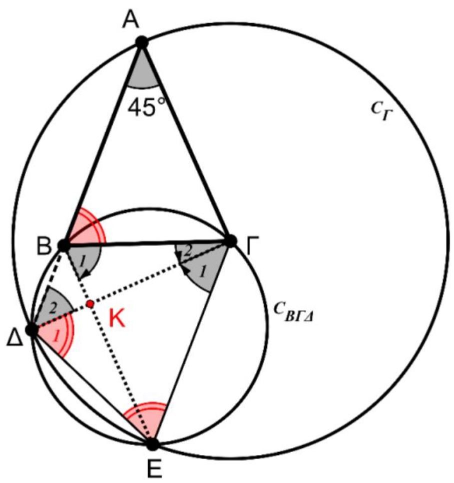
$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = (3\rho^2 + 4\rho + 2) \cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3 \cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3.$
$(*)$ ισχύει $\rho \neq 0$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω $C_{B\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_Γ στο σημείο E Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση
Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, διότι ΓA και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_Γ. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = 45° \qquad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{\Delta}_1 \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο $C_Γ$. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} = 67{,}5^\circ \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (*1*), (*2*), (*3*) έχουμε: $\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$.

Άρα ΒΔ ∥ ΓΕ, οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.

Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί ΒΕ=ΔΓ (διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου) και ΓΔ = ΓΕ (ακτίνες του $C_Γ$). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.

Άρα $\widehat{B}_1 = \Gamma_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67{,}5^\circ$ και επειδή $\hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\hat{\Gamma}_2 = 22{,}5^\circ$ και κατά συνέπεια $\widehat{B}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67{,}5^\circ + 22{,}5^\circ = 90^\circ$.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός

$$A = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1 &= \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\left(\nu^2\right)^3 + 1\right) = \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^4 - \nu^2 + 1\right) \\ &= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^5 + \nu^4 - \nu^2 + 1\right) = \left(\nu^2+1\right)\left[\nu^4\left(\nu+1\right) - \left(\nu+1\right)\left(\nu-1\right)\right] \\ &= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$A = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1} = \left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).$$

Για $\nu \geq 2$ είναι $\nu+1 \geq 3$ και $\nu^4-\nu+1=\nu\left(\nu^3-1\right)+1 \geq 2\cdot 7+1=15$, οπότε ο ακέραιος Α είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Λύση
Έστω x, y τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι $xy = 2(x+y)$ (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του d υπό τη συνθήκη (1).

Έχουμε ότι $d^2 = x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy \overset{(1)}{=} (x+y)^2-4(x+y)$.

Ισχύει ότι $(x+y)^2 \geq 4xy$ (αφού είναι ισοδύναμη με $(x-y)^2 \geq 0$) και λόγω της (1) έχουμε ότι $4xy = 8(x+y)$, άρα $(x+y)^2 \geq 8(x+y)$, οπότε $x+y \geq 8$. (2)

Θέτουμε $x+y=t$ και τότε $d^2 = t^2-4t=(t-2)^2-4 \overset{(2)}{\geq} (8-2)^2-4=32$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι $\sqrt{32}$, και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f(a)=0 \text{ και } f\left(f(x)\right)=xf(x)+a, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση
Θέτοντας $x=a$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f\left(f(a)\right)=af(a)+a \Rightarrow f(0)=a.$$

Για $x=0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f\left(f(0)\right)=0\cdot f(0)+a \overset{(1)}{\Rightarrow} f(a)=a,$

οπότε από τη σχέση $f(a)=0$ έπεται ότι $a=0$.

Για $a=0$ πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f\left(f(x)\right)=xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής $f(x)=x^c$, $c\in\mathbb{R}$. Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f\left(x^c\right)=x\cdot x^c \Rightarrow \left(x^c\right)^c = x^{c+1} \Rightarrow x^{c^2}=x^{c+1} \Rightarrow c^2=c+1 \Rightarrow c^2-c-1=0 \Rightarrow c=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα μία συνάρτηση είναι η $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ αν } x\le 0 \\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \text{ αν } x>0. \end{cases}$

Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^7+x^6+x^5+1=0 \ .$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^7+x^6+x^5+1 &= x^5\left(x^2+1\right)+\left(\left(x^2\right)^3+1\right)=x^5\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right) \\ &= \left(x^2+1\right)\left(x^5+x^4-x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left[x^4\left(x+1\right)-\left(x+1\right)\left(x-1\right)\right] \\ &= \left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x^4-x+1\right). \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολυώνυμο x^4-x+1 είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$\alpha^4-\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha^3-1\right)+1=0 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(\alpha\right)+1=0$.

Όμως για $\alpha\le 0$ ή $\alpha\ge 1$ η παράσταση $f\left(\alpha\right)=\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)$ είναι μη αρνητική, οπότε $f\left(\alpha\right)+1>0$.

Για $0<\alpha<1$ είναι $\alpha^4>0, -\alpha+1>0$ και $\alpha^4-\alpha+1>0$. Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.

Επομένως έχουμε

$$x^7+x^6+x^5+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x^4-x+1\right)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{A} = 36°$. Ο κύκλος $C_1(Γ, ΓΑ)$ (που έχει κέντρο το $Γ$ και ακτίνα $ΓΑ$) τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΔ$ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο $Ε$. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ότι η $ΔΓ$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση

Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΑ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{Δ}_1 \quad (1).$$

Το τρίγωνο $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΕ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

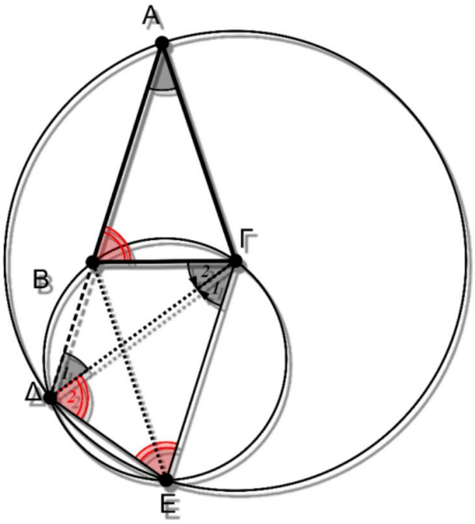
$$\hat{E} = \hat{Δ}_2 \quad (2).$$

Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_2. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1), (2), (3)$ έχουμε: $\hat{A} = \hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1 = 36°$.

Άρα $ΒΔ \parallel ΓΕ$, οπότε το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγώνιές του ($ΒΕ$ και $ΓΔ$) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία $Ε$ και $Α$ ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης $ΒΓ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ οπότε η $ΑΕ$ θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



Σχήμα 5

Από την παραλληλία $B\Delta \parallel \Gamma E$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = B\hat{\Gamma}E = 72°$, οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $EB\Gamma$ είναι ίσα.
Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 36°$ και η $\hat{\Gamma}_2$ σχηματίζεται από τη $B\Gamma, \Delta\Gamma$ (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η $\Delta\Gamma$ θα είναι εφαπτομένη.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Αφού $9 > 8$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9} > 9^{9^8} \Leftrightarrow \left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}} > \left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}} \Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}} > 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{8^{\frac{8^9}{9^8}}} > 3 \Leftrightarrow 8^{4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3 \Leftrightarrow 4^{6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8 > 1 \Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 2^{24} > 3^{16} \Leftrightarrow 2^{25} > 3^{15} \Leftrightarrow 2^5 > 3^3$,

που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

2ος τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $8^{8^9}\ln 9 > 9^{9^8}\ln 8$. Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(8^{8^9}\ln 9\right) > \ln\left(9^{9^8}\ln 8\right) \Leftrightarrow 8^9\ln 8 + \ln(\ln 9) > 9^8\ln 9 + \ln(\ln 8).$$

Αφού $\ln(\ln 9) > \ln(\ln 8)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$8^9 \ln 8 > 9^8 \ln 9 \Leftrightarrow \frac{8^9}{9^8} > \frac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \frac{2^{27}}{3^{16}} > \frac{2\ln 3}{3\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^{26}}{3^{15}} > \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \frac{\ln 3}{\ln 2}$, η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού $2\ln 2 = \ln 4 > \ln 3$.

Από την άλλη αρκεί $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \frac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{32}{27}\right)^5 > 1$, που ισχύει.