ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{\text{ο}}$: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΥΓΡΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

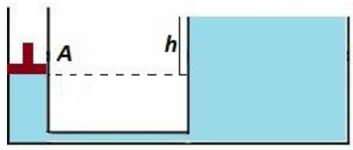
Ερώτηση 1.

Στο διπλανό σχήμα το έμβολο έχει βάρος Β, διατομή Α και ισορροπεί. Η δύναμη που ασκείται από το υγρό στο έμβολο είναι

α) $F = \rho g h A$

β) $F = B + \rho g h A$

γ) $F = p_{\alpha\tau\mu} A + \rho g h A$



Λύση

Σωστή είναι η πρόταση γ.

Το υγρό που ακουμπά στο έμβολο βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το υγρό που βρίσκεται στο δοχείο σε βάθος h, άρα έχουν την ίδια ολική πίεση. Η πίεση στο βάθος h είναι

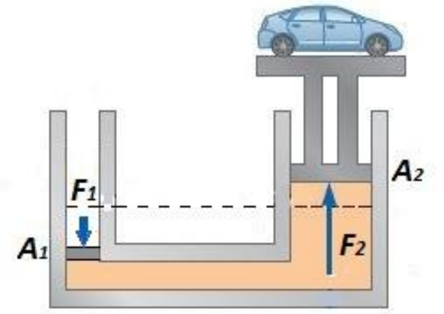
$$p = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h$$

Άρα, η δύναμη που ασκεί το υγρό στο έμβολο είναι

$F = pA$ ή $F = p_{\alpha\tau\mu} A + \rho g h A$.

Ερώτηση 2.

Στο διπλανό υδραυλικό πιεστήριο τα δύο έμβολα αρχικά βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Πιέζουμε το αριστερό έμβολο με μία δύναμη F_1 προκαλώντας μία μικρή μετατόπιση $Δx_1$, οπότε το δεξιό έμβολο δέχεται μία δύναμη F_2 και μετακινείται κατά $Δx_2$. Για τα έργα των δύο δυνάμεων ισχύει



α) $W_1=W_2$

β) $W_1<W_2$

γ) $W_1>W_2$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση δικαιολογώντας την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η πρόταση α.

Επειδή τα υγρά είναι ασυμπίεστα, ο όγκος του υγρού που εκτοπίστηκε από το αριστερό σκέλος είναι ίσος με τον όγκο του υγρού που προστέθηκε στο δεξιό σκέλος. Έχουμε λοιπόν

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \qquad \textbf{(1)}$$

Η πρόσθετη πίεση Δp που προκάλεσε η δύναμη F_1 , σύμφωνα με την αρχή του Pascal, μεταφέρθηκε αναλλοίωτη στο έμβολο του δεξιού σκέλους.

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{F_1}{F_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \Rightarrow F_1 \Delta x_1 = F_2 \Delta x_2 \Rightarrow W_1 = W_2$$

Ερώτηση 3.

Κατά την διεξαγωγή ενός πειράματος, ο Pascal τοποθέτησε ένα στενό κατακόρυφο σωλήνα μεγάλου μήκους μέσα σε ένα ξύλινο βαρέλι κρασιού. Όταν γέμισε το βαρέλι και το σωλήνα με νερό, το βαρέλι εξερράγη. Αυτό συνέβη διότι το νερό του κατακόρυφου σωλήνα αύξησε πολύ

α) τον όγκο του νερού του βαρελιού.

β) την πίεση στα τοιχώματα του βαρελιού.

γ) μόνο την κατακόρυφη δύναμη που ασκείται στον πυθμένα του βαρελιού.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση β.

Το νερό στον κατακόρυφο σωλήνα μεγάλου μήκους προκάλεσε μεγάλη υδροστατική πίεση $p = \rho g h$ στη βάση του, η οποία μεταδόθηκε σύμφωνα με τη αρχή του Pascal σε όλα τα σημεία του νερού του βαρελιού. Έτσι, στην εσωτερική επιφάνεια όλου του βαρελιού ασκήθηκε πολύ μεγάλη δύναμη, $F = pA$, που προκάλεσε την έκρηξή του.

Ερώτηση 4.

Β4. Βάζουμε ένα καλαμάκι σε ένα ψηλό ποτήρι με νερό. Εφαρμόζουμε το δάκτυλο μας στο πάνω μέρος από το καλαμάκι, παγιδεύοντας μια ποσότητα αέρα πάνω από το νερό, χωρίς να επιτρέψουμε να εισέλθει ή να εξέλθει επιπλέον αέρας. Στη συνέχεια σηκώνουμε το καλαμάκι από το νερό. Παρατηρούμε ότι το καλαμάκι συγκρατεί το μεγαλύτερο μέρος της αρχικής ποσότητας του νερού και πάνω από το νερό υπάρχει αέρας. Αυτό συμβαίνει διότι τελικά η πίεση του αέρα μέσα στο καλαμάκι γίνεται

α) ίση με την ατμοσφαιρική πίεση

β) μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση

γ) μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

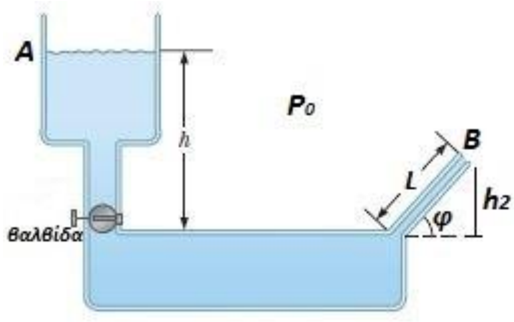
<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση β.

Όταν ανασηκώσουμε το καλαμάκι από το νερό, μία μικρή ποσότητα νερού διαφεύγει από το κάτω μέρος του, αυξάνοντας τον όγκο του παγιδευμένου αέρα, με αποτέλεσμα τη μείωση της πίεσης σε τιμή κάτω από την ατμοσφαιρική. Έτσι η κατακόρυφη προς τα κάτω δύναμη που δέχεται η στήλη νερού από τον παγιδευμένο αέρα στο καλαμάκι, είναι μικρότερη από την προς τα πάνω δύναμη που δέχεται από την ατμοσφαιρική πίεση. Η διαφορά των δύο δυνάμεων είναι ίση με το βάρος του νερού στο καλαμάκι.

Ερώτηση 5.

Τα δύο ανοιχτά σκέλη του δοχείου του παρακάτω σχήματος γεμίζονται με υγρό πυκνότητας ρ, μέχρι τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ενώ η βαλβίδα είναι κλειστή. Το δεξιό σκέλος του δοχείου είναι κεκλιμένο με γωνία κλίσης φ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν p_0 η ατμοσφαιρική πίεση



α) η πίεση στο κάτω μέρος της βαλβίδας είναι $p_0 + \rho g L \eta\mu\varphi$.

β) οι πιέσεις στο πάνω και στο κάτω μέρος της βαλβίδας είναι ίσες.

γ) η πίεση στο πάνω μέρος της βαλβίδας είναι $\rho g h$.

Απάντηση

Σωστή είναι η πρόταση α.

Η πίεση στο πάνω μέρος της βαλβίδας είναι $P_0 + \rho g h$ και δεν είναι ίση με την πίεση στο κάτω μέρος της βαλβίδας γιατί τα υγρά δεν επικοινωνούν λόγω της κλειστής βαλβίδας. Η πίεση του υγρού στο κάτω μέρος της βαλβίδας είναι ίση με τη πίεση στη βάση του δεξιού σωλήνα του δοχείου και επομένως έχει τη τιμή $p_0 + \rho g h_2 = p_0 + \rho g L \eta\mu\varphi$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένα δωμάτιο έχει διαστάσεις 4m x 5m x 3m (μήκος x πλάτος x ύψος) και περιέχει αέρα πυκνότητας ρ=1,2Kg/m^3. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=9,81m/sec^2 να βρεθούν:

α) η μάζα και το βάρος του αέρα του δωματίου και

β) η δύναμη που ασκεί η ατμόσφαιρα πάνω στο δάπεδο.

γ) Γιατί το δάπεδο δεν καταρρέει;

<u>Λύση</u>

α) Ο όγκος του δωματίου είναι V=4m x 5m x 3m=60 m^3. Η μάζα του περιεχόμενου αέρα είναι

$$m = \rho V = 1,2\frac{Kg}{m^3} x\, 60 m^3 = 72\, Kg$$

και το βάρος του

$$w = mg = 72\, Kg \cdot 9,81 \frac{m}{sec^2} = 706,32\, N$$

β) Από τον ορισμό της πίεσης $p = \frac{F}{A}$ έχουμε:

$$F = pA = 10^5 \frac{N}{m^2} 20\, m^2 \text{ ή } F = 2 \cdot 10^6\, N$$

γ) Η δύναμη αυτή είναι περίπου 200 τόνοι, αρκετά μεγάλη για να καταρρεύσει το δάπεδο. Αυτό όμως δεν συμβαίνει γιατί στην κάτω πλευρά του πατώματος, η ατμοσφαιρική πίεση ασκεί μία ίσου μέτρου δύναμη με φορά προς τα πάνω.

Άσκηση 2.

Μία δεξαμενή αποθήκευσης νερού έχει ύψος 10m και ο πυθμένας της βρίσκεται σε ύψος 30m από το έδαφος. Η δεξαμενή τροφοδοτεί μία αγροικία που η βρύση βρίσκεται σε ύψος 1m πάνω από το έδαφος.

α) Πόση είναι η διαφορά της πίεσης του νερού μεταξύ βρύσης και επιφάνειας νερού στη δεξαμενή;

β) Πόση είναι η διαφορά της πίεσης του νερού μεταξύ βρύσης και πυθμένα δεξαμενής;

Δίνονται g=10 m/sec^2 και πυκνότητα νερού ρ=1 g/cm^3.

Λύση

α) Η επιφάνεια της δεξαμενής βρίσκεται σε ύψος Δh=10+30-1=39 m πάνω από τη βρύση.

Άρα

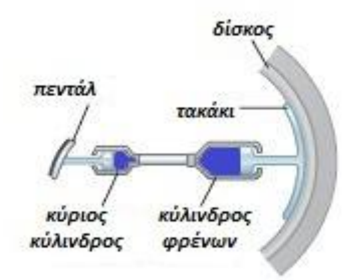
$$\Delta p = \rho g \Delta h = \frac{1\cdot 10^{-3}}{10^{-6}}\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}\cdot 10\frac{\text{m}}{\sec^2}\cdot 39\text{m} = 3{,}9\cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

β) Όμοια ο πυθμένας της δεξαμενής βρίσκεται σε ύψος Δh=30-1=29 m πάνω από τη βρύση. Άρα

$$\Delta p = \rho g \Delta h = \frac{1\cdot 10^{-3}}{10^{-6}}\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}\cdot 10\frac{\text{m}}{\sec^2}\cdot 29\text{m} = 2{,}9\cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Άσκηση 3.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σχηματική παράσταση του συστήματος πέδησης ενός οχήματος. Το έμβολο του κύριου κυλίνδρου έχει διατομή εμβαδού A_1=2 cm^2 ενώ το έμβολο του κυλίνδρου των φρένων A_2=6,5 cm^2. Ο δίσκος στον οποίο εφαρμόζεται η δύναμη από τα τακάκια παρουσιάζει με τα τακάκια συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,5. Αν ο οδηγός πατήσει το πεντάλ του φρένου με δύναμη μέτρου F_1=40 N, να βρεθούν:



α) η πρόσθετη πίεση που προκαλείται στο υγρό του κύριου κυλίνδρου.

β) το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο μεγάλο έμβολο.

γ) το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης τριβής στο δίσκο του τροχού.

<u>Λύση</u>

α) Η πρόσθετη πίεση που προκαλείται στο υγρό του κύριου κυλίνδρου είναι

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{40\,\text{N}}{2\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 2\cdot 10^5\,\text{Pa}\,.$$

β) Η πίεση αυτή σύμφωνα με την αρχή του Pascal διαδίδεται και στο έμβολο του κυλίνδρου των φρένων με αποτέλεσμα αυτό να δέχεται δύναμη

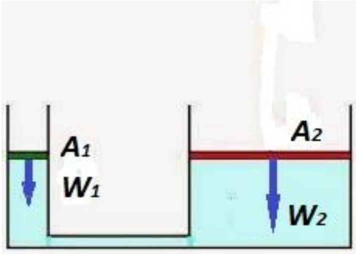
$$F_2 = pA_2 = 2\cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot 6,5\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = 130\,\text{N}\,.$$

γ) Επομένως η τριβή που θα ασκηθεί στο δίσκο από το τακάκι είναι

$$T = \mu N = \mu F_2 = 0,5\cdot 130\,\text{N} = 65\,\text{N}\,.$$

Άσκηση 4.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο συγκοινωνούντα δοχεία που περιέχουν νερό και κλείνονται με έμβολα εμβαδών A_1=4 cm^2 και A_2=40 cm^2 που ισορροπούν στο ίδιο ύψος. Το αριστερό έμβολο έχει βάρος W_1=10 N.



α) Ποιο είναι το βάρος του δεξιού εμβόλου;

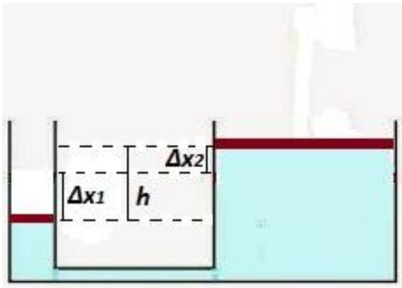
β) Ασκώντας κατάλληλη δύναμη μέτρου $F_α$ μετακινούμε κατά $Δx_1$=20 cm προς τα κάτω το αριστερό έμβολο και το ακινητοποιούμε στη νέα θέση. Πόση είναι τώρα η υψομετρική διαφορά των δύο εμβόλων;

γ) Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης $F_α$;

δ) Να βρείτε τα μέτρα των δυνάμεων που δέχονται τα δύο έμβολα στη νέα θέση τους από το νερό.

Δίνονται $p_{ατμ}=10^5$ Pa, η πυκνότητα του νερού $ρ=10^3$ Kg/m^3 και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10$ m/s^2.

Λύση



α) Αν συμβολίσουμε p_1 και p_2 τις πιέσεις ακριβώς κάτω από τα δύο έμβολα, από τη συνθήκη ισορροπίας για το κάθε έμβολο έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W_1 + p_{ατμ}A_1 = p_1A_1 \Rightarrow p_1 = \frac{W_1 + p_{ατμ}A_1}{A_1} \Rightarrow p_1 = \frac{W_1}{A_1} + p_{ατμ} \quad \textbf{(1)}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W_2 + p_{ατμ}A_2 = p_2A_2 \Rightarrow p_2 = \frac{W_2 + p_{ατμ}A_2}{A_2} \Rightarrow p_2 = \frac{W_2}{A_2} + p_{ατμ} \quad (2)$$

Οι πιέσεις όμως p_1 και p_2 είναι ίσες γιατί τα σημεία που αναφέρονται βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ενός υγρού που ισορροπεί (βλέπε σχήμα εκφώνησης). Εξισώνοντας επομένως τα πρώτα μέλη των σχέσεων **(1)** και **(2)** υπολογίζουμε το βάρος W_2 του δεξιού εμβόλου.

$$\frac{W_1}{A_1} + p_{ατμ} = \frac{W_2}{A_2} + p_{ατμ} \Rightarrow W_2 = \frac{A_2W_1}{A_1} \Rightarrow W_2 = \frac{40cm^2 \cdot 10N}{4cm^2} \Rightarrow W_2 = 100N$$

β) Έστω $Δx_2$ η μετατόπιση του δεξιού εμβόλου προς τα πάνω. Εξισώνουμε τους όγκους του νερού που μετακινήθηκαν από το αριστερό στο δεξιό δοχείο για να υπολογίσουμε την ανύψωση του δεξιού εμβόλου.

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1\Delta x_1 = A_2\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{A_1\Delta x_1}{A_2} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{4\,cm^2 \cdot 20\,cm}{40\,cm^2} \Rightarrow \Delta x_2 = 2\,cm$$

Επομένως η υψομετρική διαφορά των δύο εμβόλων είναι $h = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 22\ cm$.

γ) Στη νέα θέση των εμβόλων η συνθήκη ισορροπίας για το αριστερό έμβολο γράφεται

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_\alpha + W_1 + p_{\alpha\tau\mu}A_1 = p_1' A_1 \Rightarrow p_1' = \frac{F_\alpha + W_1 + p_{\alpha\tau\mu}A_1}{A_1} \Rightarrow p_1' = \frac{F_\alpha}{A_1} + \frac{W_1}{A_1} + p_{\alpha\tau\mu} \quad \textbf{(3)}$$

Η πίεση κάτω από το δεξιό έμβολο δεν άλλαξε, αλλά παρέμεινε p_2. Οι πιέσεις p_1' και p_2 όμως συνδέονται με τη σχέση

$$p_1' = p_2 + \rho g\left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right) \Rightarrow \frac{F_\alpha}{A_1} + \frac{W_1}{A_1} + p_{\alpha\tau\mu} = \frac{W_2}{A_2} + p_{\alpha\tau\mu} + \rho g\left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right)$$

$$\Rightarrow F_\alpha = A_1\rho g\left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right) \Rightarrow F_\alpha = 4\cdot 10^{-4} m^2 \cdot 10^3 \frac{Kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{sec^2} \cdot 22\cdot 10^{-2} m$$

$$\Rightarrow F_\alpha = 0{,}88\,N$$

δ) Από τη σχέση **(3)** μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την πίεση

$$p_1' = \frac{0{,}88\,N}{4\cdot 10^{-4}\,m^2} + \frac{10\,N}{4\cdot 10^{-4}\,m^2} + 10^5 \frac{N}{m^2} \Rightarrow p_1' = 12{,}72\cdot 10^4 \frac{N}{m^2}$$

Άρα, το νερό ασκεί στο αριστερό έμβολο δύναμη μέτρου

$$F_1 = p_1' A_1 = 12{,}72\cdot 10^4 \frac{N}{m^2} \cdot 4\cdot 10^{-4} m^2 = 50{,}88\,N$$

Με τη βοήθεια της σχέσης **(2)** βρίσκουμε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο δεξιό έμβολο.

$$F_2 = p_2 A_2 = W_2 + p_{\alpha\tau\mu}A_2 = 100\,N + 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 40\cdot 10^{-4} m^2 = 500\,N$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/10/2015

Επιμέλεια: Ιωάννης Σδρίμας
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{\text{ο}}$: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ – ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Η ταχύτητα με την οποία ρέουν τα νερά ενός ποταμού, σταθερού πλάτους d, σε ένα σημείο όπου το μέσο βάθος είναι h_1=2 m, είναι $υ_1$. Σε ένα άλλο σημείο του ποταμού όπου τα νερά ρέουν με ταχύτητα $υ_2$=2 $υ_1$, το μέσο βάθος του ποταμού είναι h_2 που είναι ίσο με

α. 2 m.

β. 1 m.

γ. 4 m.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση β.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε σταθερή παροχή:

$\Pi_1 = \Pi_2$ ή $A_1 υ_1 = A_2 υ_2$ **(1)**

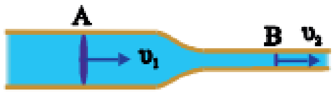
Το εμβαδό A της διατομής του ποταμού είναι $A = d{\cdot}h$. Εφόσον το πλάτος του ποταμού, d, είναι σταθερό, το εμβαδό είναι ανάλογο του βάθους h.

Έτσι, η σχέση **(1)** γίνεται:

$$d{\cdot}h_1{\cdot}υ_1 = d{\cdot}h_2{\cdot}υ_2 \Rightarrow 2{\cdot}υ_1 = h_2{\cdot}2\ υ_1 \Rightarrow h_2 = 1\text{m}$$

Ερώτηση 2.

Το εμβαδόν διατομής του σωλήνα στην περιοχή A είναι τριπλάσιο της διατομής του στην περιοχή B.



Σε δύο δευτερόλεπτα από τη διατομή A διέρχονται 6 cm^3 νερού . Σε ένα δευτερόλεπτο από τη διατομή B διέρχονται

α. 6 cm^3 νερού.

β. 3 cm^3 νερού.

γ. 18 cm^3 νερού.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η απάντηση β.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε σταθερή παροχή:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow \frac{V_1}{t_1} = \frac{V_2}{t_2} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{V_2}{1} \Rightarrow V_2 = 3cm^3 \text{ νερού.}$$

Ερώτηση 3.

Ένας σωλήνας έχει διατομή εμβαδού Α και στο εσωτερικό του ρέει υγρό πυκνότητας ρ, με ταχύτητα υ. Το υγρό εξερχόμενο από το σωλήνα πέφτει κάθετα πάνω σε μια ακίνητη επιφάνεια εμβαδού Α και απομακρύνεται από αυτή ρέοντας πάνω σε αυτή. Δηλαδή μετά την πρόσπτωση, στην αρχική διεύθυνση κίνησης οι μάζες δεν έχουν ταχύτητα. Η κάθετη δύναμη που ασκεί η επιφάνεια στο υγρό δίνεται από τη σχέση

α. $F = \rho A \upsilon^2$.

β. $F = 2\rho A \upsilon^2$.

γ. $F = \rho A \upsilon^2 / 2$.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η α.

Έστω ότι σε χρονικό διάστημα Δt πάνω στη επιφάνεια πέφτει μάζα υγρού Δm. Η μεταβολή της ορμής της μάζας Δm στον άξονα που είναι κάθετος στην επιφάνεια είναι $\overrightarrow{\Delta P} = 0 - \left(\Delta m \cdot \vec{\upsilon}\right)$ με μέτρο $\Delta P = \Delta m \cdot \upsilon$.

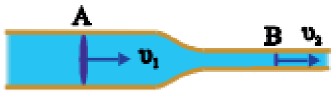
Σύμφωνα με το 2$^{\text{ο}}$ νόμο του Νεύτωνα στη γενικότερη έκφραση του η μάζα Δm θα δέχεται από την επιφάνεια δύναμη μέτρου

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot \upsilon}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{\rho \cdot \Delta V \cdot \upsilon}{\Delta t} \Rightarrow F = \rho \Pi \upsilon \Rightarrow F = \rho A \upsilon^2$$

και θα ασκεί στην επιφάνεια μία αντίθετη δύναμη.

Ερώτηση 4.

Η διάμετρος της διατομής του σωλήνα στην περιοχή Α είναι δ_1 = 2 cm, ενώ η διάμετρος της διατομής του στην περιοχή Β είναι δ_2 =1 cm.



Η ταχύτητα υ_1 του υγρού στην περιοχή Α είναι 2 cm/s. Η ταχύτητα στην περιοχή Β είναι

α. $\upsilon_2 = 1\ \text{cm/s}$

β. $\upsilon_2 = 4\ \text{cm/s}$

γ. $\upsilon_2 = 8\text{cm/s}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η απάντηση γ.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε σταθερή παροχή:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \pi r_1^2 \cdot \upsilon_1 = \pi r_2^2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \pi\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 \cdot \upsilon_1 = \pi\left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = 8\text{cm/s}$$

Ερώτηση 5.

Μια δεξαμενή έχει χωρητικότητα 10 m^3 . Η παροχή νερού ενός κυλινδρικού σωλήνα που γεμίζει τη δεξαμενή είναι $Π_1$=2 m^3 /min και γεμίζει τη δεξαμενή σε χρόνο t_1. Για να γεμίσει η δεξαμενή σε πέντε λεπτά περισσότερο η παροχή του νερού πρέπει να γίνει

α. $\Pi_2 = 2\Pi_1$.

β. $\Pi_2 = \Pi_1$.

γ. $\Pi_2 = 0,5\Pi_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η απάντηση γ.

Η δεξαμενή αρχικά γεμίζει σε χρόνο t_1 που είναι ίσος με :

$$\Pi_1 = \frac{V}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{10}{2} = 5\,\text{min}.$$

Για να γεμίσει η δεξαμενή σε πέντε λεπτά περισσότερο θα χρειαστεί χρόνο t_2=10 min.

Η καινούρια παροχή θα είναι $\Pi_2 = \frac{V}{t_2} = \frac{10\text{m}^3}{10\,\text{min}} = 1\ \text{m}^3/\text{min} = 0,5\Pi_1$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Η φλέβα του νερού μιας βρύσης γίνεται στενότερη καθώς το νερό πέφτει. Η ακτίνα της διατομής της φλέβας στη θέση 1, όταν εξέρχεται από τη βρύση είναι r_1 = 2cm και γίνεται r_2 = 1 cm σε απόσταση h πιο κάτω (θέση 2). Το νερό στη θέση 1 έχει ταχύτητα υ_1 = 1 m/s.

Να υπολογίσετε

α) την παροχή της βρύσης.

β) την ταχύτητα του νερού στη θέση 2.

γ) την απόσταση h.

δ) το χρόνο που χρειάζεται για να γεμίσει μια δεξαμενή χωρητικότητας 4 m^3.

Να θεωρήσετε το νερό ιδανικό ρευστό.

Δίνεται $g=10m/s^2$

<u>Λύση</u>

α) Η παροχή της βρύσης είναι:

$$\Pi = A_1\upsilon_1 = \pi r_1^2 \cdot \upsilon_1 = \pi \cdot \left(2\cdot 10^{-2}\text{m}\right)^2 \cdot \frac{1\text{m}}{\text{s}} \text{ ή } \Pi = 4\cdot 10^{-4}\pi\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

β) Από την εξίσωση της συνέχειας προκύπτει ότι μεταξύ των θέσεων 1 και 2 έχουμε σταθερή παροχή:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \pi r_1^2 \cdot \upsilon_1 = \pi r_2^2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = 4\upsilon_1 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα η ταχύτητα του νερού στη θέση 2 είναι $\upsilon_2 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

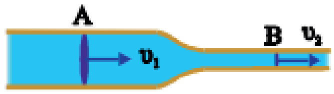
γ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για μια στοιχειώδη μάζα Δm που κινείται από τη θέση 1 στη θέση 2, έχουμε:

$$\frac{1}{2}\Delta m\upsilon_1^2 + \Delta m g h = \frac{1}{2}\Delta m\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_1^2 + 2\cdot 10\text{h} = \upsilon_2^2 \Rightarrow \text{h} = 0,75\text{m}$$

δ) Η παροχή ισούται με $\Pi = \frac{V}{t}$, άρα ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει η δεξαμενή είναι:

$$t = \frac{V}{\Pi} = \frac{4m^3}{4 \cdot 10^{-4}\pi \ m^3/s} \Rightarrow t = \frac{10^4}{\pi} s$$

Άσκηση 2.



Ένας σωλήνας αποτελείται από δύο κυλινδρικά μέρη διαφορετικής ακτίνας και μέσα σε αυτόν ρέει λάδι. Το πρώτο μέρος του σωλήνα ακτίνας r_1=2 cm μεταφέρει στο δεύτερο λάδι μάζας m=4kg σε χρονικό διάστημα t=5s. Η ταχύτητα του λαδιού στο δεύτερο και στενότερο κυλινδρικό μέρος είναι

$\upsilon_2 = \frac{10}{\pi}$ m/s. Να υπολογίσετε:

α) πόσος όγκος λαδιού μεταφέρθηκε στο δεύτερο σωλήνα σε χρονικό διάστημα t=5s.

β) την παροχή λαδιού στο δεύτερο σωλήνα.

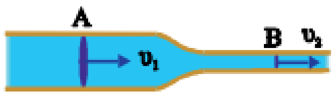
γ) την ταχύτητα ροής στον πρώτο σωλήνα.

δ) την ακτίνα του δεύτερου σωλήνα.

Να θεωρήσετε το λάδι ιδανικό ρευστό.

Δίνεται η πυκνότητα του λαδιού ρ=0,8 g/cm^3.

<u>Λύση</u>



α) Ο όγκος λαδιού που μεταφέρθηκε στο δεύτερο σωλήνα σε χρονικό διάστημα t=5s βρίσκεται από τη σχέση ορισμού της πυκνότητας:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{4\,kg}{800 kg/m^3} \Rightarrow V = 5\cdot 10^{-3} m^3 \text{ ή } V = 5L$$

β) Από τη σχέση ορισμού της παροχής στο δεύτερο σωλήνα έχουμε:

$$\Pi_2 = \frac{V}{t} = 10^{-3} m^3/s\,.$$

γ) Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ του πρώτου και δεύτερου σωλήνα βρίσκουμε την ταχύτητα ροής στον πρώτο σωλήνα:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = \Pi_2 \Rightarrow \pi r_1^2 \cdot \upsilon_1 = \Pi_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{2,5}{\pi} m/s\,.$$

δ) Από τη σχέση της παροχής στο δεύτερο σωλήνα βρίσκουμε την ακτίνα του.

$$\Pi_2 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \pi r_2^2 = \frac{\Pi_2}{\upsilon_2} \Rightarrow r_2 = 10^{-2} m = 1cm$$

Άσκηση 3.

Οριζόντιος σωλήνας εκτοξεύει νερό από κάποιο ύψος h. Το νερό εξέρχεται του σωλήνα με ταχύτητα $υ_0$ = 5 m/s και φτάνει στο έδαφος σε χρόνο t=1s από τη στιγμή της εξόδου του από το σωλήνα. Η παροχή του σωλήνα είναι Π =0,6 m^3 /min.

Να υπολογίστε

α) το ύψος που βρίσκεται ο οριζόντιος σωλήνας.

β) την απόσταση του σημείου που χτυπάει το νερό στο έδαφος από την έξοδο του σωλήνα.

γ) τη μάζα του νερού που βρίσκεται κάθε στιγμή στον αέρα.

δ) την ακτίνα του σωλήνα.

Δίνονται: g=10m/s^2, ρ=1 g / cm^3.

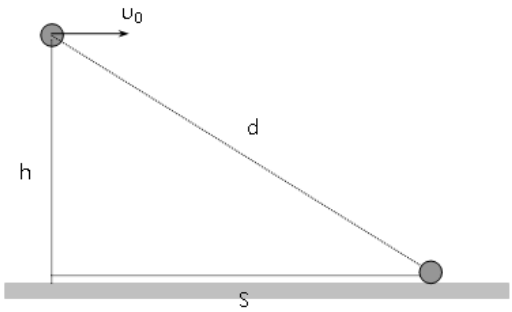
<u>Λύση</u>

α) Το νερό κάνει οριζόντια βολή και στον κατακόρυφο άξονα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Έτσι, το ύψος που βρίσκεται η έξοδος του οριζόντιου σωλήνας βρίσκεται από τη σχέση: $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ ή $h = 5m$.

β) Οριζόντια το νερό μετατοπίζεται κατά $s = υ_0 \cdot t = 5m$

και η απόσταση d του σημείου που χτυπάει το νερό στο έδαφος από το σημείο εκτόξευσης είναι:

$$d = \sqrt{h^2 + s^2} = 5\sqrt{2}m$$



γ) Η μάζα του νερού που βρίσκεται κάθε στιγμή στον αέρα ισούται με τη μάζα που εξέρχεται στο χρονικό διάστημα του 1s.

Από τη σχέση της παροχής βρίσκουμε τον όγκο του νερού που εξέρχεται σε 1s και από τη σχέση της πυκνότητας την αντίστοιχη μάζα.

$$\Pi = \frac{V}{t} \Rightarrow V = \Pi \cdot t = \frac{0,6m^3/s}{60s} = 0,01m^3 \text{ και } \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = 10kg$$

δ) Η ακτίνα του σωλήνα βρίσκεται από τη σχέση της παροχής.

$$\Pi = A \cdot \upsilon_0 \Rightarrow \pi \cdot r^2 = \frac{\Pi}{\upsilon_0} \Rightarrow r^2 = \frac{\frac{0,6}{60}\frac{m^3}{s}}{5\frac{m}{s}\cdot\pi} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5/\pi}}{50}\,m\,.$$

Άσκηση 4.

Ένας σωλήνας που μεταφέρει νερό έχει ακτίνα $r = 2\sqrt{\pi}\,cm$ και διακλαδίζεται σε δύο μικρότερους σωλήνες ακτίνας $r_1 = r_2 = \sqrt{\pi}\,cm$. Η παροχή στον κεντρικό σωλήνα είναι Π=1 m^3 /min. Ένας από τους δύο μικρότερους σωλήνες καταλήγει σε μια μικρή δεξαμενή που χωράει 100kg νερό.

Να υπολογίστε

α) την ταχύτητα ροής στον κεντρικό σωλήνα.

β) την παροχή νερού σε έναν από τους δύο μικρότερους σωλήνες.

γ) την ταχύτητα ροής στους δύο μικρότερους σωλήνες.

δ) το χρόνο που χρειάζεται για να γεμίσει η μικρή δεξαμενή.

Να θεωρήσετε το νερό ιδανικό ρευστό.

Δίνονται η πυκνότητα του νερού ρ =1 g / cm^3 και $\pi^2 = 10$.

<u>Λύση</u>

α) Η ταχύτητα ροής στον κεντρικό σωλήνα βρίσκεται από τη σχέση της παροχής, είναι:

$$\Pi = A \cdot \upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\Pi}{\pi \cdot r^2} = \frac{\frac{1}{60}\frac{m^3}{s}}{\pi \cdot \left(\sqrt{\pi} \cdot 2 \cdot 10^{-2} m\right)^2} \Rightarrow \upsilon = \frac{100}{24} m/s$$

β) Επειδή οι δύο μικρότεροι σωλήνες είναι όμοιοι, οι παροχές τους είναι ίσες, Π_1=Π_2. Άρα η παροχή νερού στους δύο μικρότερους σωλήνες είναι:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \Rightarrow \Pi = 2\Pi_1 \Rightarrow \Pi_1 = \Pi_2 = \frac{\Pi}{2} = \frac{0,5}{60} m^3/s.$$

γ) Η ταχύτητα ροής στους δύο μικρότερους σωλήνες

$$\Pi_1 = A_1 \upsilon_1 = \pi r_1^2 \cdot \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{100}{12} m/s.$$

δ) Ο όγκος του νερού που απαιτείται για να γεμίσει η μικρή δεξαμενή είναι: $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \rho \cdot m = 0,1 m^3$

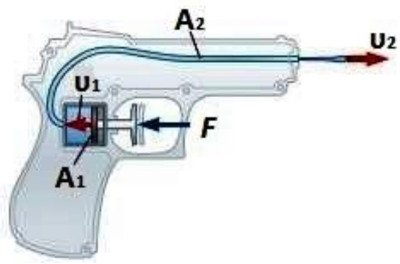
Ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει η μικρή δεξαμενή βρίσκεται από τον τύπο της παροχής.

$$\Pi_1 = \frac{V}{t} \Rightarrow t = \frac{V}{\Pi_1} = \frac{0,1 m^3}{\frac{0,5}{60}\frac{m^3}{s}} \Rightarrow t = 12s$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Η οπή εκτόξευσης του νερού ενός νεροπίστολου έχει εμβαδό A_2=1mm² και το εμβαδόν του εμβόλου που πιέζει το νερό A_1=70mm². Ένα παιδί κρατάει το νεροπίστολο σε ύψος h=0,8 m από το έδαφος και πιέζει τη σκανδάλη του. Η σκανδάλη στη συνέχεια πιέζει το έμβολο της μικρής δεξαμενής αποθήκευσης του νερού με δύναμη F=10N και το νερό εξέρχεται με ταχύτητα $υ_2$. Να βρεθούν:



α) η σχέση που συνδέει την ταχύτητα εκτόξευσης του νερού με την ταχύτητα κίνησης του εμβόλου.

β) η ταχύτητα εκτόξευσης $υ_2$ του νερού.

γ) η οριζόντια απόσταση που φτάνει το νερό όταν πέφτει στο έδαφος.

Να θεωρήσετε ότι η ροή του νερού έχει τις ιδιότητες του ιδανικού ρευστού.

Η πυκνότητα του νερού είναι ρ=10³ kg/m³ , g = 10 m/s².

Θεωρείστε $\frac{4899}{4900} \approx 1$, $\sqrt{\frac{2000}{7}} = 16,9$

Λύση

α) Από την εξίσωση της συνέχειας βρίσκουμε σχέση που συνδέει την ταχύτητα $υ_1$ που κινείται το έμβολο με τη ταχύτητα $υ_2$ με την οποία εκτοξεύεται το νερό $A_1υ_1 = A_2υ_2 \Rightarrow υ_1 = \frac{υ_2}{70}$.

β) Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για μια στοιχειώδη μάζα νερού καθώς αυτή προωθείται από το δοχείο στην έξοδο.

Σε χρονική διάρκεια Δt, έστω ότι το έμβολο μετατοπίζεται κατά $\Delta x_1 = υ_1\Delta t$. Η μάζα νερού που προωθήθηκε είναι

$$\Delta m = \rho\Delta V = \rho\Pi\Delta t \text{ ή } \Delta m = \rho A_1υ_1\Delta t = \rho A_2υ_2\Delta t \qquad \textbf{(1)}$$

Κατά την προώθηση αυτή το νερό δέχεται από το περιβάλλον του δύο δυνάμεις. Από το έμβολο δέχεται τη δύναμη $F_1 = F + p_{atm}A_1$ και από την ανοικτή ατμόσφαιρα τη δύναμη $F_2 = p_{atm}A_2$.

Τα έργα των δύο δυνάμεων είναι αντίστοιχα:

$$W_1 = \left(F + p_{atm}A_1 \right) \upsilon_1 \Delta t \qquad \textbf{(2)}$$

$$W_2 = -F_2\upsilon_2\Delta t = -p_{atm}A_2\upsilon_2\Delta t \qquad \textbf{(3)}$$

Το συνολικό έργο είναι

$$W_{ολ} = W_1 + W_2 = (F + p_{atm}A_1)\,\upsilon_1\Delta t - p_{atm}A_2\upsilon_2\Delta t$$

Αλλά λόγω της **(1)** $p_{ατμ}A_1\upsilon_1\Delta t = p_{atm}A_2\upsilon_2\Delta t$ με αποτέλεσμα

$$W_{ολ} = F\upsilon_1\Delta t$$

ΘΜΚΕ για τη μάζα νερού $\Delta m : W_{Fολ} = K_{τελ} - K_{αρχ}$ **(4)**

$$F\upsilon_1\Delta t = \frac{1}{2}\rho A_1\upsilon_1\Delta t\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \Rightarrow F = \frac{1}{2}\rho A_1\left(\upsilon_2^2 - \frac{\upsilon_2^2}{4900}\right) \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho A_1}}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,N}{10^3\,\frac{Kg}{m^3}\cdot 70\cdot 10^{-6}m^2}} \approx 16,9\,m/sec$$

γ) Το νερό εκτελεί οριζόντια βολή και επομένως ο χρόνος πτώσης του στο έδαφος είναι:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\cdot 0,8\,m}{10\,\frac{m}{sec^2}}} \Rightarrow t = 0,4\ sec$$

Άρα, η οριζόντια απόσταση που θα φθάσει το νερό είναι $s = \upsilon_2 t = 6,76\,m$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/11/2015

Επιμέλεια: Παναγιώτης Μπετσάκος, Ιωάννης Σδρίμας
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

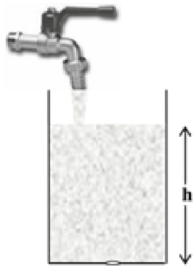
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Μια δεξαμενή τροφοδοτείται με νερό από μια βρύση, έτσι ώστε το ύψος του νερού στη δεξαμενή να παραμένει σταθερό και ίσο με h. Στην κάτω επιφάνεια της δεξαμενής υπάρχει μια οπή εμβαδού A. Η παροχή από την οπή δίνεται από τη σχέση



α) $\Pi = A \cdot \sqrt{2gh}$

β) $\Pi > A \cdot \sqrt{2gh}$

γ) $\Pi < A \cdot \sqrt{2gh}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

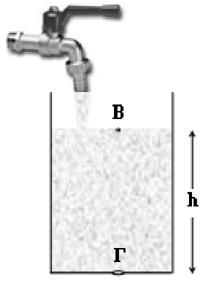
Σωστή είναι η απάντηση α.

Για να παραμένει σταθερό το ύψος του νερού στο δοχείο, θα πρέπει να υπάρχει ισορροπία μεταξύ της παροχής Π της βρύσης που φέρνει νερό στη δεξαμενή και της παροχής Π' με την οποία το νερό εξέρχεται από τη δεξαμενή, δηλαδή:

$\Pi = \Pi'$ ή $\Pi = A \cdot \upsilon$ (1)

όπου υ η ταχύτητα με την οποία το νερό εξέρχεται από την οπή.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Β της ελεύθερης επιφάνειας του νερού και του σημείου Γ στο οποίο βρίσκεται η οπή, θεωρώντας σαν επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια του ρευστού, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Γ:



$$p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + \rho g h = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \quad (2)$$

Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού παραμένει διαρκώς στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, δηλαδή $\upsilon_B = 0$. Επίσης, η πίεση στα σημεία Β και Γ είναι ίση με την ατμοσφαιρική, $p_B = p_\Gamma = p_{\alpha\tau\mu}$. Έτσι, η παραπάνω σχέση (1) γίνεται:

$p_{ατμ} + \rho g h = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2$ ή $\upsilon = \sqrt{2gh}$ (3)

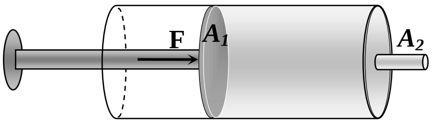
(πράγμα αναμενόμενο, σύμφωνα με το θεώρημα Torricelli).

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) βρίσκουμε:

$\Pi = A \cdot \sqrt{2gh}$.

Ερώτηση 2.

Μια οριζόντια σύριγγα περιέχει νερό, το οποίο θεωρείται ιδανικό ρευστό. Το έμβολο της σύριγγας μπορεί να κινείται χωρίς τριβές κι έχει εμβαδό A_1, ενώ το νερό εξέρχεται στην ατμόσφαιρα από μια τρύπα εμβαδού $A_2 = \frac{A_1}{3}$. Ασκούμε στο έμβολο της σύριγγας μια οριζόντια δύναμη μέτρου F. Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το νερό εξέρχεται από την τρύπα είναι ίσο με



α) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{F}{A_1}}$

β) $\sqrt{\frac{F}{A_1}}$

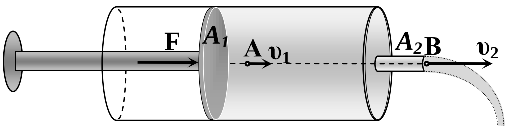
γ) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{F}{A_1}}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η απάντηση α.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για μια οριζόντια φλέβα νερού μεταξύ των σημείων Α και Β, όπου το σημείο Β είναι ένα σημείο αμέσως μετά την έξοδο του νερού από τη σύριγγα, έχουμε:



$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad (1)$$

Η πίεση στο σημείο Α είναι $p_A = p_{ατμ} + \frac{F}{A_1}$. Το νερό στο σημείο Β βρίσκεται σε επαφή με την ανοιχτή ατμόσφαιρα, οπότε δέχεται πίεση ίση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή $p_B = p_{ατμ}$.

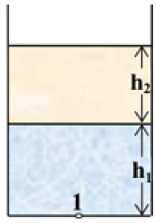
Η εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των θέσεων Α και Β δίνει:

$\Pi_A = \Pi_B$ ή $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ή $A_1\upsilon_1 = \frac{A_1}{3}\upsilon_2$ ή $\upsilon_1 = \frac{\upsilon_2}{3}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$p_{ατμ} + \frac{F}{A_1} + \frac{1}{2}\rho(\frac{\upsilon_2}{3})^2 = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2{}^2$ ή $\frac{4\upsilon_2^2}{9} = \frac{F}{A_1}$ ή $\upsilon_2 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{F}{A_1}}$.

Ερώτηση 3.



Ένα δοχείο περιέχει νερό πυκνότητας ρ_1 μέχρι ύψος h_1 από τον πυθμένα του. Πάνω από το νερό υπάρχει στρώμα λαδιού πυκνότητας ρ_2, μέχρι ύψος h_2 πάνω από τη στάθμη του νερού. Σε ένα σημείο 1 του πυθμένα του δοχείου υπάρχει μια οπή. Η ταχύτητα με την οποία το νερό εξέρχεται από την τρύπα έχει μέτρο:

α) $\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}$

β) $\upsilon_1 = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}$

γ) $\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{2g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_1}}$.

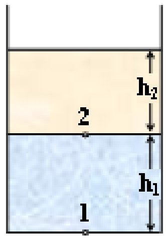
Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι δύο επιφάνειες των υγρών κατέρχονται πολύ αργά. Άρα, από την υδροστατική, για την πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών ισχύει:

$p_2 = p_{ατμ} + \rho_2 g h_2$ (1)



Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για μια φλέβα που διέρχεται από τα σημεία 1 και 2, θεωρώντας επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο 1:

$p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 \cdot \upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_1 \cdot \upsilon_2^2 + \rho_1 g h_1$ (2)

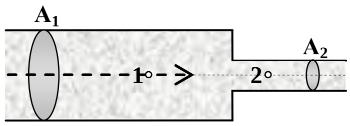
Έχουμε όμως ότι $p_1 = p_{ατμ}$, αφού το υγρό εξέρχεται στην ατμόσφαιρα και $\upsilon_2 = 0$. Έτσι η σχέση (2) γίνεται:

$p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho_1 \cdot \upsilon_1^2 = p_2 + \rho_1 g h_1$ (3)

Με αντικατάσταση της (1) στην (3), προκύπτει:

$p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho_1 \cdot \upsilon_1^2 = p_{ατμ} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1$ ή $\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{2g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_1}}$.

Ερώτηση 4.



Το σχήμα δείχνει έναν οριζόντιο σωλήνα, μέσα στον οποίο ρέει νερό, το οποίο θεωρούμε ιδανικό ρευστό, με μόνιμη και στρωτή ροή. Η διατομή A_1 του αριστερού τμήματος του σωλήνα είναι τριπλάσια από τη διατομή A_2 του δεξιού του τμήματος. Δίνεται ότι η πίεση στο σημείο 2 του σχήματος είναι ίση με p_2 και στο σημείο 1 ίση με p_1 . Η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό στο αριστερό τμήμα του σωλήνα είναι ίση με υ_1 **. Η διαφορά πίεσης** $p_1 - p_2$ είναι ίση με

α) $4\rho\upsilon_1^2$

β) $2\rho\upsilon_1^2$

γ) $\rho\upsilon_1^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η α.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για μια φλέβα υγρού, μεταξύ του σημείου 1 και του σημείου 2.

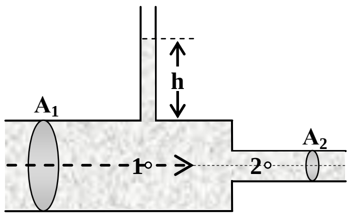
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2 \qquad (1)$$

Η εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων 1 και 2 δίνει:
$\Pi_1 = \Pi_2$ ή $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ή $3A_2\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ή $\upsilon_2 = 3\upsilon_1$. (2)

Από τη σχέση (1) με τη βοήθεια της (2) παίρνουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(3\upsilon_1)^2 \quad ή \quad p_1 - p_2 = 4\rho\upsilon_1^2$$

Ερώτηση 5.



Το σχήμα δείχνει έναν οριζόντιο σωλήνα, μέσα στον οποίο ρέει νερό, το οποίο θεωρούμε ιδανικό ρευστό, με μόνιμη και στρωτή ροή. Στον οριζόντιο σωλήνα έχουμε προσαρμόσει έναν κατακόρυφο ανοικτό σωλήνα, μέσα στον οποίο το ύψος του νερού είναι ίσο με h. Η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό στο αριστερό τμήμα του σωλήνα είναι ίση με υ_1 **και στο δεξιό ίση με** υ_2 **($\upsilon_2 > \upsilon_1$).** Αν είναι γνωστά, η επιτάχυνση της βαρύτητας , g και η πυκνότητα του νερού, ρ, τότε η πίεση στο σημείο 2 του σχήματος, p_2 είναι ίση με

α) $\rho g h + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2)$

β) $p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2)$

γ) $p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2)$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για μια φλέβα υγρού, μεταξύ του σημείου 1 και του σημείου 2.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2 \qquad (1)$$

Το νερό στον κατακόρυφο σωλήνα είναι ακίνητο, οπότε στη βάση του επικρατεί πίεση

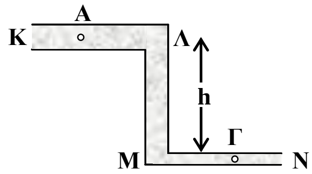
$$p_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h \qquad (2)$$

Από τη σχέση (1) με τη βοήθεια της (2) παίρνουμε:

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \text{ή} \quad p_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2)$$

Ερώτηση 6.

Ο σωλήνας του σχήματος είναι γεμάτος με ιδανικό υγρό. Το οριζόντιο τμήμα ΚΛ του σωλήνα έχει σταθερή διατομή A_1, ενώ το οριζόντιο τμήμα ΜΝ του σωλήνα έχει σταθερή διατομή $A_2 < A_1$. Οι δύο οριζόντιοι σωλήνες απέχουν μεταξύ τους κατακόρυφα κατά h και στο σημείο Ν υπάρχει στρόφιγγα.



Όταν η στρόφιγγα είναι κλειστή η διαφορά πιέσεων μεταξύ των σημείων Α και Γ είναι ίση με $p_Γ - p_A = Δp$.

Όταν η στρόφιγγα είναι ανοικτή και το υγρό ρέει με στρωτή και μόνιμη ροή από το σημείο Α προς το σημείο Γ, η διαφορά πιέσεων μεταξύ των σημείων Α και Γ είναι ίση με $p_Γ' - p_A' = Δp'$. Για τις δύο διαφορές πιέσεων ισχύει

α) $Δp = Δp'$

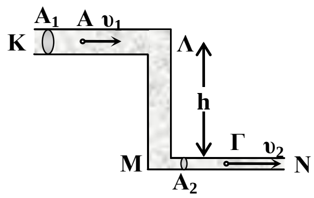
β) $Δp < Δp'$

γ) $Δp > Δp'$.

Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η γ.



Όταν το υγρό βρίσκεται σε ισορροπία, θα έχουμε:

$p_Γ = p_A + ρgh$ ή $p_Γ - p_A = ρgh$ ή $Δp = ρgh$ (1)

Όταν το υγρό ρέει από το Α προς το Γ, από την εξίσωση συνέχειας έχουμε:

$Π_A = Π_Γ$ ή $A_1 υ_1 = A_2 υ_2$ κι αφού $A_1 > A_2$, βρίσκουμε $υ_1 < υ_2$.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για μια φλέβα υγρού μεταξύ των σημείων Α και Γ:

$p_A' + \frac{1}{2}ρ \cdot υ_1^2 + ρgh = p_Γ' + \frac{1}{2}ρ \cdot υ_2^2$ ή $p_Γ' - p_A' = ρgh + \frac{1}{2}ρ \cdot υ_1^2 - \frac{1}{2}ρ \cdot υ_2^2$,

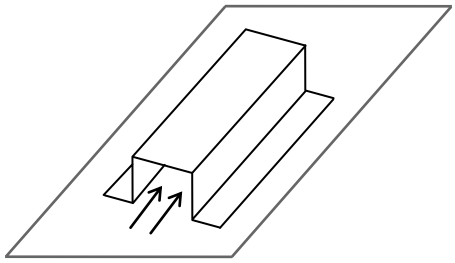
ή $Δp' = ρgh + \frac{1}{2}ρ \cdot υ_1^2 - \frac{1}{2}ρ \cdot υ_2^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$Δp' = Δp + \frac{1}{2}ρ \cdot υ_1^2 - \frac{1}{2}ρ \cdot υ_2^2$ κι αφού $υ_1 < υ_2$ προκύπτει: $Δp' < Δp$.

Ερώτηση 7.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια σήραγγα (τούνελ), φτιαγμένη από χαρτόνι. Ένα ρεύμα αέρα, περνά μέσα από τη σήραγγα, με κατεύθυνση παράλληλη στον άξονά της. Όταν η ταχύτητα του ρεύματος αυξηθεί, το πιθανότερο να συμβεί είναι η σήραγγα



α) να λυγίσει προς τα κάτω.

β) να ανασηκωθεί.

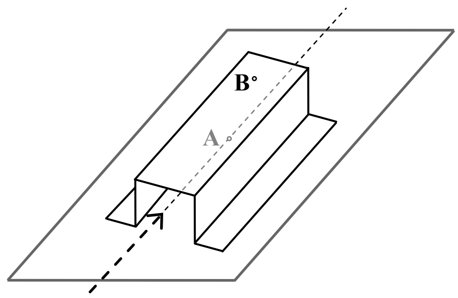
γ) να μετατοπιστεί προς τα αριστερά της κατεύθυνσης του ρεύματος του αέρα.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η α.

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου στο άπειρο κι ενός σημείου Α που βρίσκεται μέσα στη σήραγγα, έχουμε:



$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_\infty^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2$$

Στο άπειρο η ρευματική ταχύτητα είναι μηδέν ($\upsilon_\infty = 0$) και η πίεση ίση με την ατμοσφαιρική ($p_\infty = p_{\alpha\tau\mu}$), οπότε η παραπάνω σχέση μας δίνει:

$$p_{\alpha\tau\mu} - p_A = \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2 \qquad (1)$$

Η πίεση που επικρατεί σε ένα σημείο Β που βρίσκεται ακριβώς πάνω από τη σήραγγα είναι ίση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή:

$$p_B = p_{\alpha\tau\mu} \qquad (2)$$

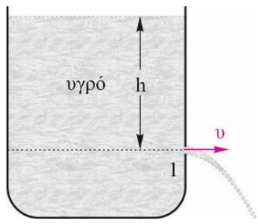
Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$p_B - p_A = \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2$$

Δηλαδή, η πίεση μέσα στη σήραγγα είναι μικρότερη από την πίεση πάνω από τη σήραγγα. Η διαφορά πιέσεων έχει σαν αποτέλεσμα να ασκείται μια δύναμη στη σήραγγα με φορά προς τα κάτω, η οποία είναι ανάλογη της διαφοράς πιέσεων $p_B - p_A$ και μεγαλώνει όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα υ του ρεύματος αέρα.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.



Ένα ανοικτό κυλινδρικό δοχείο περιέχει νερό. Στην πλευρική επιφάνεια του δοχείου και σε βάθος h=0,45m από την ελεύθερη επιφάνεια, υπάρχει μια μικρή στρογγυλή τρύπα διαμέτρου δ=2cm από την οποία εκρέει το νερό. Η επιφάνεια της οπής θεωρείται πολύ μικρότερη από την ελεύθερη επιφάνεια του δοχείου.

Α. Να βρείτε:

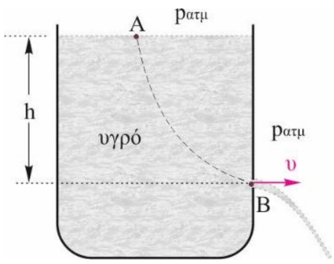
1. την ταχύτητα εκροής.

2. την παροχή της οπής.

Β. Στην ελεύθερη επιφάνεια του δοχείου προσαρμόζεται ένα έμβολο με αποτέλεσμα το νερό να εκρέει από την τρύπα με ταχύτητα $υ_1$=4m/s. Να βρείτε την πρόσθετη πίεση (υπερπίεση) που προκαλείται από το έμβολο στο νερό.

Δίνονται $ρ_ν$=1000kg/m^3, g=10m/s^2.

<u>Λύση</u>



Α1. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα υγρού μεταξύ των σημείων Α και Β. Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Β.

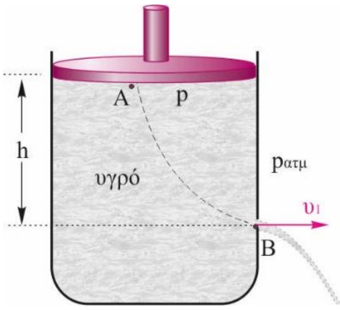
$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A + \rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B$$

Όταν το υγρό εκρέει από την τρύπα έχει ταχύτητα $υ_B$=υ και η πίεσή του γίνεται ίση με την ατμοσφαιρική, επομένως $p_A=p_B=p_{atm}$. Επειδή το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από αυτό της οπής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $υ_A$=0. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}45m} \Rightarrow \upsilon = 3\frac{m}{s}$$

Α2. Η παροχή της φλέβας του υγρού είναι

$$\Pi = A\upsilon = \pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\upsilon \Rightarrow \Pi = \pi\left(\frac{0{,}02m}{2}\right)^2\cdot 3\frac{m}{s} \Rightarrow \Pi = 0{,}3\pi\cdot 10^{-3}\frac{m^3}{s} \Rightarrow \Pi = 0{,}3\pi\frac{L}{s}$$



Β. Η πίεση στο σημείο Α είναι p και η ταχύτητα εκροής στο Β είναι $υ_1$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για τη φλέβα υγρού που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p + \rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_{atm} \xrightarrow{\upsilon_A=0}$$

$$p - p_{atm} = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 - \rho g h \Rightarrow$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}1000\frac{kg}{m^3}\left(4\frac{m}{s}\right)^2 - 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}0{,}45m \Rightarrow$$

$$\Delta p = 3.500\frac{N}{m^2}$$

Άσκηση 2.

Η στέγη ενός μικρού σπιτιού αποτελείται από δύο επίπεδα κομμάτια εμβαδού 5 επί 4 τετραγωνικών μέτρων το καθένα τα οποία σχηματίζουν μεταξύ τους μικρή γωνία. Όταν φυσάει οριζόντιος άνεμος, λόγω της στένωσης των ρευματικών γραμμών πάνω από τη στέγη, έχουμε αύξηση της ταχύτητας του ανέμου κατά 20% . Η μέγιστη επιτρεπόμενη κάθετη στη στέγη δύναμη που μπορεί να αναπτυχθεί σε κάθε τμήμα της στέγης, χωρίς αυτή να αποκολληθεί, είναι F_{max}=18.300N. Επίσης, δεχόμαστε ότι πολύ μακριά από το σπίτι, λόγω της ταχύτητας του ανέμου η πίεση είναι λίγο μικρότερη της ατμοσφαιρικής και ίση με $p_\infty = p_{ατμ} - 200\dfrac{N}{m^2}$

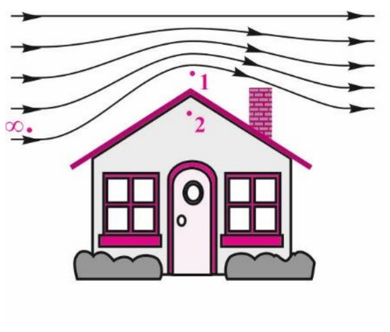
Α. Να βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει τη διαφορά πίεσης μεταξύ του κάτω και πάνω μέρους της στέγης σε συνάρτηση με την ταχύτητα του ανέμου.

Β. Να γίνει γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος Α στην οποία να φαίνεται ένα ζεύγος τιμών.

Γ. Να βρείτε τη μέγιστη οριζόντια ταχύτητα ανέμου για την οποία δεν έχουμε αναρπαγή της στέγης.

Δίνονται: $\rho_{αέρα}$=1,3 kg/m^3, $p_{ατμ} = 10^5 N/m^2$

<u>Λύση</u>



Α. Θεωρούμε ένα σημείο πολύ μακριά από τη στέγη (∞) όπου $p = p_\infty$ και το σημείο 1 που είναι λίγο πάνω από τη στέγη και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_\infty^2 + p_\infty = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_1 \ , \ \ (1)$$

Λόγω της στένωσης των ρευματικών γραμμών έχουμε 20% μεγαλύτερη ταχύτητα στο σημείο 1 επομένως υ_1=1,2 υ_∞. Η σχέση (1) γράφεται

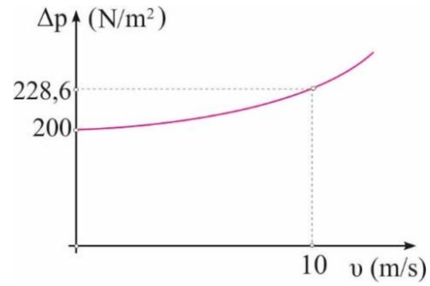
$$p_1 - p_\infty = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow p_1 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\infty^2\left(1-1{,}2^2\right) \Rightarrow p_1 = p_\infty - 0{,}286\,\upsilon_\infty^2$$

Στο κάτω μέρος της στέγης δεν φυσά άνεμος, οπότε θεωρούμε ότι είναι $p_2 = p_{ατμ}$

Άρα, η δημιουργούμενη διαφορά πίεσης μεταξύ του κάτω και πάνω μέρους της στέγης είναι:

$$p_2 - p_1 = p_{ατμ} - (p_\infty - 0{,}286υ_\infty^2) \quad ή \quad p_2 - p_1 = 200 + 0{,}286υ_\infty^2 \ (SI) \qquad (2)$$

Β. Η υπερπίεση $Δp = p_2 - p_1 = 200 + 0{,}286υ_\infty^2 \ (SI)$ σε συνάρτηση με την ταχύτητα του ανέμου είναι συνάρτηση 2ου βαθμού και η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ. Στο εσωτερικό του σπιτιού (σημείο 2) , η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική και η πίεση στο σημείο 1 είναι μικρότερη της ατμοσφαιρικής. Επομένως, η διαφορά πίεσης (p_2-p_1) έχει ως συνέπεια την εμφάνιση κάθετης δύναμης στην επιφάνεια της στέγης που έχει μέτρο

$$F = (p_2 - p_1) \cdot A \qquad (3)$$

Για να μην έχουμε αναρπαγή της στέγης θα πρέπει F< F_{max} ή F< 18.300N.

Από την σχέση (3) παίρνουμε:

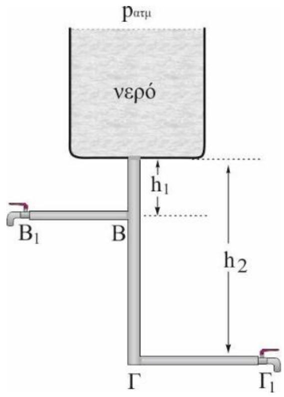
$$18300N \geq (p_2 - p_1) \cdot A \ \Rightarrow \ p_2 - p_1 \leq \frac{18300N}{4m \cdot 5m} \ \Rightarrow \ p_2 - p_1 \leq 915 \ \frac{N}{m^2}$$

Για αυτή τη διαφορά πίεσης, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η ταχύτητα του ανέμου είναι

$$200 + 0{,}286υ_\infty^2 \leq 915 \ \frac{N}{m^2} \ \Rightarrow \ υ_\infty \leq \sqrt{\frac{715}{0{,}286} \frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{\frac{715}{0{,}286} \frac{m^2}{s^2}} \ \Rightarrow \ υ_\infty \leq 50 \frac{m}{s}$$

Άσκηση 3.

Η δεξαμενή του σχήματος έχει σχήμα κυλίνδρου με εμβαδό βάσης $A=8m^2$ και είναι γεμάτη με νερό ενώ η πάνω βάση της είναι ανοικτή επικοινωνώντας με την ατμόσφαιρα. Στην κάτω βάση υπάρχει κατακόρυφος σωλήνας ο οποίος συνδέεται μέσω των οριζόντιων σωληνώσεων BB_1 και $\Gamma\Gamma_1$ με βρύσες. Οι οριζόντιες σωληνώσεις απέχουν $h_1=0,3m$ και $h_2=1,5m$ αντίστοιχα από την κάτω βάση της δεξαμενής και έχουν διάμετρο $\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}cm$.



Α. Οι δύο βρύσες είναι κλειστές και η πίεση που επικρατεί στη βρύση Γ_1 είναι $p_\Gamma=1,2\cdot10^5 N/m^2$. Να βρείτε:

i. τη χωρητικότητα της δεξαμενής

ii. Την πίεση που επικρατεί στη βρύση B_1.

Β. Οι δύο βρύσες είναι ανοικτές. Να βρείτε:

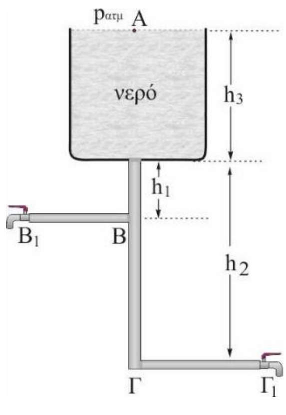
i. την ταχύτητα εκροής του νερού από τη βρύση Γ_1.

ii. τον όγκο του νερού που φεύγει από τη βρύση B_1 σε χρονικό διάστημα 1min.

Θεωρείστε ότι στη διάρκεια του 1 min η στάθμη του νερού στη δεξαμενή δεν έχει μεταβληθεί. Δίνονται: $g=10m/s^2$, $\rho_v=1000kg/m^3$ και $p_{ατμ}=10^5 N/m^2$.

Λύση

Ai. Οι βρύσες είναι κλειστές και το νερό δεν ρέει στις σωληνώσεις. Η πίεση στο σημείο Γ_1 είναι ίση με αυτή στο σημείο Γ.



$$p_\Gamma = p_{atm} + \rho g(h_2+h_3) \;\Rightarrow\; h_3 = \frac{p_\Gamma - p_{atm}}{\rho g} - h_2 \;\Rightarrow$$

$$h_3 = \frac{1,2\cdot10^5\frac{N}{m^2} - 10^5\frac{N}{m^2}}{1000\frac{kg}{m^3}10\frac{m}{s^2}} - 1,5m \;\Rightarrow\; h_3 = 0,5m$$

Επομένως, η χωρητικότητα (όγκος) της δεξαμενής είναι

$$V = A\cdot h_3 = 8m^2\cdot0,5m \;\Rightarrow\; V = 4m^3$$

ii. $$p_B = p_{atm} + \rho g(h_1+h_3) = 10^5\frac{N}{m^2} + 1000\frac{kg}{m^3}10\frac{m}{s^2}0,8m \;\Rightarrow\; p_B = 1,08\cdot10^5\frac{N}{m^2}$$

Bi. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού, μεταξύ του σημείου Α που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού του δοχείου και του σημείου Γ_1.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A + \rho g\left(h_3 + h_2\right) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_{\Gamma 1}^2 + p_{\Gamma 1}$$

$p_A = p_{\Gamma 1} = p_{atm}$ και $\upsilon_A = 0$, επομένως

$$\rho g\left(h_3 + h_2\right) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_{\Gamma 1}^2 \;\Rightarrow\; \upsilon_{\Gamma 1} = \sqrt{2g\left(h_3 + h_2\right)} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2}(0{,}5m + 1{,}5)m} \;\Rightarrow$$

$$\upsilon_{\Gamma 1} = \sqrt{40}\,\frac{m}{s}$$

ii. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού, μεταξύ του σημείου Α που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού του δοχείου και του σημείου B_1.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A + \rho g\left(h_3 + h_1\right) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_{B1}^2 + p_{B1}$$

$p_A = p_{B1} = p_{atm}$ και $\upsilon_A = 0$, επομένως

$$\rho g\left(h_3 + h_1\right) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_{B1}^2 \;\Rightarrow\; \upsilon_{B1} = \sqrt{2g\left(h_3 + h_1\right)} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2}(0{,}5m + 0{,}3)m} \;\Rightarrow\; \upsilon_{B1} = 4\frac{m}{s}$$

Η παροχή του νερού στη βρύση B_1 είναι $\Pi = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$

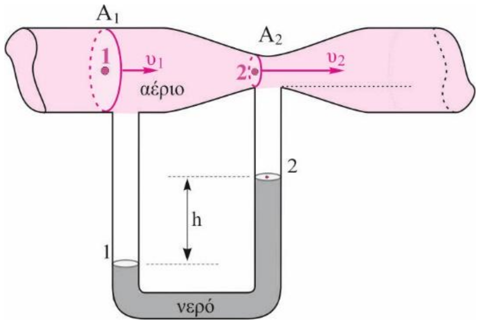
Επομένως, ο όγκος του νερού που φεύγει από τη βρύση είναι

$$\Delta V = \Pi \cdot \Delta t = A \cdot \upsilon_{B1} \cdot \Delta t \;\Rightarrow$$

$$\Delta V = \pi\frac{\delta^2}{4}\upsilon_{B1} \cdot \Delta t = \pi\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}10^{-2}\right)^2 m^2}{4} 4\frac{m}{s} \cdot 60s \;\Rightarrow\; \Delta V = 24 \cdot 10^{-3}\frac{m^3}{s} \;\Rightarrow\; \Delta V = 24\frac{L}{s}$$

Άσκηση 4.

Το σύστημα των σωλήνων του σχήματος ονομάζεται βεντουρίμετρο και χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας ροής ενός ρευστού σε ένα σωλήνα. Στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος ρέει φυσικό αέριο, η επιφάνεια A_1 είναι διπλάσια της A_2 με A_1=12cm^2. Στον υοειδή σωλήνα υπάρχει νερό και οι δύο στήλες έχουν διαφορά ύψους h=6,75 cm. Να βρείτε



Α. Τη διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων 1 και 2 που βρίσκονται στις ελεύθερες επιφάνειες του νερού.

Β. Την ταχύτητα του αερίου στο σημείο 1.

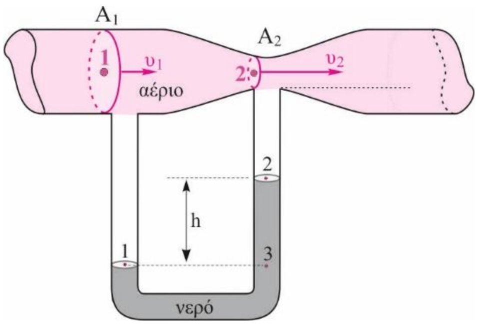
Γ. Την παροχή του αερίου στον οριζόντιο σωλήνα.

Δ. τον όγκο του αερίου που διέρχεται από μια διατομή του σωλήνα σε χρόνο 1min.

Δίνονται: η επιτάχυνση βαρύτητας g=10m/s^2, η πυκνότητα του αερίου ρ_a=0,5kg/m^3, η πυκνότητα του νερού ρ_v=1000kg/m^3.

<u>Λύση</u>

Α. Τα σημεία 1 και 3 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και το νερό είναι σε ισορροπία, άρα $p_1=p_3$.



Όμως από την υδροστατική

$$p_3 = p_2 + \rho_v gh \ \Rightarrow \ p_1 = p_2 + \rho_v gh \ \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \rho_v gh = 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 6,75\cdot 10^{-2}m \ \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = 675\frac{N}{m^2}$$

Β. Οι πιέσεις που επικρατούν στις ελεύθερες επιφάνειες του νερού είναι ίδιες με αυτές που επικρατούν στις επιφάνειες A_1, A_2 αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια οριζόντια φλέβα αερίου, μεταξύ των σημείων 1 και 2 του οριζόντιου σωλήνα

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + p_2 \ \Rightarrow \ p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \ \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right), \ (1)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία 1 και 2 παίρνουμε

$A_1υ_1=A_2υ_2$ ή $2A_2υ_1=A_2υ_2$ ή $υ_2=2υ_1$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho 3υ_1^2 \Rightarrow υ_1=\sqrt{\frac{2\cdot(p_1-p_2)}{3\rho}}=\sqrt{\frac{2\cdot 675\frac{N}{m^2}}{3\cdot 0,5\frac{kg}{m^3}}} \Rightarrow υ_1=30\frac{m}{s}$$

Γ. Η παροχή του αερίου στο σωλήνα είναι

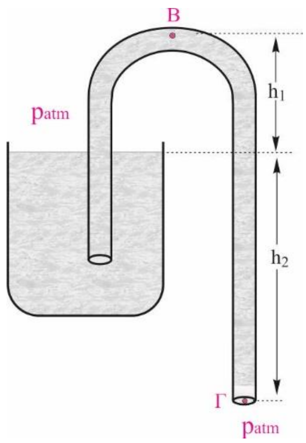
$$\Pi=A_1υ_1=12\cdot 10^{-4}m^2\cdot 30\frac{m}{s} \Rightarrow \Pi=36\cdot 10^{-3}\frac{m^3}{s}$$

Δ. Η παροχή του αερίου στο σωλήνα $\Pi=\frac{\Delta V}{\Delta t}$

Επομένως, ο όγκος του αερίου που διέρχεται από το σωλήνα είναι

$$\Delta V=\Pi\cdot\Delta t=36\cdot 10^{-3}\cdot 60s \Rightarrow \Delta V=2,160m^3 \Rightarrow \Delta V=2160L$$

Άσκηση 5.



Το δοχείο του σχήματος είναι ανοικτό, περιέχει νερό και ο καμπυλωτός σωλήνας (σίφωνας) είναι σταθερής διατομής. Για τις αποστάσεις του σχήματος ισχύουν h_1=0,3m, h_2=0,45m.

Να βρείτε:

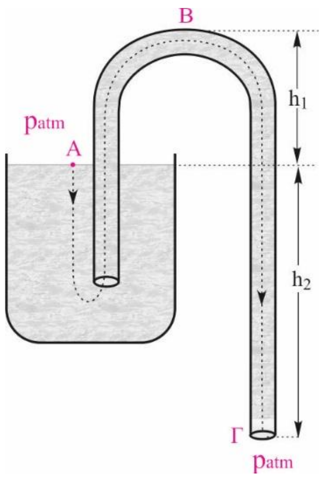
Α. την ταχύτητα εκροής του νερού από το σημείο Γ.

Β. την πίεση στο σημείο Β.

Γ. το μέγιστο ύψος h_1' για το οποίο έχουμε ροή νερού μέσα από το σίφωνα αν το άκρο Γ βρίσκεται σε ύψος h_2=0,45m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού του δοχείου.

Δίνονται: $p_{atm}=10^5 N/m^2$ και $g=10m/s^2$.

Λύση



Α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού που διέρχεται από τα σημεία Α (ελεύθερη επιφάνεια) και Γ (σημείο εξόδου). Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + p_\Gamma - \rho g h_2$$

$p_A=p_\Gamma=p_{atm}$ και $\upsilon_A=0$ οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται,

$$0 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 - \rho g h_2 \;\Rightarrow\; \upsilon_\Gamma = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}45m} \;\Rightarrow\; \upsilon_\Gamma = 3\frac{m}{s}$$

Β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού που διέρχεται από τα σημεία Α (ελεύθερη επιφάνεια) και Β.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B + \rho g h_1$$

$p_A=p_{atm}$ και $\upsilon_A=0$. Επειδή η διάμετρος του σωλήνα είναι σταθερή, σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας, η ταχύτητα των μαζών του νερού θα είναι ίδια σε κάθε σημείο του σωλήνα, άρα $\upsilon_B=\upsilon_\Gamma$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$p_{atm} = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + p_B + \rho g h_1 \Rightarrow p_B = p_{atm} - \rho g h_1 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \quad \textbf{(1)}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$p_B = 10^5 \frac{N}{m^2} - 1000\frac{kg}{m^3}10\frac{m}{s^2}0{,}3m - \frac{1}{2}1000\frac{kg}{m^3}\left(3\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow p_B = 92.500\frac{N}{m^2}$$

Γ. Για την πίεση στο σημείο Β ισχύει $p_B > 0$

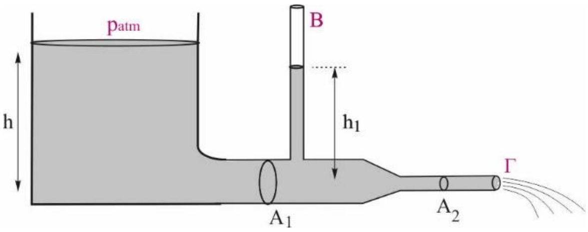
Από τη σχέση (1) με μαθηματική επεξεργασία και αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε:

$$p_B > 0 \text{ ή } p_{atm} - \rho g h_1' - \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 > 0 \Rightarrow p_{atm} > \rho g h_1' + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$h_1' < \frac{p_{atm} - \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2}{\rho g} \Rightarrow h_1' < \frac{10^5\frac{N}{m^2} - \frac{1}{2}1000\frac{kg}{m^3}\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{1000\frac{kg}{m^3}10\frac{m}{s^2}} \Rightarrow h_1' < 9{,}55m$$

Το μέγιστο ύψος είναι 9,55m.

Άσκηση 6.



Α. Η δεξαμενή του σχήματος περιέχει νερό και είναι ανοικτή στην ατμόσφαιρα. Το νερό διοχετεύεται μέσω του οριζόντιου σωλήνα μεταβλητής διατομής με $A_1=3A_2=120cm^2$ στο σημείο εξόδου Γ . Ο κατακόρυφος σωλήνας Β είναι τοποθετημένος σε σημείο του οριζόντιου σωλήνα με εμβαδόν A_1. Το ύψος της στήλης του νερού στη δεξαμενή είναι h=1,8m και θεωρούμε ότι κατά την εκροή του νερού από το Γ το ύψος h δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε:

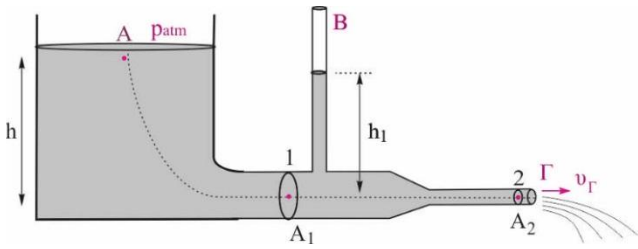
Α. την ταχύτητα εκροής από το σημείο Γ.

Β. την πίεση p_1 στο εσωτερικό του σωλήνα με διατομή A_1.

Γ. το ύψος h_1 της στήλης του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα Β.

Δίνονται: $p_{atm}=10^5\ N/m^2$, $g=10m/s^2$ και $\rho_v=1.000kg/m^3$.

Λύση



Α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2+p_A+\rho gh=\frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2+p_\Gamma$$

Επειδή $p_A=p_\Gamma=p_{atm}$ και $\upsilon_A=0$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\rho gh=\frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \ \Rightarrow\ \upsilon_\Gamma=\sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}1,8m}\ \Rightarrow\ \upsilon_\Gamma=6\frac{m}{s}$$

Β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για την φλέβα νερού από το Α μέχρι το σημείο 1 που η πίεση είναι p_1.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2+p_A+\rho gh=\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+p_1\quad ,\quad (1)$$

Έχουμε: $p_A=P_{atm}$ και $\upsilon_A=0$.

Επίσης, από το νόμο της συνέχειας μεταξύ των διατομών A_1 και A_2 παίρνουμε:

$\Pi_1=\Pi_2$ ή $A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_\Gamma$ ή $\upsilon_1=2m/s$.

Η σχέση (1) γίνεται

$$p_1 = p_{atm} + \rho g h - \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = 10^5 \frac{N}{m^2} + 1000\frac{kg}{m^3}10\frac{m}{s^2}1{,}8m - \frac{1}{2}1000\frac{kg}{m^3}\left(2\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow$$

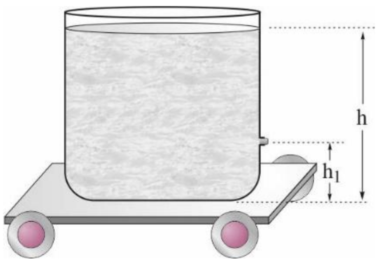
$$p_1 = 116.000\frac{N}{m^2}$$

Γ. Για την πίεση στο σημείο 1 από την υδροστατική έχουμε:

$$p_1 = p_{atm} + \rho g h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{p_1 - p_{atm}}{\rho g} = \frac{116.000\frac{N}{m^2} - 100.000\frac{N}{m^2}}{1000\frac{kg}{m^3}10\frac{m}{s}} \Rightarrow h_1 = 1{,}6m$$

Άσκηση 7.

Το δοχείο του σχήματος περιέχει νερό και είναι κολλημένο σταθερά στο αμαξίδιο. Η στάθμη του νερού φτάνει μέχρι ύψος h=0,5m και σε απόσταση h_1=5cm από τη βάση του δοχείου υπάρχει οπή εμβαδού A=40mm^2 η οποία φράσσεται με πώμα. Τη χρονική στιγμή t=0 αφαιρούμε το πώμα και νερό εκρέει από την οπή. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t=0:



Α. την ταχύτητα εκροής.

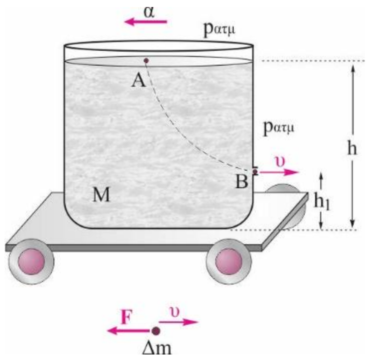
Β. τη μέση δύναμη που ασκεί μια στοιχειώδης εκρέουσα μάζα Δm του νερού στο δοχείο.

Γ. την επιτάχυνση του συστήματος δοχείο -νερό- αμαξίδιο , αν η συνολική μάζα του είναι m=10kg.

Δίνονται g=10m/s^2, ρ_v=1000kg/m^3.

Λύση

Α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα υγρού που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς αυτό που διέρχεται από το σημείο Β.



$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A + \rho g(h-h_1) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B$$

Όταν το υγρό εκρέει από την οπή έχει ταχύτητα υ_B=υ και η πίεσή του γίνεται ίση με την ατμοσφαιρική, επομένως p_A=p_B=p_{atm}. Επειδή το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από αυτό της οπής, υ_A=0 και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\rho g(h-h_1) = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \;\Rightarrow\; \upsilon = \sqrt{2g(h-h_1)} = \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}45m} \;\Rightarrow\; \upsilon = 3\frac{m}{s}$$

Β. Η ορμή μιας στοιχειώδους μάζας Δm που εξέρχεται από την οπή μεταβάλλεται κατά $\Delta p = \Delta m \cdot \upsilon$

Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Newton σε μια στοιχειώδη μάζα Δm του νερού.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot \upsilon}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot \Delta V \cdot \upsilon}{\Delta t} = \rho \cdot \Pi \cdot \upsilon = \rho \cdot A \cdot \upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$F = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 40 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot \left(3 \frac{m}{s}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad F = 0{,}36N$$

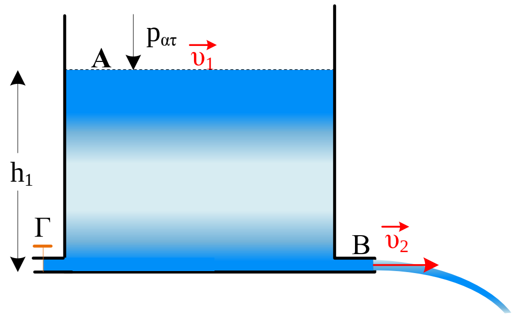
Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton και η στοιχειώδης μάζα ασκεί δύναμη στο ρευστό του δοχείου ίδιου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης, άρα $F = 0{,}36N$.

Γ. Η επιτάχυνση που αποκτά το σύστημα δοχείο με νερό-αμαξίδιο είναι

$$\alpha = \frac{F}{M} = \frac{0{,}36N}{10kg} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}036 \frac{m}{s^2}$$

Άσκηση 8.

Ένα δοχείο περιέχει νερό, μέχρι ορισμένο ύψος. Από κάποια βρύση διατομής A_2 που βρίσκεται στον πυθμένα του δοχείου, στη θέση Β, χύνεται το νερό. Η επιφάνεια του δοχείου έχει εμβαδό διατομής A_1 με $A_1 = 10A_2$. Σε κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητα εκροής του νερού είναι $υ_2 = 10$ m/s, ενώ την ίδια στιγμή η ταχύτητα πτώσης της ελεύθερης επιφάνειας του νερού έχει μέτρο $υ_1$. Να υπολογίσετε:



Α. την ταχύτητα με την οποία κατέρχεται η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Β. το ύψος h_1 του νερού στο δοχείο κατά τη στιγμή αυτή.

Γ. όταν η επιφάνεια του νερού στο δοχείο κατέβει κατά $\Delta h = 3{,}75$ m σε σχέση με την προηγούμενη στάθμη (h_1), ανοίγουμε μία δεύτερη βρύση που βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την πρώτη , θέση Γ και έχει την ίδια διατομή. Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η ελεύθερη επιφάνεια στο δοχείο.

Δίνεται g = 10 m/s^2.

<u>Λύση</u>

Α. Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 υ_1 = A_2 υ_2 \Rightarrow 10A_2 υ_1 = A_2 υ_2 \Rightarrow 10υ_1 = υ_2 \Rightarrow υ_1 = 1\frac{m}{s}$$

Β. Εφαρμόζουμε του νόμου του Bernoulli για τα σημεία Α (επιφάνεια του νερού) και το σημείο Β (σημείο εκροής του νερού) έχουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}ρυ_1^2 + ρgh_1 = p_2 + \frac{1}{2}ρυ_2^2 \quad (1)$$

αλλά $p_1 = p_2 = p_{ατ}$ έτσι η (1) γίνεται:

$$p_{ατ} + \frac{1}{2}ρυ_1^2 + ρgh_1 = p_{ατ} + \frac{1}{2}ρυ_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2}ρυ_1^2 + ρgh_1 = \frac{1}{2}ρυ_2^2 \Rightarrow h_1 = \frac{υ_2^2 - υ_1^2}{2g} \Rightarrow h_1 = 4{,}95\,m$$

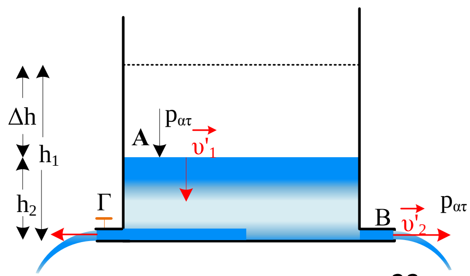
Γ. Όταν η στάθμη έχει κατέβει κατά Δh θα έχουμε:

$$\Delta h = h_1 - h_2 \Rightarrow h_2 = 1{,}2\,m$$

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε:

$$\Pi_1' = \Pi_2' \Rightarrow A_1 υ_1' = A_2 υ_2' + A_2 υ_2' \Rightarrow$$

$$10A_2 υ_1' = 2A_2 υ_2' \Rightarrow υ_2' = 5υ_1' \quad (2)$$

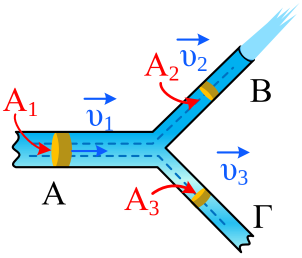


Εφαρμόζουμε του νόμου του Bernoulli για τα σημεία Α (επιφάνεια του νερού, $p_A = p_{ατ}$) και το σημείο Β ($p_B = p_{ατ}$, σημείο εκροής του νερού) έχουμε:

$$p_{ατ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1'^2 + \rho g h_2 = p_{ατ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2'^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\rho\upsilon_1'^2 + \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho \cdot 25\upsilon_1'^2 \Rightarrow$$

$$\rho g h_2 = 12\rho\upsilon_1'^2 \Rightarrow \upsilon_1' = \sqrt{\frac{gh_2}{12}} \Rightarrow \upsilon_1' = 1\frac{m}{s}$$

Άσκηση 9.



Οριζόντιος σωλήνας κυκλικής διατομής A_1 έχει διάμετρο $\delta_1 = \delta$. Σε κάποιο σημείο ο σωλήνας χωρίζεται σε δύο άλλους οριζόντιους σωλήνες κυκλικών διατομών A_2, A_3 με διαμέτρους $\delta_2 = \dfrac{\delta}{3}$ και $\delta_3 = \dfrac{2\delta}{3}$ αντίστοιχα. Το υγρό στο σωλήνα με κυκλική διατομή A_2 εξέρχεται στην ατμόσφαιρα. Στο σωλήνα με κυκλική διατομή A_1 το υγρό κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_1 = 5 m/s, ενώ στο σωλήνα με κυκλική διατομή A_2 το υγρό κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_2 = 25 m/s. Να υπολογιστεί

Α. η πίεση στο σημείο Α .

Β. το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_3$.

Γ. η πίεση στη θέση Γ . Το υγρό εξέρχεται στην ατμόσφαιρα ή ακόμη βρίσκεται μέσα σε σωλήνα;

Δίνεται ο τύπος για το εμβαδόν κυκλικής διατομής $A = \pi\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^2$, η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ} = 10^5\ N/m^2$ και η πυκνότητα του υγρού $\rho = 10^3\ kg/m^3$. Θεωρούμε το υγρό ιδανικό, την ροή στρωτή και τις τριβές αμελητέες.

<u>Λύση</u>

Α. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για την ρευματική γραμμή ΑΒ με $p_B = p_{ατ}$ και έχουμε:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow p_A = p_B + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow$$

$$p_A = \left(10^5\frac{N}{m^2} + \frac{1}{2}10^3\frac{kg}{m^3}(625-25)\frac{m^2}{s^2}\right) \Rightarrow p_A = 4\cdot 10^5\frac{N}{m^2}$$

Β. Το υγρό που κινείται στο σύστημα των σωλήνων είναι ασυμπίεστο επομένως η παροχή σε αυτούς είναι σταθερή. Αν Π_1, Π_2 και Π_3 οι παροχές στους αντίστοιχους σωλήνες, τότε ισχύει:

$$\Pi_1 = \Pi_2 + \Pi_3 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 + A_3\upsilon_3 \Rightarrow \pi\frac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1 = \pi\frac{\delta_2^2}{4}\upsilon_2 + \pi\frac{\delta_3^2}{4}\upsilon_3 \Rightarrow \delta_1^2\upsilon_1 = \delta_2^2\upsilon_2 + \delta_3^2\upsilon_3 \Rightarrow$$

$$\delta^2\upsilon_1 = \frac{\delta^2}{9}\upsilon_2 + \frac{4\delta^2}{9}\upsilon_3 \Rightarrow 4\upsilon_3 = 9\upsilon_1 - \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_3 = 5\frac{m}{s}$$

Γ. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για την ρευματική γραμμή ΑΓ και έχουμε:

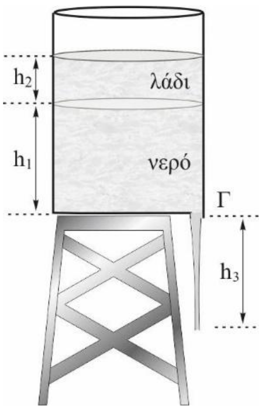
$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 \Rightarrow p_\Gamma = p_A + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_3^2) \Rightarrow$$

$$p_\Gamma = \left(10^5\,\frac{N}{m^2} + \frac{1}{2}10^3\,\frac{kg}{m^3}(25-25)\frac{m^2}{s^2}\right) \Rightarrow p_\Gamma = 4\cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}$$

Επειδή στο σημείο Γ, $p_\Gamma > p_{\alpha\tau\mu}$ το υγρό δεν έχει συναντήσει ακόμα την ατμόσφαιρα.

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.



Το δοχείο του σχήματος περιέχει δύο υγρά που δεν αναμιγνύονται. Το υγρό που είναι σε επαφή με τον πυθμένα του δοχείου είναι νερό πυκνότητας ρ_1=1000kg/m^3 και πάνω σε αυτό υπάρχει λάδι πυκνότητας ρ_2=800kg/m^3. Τα ύψη των υγρών είναι h_1=1,4m και h_2=0,5m αντίστοιχα. Το δοχείο είναι ανοικτό στην ατμόσφαιρα και στον πυθμένα του υπάρχει μία κλειστή κυκλική οπή μικρού εμβαδού συγκριτικά με το εμβαδόν βάσης του δοχείου. Ανοίγουμε την οπή. Να βρείτε:

Α. την πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια λαδιού-νερού.

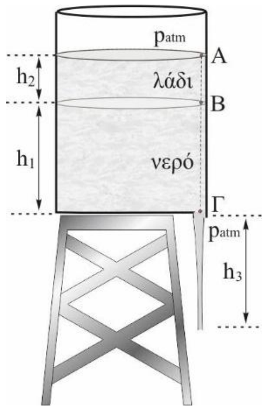
Β. την ταχύτητα εκροής από το σημείο Γ της οπής.

Γ. την παροχή της οπής αν η διάμετρός της είναι δ=2cm.

Δ. τη διάμετρο της υδάτινης στήλης σε απόσταση h_3=1,4m κάτω από το σημείο εκροής Γ.

Δίνονται: g=10m/s^2 και p_{atm}=10^5 N/m^2.

Λύση



Α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα λαδιού μεταξύ των σημείων Α και Β. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Β.

$$\frac{1}{2}\rho_{\lambda\alpha\delta}\upsilon_A^2 + p_A + \rho_{\lambda\alpha\delta} g h_2 = \frac{1}{2}\rho_{\lambda\alpha\delta}\upsilon_B^2 + p_B \quad , \ (1)$$

Επειδή η οπή εκροής έχει μικρό εμβαδόν σε σχέση με την ελεύθερη επιφάνεια του λαδιού στο δοχείο, η ταχύτητα του λαδιού στα σημεία Α και Β είναι μηδενική. Επίσης p_A=p_{atm}. Η σχέση (1) γίνεται

$$p_B = p_{atm} + \rho_{\lambda\alpha\delta} g h_2 = 10^5 \frac{N}{m^2} + 800\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}5m \ \Rightarrow \ p_B = 104.000\frac{N}{m^2}$$

Β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού, μεταξύ των σημείων Β και Γ. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Γ.

$$\frac{1}{2}\rho_{\nu\varepsilon\rho}\upsilon_B^2 + p_B + \rho_{\nu\varepsilon\rho} g h_1 = \frac{1}{2}\rho_{\nu\varepsilon\rho}\upsilon_\Gamma^2 + p_\Gamma$$

Επειδή υ_B=0 και p_Γ=p_{atm} έχουμε

$$p_B + \rho_{\nu\varepsilon\rho} g h_1 = \frac{1}{2}\rho_{\nu\varepsilon\rho}\upsilon_\Gamma^2 + p_{atm} \;\Rightarrow\; \upsilon_\Gamma = \sqrt{\frac{2\left(p_B + \rho_{\nu\varepsilon\rho} g h_1 - p_{atm}\right)}{\rho_{\nu\varepsilon\rho}}} \;\Rightarrow$$

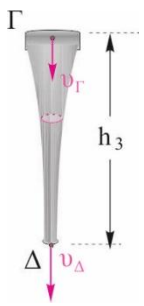
$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\frac{2\left(1{,}04\cdot 10^5\,\frac{N}{m^2} + 1000\,\frac{kg}{m^3}\,10\,\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}4m - 10^5\,\frac{N}{m^2}\right)}{1000\,\frac{kg}{m^3}}} \;\Rightarrow\; \upsilon_\Gamma = 6\,\frac{m}{s}$$

Γ. Η παροχή του νερού από την τρύπα είναι

$$\Pi = A_\Gamma \cdot \upsilon_\Gamma = \pi\frac{\delta^2}{4}\upsilon_\Gamma = \pi\frac{\left(2\cdot 10^{-2}\,m\right)^2}{4}6\,\frac{m}{s} \;\Rightarrow\; \Pi = 0{,}6\pi\cdot 10^{-3}\,\frac{m^3}{s}$$

Δ. Το νερό εξέρχεται κατακόρυφα από την τρύπα και λόγω της βαρύτητας η ταχύτητα των μαζών αυξάνεται. Η παροχή διατηρείται σταθερή. Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας, η αύξηση της ταχύτητας ροής προκαλεί μείωση της διατομής της υδάτινης στήλης.

Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για μια στοιχειώδη μάζα μεταξύ των σημείων Γ και Δ.



$$\frac{1}{2}\Delta m\upsilon_\Gamma^2 + \Delta m g h_3 = \frac{1}{2}\Delta m\upsilon_\Delta^2 \;\Rightarrow\; \upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_\Gamma^2 + 2gh_3} \;\Rightarrow$$

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{\left(6\frac{m}{s}\right)^2 + 2\cdot 10\frac{m}{s^2}1{,}4m} \;\Rightarrow\; \upsilon_\Delta = 8\frac{m}{s}$$

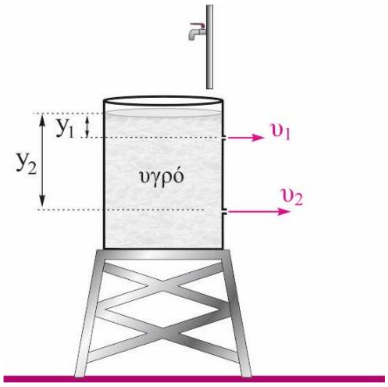
Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων Γ και Δ η παίρνουμε:

$$A_\Gamma \cdot \upsilon_\Gamma = A_\Delta \cdot \upsilon_\Delta = \pi\frac{\delta_\Delta{}^2}{4}\upsilon_\Delta \;\Rightarrow\; \delta_\Delta = \sqrt{\frac{4A_\Gamma \cdot \upsilon_\Gamma}{\pi\cdot\upsilon_\Delta}} = \sqrt{\frac{4\cdot 6\pi\cdot 10^{-4}\,\frac{m^3}{s}}{\pi\cdot 8\frac{m}{s}}} \;\Rightarrow$$

$$\delta_\Delta = \sqrt{3}\cdot 10^{-2}\,m$$

Πρόβλημα 2.

Το δοχείο του σχήματος είναι ανοικτό και περιέχει ιδανικό υγρό. Σε αποστάσεις y_1=0,2m και y_2=0,8m από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και στην ίδια κατακόρυφο ανοίγουμε δύο μικρές οπές εμβαδού Α=0,1cm^2 η κάθε μια. Το υγρό αρχίζει να χύνεται ταυτόχρονα και από τις δύο οπές.



Α. Να βρείτε:

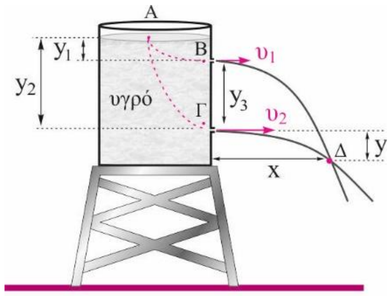
1. τις ταχύτητες εκροής από τις δύο οπές.

2. τη θέση του σημείου συνάντησης των δύο φλεβών νερού θεωρώντας ότι το δοχείο είναι αρκετά ψηλά σε σχέση με το έδαφος.

Β. Πάνω από το δοχείο βρίσκεται μια βρύση από την οποία χύνεται το ίδιο υγρό με τέτοια ροή ώστε, παρόλο που το υγρό εκρέει από τις οπές, η στάθμη του στο δοχείο να παραμένει σταθερή. Να βρείτε την παροχή του υγρού από τη βρύση.

Δίνεται g=10m/s^2.

<u>Λύση</u>



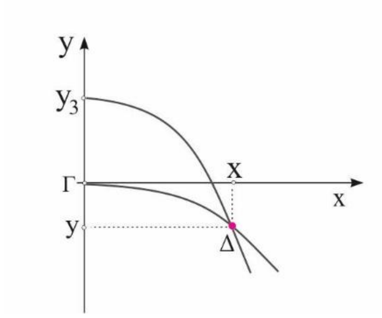
Α1. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα υγρού στα σημεία Α και Β βρίσκουμε:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gy_1} = \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}2m} \Rightarrow \upsilon_1 = 2\frac{m}{s}.$$

(Θεώρημα Torricelli).

Ομοίως, για τα σημεία Α και Γ βρίσκουμε

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gy_2} = \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}8m} \Rightarrow \upsilon_2 = 4\frac{m}{s}$$



Α2. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Γ (κάτω οπή) και τα θετικά στον κατακόρυφο άξονα προς τα κάτω. Οι φλέβες νερού συναντιούνται στο σημείο Δ το οποίο βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση x και κατακόρυφη απόσταση y από το σημείο Γ.

Η κίνηση κάθε φλέβας είναι οριζόντια βολή (ευθύγραμμη ομαλή στον άξονα x και ελεύθερη πτώση στον άξονα y).

Έστω τη χρονική στιγμή t=0 το υγρό εκρέει ταυτόχρονα και από τις δύο οπές. Οι φλέβες θα συναντηθούν στο Δ , όταν θα έχουν την ίδια οριζόντια μετατόπιση, x.

$x = \upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2 \Rightarrow 2t_1 = 4t_2 \Rightarrow t_1 = 2t_2$, (1)

Δηλαδή το νερό της οπής 1 θέλει διπλάσιο χρόνο για να φθάσει στο Δ από ότι το νερό της οπής 2.

Για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις έχουμε:

Για την φλέβα 1 : $y_3 + y = \frac{1}{2}gt_1^2$, (2)

Για την φλέβα 2 : $y = \frac{1}{2}gt_2^2$, (3)

Συνδυάζοντας τις (1),(2),(3) παίρνουμε

$$y_3 + \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{1}{2}g\left(2t_2^2\right) \Rightarrow 0{,}6\text{m} + 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t_2^2 = 20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t_2^2 \Rightarrow t_2 = 0{,}2\text{s}$$

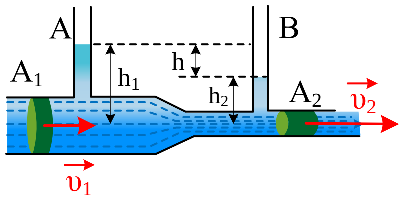
Άρα $x = \upsilon_2 t_2 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}2\text{s} \Rightarrow x = 0{,}8\text{m}$, $y = \frac{1}{2}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}0{,}2^2\text{s}^2 \Rightarrow y = 0{,}2\text{m}$

Β. Για να παραμένει η στάθμη του υγρού στο δοχείο σταθερή, θα πρέπει η παροχή του υγρού από τη βρύση να είναι ίση με αυτήν λόγω της εκροής από τις οπές του δοχείου.

$$\Pi = A\upsilon_1 + A\upsilon_2 = 0{,}1 \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \Rightarrow \Pi = 6 \cdot 10^{-5}\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \Rightarrow \Pi = 60\frac{\text{L}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 3.

Στο σωλήνα του σχήματος (ροόμετρο Ventouri) κινείται νερό. Οι διατομές του σωλήνα στα σημεία Α, Β είναι A_1, A_2 με $A_1 = 4A_2$ και η διαφορά στάθμης στους δύο κατακόρυφους ανοικτούς σωλήνες στα αντίστοιχα σημεία είναι h = 12 cm (βλέπε σχήμα).



Να υπολογιστεί

Α. η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων που βρίσκονται στις βάσεις των δύο κατακόρυφων στηλών Α και Β.

Β. το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ του υγρού στο σωλήνα διατομής A_1.

Γ. ο όγκος του νερού που περνά από τον σωλήνα σε t = 2 h αν για την διατομή ισχύει $A_1 = 200\ cm^2$.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$ και $\rho = 10^3\ kg/m^3$.

Λύση

Α. Από την υδροστατική, στις βάσεις των δύο κατακόρυφων στηλών Α και Β , για τις πιέσεις p_A και p_B αντίστοιχα ισχύει:

$p_A = p_{\alpha\tau} + \rho g h_1$ και $p_B = p_{\alpha\tau} + \rho g h_2$

Οπότε

$$p_A - p_B = \rho g(h_1 - h_2) \Rightarrow p_A - p_B = \rho g h = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}12 m \Rightarrow p_A - p_B = 1200 \frac{N}{m^2}$$

Β. Έστω υ_1 και υ_2 τα μέτρα των ταχυτήτων στα σημεία Α και Β του σωλήνα και p_A και p_B οι αντίστοιχες πιέσεις. Με εφαρμογή του νόμου του Bernoulli για τη ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχουμε:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \quad (1)$$

Από το νόμο της συνέχειας έχουμε:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow 4A_2\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = 4\upsilon_1 \quad (2)$$

Άρα από (1) και (2) έχουμε:

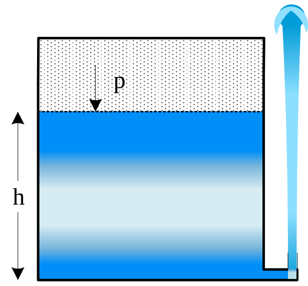
$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho(16\upsilon_1^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{15\rho}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1200\,\frac{N}{m^2}}{15\cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}}} \Rightarrow \upsilon_1 = 0,4\,\frac{m}{s}$$

Γ. Η παροχή δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = A_1\upsilon_1 \Rightarrow \frac{V}{t} = A_1\upsilon_1 \Rightarrow V = A_1\upsilon_1 t \Rightarrow V = 2\cdot 10^{-2}\,m^2\cdot 0,4\,\frac{m}{s}\cdot 7200\,s \Rightarrow V = 57,6\,m^3$$

Πρόβλημα 4.

Εντός κλειστού δοχείου μεγάλης διατομής υπάρχει νερό πυκνότητας ρ = 1000 kg/m^3 μέχρι ύψους h = 5 m. Πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού υπάρχει αέρας με πίεση p = $3{\cdot}10^5$ N/m^2. Στο κάτω άκρο του δοχείου υπάρχει μικρή οπή κατάλληλα διαμορφωμένη ώστε το νερό να εκτοξεύεται κατακόρυφα, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί:



Α. το ύψος της φλέβας του νερού που εκτοξεύεται από τη μικρή οπή.

Β. το μέτρο της ταχύτητας της φλέβας στο ισοϋψές σημείο με την επιφάνεια του νερού μέσα στο δοχείο.

Γ. η μεταβολή της πίεσης που πρέπει να υποστεί στο αέριο ώστε να διπλασιάσουμε το μέγιστο ύψος του πίδακα.

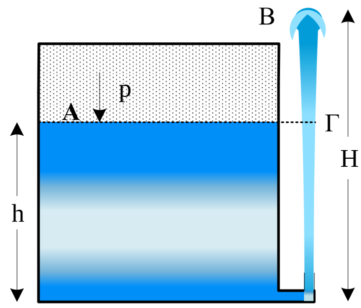
Δ. το ελάχιστο ύψος μιας όμοιας ανοιχτής δεξαμενής, ώστε η φλέβα να φτάσει στο ίδιο μέγιστο ύψος με αυτό της ερώτησης α, αν αντί για αέριο υπό πίεση είχαμε ανοικτή την πάνω επιφάνεια και συμπληρώναμε με λάδι πυκνότητας ρ_λ = 800 kg/m^3.

Δίνεται g = 10 m/s^2 και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\alpha\tau}$ = 10^5 N/m^2.

Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό και η ροή είναι μόνιμη και στρωτή.

<u>Λύση</u>

Α. Επειδή η διατομή του δοχείου είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τη διατομή της οπής, το ύψος της στάθμης του υγρού θεωρείται σταθερό. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη βάση της δεξαμενής.



Με εφαρμογή του νόμου του Bernoulli για τη ρευματική φλέβα που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχουμε:

$$p_A + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 = p_B + \rho g H + \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^2 \quad (1)$$

Αλλά υ_A = 0, (θεωρούμε ότι η επιφάνεια μέσα στο δοχείο είναι αρκετά μεγάλη ώστε να κατεβαίνει πολύ αργά), p_A = p και υ_B = 0 (βρισκόμαστε στο μέγιστο ύψος).

Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$p_A + \rho g h = p_B + \rho g H \Rightarrow H = \frac{p_A - p_B}{\rho g} + h \Rightarrow H = \left(\frac{3 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} - 10^5 \frac{N}{m^2}}{10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2}} + 5m \right) .$$

$$\Rightarrow H = 25\,m$$

Β. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τη ρευματική φλέβα που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ.

$$p_A + \rho g h = p_\Gamma + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{\frac{2(p_A - p_\Gamma)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(3 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} - 10^5 \frac{N}{m^2})}{10^3 \frac{kg}{m^3}}} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = 20\frac{m}{s}$$

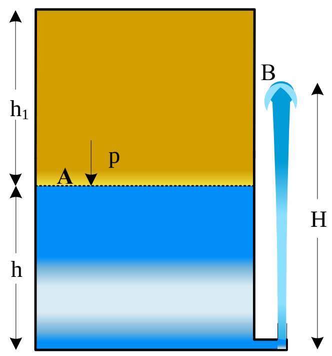
Γ. Το νέο μέγιστο ύψος θα είναι: H_1 = 2H = 50 m.

Έστω Δ το σημείο στο μέγιστο ύψος. Εφαρμόζω την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Α και Δ.

$$p'_A + \rho g h = p_\Delta + \rho g H_1 \Rightarrow p'_A = p_{\alpha\tau} + \rho g (H_1 - h) \Rightarrow p'_A = 5{,}5 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$$

Έτσι η μεταβολή της πίεσης είναι: $\Delta p_A = p'_A - p_A \Rightarrow \Delta p_A = 2{,}5 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$.

Δ. Για να πετύχουμε το ίδιο μέγιστο ύψος στην φλέβα θα πρέπει στο σημείο της νοητής επιφάνειας μεταξύ των δύο υγρών να έχουμε την ίδια πίεση με πριν (p_A = $3 \cdot 10^5$ N/m^2). Η υδροστατική πίεση που θα έχει το λάδι ύψους h_1 δίνεται από την σχέση: $p_\lambda = \rho_\lambda g h_1$



Άρα για την πίεση στο σημείο Α θα ισχύει:

$$p_A = p_\lambda + p_{\alpha\tau\mu} = \rho_\lambda g h_1 + p_{\alpha\tau} \Rightarrow h_1 = \frac{p_A - p_{\alpha\tau}}{\rho_\lambda g} \Rightarrow h_1 = 25\,m$$

Έτσι η δεξαμενή θα πρέπει να έχει τουλάχιστον ύψος: $h_{o\lambda} = h_1 + h \Rightarrow h_{o\lambda} = 30\,m$

Πρόβλημα 5.

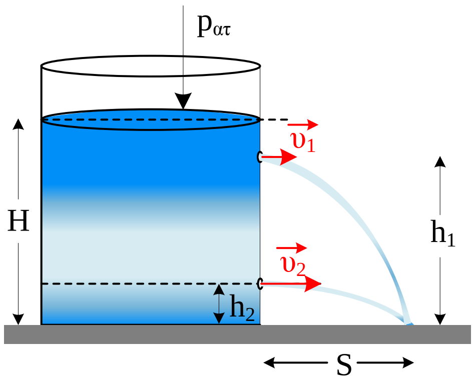
Δεξαμενή μεγάλης διατομής με κατακόρυφα τοιχώματα είναι τοποθετημένη στο έδαφος και περιέχει νερό μέχρι ύψους Η = 2 m.

Α. Να υπολογιστεί σε ποια απόσταση h από τον πυθμένα της δεξαμενής πρέπει να ανοίξουμε μικρή οπή, ώστε η φλέβα του νερού να συναντήσει το έδαφος σε οριζόντια απόσταση S = 1,2 m, από το τοίχωμα της δεξαμενής.

Β. Να δειχθεί ότι η μέγιστη απόσταση S είναι ίση με το ύψος Η του νερού στη δεξαμενή.

Γ. Να βρεθεί για ποια τιμή του h η απόσταση S γίνεται μέγιστη.

Λύση



Η ταχύτητα του νερού που εκτοξεύεται από την οπή που έχει ανοιχθεί σε απόσταση h από τη βάση της δεξαμενής σύμφωνα με το θεώρημα του Torricelli είναι: $υ=\sqrt{2gy} \Rightarrow υ=\sqrt{2g(H-h)}$ (1)

Η κίνηση κάθε μορίου της φλέβας του νερού είναι σύνθετη:

Οριζόντιος άξονας:

Ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα υ, οπότε είναι

S = υt (2)

Κατακόρυφος άξονας:

Ελεύθερη πτώση οπότε είναι $: h=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2=\frac{2h}{g}$ (3).

Από (2) και (3) έχουμε:

$$S=υt \Rightarrow S^2=υ^2t^2 \Rightarrow S^2=υ^2\frac{2h}{g} \overset{(1)}{\Rightarrow} S^2=2g(H-h)\frac{2h}{g} \Rightarrow 4h^2-4hH+S^2=0 \quad (4).$$

Με αντικατάσταση των Η και S στην (4) παίρνουμε:

$$4h^2-8h+1,44=0 \Rightarrow h^2-2h+0,36=0 \qquad (5)$$

Η σχέση (5) είναι εξίσωση Β′ βαθμού με Δ = 2,56 και έχει λύσεις **h_1 = 1,8 m** και **h_2 = 0,2 m.**

Άρα υπάρχουν δύο θέσεις της οπής, που είναι συμμετρικές ως προς το μέσο της δεξαμενής, για τις οποίες έχουμε το ίδιο S.

Β. Από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι για να έχει λύση πρέπει:

$\Delta \geq 0 \Rightarrow 16H^2 - 16S^2 \geq 0 \Rightarrow H^2 - S^2 \geq 0 \Rightarrow H \geq S$ άρα **S_{max} = H = 2 m.**

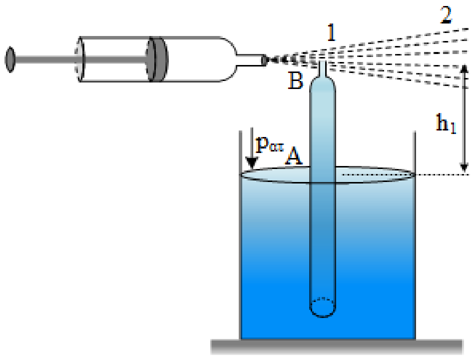
Γ. Με αντικατάσταση στην σχέση (4) της μέγιστης τιμής του S παίρνουμε:

$4h^2 - 8h + 4 = 0 \Rightarrow h^2 - 2h + 1 = 0 \Rightarrow (h-1)^2 = 0 \Rightarrow h = 1m$

Άρα, η οπή πρέπει να ανοιχθεί στο μέσο του ύψους της δεξαμενής h = 1 m και η οριζόντια απόσταση που συναντά το έδαφος η φλέβα του νερού είναι S = H = 2 m.

Πρόβλημα 6.

Στο σχήμα φαίνεται η αρχή λειτουργίας ενός ψεκαστήρα που στο δοχείο του υπάρχει υγρό ψεκασμού πυκνότητας $\rho_{υγ} = 10^3$ N/m^3. Για να λειτουργεί ο ψεκαστήρας πρέπει το υγρό ψεκασμού να ανέρχεται από το δοχείο στον κατακόρυφο σωλήνα ως το χείλος αυτού, σημείο Β.



Α. Να βρείτε με ποια ταχύτητα πρέπει να εξέρχεται ο αέρας από το ακροφύσιο του ψεκαστήρα αν το τμήμα του σωλήνα που βρίσκεται έξω από το υγρό έχει ύψος h_1 = 10 cm.

Β. Όταν ο αέρας εξέρχεται από το ακροφύσιο με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 42 m/s, πόσο μπορεί να είναι το μέγιστο ύψος h_2 του σωλήνα που βρίσκεται έξω από το υγρό;

Γ. Το συνολικό μήκος του σωλήνα είναι Η = 16,025 cm, και τον σταθεροποιούμε σε θέση που να σχηματίζεται στήλη υγρού ύψους h_3= 11,025 cm όταν ψεκάζουμε με την κατάλληλη ταχύτητα. Ψεκάζουμε με σταθερό ρυθμό 40 ψεκ./min. Μετά από πόσο χρόνο θα σταματήσει να λειτουργεί ο ψεκαστήρας; Δίνεται ότι ο μέσος όγκος των δημιουργούμενων σταγονιδίων είναι 60 nL (nano L) και κάθε ψεκασμός "παρασύρει" 2000 σταγονίδια.

Δίνονται πυκνότητα αέρα $\rho_α$ = 1,25 kg/m^3, εμβαδόν της βάσης του δοχείου Α = 24 cm^2 και g = 10 m/s^2.

Λύση

Α. Έστω $\vec{υ}_1$ η ταχύτητα που εξέρχεται ο αέρας από το ακροφύσιο του ψεκαστήρα, θέση (1). Αν p_1 η πίεση που επικρατεί στη θέση (1), τότε η πίεση του αέρα στη θέση (2), που θεωρούμε ότι βρίσκεται μακριά από τη διάταξη, είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}$, και η ταχύτητα του αέρα και των σταγονιδίων είναι $υ_2$ = 0. Με εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli για τις θέσεις (1) και (2) έχουμε:

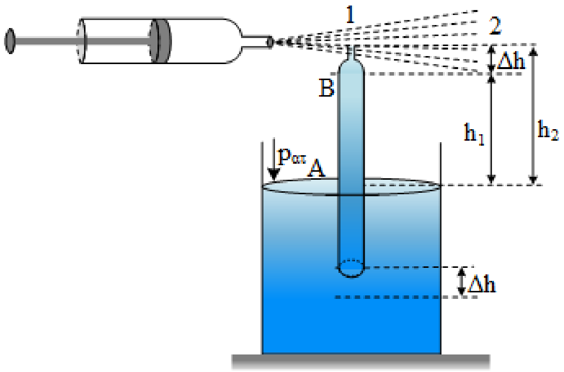
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_α υ_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_α υ_2^2 \quad (1)$$

αλλά $p_2 = p_{ατ}$ και $υ_2 = 0$ οπότε η (1) γίνεται: $p_1 + \frac{1}{2}\rho_α υ_1^2 = p_{ατ}$ (2)

Στην επιφάνεια του υγρού του δοχείου ψεκασμού επικρατεί η ατμοσφαιρική πίεση. Επομένως στο σωλήνα που ανέρχεται το υγρό ψεκασμού η πίεση στη βάση του είναι: $p_{ατμ} = p_1 + \rho_{υγ} g h_1$ (3).

Η (2) λόγω (3) δίνει: $\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{2\rho_{\upsilon\gamma} g h_1}{\rho_\alpha}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{2\cdot 10^3 \dfrac{kg}{m^3}\cdot 10\dfrac{m}{s^2}\cdot 0{,}1m}{1{,}25\dfrac{kg}{m^3}}} \Rightarrow \upsilon_1 = 40\dfrac{m}{s}$

Β. Εφαρμόζουμε ανάλογη διαδικασία και λύνουμε ως προς το ύψος. Αφού



φυσάμε με μεγαλύτερη ταχύτητα το μέγιστο ύψος h_2 του σωλήνα που βρίσκεται έξω από το υγρό μπορεί να είναι μεγαλύτερο από πριν, όπως στο σχήμα. Θα προκύψει:

$$\frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_2^2 = \rho g h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{\rho_\alpha \upsilon_2^2}{2\rho g} \Rightarrow h_2 = \frac{1{,}25\dfrac{kg}{m^3}\cdot\left(42\dfrac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 10^3\dfrac{kg}{m^3}\cdot 10\dfrac{m}{s^2}} \Rightarrow$$

$$h_2 = 0{,}11025\,m \Rightarrow h_2 = 11{,}025\,cm$$

Γ. Ο όγκος του νερού που θα πρέπει να βγει από το δοχείο ώστε αυτό να μην λειτουργεί είναι: $V = A\Delta h = A(H - h_2) \Rightarrow V = 24\cdot 10^{-4} m^2 \cdot 5\cdot 10^{-2} m \Rightarrow$

$$V = 120\cdot 10^{-6}\, m^3 \Rightarrow V = 120\,ml$$

Ο όγκος υγρού που αφαιρείται με κάθε ψεκασμό είναι:

$$V_1 = \text{σταγόνες}\cdot\text{όγκος σταγόνας} = 2000\cdot 60\cdot 10^{-9} L \Rightarrow$$

$$V_1 = 120\cdot 10^{-6} L \Rightarrow V_1 = 120\cdot 10^{-3}\, ml$$

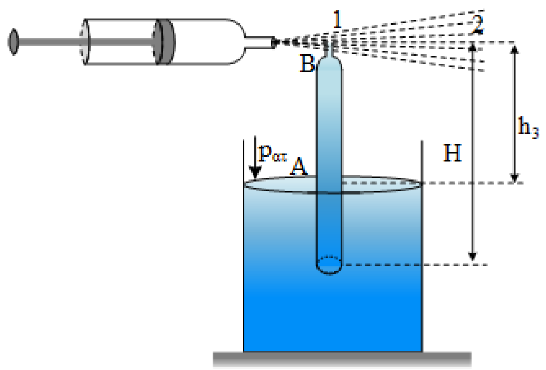
Συνεπώς οι ψεκασμοί είναι:

$$N = \frac{V}{V_1} \Rightarrow N = \frac{120mL}{120\cdot 10^{-3} mL} \Rightarrow N = 1000\,\text{ψεκασμοί}$$

Άρα σε κάθε 1 min έχουμε 40 ψεκασμούς

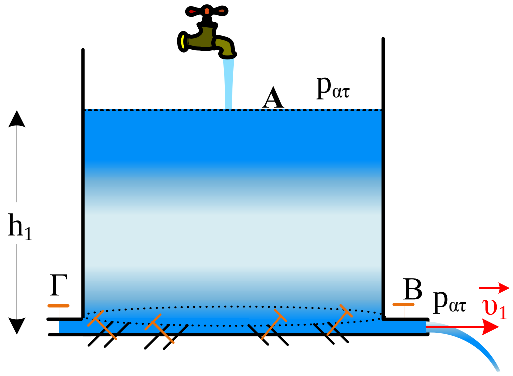
x 1000

Τελικά x = 25 min.



Πρόβλημα 7.

Ανοικτή δεξαμενή νερού έχει στον πυθμένα βρύσες πανομοιότυπες που η κάθε μία έχει εμβαδό διατομής Α = 2 cm^2. Η δεξαμενή τροφοδοτείται από σωλήνα από τον οποίο τρέχει νερό στην ελεύθερη επιφάνεια της με σταθερή παροχή Π = 0,8 L/s .



Α. Να υπολογίσετε σε ποιο ύψος η στάθμη του νερού παραμένει σταθερή στη δεξαμενή όταν έχουμε ανοιχτή μία βρύση.

Β. Να βρείτε την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στην έξοδο.

Γ. Αν θέλουμε να ποτίσουμε τον κήπο μας με το παραπάνω σύστημα, πόσες βρύσες μπορούμε να ανοίξουμε ταυτόχρονα, δεδομένου ότι ικανοποιητική παροχή έχουμε όταν η στάθμη στη δεξαμενή δεν πέφτει κάτω από h_2 = 0,2 m.

Δίνεται g = 10 m/s^2 και η πυκνότητα του νερού ρ = 10^3 kg/m^3.

Θεωρήστε τη ροή στρωτή, το νερό ιδανικό ρευστό και την ταχύτητα με την οποία πέφτει το νερό από τον σωλήνα στη δεξαμενή είναι περίπου μηδέν.

Λύση

Α. Μετατρέπουμε τα μεγέθη σε μονάδες του S.I.

Π = 0,8 L/s = $8\cdot10^{-1}\cdot10^{-3}$ m^3/s = $8\cdot10^{-4}$ m^3/s και Α = 2 cm^2 = $2\cdot10^{-4}$ m^2.

Έστω h_1 το ύψος του νερού όταν έχουμε ισορροπία στις παροχές, δηλαδή το ύψος h_1 είναι αυτό που πρέπει να έχει το νερό στη δεξαμενή ώστε η παροχή νερού από το σωλήνα να είναι ίση με την παροχή εκροής του νερού από τη βρύση.

Συνεπώς θα ισχύει: $\Pi = \Pi_1 \Rightarrow \Pi = A\cdot\upsilon_1$ (1)

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για τα σημεία Α (επιφάνεια του νερού) και το σημείο Β (σημείο εκροής του νερού) έχουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad (2)$$

αλλά $p_1 = p_2 = p_{ατμ}$ έτσι η (2) γίνεται:

$$p_{ατ} + \rho g h_1 = p_{ατ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} \quad (3).$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει:

$$\Pi = A\cdot\sqrt{2gh_1} \Rightarrow h_1 = \frac{\Pi^2}{2A^2 g} \Rightarrow h_1 = \frac{(8\cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s})^2}{2(2\cdot 10^{-4}m^2)^2\cdot 10\frac{m}{s^2}}m \Rightarrow h_1 = 0,8\,m\,.$$

Β. Από την σχέση (3) προκύπτει ότι $(3) \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0,8}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1 = 4\frac{m}{s}$

Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι:

$$\frac{K_1}{V} = \frac{1}{2}\rho_\upsilon \upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{K_1}{V} = \frac{1}{2}10^3\frac{kg}{m^3}\cdot\left(4\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow \frac{K_1}{V} = 8000\frac{J}{m^3}$$

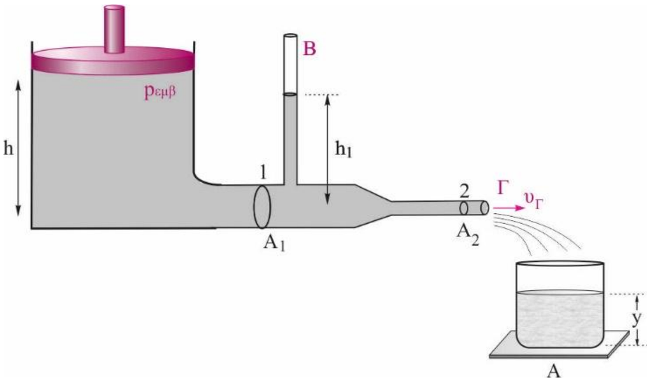
Γ. Από την σχέση (3) μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα εκροής για το ελάχιστο ύψος στο δοχείο.

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh_2} \Rightarrow \upsilon_2 = 2\frac{m}{s}\,.$$

Αφού η στάθμη σταθεροποιηθεί στο ύψος h_2 θα ισχύει:

$$\Pi = \nu\Pi_2 \Rightarrow \Pi = \nu A\upsilon_2 \Rightarrow \nu = \frac{\Pi}{A\upsilon_2} \Rightarrow \nu = \frac{8\cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s}}{2\cdot 10^{-4}m^2\cdot 2\frac{m}{s}} \Rightarrow \nu = 2 \text{ βρύσες.}$$

Πρόβλημα 8.



Η δεξαμενή του σχήματος περιέχει νερό και φέρει ένα έμβολο ώστε να καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια του νερού. Το νερό διοχετεύεται μέσω του οριζόντιου σωλήνα μεταβλητής διατομής με $A_1=3A_2=12cm^2$ στο σημείο εξόδου Γ από όπου εκρέει πέφτοντας στο δοχείο εμβαδού βάσης $A=0,288m^2$. Ο κατακόρυφος σωλήνας Β είναι τοποθετημένος σε σημείο του οριζόντιου σωλήνα με εμβαδόν A_1. Το ύψος της στήλης του νερού στη δεξαμενή είναι h=1,8m και θεωρούμε ότι κατά την εκροή του νερού από το Γ το ύψος h δεν μεταβάλλεται. Τη χρονική στιγμή t=0 πιέζουμε προς τα κάτω το έμβολο με αποτέλεσμα το νερό να εκρέει από το σημείο Γ με ταχύτητα 9m/s. Να βρείτε:

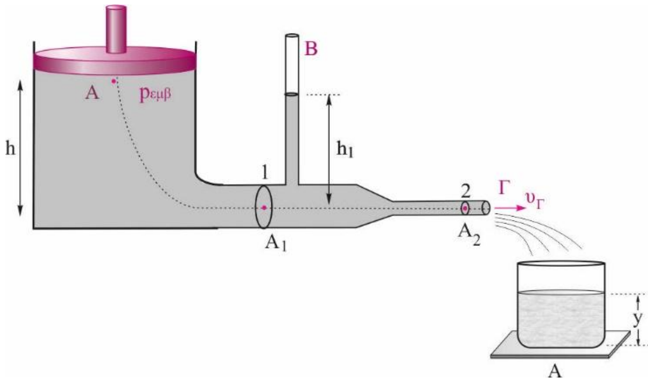
Α. την πίεση $p_{εμβ}$ μεταξύ εμβόλου και της επιφάνειας του νερού στη δεξαμενή.

Β. το ύψος h_1 της στήλης του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα Β.

Γ. την αύξηση του ύψους y του νερού στο δοχείο μετά από χρόνο 1 min.

Δίνονται: $p_{atm}=10^5\ N/m^2$, $g=10m/s^2$ και $ρ_ν=1.000kg/m^3$.

<u>Λύση</u>



Α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ.

$$\frac{1}{2}ρυ_A^2 + p_{εμβ} + ρgh = \frac{1}{2}ρυ_Γ^2 + p_Γ$$

Επειδή $p_Γ=p_{atm}$ και $υ_A=0$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$p_{εμβ} = \frac{1}{2}ρυ_Γ^2 + p_{atm} - ρgh = \frac{1}{2}1000\frac{kg}{m^3}\left(9\frac{m}{s}\right)^2 + 10^5\frac{N}{m^2} - 1000\frac{kg}{m^3}10\frac{m}{s^2}1,8m \Rightarrow$$

$$p_{εμβ} = 122.500\frac{N}{m^2}$$

Β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για την φλέβα νερού από το Α μέχρι το σημείο 1 που η πίεση είναι p_1.

$$\frac{1}{2}ρυ_A^2 + p_{εμβ} + ρgh = \frac{1}{2}ρυ_1^2 + p_1 \quad , \quad (1) \quad , \quad υ_A=0$$

Από το νόμο της συνέχειας παίρνουμε $Π_1=Π_2$ ή $A_1υ_1=A_2υ_Γ$ ή $υ_1=3m/s$.

Η σχέση (1) γίνεται

$$p_1 = p_{\varepsilon\mu\beta} + \rho g h - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = 1,22\cdot 10^5\,\frac{N}{m^2} + 1000\,\frac{kg}{m^3}10\,\frac{m}{s^2}1,8m - \frac{1}{2}1000\,\frac{kg}{m^3}\left(3\,\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow$$

$$p_1 = 136.000\,\frac{N}{m^2}$$

Η πίεση στο σημείο 1 είναι

$$p_1 = p_{atm} + \rho g h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{p_1 - p_{atm}}{\rho g} = \frac{136.000\,\frac{N}{m^2} - 100.000\,\frac{N}{m^2}}{1000\,\frac{kg}{m^3}10\,\frac{m}{s}} \Rightarrow h_1 = 3,6m$$

Γ. Η παροχή του νερού στο σωλήνα $\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

Επομένως, ο όγκος του νερού που φεύγει από το σωλήνα είναι

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta V = \Pi\cdot\Delta t = A_1\upsilon_1\cdot\Delta t = 12\cdot 10^{-4}cm^2\cdot 3\,\frac{m}{s}\cdot 60s \Rightarrow \Delta V = 0,216m^3$$

$$\Delta V = A\cdot y \Rightarrow y = \frac{\Delta V}{A} = \frac{0,216m^3}{0,288m^2} \Rightarrow y = 0,75m$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/11/2015

Επιμέλεια: Βασίλειος Δουκατζής, Ηλίας Ποντικός, Γεώργιος Χαρίλας
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Η ΤΡΙΒΗ ΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

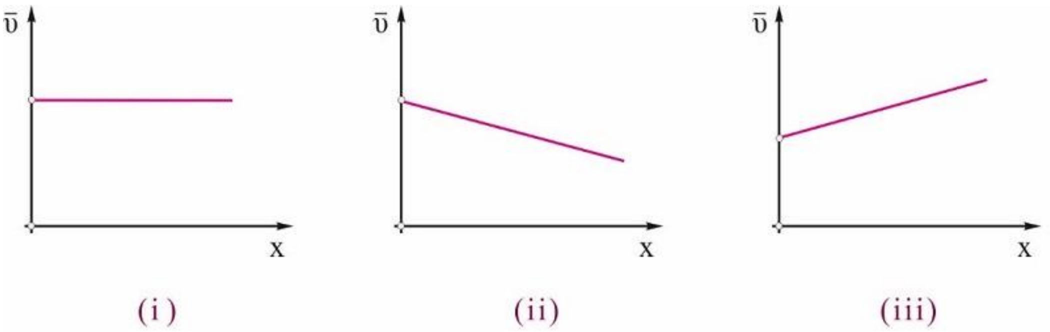
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα πραγματικό ρευστό ρέει σε οριζόντιο σωλήνα σταθερής κυλινδρικής διατομής.

Η μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}$ του ρευστού στην κατεύθυνση ροής του δίνεται από το διάγραμμα



Να επιλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

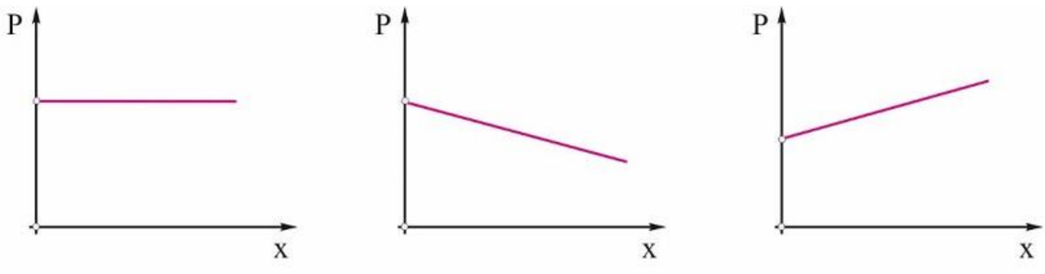
<u>Λύση</u>

Σωστό είναι το διάγραμμα (i).

Σε ένα πραγματικό ρευστό που ρέει σε κυλινδρικό σωλήνα οι ταχύτητες των μορίων του ρευστού παίρνουν τιμές από μηδέν έως μια μέγιστη τιμή. Έτσι ο τύπος της παροχής γράφεται $\Pi = A\bar{\upsilon}$. Από εξίσωση συνέχειας , προκύπτει ότι η παροχή είναι σταθερή και αφού Α = σταθ. ισχύει και $\bar{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\vartheta$.

Ερώτηση 2.

Ένα πραγματικό ρευστό ρέει σε οριζόντιο σωλήνα σταθερής διατομής με σταθερή ταχύτητα. Η πίεση κατά μήκος του σωλήνα στην κατεύθυνση ροής του ρευστού μπορεί να δίνεται από το διάγραμμα.



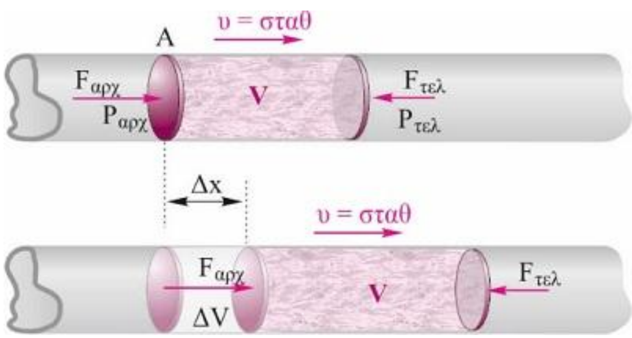
(i) (ii) (iii)

Να επιλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστό είναι το διάγραμμα (ii).

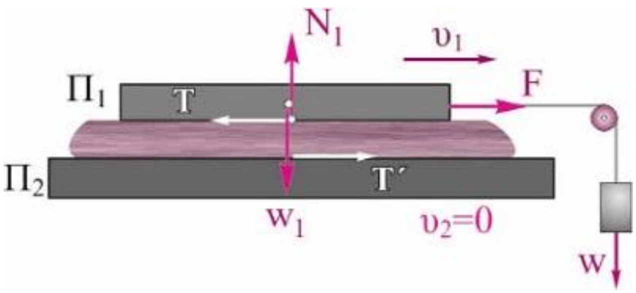
Το ρευστό είναι πραγματικό, επομένως αναπτύσσεται τριβή μεταξύ των μορίων του η οποία μετατρέπει μέρος της μηχανικής του ενέργεια σε θερμότητα. Εφόσον η ταχύτητα είναι σταθερή, η ενέργεια που χάνεται αναπληρώνεται μέσω του έργου της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο τμήμα του ρευστού που περιβάλλεται μεταξύ των δύο διατομών από το υπόλοιπο ρευστό.



$W = F_{αρχ}\,Δx - F_{τελ}\,Δx = p_{αρχ}A\cdot Δx - p_{τελ}A\cdot Δx$ ή $W = (p_{αρχ} - p_{τελ})ΔV$

Αφού $W>0$ θα είναι και $p_{αρχ} - p_{τελ} > 0$. Άρα στην κατεύθυνση ροής η πίεση μειώνεται.

Ερώτηση 3.



Στη διπλανή διάταξη, η πλάκα Π_2 είναι ακλόνητη, ενώ η Π_1 μπορεί να κινείται μέσω μιας ασκούμενης σε αυτήν εξωτερικής οριζόντιας δύναμης F. Μεταξύ των πλακών υπάρχει ένα παχύρευστο υγρό. Τοποθετούμε βάρος w και παρατηρούμε ότι μετά από λίγο, η Π_1κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα υ_1. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα χρησιμοποιώντας μεγαλύτερο βάρος.

Α. Η πλάκα Π_1 μετά από λίγο θα κινείται και πάλι με σταθερή ταχύτητα.

Β. Η πλάκα θα επιταχύνεται συνεχώς.

Γ. Θα μεγαλώσει το ιξώδες του υγρού με αποτέλεσμα η πλάκα να αποκτήσει μετά από λίγο σταθερή ταχύτητα.

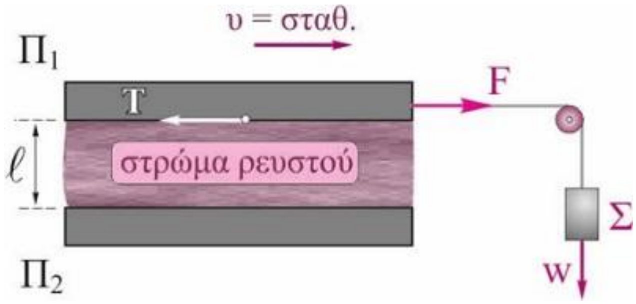
Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση Α.

Όταν τοποθετήσουμε μεγαλύτερο βάρος, έχουμε στην αρχή επιταχυνόμενη κίνηση, άρα αύξηση της ταχύτητας και σύμφωνα με τη σχέση $T = n\dfrac{A\upsilon}{\ell}$ αύξηση του μέτρου της τριβής. Όταν το μέτρο της τριβής γίνει ίσο με αυτό του νέου βάρους, η πλάκα θα σταματήσει να επιταχύνεται και θα κινείται πάλι με σταθερή ταχύτητα μεγαλύτερου μέτρου από το υ_1.

Ερώτηση 4.



Στη διπλανή διάταξη, η πλάκα $Π_2$ είναι ακλόνητη, ενώ η $Π_1$ μπορεί να κινείται μέσω μιας ασκούμενης σε αυτήν εξωτερικής οριζόντιας δύναμης F η οποία οφείλεται στο βάρος w του σώματος Σ. Μεταξύ των πλακών υπάρχει ένα παχύρευστο υγρό. Παρατηρούμε μετά από λίγο, η $Π_1$ κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα υ. Αντικαθιστούμε το σώμα Σ με ένα άλλο μεγαλύτερου βάρους. Για να κινηθεί η πλάκα $Π_1$πάλι προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα υ πρέπει να

Α. αυξήσουμε την απόσταση μεταξύ των πλακών και να διατηρήσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία (ρευστό, εμβαδόν πλακών) σταθερά.

Β. αυξήσουμε το εμβαδόν των πλακών και να διατηρήσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία (ρευστό, απόσταση μεταξύ πλακών) σταθερά.

Γ. αντικαταστήσουμε το ρευστό με άλλο που έχει μικρότερο συντελεστή ιξώδους και να διατηρήσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία (εμβαδόν πλακών και απόσταση μεταξύ τους) σταθερά.

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η απάντηση Β.

Όταν η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα, η συνισταμένη των δυνάμεων σε αυτήν είναι μηδέν, επομένως η εξωτερική δύναμη F έχει ίδιο μέτρο με την τριβή. Όταν μεγαλώνουμε το βάρος του Σ, μεγαλώνει η δύναμη F, άρα όταν υ=σταθ μεγαλώνει και το μέτρο της τριβής Τ.

Σύμφωνα με τη σχέση $T = n\frac{Aυ}{\ell}$, το μέτρο της τριβής αυξάνει όταν αυξήσουμε την ταχύτητα της πλάκας, ή όταν αυξήσουμε το εμβαδόν των πλακών ή τοποθετήσουμε ανάμεσα στις πλάκες ένα ρευστό μεγαλύτερου ιξώδους, η αν μειώσουμε την απόσταση μεταξύ των πλακών. Η μόνη πρόταση που ικανοποιεί τα παραπάνω είναι η Β

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Μια λεπτή πλάκα εμβαδού $A=25cm^2$ τοποθετείται πάνω σε σταθερή οριζόντια επιφάνεια. Μεταξύ της πλάκας και της επιφάνειας παρεμβάλλεται στρώμα γλυκερίνης πάχους l με ιξώδες $n_\gamma=800\cdot10^{-3}Ns/m^2$. Ασκούμε οριζόντια δύναμη F=20mN και παρατηρούμε ότι η πλάκα μετά από λίγο μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα υ=10cm/s. Να βρείτε:

Α. το πάχος του ρευστού που παρεμβάλλεται μεταξύ της πλάκας και της επιφάνειας.

Β. Την ισχύ της δύναμης η οποία ασκείται για να υπερνικηθούν οι τριβές.

Γ. Αφαιρούμε το ρευστό και τοποθετούμε νερό ίδιου πάχους με ιξώδες $n_\nu=10^{-3}Ns/m^2$. Ασκούμε στην πλάκα την ίδια οριζόντια δύναμη και αυτή μετά από λίγο μετατοπίζεται πάλι με σταθερή ταχύτητα $υ_1$. Να βρείτε το μέτρο της $υ_1$

<u>Λύση</u>

Α. Αφού η πλάκα μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα, η δύναμη F έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της τριβής ολίσθησης. Επομένως

$$F=T=n_\gamma\frac{A\upsilon}{\ell}\quad\Rightarrow\quad \ell=\frac{n_\gamma A\upsilon}{F}=\frac{800\cdot10^{-3}\frac{Ns}{m^2}\cdot25\cdot10^{-4}\frac{m}{s^2}0,1\frac{m}{s}}{20\cdot10^{-3}N}\quad\Rightarrow\quad \ell=0,01m$$

Β. $$P=\frac{\Delta W_F}{\Delta t}=\frac{F\cdot\Delta x}{\Delta t}\quad\Rightarrow\quad P=F\cdot\upsilon=20\cdot10^{-3}N\cdot0,1\frac{m}{s}\quad\Rightarrow\quad P=0,2\,W$$

Γ. $$F=n_\nu\frac{A\upsilon_1}{\ell}\quad\Rightarrow\quad \upsilon_1=\frac{F\cdot\ell}{n_\nu\cdot A}=\frac{20\cdot10^{-3}N\cdot0,01m}{10^{-3}\frac{Ns}{m^2}\cdot25\cdot10^{-4}\frac{m}{s^2}}\quad\Rightarrow\quad \upsilon_1=80\frac{m}{s}$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο. Το ιξώδες του νερού είναι 800 φορές μικρότερο από αυτό της γλυκερίνης. Επομένως για την ίδια άσκηση δύναμης, η πλάκα θα αποκτήσει ταχύτητα 800 φορές μεγαλύτερη.

Ημερομηνία τροποποίησης: 5/11/2015

Επιμέλεια: Ηλίας Ποντικός
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης