ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

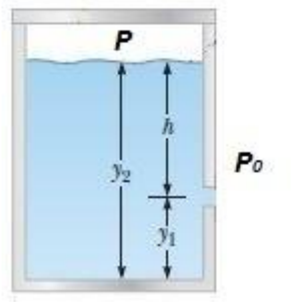
ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΥΓΡΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Στο σχήμα φαίνεται ένα κλειστό δοχείο που είναι σχεδόν γεμάτο με νερό. Με p_o συμβολίζουμε την πίεση που επικρατεί στον ατμοσφαιρικό αέρα εκτός δοχείου κοντά στην οπή και με p την πίεση που επικρατεί στον παγιδευμένο αέρα μέσα στο δοχείο. Στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου και σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού ανοίγουμε μία μικρή οπή, απ' όπου αρχίζει να τρέχει νερό. Δεδομένου ότι δεν εισέρχεται αέρας από την οπή στο δοχείο, το νερό θα τρέχει από την οπή μέχρις ότου



α) συμβεί $y_2 = y_1$.

β) συμβεί $p_0 = p + \rho g h$, όπου ρ η πυκνότητα του νερού.

γ) οι πιέσεις p και p_0 γίνουν ίσες.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η πρόταση β.

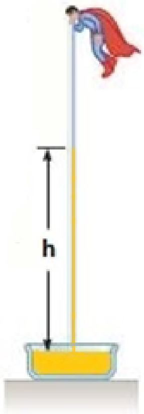
Η πίεση του νερού αριστερά της οπής είναι $p + \rho g h$, ενώ δεξιά της είναι p_0. Αφού τα ρευστά ρέουν από μεγαλύτερη προς μικρότερη πίεση και το νερό εξέρχεται από την οπή ισχύει

$$p + \rho g h > p_0 \quad \textbf{(1)}.$$

Καθώς το νερό βγαίνει από τη οπή, το h μειώνεται, ο όγκος του παγιδευμένου αέρα αυξάνεται με συνέπεια να μειώνεται η πίεση P. Έτσι έχουμε μείωση της υδροστατικής πίεσης $\rho g h$ και μείωση της πίεσης p, με αποτέλεσμα το πρώτο μέλος της σχέσης **(1)** να μειώνεται. Όταν εξισωθούν τα δύο μέλη της σχέσης **(1)** η ροή του νερού θα σταματήσει.

Ερώτηση 2.

Ο σούπερμαν της διπλανής εικόνας θα μπορούσε να ρουφήξει τη πορτοκαλάδα του από ένα δοχείο με κατακόρυφο καλαμάκι οσοδήποτε μεγάλου μήκους;



α) Ναι, γιατί ο σούπερμαν μπορεί να ρουφήξει με απεριόριστη δύναμη.

β) Ναι, γιατί το ίδιο μπορεί να κάνει και κάθε κοινός άνθρωπος.

γ) Όχι, γιατί η ατμοσφαιρική πίεση έχει ορισμένη πεπερασμένη τιμή με αποτέλεσμα να ανυψώνει το υγρό μέχρι ένα ορισμένο ύψος.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση γ.

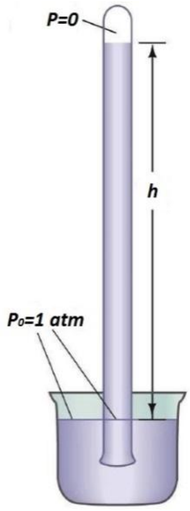
Ο σούπερμαν πρέπει να ρουφήξει αρχικά όλον τον αέρα που βρίσκεται μέσα στο καλαμάκι. Έτσι, η επιφάνεια του υγρού μέσα στο καλαμάκι έχει μηδενική πίεση και έξω από αυτό ίση με την ατμοσφαιρική. Η δημιουργούμενη διαφορά πίεσης σπρώχνει την πορτοκαλάδα που βρίσκεται μέσα στο καλαμάκι προς τα πάνω και δημιουργείται στήλη ύψους h, μέχρι να εξισωθούν οι δύο πιέσεις. Αυτό θα συμβεί όταν

$$\rho_{\pi o \rho \tau} g h = P_{\alpha \tau \mu} \Rightarrow h = \frac{P_{\alpha \tau \mu}}{\rho_{\pi o \rho \tau} g}.$$

Αυτό είναι το μέγιστο ύψος που μπορεί να έχει η στήλη της πορτοκαλάδας μέσα στο καλαμάκι, δηλαδή το μέγιστο ύψος της στήλης δεν εξαρτάται από τις ικανότητες του σούπερμαν αλλά από την τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.



Στον κατακόρυφο σωλήνα του σχήματος έχει αφαιρεθεί όλος ο αέρας και το δοχείο περιέχει νερό πυκνότητας $\rho=1\ g/cm^3$. Να βρεθεί το ύψος της στήλης νερού που μπορεί να «σηκώσει» η ατμοσφαιρική πίεση, $p_0=1{,}013\cdot 10^5\ N/m^2$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=9{,}81\ m/sec^2$.

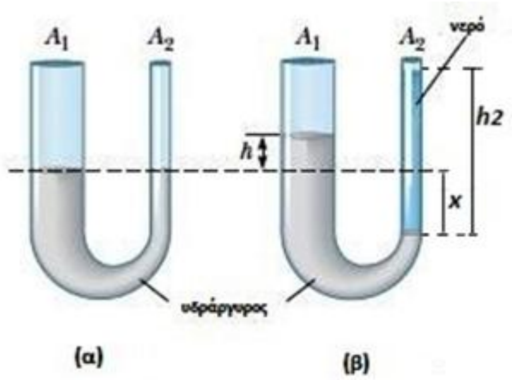
Λύση

Στη βάση της στήλης του νερού του σωλήνα που έχει ύψος h, η υδροστατική πίεση είναι ίση με $\rho g h$ και επειδή δεν υπάρχει αέρας στο πάνω μέρος του σωλήνα (p=0) είναι και η συνολική πίεση. Στην επιφάνεια του νερού του δοχείου επικρατεί πίεση ίση με την ατμοσφαιρική . Τα δύο σημεία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο υγρού που ισορροπεί, άρα έχουν την ίδια ολική πίεση. Έχουμε λοιπόν

$$p_0 = p + \rho g h \Rightarrow h = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{1{,}013\cdot 10^5 \dfrac{N}{m^2}}{\dfrac{10^{-3}}{10^{-6}}\dfrac{kg}{m^3}\, 9{,}81\dfrac{m}{s^2}} \text{ ή } h \approx 10{,}32\,m$$

Άσκηση 2.

Στο διπλανό δοχείο σχήματος U ρίχνουμε υδράργυρο όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Οι διατομές των δύο σκελών του δοχείου έχουν εμβαδά A_1= 10 cm^2 και A_2= 5 cm^2 (αριστερό και δεξιό αντίστοιχα). Στη συνέχεια ρίχνουμε 100 g νερού στο δεξιό σκέλος του σωλήνα όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο υγρά δεν αναμειγνύονται.



Α) Να υπολογιστεί το ύψος της στήλης του νερού που δημιουργήθηκε.

Β) Να υπολογιστεί η ανύψωση h, της ελεύθερης επιφάνειας του υδραργύρου στο αριστερό σκέλος του σωλήνα.

Δίνονται: η πυκνότητα του υδραργύρου ρ_1=13,6 g/cm^3 και η πυκνότητα του νερού

ρ_2=1 g/cm^3.

<u>Λύση</u>

Α) Για τις πράξεις συμφέρει να μείνουν τα μεγέθη με τις μονάδες που δίνονται στην εκφώνηση (το παλιό σύστημα C.G.S).

Για τη μάζα του νερού ύψους h_2 στο δεξιό σκέλος του σωλήνα έχουμε

$$m = \rho_2 V_2 \Rightarrow m = \rho_2 A_2 h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{m}{\rho_2 A_2} \Rightarrow h_2 = \frac{100\text{gr}}{1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\cdot 5\text{cm}^2} \Rightarrow h_2 = 20\text{cm}\ .$$

Β) Ο όγκος του υδραργύρου που έφυγε από το δεξιό σκέλος είναι ίσος με αυτόν που προστέθηκε στο αριστερό. Αν ο υδράργυρος στο δεξιό σκέλος του σωλήνα κατέβηκε κατά x και στο αριστερό ανέβηκε κατά h ισχύει:

$$V_x = V_h \Rightarrow A_2 x = A_1 h \Rightarrow x = 2h \qquad \textbf{(1)}$$

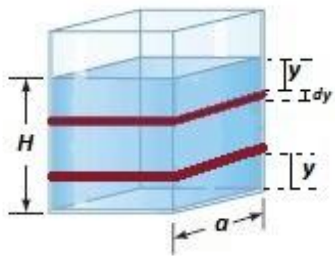
Οι συνολικές πιέσεις στα δύο σκέλη του σωλήνα και στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη βάση της στήλης του νερού είναι ίσες και επομένως ισχύει

$$\cancel{p_0} + \rho_2 g h_2 = \cancel{p_0} + \rho_1 g(h+x) \overset{(1)}{\Rightarrow} \rho_2 h_2 = \rho_1 3h \Rightarrow h = \frac{\rho_2}{3\rho_1}h_2 \Rightarrow h = \frac{1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{3\cdot 13,6\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}20\text{cm} \Rightarrow$$

$$h = \frac{20}{40,8}\text{cm} \simeq 0,49\,\text{cm}\ .$$

Άσκηση 3.

Ένα δοχείο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου που η βάση του είναι τετράγωνο πλευράς α, περιέχει υγρό πυκνότητας ρ και ύψους Η. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g, να βρεθεί η συνολική δύναμη που δέχεται μία πλευρική επιφάνεια του δοχείου από το νερό σε συνάρτηση με τα ρ, g, H και α.



<u>Λύση</u>

Θεωρούμε μία στοιχειώδη οριζόντια λωρίδα της πλευρικής επιφάνειας ύψους dy που βρίσκεται σε βάθος y. Η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια αυτή έχει μέτρο

$dF_1 = pdA = \rho g y \alpha (dy)$.

Θεωρούμε επίσης την συμμετρική ως προς το μέσον του Η, στοιχειώδη οριζόντια λωρίδα, που απέχει επίσης y αλλά από το πυθμένα του δοχείου. Η δύναμη που δέχεται η επιφάνεια αυτή έχει μέτρο $dF_2 = pdA = \rho g(H-y)\alpha(dy)$.

Επομένως η συνισταμένη δύναμη που δέχονται και οι δύο στοιχειώδεις επιφάνειες (λωρίδες) έχει μέτρο $dF = dF_1 + dF_2 = \rho g H \alpha (dy)$.

Χωρίζοντας την πλευρική επιφάνεια σε πολλά ζεύγη στοιχειωδών οριζόντιων λωρίδων συμμετρικών μεταξύ τους ως προς το μέσον του Η, βρίσκουμε ότι η συνολική δύναμη που δέχεται η πλευρική επιφάνεια είναι ίση το άθροισμα των παραπάνω στοιχειωδών δυνάμεων, δηλαδή

$$F = \sum_{y=0}^{H/2} dF = \sum_{y=0}^{H/2} \rho g H \alpha \left(dy\right) = \rho g H \alpha \sum_{y=0}^{H/2} \left(dy\right) = \rho g H \alpha \frac{H}{2} \text{ ή } F = \frac{\rho g \alpha H^2}{2}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/10/2015

Επιμέλεια: Ιωάννης Σδρίμας
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ – ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Όταν ποτίζουμε τα λουλούδια με το λάστιχο κήπου, για να πάει το νερό μακρύτερα μειώνουμε την επιφάνεια του στομίου. Αυτό το κάνουμε για να αυξήσουμε

α) την πίεση στο νερό του σωλήνα.

β) την παροχή του σωλήνα.

γ) την ταχύτητα ροής στο στόμιο του σωλήνα.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

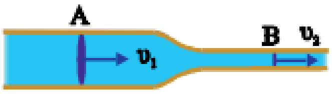
Λύση

Σωστή είναι η γ

Από την αρχή διατήρησης της ύλης προκύπτει ότι η παροχή νερού στο λάστιχο είναι σταθερή. Μειώνοντας την επιφάνεια Α του στομίου του σωλήνα, σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας Π=Αυ, αυξάνουμε τη ταχύτητα ροής του νερού.

Ερώτηση 2.

Το εμβαδόν διατομής του σωλήνα στην περιοχή Α είναι τριπλάσιο της διατομής του στην περιοχή Β.



Η ταχύτητα υ_2 του υγρού στην περιοχή Β είναι 9 cm/s. Η ταχύτητα στην περιοχή Α είναι

α) υ_1= 3 cm/s β) υ_1 = 9 cm/s γ) υ_1= 27 cm/s .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση α.

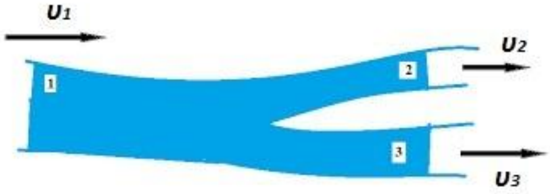
Εφόσον το εμβαδόν διατομής του σωλήνα στην περιοχή Α είναι τριπλάσιο της διατομής του στην περιοχή Β θα είναι $A_1=3A_2$.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε σταθερή παροχή:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow 3A_2 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot 9 \Rightarrow \upsilon_1 = 3cm/s$$

Ερώτηση 3.

Στο σχήμα δείχνεται ένα τμήμα οριζόντιου σωλήνα ύδρευσης εμβαδού διατομής A_1, στον οποίο το νερό (που θεωρείται ιδανικό ρευστό) ρέει με ταχύτητα $υ_1$. Σε κάποιο σημείο ο σωλήνας διακλαδίζεται σε δύο μικρότερους σωλήνες διατομών A_2 και A_3, στους οποίους το νερό ρέει με ταχύτητες $υ_2$ και $υ_3$ αντίστοιχα. Ισχύει η σχέση



α) $υ_1 = υ_2 + υ_3$

β) $A_1υ_1 = A_2υ_2 + A_3υ_3$

γ) $A_1 = A_2 + A_3$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η β.

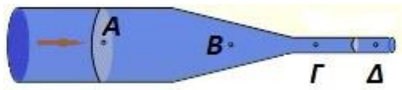
Από την αρχή διατήρησης της ύλης προκύπτει ότι όσο νερό περνά από μία διατομή του μεγάλου σωλήνα σε χρονικό διάστημα Δt, εξέρχεται και από τους δύο μικρότερους σωλήνες στον ίδιο χρονικό διάστημα. Άρα

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} + \frac{\Delta m_3}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\rho \Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V_2}{\Delta t} + \frac{\rho \Delta V_3}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi_1 = \Pi_2 + \Pi_3 \quad \text{ή} \quad A_1υ_1 = A_2υ_2 + A_3υ_3$$

Ερώτηση 4.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα τμήμα ενός οριζόντιου σωλήνα μέσα στον οποίο έχουμε στρωτή ροή ενός ιδανικού ρευστού σταθερής παροχής. Καθώς μια στοιχειώδης μάζα του ρευστού μετατοπίζεται από το Α στο Β.



α) επιβραδύνεται

β) μειώνεται η κινητική της ενέργεια.

γ) δέχεται ενέργεια με τη μορφή έργου από το περιβάλλον ρευστό.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

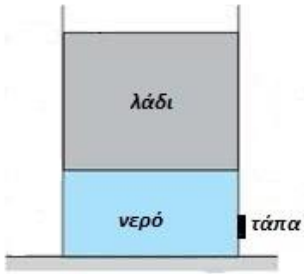
Λύση

Σωστή είναι η γ.

Από την εξίσωση της συνέχειας Π=Αυ=σταθερό, προκύπτει ότι καθώς το ρευστό προωθείται σε περιοχή με μικρότερη διατομή αυξάνεται η ταχύτητά του με συνέπεια να αυξάνεται και η κινητική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας. Από το θεώρημα έργου-ενέργειας ($K_{τελ}$-$K_{αρχ}$=W) προκύπτει ότι, αφού αυξάνεται η κινητική ενέργεια της Δm το περιβάλλον της προσφέρει ενέργεια με τη μορφή έργου.

Ερώτηση 5.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα κατακόρυφο δοχείο που περιέχει λάδι και νερό (που δεν αναμειγνύονται) και ισορροπούν το ένα πάνω στο άλλο. Κοντά στη βάση του δοχείου υπάρχει μία μικρή τρύπα η οποία είναι κλειστή με τη βοήθεια μιας τάπας. Ανοίγουμε την τάπα. Αν με $υ_λ$ συμβολίσουμε την ταχύτητα με την οποία κατέρχεται η επιφάνεια του λαδιού και $υ_ν$ τη ταχύτητα που κατέρχεται η επιφάνεια του νερού, ισχύει



α) $υ_λ = υ_ν$

β) $υ_λ > υ_ν$

γ) $υ_λ < υ_ν$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η α.

Το δοχείο είναι σταθερής διατομής. Συμβολίζουμε με A_1, A_3 τα εμβαδά των διατομών αντίστοιχα του δοχείου και της οπής.

Η εξίσωση της συνέχειας για την επιφάνεια του λαδιού και την επιφάνεια της οπής γράφεται:

$A_1 υ_λ = A_3 υ_3$ **(1)**

Η εξίσωση της συνέχειας για την επιφάνεια του νερού και την επιφάνεια της οπής γράφεται:

$A_1 υ_ν = A_3 υ_3$ **(2)**

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει $υ_λ = υ_ν$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Ένας αεραγωγός θέρμανσης ανανεώνει πλήρως τον αέρα ενός δωματίου όγκου 300 m^3 κάθε 10 λεπτά. Ο αέρας στο εσωτερικό του αγωγού κινείται με ταχύτητα 2 m/s. Υποθέστε ότι η πυκνότητα του αέρα παραμένει συνεχώς σταθερή.

α) Να βρεθεί η παροχή του αγωγού.

β) Να βρεθεί η επιφάνεια της εγκάρσιας διατομής του αεραγωγού θέρμανσης.

Να θεωρήσετε ότι ο αέρας έχει τις ιδιότητες του ιδανικού ρευστού.

Λύση

α) Σύμφωνα με την εκφώνηση, ο αεραγωγός πρέπει να ανανεώνει όγκο 300 m^3 κάθε 10 λεπτά. Από τον ορισμό της παροχής έχουμε:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{300\,m^3}{600\ sec} \Rightarrow \Pi = 0,5\frac{m^3}{sec}$$

β) Από τον μαθηματικό τύπο της παροχής έχουμε:

$$\Pi = A\upsilon \Rightarrow A = \frac{\Pi}{\upsilon} = \frac{0,5\frac{m^3}{sec}}{2\frac{m}{sec}} \Rightarrow A = 0,25\,m^2$$

Άσκηση 2

Μια βρύση με παροχή 30 L/min είναι συνδεδεμένη με λάστιχο ποτίσματος διατομής A_1. Στην άκρη του λάστιχου προσαρμόζουμε ένα στενό στόμιο διατομής A_2, με $A_2= A_1/5$. Το στόμιο βρίσκεται σε ύψος h=1,8 m από το έδαφος και το νερό που εκτοξεύεται από αυτό οριζόντια φτάνει στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση s=6 m. Να βρεθούν:

α) το χρονικό διάστημα που θέλει το νερό για να φθάσει το νερό από το στόμιο στο έδαφος.

β) η ταχύτητα εκροής του νερού από το στόμιο.

γ) το εμβαδό διατομής του στομίου εκτόξευσης του νερού.

δ) την ταχύτητα του νερού στο λάστιχο ποτίσματος.

Να θεωρήσετε ότι η ροή του νερού έχει τις ιδιότητες του ιδανικού ρευστού.

Δίνεται g=10 m/sec^2.

<u>Λύση</u>

α) Το νερό εκτελεί οριζόντια βολή και ο χρόνος πτώσης του στο έδαφος είναι:

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2\cdot 1,8\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}}} \Rightarrow t=0,6\ \mathrm{sec}.$$

β) Στον οριζόντιο άξονα το νερό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και επομένως ισχύει:

$$s=\upsilon t \Rightarrow \upsilon=\frac{s}{t} \Rightarrow \upsilon=10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

γ) Η παροχή του νερού της βρύσης διατηρείται σταθερή σε όλη τη διαδρομή του μέσα στο λάστιχο, άρα και τη στιγμή της εξόδου από το στόμιο. Επομένως:

$$\Pi=A_2\upsilon \Rightarrow A_2=\frac{\Pi}{\upsilon} \Rightarrow A_2=\frac{\frac{30\cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3}{60\ \mathrm{sec}}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}}=0,5\cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 \Rightarrow A_2=0,5\mathrm{cm}^2$$

δ) Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας στο λάστιχο και στο στόμιο έχουμε:

$$A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1=\frac{A_2\upsilon_2}{A_1} \Rightarrow \upsilon_1=2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

Άσκηση 3

Στους ανθρώπους, το αίμα ρέει από την καρδιά στην αορτή και στη συνέχεια εισέρχεται στις κύριες αρτηρίες. Αυτές διακλαδίζονται σε μικρότερες αρτηρίες, οι οποίες με τη σειρά τους διακλαδίζονται σε δισεκατομμύρια λεπτά τριχοειδή. Το αίμα επιστρέφει πίσω στην καρδιά μέσω των φλεβών. Η διάμετρος μιας αορτής είναι περίπου Δ=1,2 cm και το αίμα που κυκλοφορεί σε αυτήν έχει ταχύτητα περίπου $υ_1$=40 cm/s. Ένα τυπικό τριχοειδές αγγείο έχει ακτίνα $r=2\cdot10^{-4}$ cm, και το αίμα που κυκλοφορεί σε αυτό τρέχει με $υ_2$=0,05 cm/s περίπου. Εκτιμήστε την τάξη μεγέθους του πλήθους των τριχοειδών αγγείων που βρίσκονται στο ανθρώπινο σώμα.

Να θεωρήσετε ότι η ροή του αίματος έχει τις ιδιότητες του ιδανικού ρευστού.

<u>Λύση</u>

Έστω A_1 το εμβαδό διατομής της αρτηρίας και A_2 το άθροισμα των εμβαδών όλων των διατομών των τριχοειδών αγγείων μέσω των οποίων ρέει το αίμα. Αν με N συμβολίσουμε το πλήθος των τριχοειδών αγγείων, τότε $A_2 = N\pi r^2$.

Από την εξίσωση της συνέχειας, έχουμε:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \pi R^2\upsilon_1 = N\pi r^2\upsilon_2 \Rightarrow \pi\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\upsilon_1 = N\pi r^2\upsilon_2 \Rightarrow N = \frac{\Delta^2\upsilon_1}{4r^2\upsilon_2} \Rightarrow$$

$$N = \frac{(1,2\,\text{cm})^2 \cdot \dfrac{40\,\text{cm}}{\text{sec}}}{4\cdot\left(2\cdot10^{-4}\right)^2 \cdot \dfrac{0,05\,\text{cm}}{\text{sec}}} \Rightarrow N = 7,2\cdot10^9$$

Επομένως το πλήθος των τριχοειδών αγγείων είναι της τάξης των 5-10 δισεκατομμυρίων.

Ημερομηνία τροποποίησης: 10/11/2015

Επιμέλεια: Παναγιώτης Μπετσάκος, Ιωάννης Σδρίμας
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

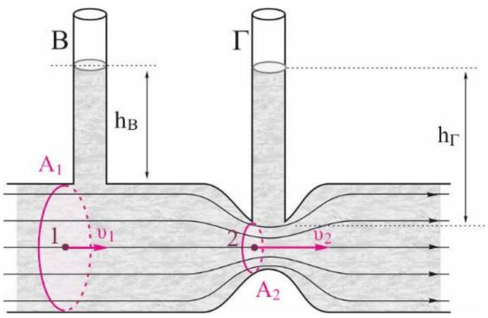
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Στο οριζόντιο σωλήνα του διπλανού σχήματος ρέει ιδανικό υγρό. Με τον οριζόντιο σωλήνα επικοινωνούν δύο κατακόρυφοι σωλήνες, Β και Γ. Για τα ύψη της στήλης του υγρού στο σωλήνα Β, h_B, και στο σωλήνα Γ, $h_Γ$, ισχύει



Α. $h_B > h_Γ$.

Β. $h_B < h_Γ$

Γ. $h_B = h_Γ$

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

Λύση

Σωστή είναι η πρόταση Α.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 της οριζόντιας φλέβας του υγρού.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + p_2 \qquad (1)$$

Σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας, όπου υπάρχει στένωση του σωλήνα η ταχύτητα μεγαλώνει, δηλαδή $υ_2 > υ_1$. Από τη σχέση (1) προκύπτει $p_2<p_1$.

Το υγρό στις στήλες είναι ακίνητο. Αφού μεταξύ του κάτω μέρους της στήλης του υγρού και του πάνω μέρους του οριζόντιου σωλήνα το υγρό δεν κινείται οι πιέσεις είναι ίσες. Έτσι, στο κάτω μέρος της στήλης του σωλήνα Β επικρατεί συνολική πίεση p_B που είναι ίση με p_1 .

$$p_B = p_1 \quad ή \; p_{ατμ} + \rho g h_B = p_1 \qquad (2)$$

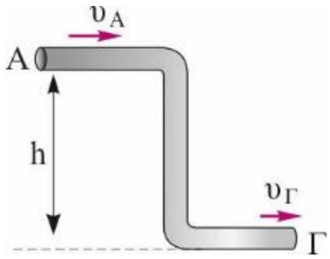
Αντίστοιχα για το σωλήνα Γ ισχύει:

$$p_Γ = p_2 \quad ή \; p_{ατμ} + \rho g h_Γ = p_2 \qquad (3)$$

Από τη σύγκριση των (2) και (3) προκύπτει $h_B > h_Γ$.

Ερώτηση 2.

Ο σωλήνας του διπλανού σχήματος έχει σταθερή διατομή και το υγρό ρέει με φορά από το Α προς το Γ. Τα σημεία Α και Γ απέχουν κατακόρυφα κατά h. Για τις ταχύτητες ροής στα Α και Γ ισχύει



Α. $\upsilon_A = \upsilon_\Gamma$

Β. $\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_A^2 + 2gh}$

Γ. $\upsilon_\Gamma = \sqrt{2gh}$

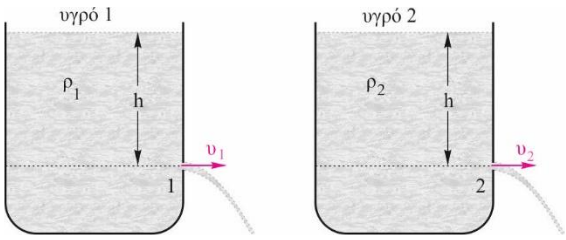
Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Α.

Εφόσον η παροχή διατηρείται χρονικά σταθερή και έχουμε σωλήνα σταθερής διατομής, η ταχύτητα του υγρού στο σωλήνα θα είναι σταθερή σε κάθε σημείο του.

Ερώτηση 3.



Τα δύο ίδια δοχεία του σχήματος περιέχουν υγρά με πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 όπου $\rho_1 = 2\rho_2$. Οι τρύπες που υπάρχουν σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια κάθε υγρού έχουν διατομές A_1 και A_2 όπου $A_2 = 2A_1$. Θεωρούμε ότι η διατομή κάθε τρύπας είναι πολύ μικρότερη από αυτήν της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και ότι η πίεση γύρω από το δοχείο είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Για τις παροχές των ρευστών που ρέουν από τις τρύπες 1 και 2 ισχύει

Α. $\Pi_1 = \Pi_2$

Β. $\Pi_1 = 2\Pi_2$

Γ. $\Pi_2 = 2\Pi_1$.

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Γ.

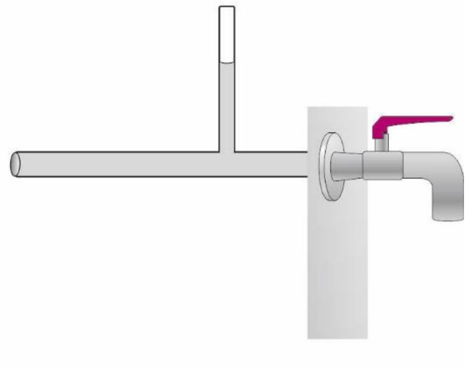
Η παροχή Π δίνεται από τη σχέση $\Pi = A\upsilon$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Toriccelli, η ταχύτητα εκροής υ είναι ίση με αυτήν που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h και δεν εξαρτάται από την πυκνότητα του υγρού. Επομένως, επειδή οι τρύπες βρίσκονται στο ίδιο βάθος, η ταχύτητα εκροής είναι ίδια και στα δύο δοχεία. Άρα

$$\Pi_1 = A_1\upsilon \quad \text{και} \quad \Pi_2 = A_2\upsilon = 2A_1\upsilon \quad \text{ή} \quad \Pi_2 = 2\Pi_1.$$

Ερώτηση 4.

Σε μια υδραυλική εγκατάσταση, λίγο πριν τη βρύση, είναι τοποθετημένος ένας κατακόρυφος σωλήνας ο οποίος είναι κλειστός στο επάνω μέρος του και περιέχει αέρα. Ο σωλήνας αυτός τοποθετείται ώστε να προστατεύεται ο οριζόντιος σωλήνας από την απότομη αύξηση της πίεσης όταν



Α. κλείνουμε τη βρύση.

Β. ανοίγουμε τη βρύση

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

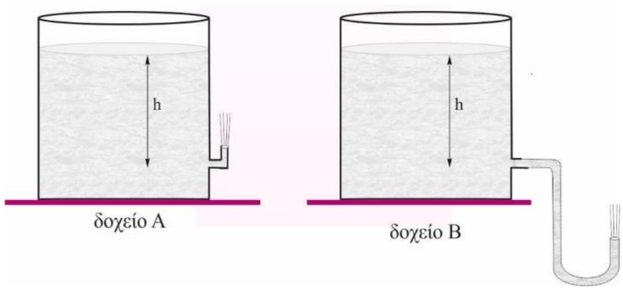
<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Α.

Σύμφωνα με την εξίσωση του Bernoulli, σε μια οριζόντια φλέβα υγρού, όπου η ταχύτητα μεγαλώνει, η πίεση μικραίνει και αντίστροφα. Με το κλείσιμο της βρύσης, η ταχύτητα του νερού στο σημείο της βρύσης μηδενίζεται απότομα με αποτέλεσμα τη δημιουργία στιγμιαία μεγάλης πίεσης (υπερπίεση) στην περιοχή που θέτει σε κίνδυνο την όλη εγκατάσταση. Η αυξημένη πίεση συμπιέζει τον εγκλωβισμένο αέρα στον κατακόρυφο σωλήνα ο οποίος λειτουργώντας ως αμορτισέρ απορροφά την αύξηση της πίεσης.

Ερώτηση 5.

Τα δύο δοχεία του σχήματος έχουν το ίδιο εμβαδό βάσης, περιέχουν νερό και σε βάθος h υπάρχει τρύπα εμβαδού πολύ μικρότερου από αυτό της ελεύθερης επιφάνειας. Το νερό μετά την έξοδό του από την τρύπα κάθε δοχείου φθάνει



Α. σε μεγαλύτερο ύψος στο δοχείο Α

Β. σε μεγαλύτερο ύψος στο δοχείο Β.

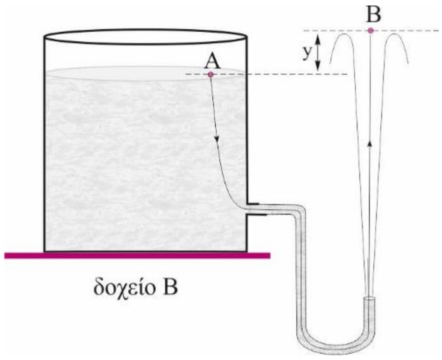
Γ. στο ίδιο ύψος.

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Γ.

Εφαρμόζουμε στο δοχείο Β το θεώρημα του Bernoulli για μια φλέβα του υγρού στα σημεία Α (σημείο της ελεύθερης επιφάνειας) και Β που είναι το υψηλότερο σημείο. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια του ρευστού, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Α.



$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B + \rho g y$$

Στο Α έχουμε $p_A = p_{atm}$ και $\upsilon_A = 0$. Στο Β έχουμε $p_B = p_{atm}$ και $\upsilon_B = 0$. Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$0 + p_{atm} = 0 + p_{atm} + \rho g y \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli στο δοχείο Α. Το παραπάνω συμπέρασμα είναι **συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας.**

Ερώτηση 6.

Σε μια μάζα ιδανικού ρευστού που ρέει σε σωλήνα, προσφέρεται ποσόν ενέργειας ανά μονάδα όγκου Ε και η μάζα αυτή αυξάνει την κινητική της ενέργεια ανά μονάδα όγκου κατά Ε΄ > Ε. Το ρευστό ρέει

Α. σε σωλήνα που ανέρχεται και στενεύει.

Β. σε σωλήνα που κατέρχεται και στενεύει.

Γ. σε οριζόντιο σωλήνα σταθερής διατομής.

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

Λύση

Σωστή είναι η πρόταση Β.

Εφόσον η μάζα αυξάνει την κινητική της ενέργεια, η ταχύτητά της αυξάνεται. Αφού η παροχή διατηρείται σταθερή από το νόμο της συνέχειας προκύπτει ότι ο σωλήνας στενεύει.

Α’ τρόπος

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας (εξίσωση Bernoulli) Ε=Ε΄+(U/ΔV) όπου (U/ΔV) είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας της μάζας ανά μονάδα όγκου. Ε΄>Ε, άρα (U/ΔV)<0 και συνεπώς η μάζα κατέρχεται.

Β’ τρόπος

Το ΘΜΚΕ για μια στοιχειώδη μάζα του ρευστού γράφεται:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F\varepsilon\xi} + W_w \text{ ή } \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{V} = \frac{W_{F\varepsilon\xi}}{V} + \frac{W_w}{V} \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $\frac{K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{V} = E'$ και $\frac{W_{F\varepsilon\xi}}{V} = E$.

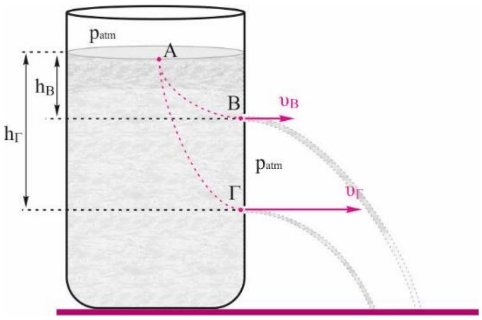
Η **(1)** γίνεται: $E' = E + \frac{W_w}{V}$

Επειδή $E' > E$, το $\frac{W_w}{V} > 0$. Αφού το έργο του βάρους είναι θετικό, ο σωλήνας κατέρχεται.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Το ανοικτό δοχείο του σχήματος περιέχει υγρό πυκνότητας ρ και στο σημείο Β που βρίσκεται σε βάθος h_B = 0,2m από την ελεύθερη επιφάνεια του, υπάρχει μια μικρή οπή εμβαδού διατομής $A=3*10^{-4}m^2$. Το υγρό εκρέει από την οπή με ταχύτητα μέτρου υ.



Α. Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας εκροής (**θεώρημα Torricelli**).

Β. Να βρεθεί η παροχή του υγρού από την οπή.

Γ. Να βρεθεί σε ποιο βάθος $h_Γ$ θα πρέπει να ανοιχθεί μια δεύτερη οπή ώστε το υγρό να εξέρχεται από αυτήν με ταχύτητα διπλάσιου μέτρου.

Δίνεται ότι η πίεση στην επιφάνεια του υγρού είναι ίση με p_{atm}, ότι το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό της οπής και g = 10m/s^2.

Λύση

Α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα υγρού, μεταξύ του σημείου Α που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού του δοχείου και του σημείου Β, αμέσως μόλις το υγρό εξέλθει στην ατμόσφαιρα. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια του ρευστού, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Β.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A + \rho g h_B = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B$$

Όταν το υγρό εκρέει από την οπή, η πίεσή του γίνεται ίση με την ατμοσφαιρική, επομένως $p_A = p_B = p_{atm}$ και επειδή το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από αυτό της οπής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $υ_A$=0. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\rho g h_B = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_B = \sqrt{2gh_B}$$

Η τελευταία σχέση είναι η μαθηματική έκφραση του **θεωρήματος του Torricelli** . Σύμφωνα με αυτό η ταχύτητα εκροής είναι ίση με αυτήν που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h. Επίσης παρατηρούμε ότι η ταχύτητα εκροής δεν εξαρτάται από την πυκνότητα του υγρού.

Με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε: $\upsilon_B = \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}2m} \Rightarrow \upsilon_B = 2\frac{m}{s}$

Β. Η παροχή της δημιουργούμενης φλέβας του υγρού είναι:

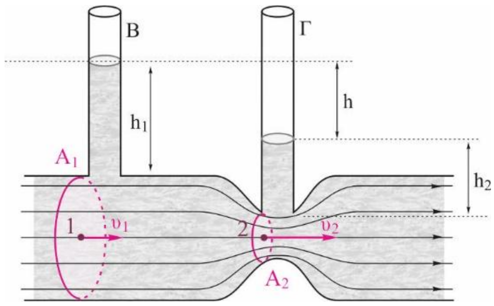
$$\Pi = A\upsilon_B = 3\cdot 10^{-4}\,m^2\cdot 2\frac{m}{s} \Rightarrow \Pi = 0{,}6\cdot 10^{-3}\frac{m^3}{s} \text{ ή } \Pi = 0{,}6\frac{L}{s}$$

Γ. Η ταχύτητα εκροής δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \sqrt{2gh}$

$$\upsilon_\Gamma = 2\upsilon_B \Rightarrow \sqrt{2gh_\Gamma} = 2\sqrt{2gh_B} \Rightarrow h_\Gamma = 4h_B = 0{,}8m$$

Άσκηση 2

Η διάταξη του σχήματος δείχνει έναν τρόπο υπολογισμού της ταχύτητας ενός ρευστού που ρέει σε οριζόντιο σωλήνα (ροόμετρο του Ventouri). Το εμβαδό της διατομής του σωλήνα A_1 στη θέση 1 είναι τριπλάσια της διατομής A_2 στη θέση 2. Λόγω της διαφοράς πίεσης, η υψομετρική διαφορά στη στάθμη του υγρού των δύο κατακόρυφων ανοικτών σωλήνων Β και Γ είναι h = 10cm.



Α. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις ταχύτητες ροής μεταξύ των θέσεων 1και 2.

Β. Να βρεθεί η διαφορά πίεσης μεταξύ των θέσεων 1 και 2.

Γ. Να βρεθεί η ταχύτητα του ρευστού στη θέση 1.

Να θεωρείστε το ρευστό ιδανικό.

Δίνονται $g = 10 m/s^2$, $\rho_v = 1000 \ kg/m^3$

<u>Λύση</u>

Α. Από την εξίσωση συνέχειας μεταξύ των θέσεων 1 και 2 έχουμε:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{A_1\upsilon_1}{A_2} \quad (1)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει $\upsilon_2 = 3\upsilon_1$

Β. Το υγρό στις στήλες είναι ακίνητο. Αφού μεταξύ του κάτω μέρους της στήλης του υγρού και του πάνω μέρους του οριζόντιου σωλήνα το υγρό δεν κινείται οι πιέσεις είναι ίσες. Έτσι, στο κάτω μέρος της στήλης του σωλήνα Β επικρατεί συνολική πίεση p_B που είναι ίση με p_1 .

$p_1 = p_B$. Όμως από την υδροστατική $p_B = p_{atm} + \rho g h_1$, άρα $p_1 = p_{atm} + \rho g h_1$, (2)

Ομοίως και $p_2 = p_{atm} + \rho g h_2$, (3)

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2)$, (4)

Με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε: $p_1 - p_2 = 10^3 \ N/m^2$

Γ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bernoulli για μια οριζόντια φλέβα του υγρού που διέρχεται από τις θέσεις 1 και 2. Σε μια οριζόντια φλέβα ανεξάρτητα από στενώσεις θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του ρευστού δεν μεταβάλλεται, οπότε ο όρος $\rho g h$ παραμένει σταθερός.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + p_2 \;\Rightarrow\; p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right), \qquad (5)$$

Συνδυάζοντας τις (5),(1) έχουμε

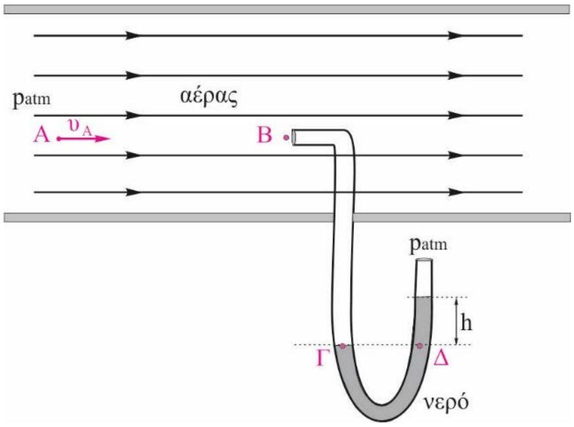
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right), \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (6) και λύνοντας ως προς υ_1 παίρνουμε

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\frac{m}{s^2}0,1m}{3^2 - 1}}$$ ή υ_1=0,5 m/s

Άσκηση 3

Στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος ρέει αέρας και ο υοειδής σωλήνας χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας του αέρα. Στο σημείο Β υπάρχει ανακοπή του ρεύματος του αέρα (σημείο ανακοπής) οπότε η ταχύτητα του αέρα στο σημείο Β είναι μηδενική. Το υγρό στον υοειδή σωλήνα είναι νερό και η υψομετρική διαφορά στα δύο σκέλη του σωλήνα είναι h = 10cm.



Α. Να βρεθεί η πίεση στο σημείο ανακοπής Β σε συνάρτηση με την ταχύτητα του αέρα.

Β. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του αέρα στον οριζόντιο σωλήνα.

Δίνονται: πυκνότητα αέρα ρ_α = 1,25 kg/m^3, πυκνότητα νερού ρ_ν = 1000 kg/m^3 , p_{atm} = 10^5N/m^2 και g = 10m/s^2.

<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bernoulli για μια οριζόντια φλέβα του αέρα που διέρχεται από τις θέσεις Α και Β.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B$$

Στο Α, $p_A = p_{atm}$ και στο Β $\upsilon_B = 0$ άρα

$$p_B = \frac{1}{2}\rho_{\alpha\varepsilon\rho}\upsilon_A^2 + p_{atm} \quad \Rightarrow \quad p_B = \left(0{,}625\upsilon_A^2 + 10^5\right)\frac{N}{m^2} \quad , \quad (1)$$

Β. Η πίεση στο Β είναι ίση με αυτή στο Γ καθώς στο αριστερό σκέλος περιέχεται αέρας. Όμως η πίεση στο σημείο Γ είναι ίση με αυτή του σημείου Δ καθώς τα δύο σημεία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο σε ένα ακίνητο ρευστό.

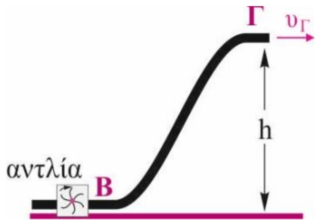
$$p_B = p_\Gamma = p_{atm} + \rho_\nu g h \;,\; (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1),(2) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\rho_{\alpha\varepsilon\rho}\upsilon_A^2 = \rho_\nu g h \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A = \sqrt{\frac{2\rho_\nu g h}{\rho_{\alpha\varepsilon\rho}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1000\frac{kg}{m^3}0{,}1m}{1{,}25\frac{kg}{m^3}}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A = 40\frac{m}{s}$$

Σχόλιο: Η παραπάνω μέθοδος χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας των αεροπλάνων με τον σωλήνα Pitot να τοποθετείται στο φτερό του αεροπλάνου.

Άσκηση 4



Μια αντλία νερού βρίσκεται στον πυθμένα ενός πηγαδιού που έχει βάθος h = 5m. Η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή και ίση με A = 10cm^2. Το νερό εξέρχεται από την άκρη Γ του σωλήνα με ταχύτητα υ_Γ = 10m/s. Να βρεθούν:

Α. η ταχύτητα του νερού μόλις αυτό εξέρχεται από την αντλία (θέση Β)

Β. Η διαφορά πίεσης μεταξύ των Β και Γ.

Γ. ο ρυθμός παραγωγής έργου λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ των Β και Γ.

Δ. ο ρυθμός παραγωγής έργου (ισχύς) της αντλίας.

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό. Δίνονται: ρ_ν = 1000kg/m^3, g = 10m/s^2.

<u>Λύση</u>

Α. Ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή, επομένως αφού η παροχή είναι ίδια σε όλο το μήκος του σωλήνα (νόμος συνέχειας) η ταχύτητα σε κάθε σημείο του σωλήνα θα είναι η ίδια, άρα $\upsilon_B = \upsilon_\Gamma$ = 10m/s.

Β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bernoulli για μια φλέβα νερού μεταξύ των σημείων Β και Γ.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + p_\Gamma + \rho_\nu gh \ , (\upsilon_B = \upsilon_\Gamma) \ \Rightarrow$$

$$p_B - p_\Gamma = \rho_\nu gh = 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 5m \ \Rightarrow \ p_B - p_\Gamma = 5\cdot 10^4\frac{N}{m^2}$$

Γ. Ο ρυθμός παραγωγής έργου που οφείλεται στη διαφορά πίεσης μεταξύ των Β και Γ.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{(p_B - p_\Gamma)\cdot dV}{dt} = \rho_\nu gh\cdot A\upsilon \ \Rightarrow \ \frac{dW}{dt} = \left(1000\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 5m\right)\cdot\left(10\cdot 10^{-4}m^2\cdot 10\frac{m}{s}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dW}{dt} = 500\,W$$

Σχόλιο: Ο παραπάνω είναι και ο ρυθμός αύξησης της δυναμικής ενέργειας των μαζών.

Δ. Ο ρυθμός παραγωγής έργου (ισχύς) της αντλίας είναι:

$$P_{\alpha\nu\tau\lambda} = \frac{dW_{\alpha\nu\tau\lambda}}{dt}$$

Το έργο της αντλίας το βρίσκουμε με εφαρμογή του θεωρήματος έργου- ενέργειας κατά τη μετακίνηση μικρής μάζας νερού από το την αντλία μέχρι την έξοδο του σωλήνα. Με W_w δηλώνουμε το έργο του βάρους.

$$\frac{1}{2}\Delta m \upsilon^2 - 0 = W_{\alpha\nu\tau\lambda} + W_w \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta m \upsilon^2 - 0 = W_{\alpha\nu\tau\lambda} - \Delta m \cdot gh \Rightarrow$$

$$W_{\alpha\nu\tau\lambda} = \frac{1}{2}\Delta m \upsilon^2 + \Delta m \cdot gh$$

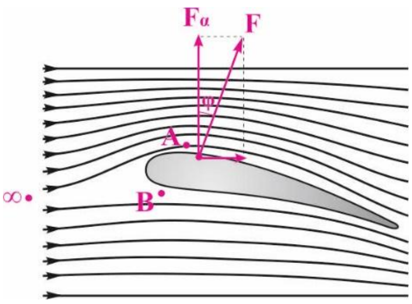
Άρα, η ισχύς P της αντλίας ή ο ρυθμός παραγωγής έργου είναι:

$$P_{\alpha\nu\tau\lambda} = \frac{dW_{\alpha\nu\tau\lambda}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right)\frac{dm}{dt} = \left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right)\rho_\nu A\upsilon \Rightarrow$$

$$P_{\alpha\nu\tau\lambda} = \left(\frac{1}{2}\left(10\frac{m}{s}\right)^2 + 10\frac{m}{s^2}5m\right)1000\frac{kg}{m^3}\cdot 10\cdot 10^{-4}m^2\cdot 10\frac{m}{s} \Rightarrow P_{\alpha\nu\tau\lambda} = 1000W$$

Άσκηση 5

Μια μέρα με άπνοια, ένα Boeing 737 πετάει οριζόντια πάνω από την Αθήνα σε σταθερό ύψος . Τα πτερύγιά του έχουν συνολικό εμβαδό A = $70m^2$ το καθένα. Η ταχύτητα του αέρα στο πάνω τμήμα των πτερυγίων, λόγω της στένωσης των ρευματικών γραμμών, είναι $υ_A$ = 736km/h, ενώ στο κάτω τμήμα λόγω της αραίωσής τους είναι $υ_B$ = 684km/h. Να βρεθούν:



Α. η διαφορά πιέσεων μεταξύ του κάτω και πάνω τμήματος των πτερυγίων του αεροπλάνου.

Β. Η αεροδύναμη που ασκείται στο αεροπλάνο.

Γ. Το βάρος του Boeing 737 για τη συγκεκριμένη πτήση, αν η γωνία μεταξύ αεροδύναμης και δυναμικής άνωσης είναι φ = 20°.

Δίνονται: $ρ_{αέρα}$ = 1,25kg/m^3, p_{atm} = 10^5N/m^2, συν20° = 0,94

<u>Λύση</u>

Α. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων ∞, Α και ∞, Β όπου ∞ θεωρείται ένα σημείο της ρευματικής γραμμής που βρίσκεται πολύ μακριά από το αεροπλάνο με $υ_\infty = υ_{αερ}$.

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\infty^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \;\Rightarrow\; p_A = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_{αερ}^2 - \upsilon_A^2\right)$$

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\infty^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 \;\Rightarrow\; p_B = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_{αερ}^2 - \upsilon_B^2\right)$$

Η αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων δίνει:

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_B^2 - \upsilon_A^2\right) = 5000\frac{N}{m^2}$$

Β. Η προκαλούμενη αεροδύναμη, F, είναι κάθετη στα πτερύγια και έχει μέτρο

$$F = \left(p_A - p_B\right)\cdot 2A$$

όπου 2Α είναι το συνολικό εμβαδόν των δύο πτερυγίων του αεροπλάνου.

$$F = \left(p_A - p_B\right)\cdot 2A = 5000\frac{N}{m^2}140m^2 \;\Rightarrow\; F = 700.000\,N$$

Γ. Η κατακόρυφη συνιστώσα $F_α$ αποτελεί την δυναμική άνωση και εξισορροπεί το βάρος του αεροπλάνου, αφού αυτό πετά οριζόντια.

$$w = F_α = Fσυνφ = 700.000\,N \cdot 0,94 \text{ ή } w = 658.000N$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 24/11/2015

Επιμέλεια: Ηλίας Ποντικός
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

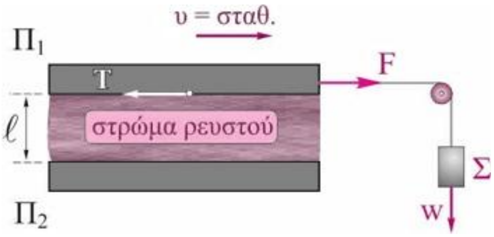
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Η ΤΡΙΒΗ ΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Στη διπλανή διάταξη, η πλάκα $Π_2$ είναι ακλόνητη, ενώ η $Π_1$ μπορεί να κινείται μέσω μιας ασκούμενης σε αυτήν εξωτερικής οριζόντιας δύναμης F η οποία οφείλεται στο βάρος w του σώματος Σ. Μεταξύ των πλακών υπάρχει ένα παχύρευστο υγρό. Παρατηρούμε ότι μετά από λίγο, η $Π_1$ κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα υ.



Α. Η ενέργεια που προσφέρεται από την δύναμη F αφαιρεί μηχανική ενέργεια από την πλάκα $Π_1$ με συνέπεια την αύξηση της θερμοκρασίας του ρευστού.

Β. Η μείωση της δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ έχει ως συνέπεια τη μείωση της μηχανικής ενέργειας της πλάκας $Π_1$.

Γ. Η ενέργεια που προσφέρεται από την δύναμη F αναπληρώνει την ενέργεια που χάνεται λόγω του ιξώδους του ρευστού.

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

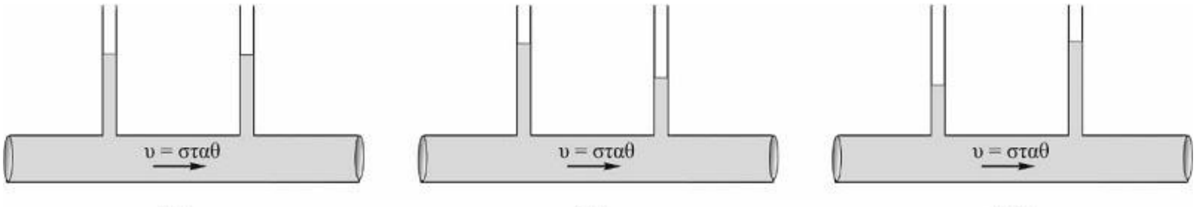
Λύση

Σωστή είναι η απάντηση Γ.

Όταν το σώμα Σ κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα, η μείωση της δυναμικής του ενέργειας μεταφέρεται μέσω της εξωτερικής δύναμης F στην πλάκα και μέσω του έργου της τριβής (ιξώδες του υγρού) μετατρέπεται όλη σε θερμότητα. Η μηχανική ενέργεια της πλάκας $Π_1$ όμως διατηρείται σταθερή, αφού η πλάκα μετακινείται με σταθερή ταχύτητα. Έτσι, η μείωση της δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ, μέσω του έργου της δύναμης F αναπληρώνει την ενέργεια που χάνεται σε θερμότητα λόγω των τριβών μεταξύ πλάκας και ρευστού.

Ερώτηση 2.

Οι κατακόρυφοι σωλήνες του σχήματος είναι ίδιοι και ανοικτοί στο πάνω τμήμα τους. Στον οριζόντιο σωλήνα ρέει με φορά προς τα δεξιά ένα πραγματικό υγρό με σταθερή ταχύτητα. Τα ύψη στους κατακόρυφους σωλήνες είναι σωστά σχεδιασμένα στο σχήμα



(i) (ii) (iii)

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

Λύση

Σωστό είναι το διάγραμμα (ii).

Σε ένα πραγματικό ρευστό αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής. Για να διατηρηθεί κατά μήκος του οριζόντιου σωλήνα σταθερή η ταχύτητά τους, πρέπει να ασκηθούν στις στοιχειώδεις μάζες τους δυνάμεις (από το περιβάλλον ρευστό) που το έργο τους θα αναπληρώνει την απώλεια της μηχανικής ενέργειας. Το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο τμήμα του ρευστού που περιβάλλεται μεταξύ δύο διατομών είναι θετικό, $W=(p_{αρχ}-p_{τελ})\,ΔV$.

Επειδή $W>0$ είναι και $p_{αρχ}-p_{τελ}>0$, δηλαδή στην κατεύθυνση ροής του υγρού η πίεση μειώνεται. Στη βάση των σωλήνων η πίεση είναι ίση με $p=p_{ατμ}+ρgh$.

Άρα, στην κατεύθυνση ροής τα h μειώνονται. Αυτό συμβαίνει μόνο στο σχήμα (ii).

Ημερομηνία τροποποίησης: 3/11/2015

Επιμέλεια: Ηλίας Ποντικός
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης