ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΥΓΡΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Εισαγωγικές γνώσεις

Πυκνότητα, ρ, ενός υλικού ονομάζουμε τη μάζα του υλικού ανά μονάδα όγκου:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

με μονάδα στο S.I. το $1 Kg/m^3$.

Πίεση, p, ονομάζουμε το φυσικό μονόμετρο μέγεθος που έχει μέτρο το πηλίκο της δύναμης dF που ασκείται <u>κάθετα</u> σε μια μικρή επιφάνεια, προς το εμβαδό dA της επιφάνειας αυτής:

$$p = \frac{dF}{dA}$$

Αν η πίεση είναι ίδια σε όλα τα σημεία μιας επιφάνειας εμβαδού Α τότε ισχύει

$$p = \frac{F}{A}.$$

Η μονάδα της πίεσης στο S.I. είναι το $1 N/m^2$ = 1 Pascal = 1 Pa.

Ρευστά ονομάζουμε τα σώματα που έχουν την δυνατότητα να ρέουν. Αυτό συμβαίνει επειδή τα μόρια τους βρίσκονται σε διαρκή τυχαία κίνηση αλλάζοντας συνεχώς θέσεις. Την ιδιότητα αυτή έχουν τα υγρά και τα αέρια.

Η ροή στα ρευστά γίνεται από τα σημεία με υψηλή πίεση προς τα σημεία με χαμηλότερη πίεση.

Τα υγρά είναι πρακτικά **ασυμπίεστα**, γιατί όταν τους εφαρμοστεί εξωτερική πίεση δεν μεταβάλλονται οι αποστάσεις των μορίων τους (που είναι πολύ μικρές), ενώ τα αέρια είναι **συμπιεστά** δηλαδή μεταβάλλουν τον όγκο τους με μεταβολή της πίεσης τους. Τα υγρά παίρνουν το σχήμα του δοχείου στο οποίο περιέχονται, έχουν όμως σταθερό όγκο για σταθερή θερμοκρασία. Τα αέρια δεν έχουν ούτε σχήμα ούτε σταθερό όγκο αλλά καταλαμβάνουν όλο τον όγκο του δοχείου στον οποίο βρίσκονται.

Υγρά σε ισορροπία

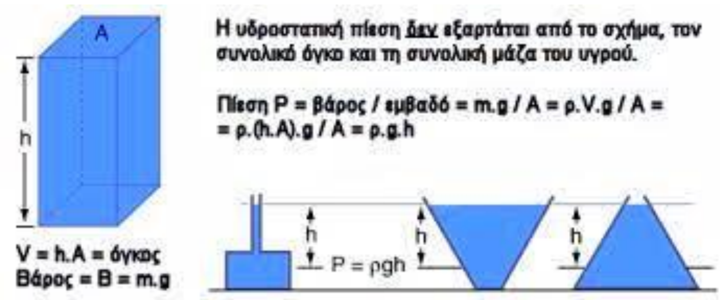
Η πίεση στα υγρά

Η πίεση στα διάφορα σημεία του χώρου που καταλαμβάνει ένα υγρό οφείλεται στο βάρος του υγρού και σε κάποιο εξωτερικό αίτιο . Παραδείγματα εξωτερικών αιτίων είναι η ατμοσφαιρική πίεση και η πίεση που προκαλείται μέσω ενός εμβόλου.

Το υγρό ασκεί δύναμη κάθετη σε κάθε επιφάνεια που έρχεται σε επαφή με αυτό, δηλαδή στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει και στην επιφάνεια ενός σώματος που είναι βυθισμένο στο υγρό. Ένα υγρό σε ηρεμία, προκαλεί την ίδια πίεση προς όλες τις κατευθύνσεις σε ορισμένο βάθος. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην **αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων**, σύμφωνα με την οποία:

Δύο σημεία ενός υγρού που ισορροπεί, όταν βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, έχουν την ίδια ολική πίεση.

Υδροστατική πίεση



Η πίεση που επικρατεί σε ένα υγρό λόγω του βάρους του ονομάζεται **υδροστατική πίεση** και υπολογίζεται ως εξής: έστω ένα σημείο σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια του υγρού. Θεωρούμε μία οριζόντια επιφάνεια εμβαδού Α στο βάθος h, οπότε η πίεση εξαιτίας του υγρού οφείλεται στο βάρος w της στήλης του υγρού πάνω από την επιφάνεια. Από τον ορισμό της πίεσης έχουμε:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{w}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho A h g}{A} = \rho g h \quad \text{ή} \quad p = \rho g h \quad \textbf{(1)}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η υδροστατική πίεση, p, που επικρατεί σε ένα υγρό αυξάνεται γραμμικά με το βάθος, h. Αυτός είναι ο λόγος που τα φράγματα είναι πλατιά στη βάση τους και πιο στενά στη κορυφή τους.

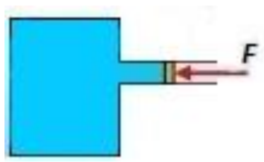
Είναι προφανές ότι αν το ρευστό βρεθεί εκτός πεδίου βαρύτητας, η υδροστατική πίεση μηδενίζεται.

Σημειώνουμε ότι η σχέση $p = \rho g h$ μας δίνει *μόνο* την υδροστατική πίεση σε βάθος h. Καλύτερα να έχουμε κατά νου ότι η παραπάνω σχέση υπολογίζει τη διαφορά πίεσης δύο σημείων του υγρού που απέχουν μεταξύ τους κατακόρυφα κατά h.

Έτσι, σε ανοιχτό δοχείο, που περιέχει υγρό, η ελεύθερη επιφάνεια του επικοινωνεί με την ατμόσφαιρα και η ολική πίεση σε βάθος h είναι:

$$p = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h \quad \textbf{(2)}$$

Αρχή του Pascal



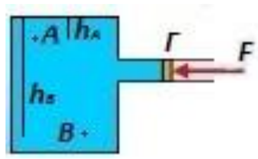
Βασικός νόμος της υδροστατικής είναι ο **νόμος ή η αρχή του Pascal** σύμφωνα με την οποία:

η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του και στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει.

Στο σχήμα δείχνεται ένα κλειστό δοχείο που περιέχει υγρό. Η πρόσθετη πίεση που προκαλείται μέσω του εμβόλου, $\frac{F}{A}$, μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του υγρού.

Συνέπειες της αρχής του Pascal

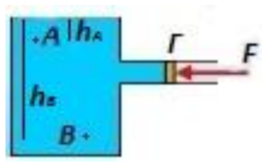
Η αρχή του Pascal μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ολική πίεση που επικρατεί σε ένα υγρό είτε αυτό βρίσκεται σε κλειστό είτε σε ανοικτό δοχείο.



Έτσι, στο κλειστό δοχείο του πρώτου από τα διπλανά σχήματα, αν F είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη στο έμβολο εμβαδού A, η ολική πίεση στα σημεία A και B είναι αντίστοιχα:

$$p_A = \frac{F}{A} + \rho g h_A \text{ και } p_B = \frac{F}{A} + \rho g h_B \text{ με } p_B > p_A$$

Στη περίπτωση που το δοχείο βρεθεί εκτός πεδίου βαρύτητας, η πίεση σε όλα τα σημεία του θα είναι : $p_A = p_B = p_{\varepsilon\mu\beta} = \frac{F}{A}$.

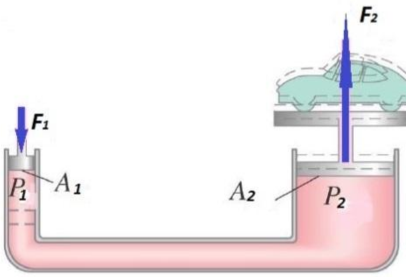


Στο ανοιχτό δοχείο του δεύτερου σχήματος η εξωτερική πίεση του εμβόλου δεν μεταδίδεται απλά εξισορροπεί την υδροστατική πίεση που επικρατεί στο υγρό που είναι σε επαφή με το έμβολο. Όμως η ατμοσφαιρική πίεση μέσω της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού με αποτέλεσμα η πίεση στα σημεία A και B τώρα να είναι:

$$p_A = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_A \text{ και } p_B = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_B \text{ με } p_B > p_A .$$

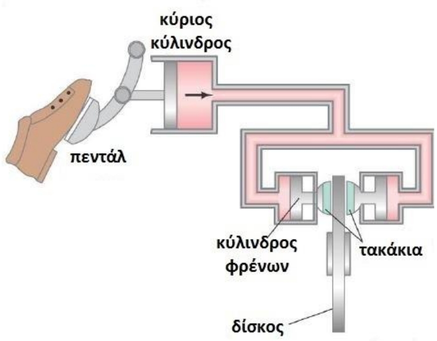
Στη περίπτωση που το δοχείο βρεθεί εκτός πεδίου βαρύτητας, η πίεση σε όλα τα σημεία του θα είναι $p_A = p_B = 0$.

Εφαρμογές της αρχής του Pascal



Η λειτουργία ενός υδραυλικού ανυψωτή, στηρίζεται στην αρχή του Pascal. Ένα έμβολο με μικρή διατομή A_1 ασκεί μία δύναμη F_1 στην επιφάνεια του υγρού. Η εφαρμοζόμενη πίεση, $p = \frac{F_1}{A_1}$, μεταδίδεται σε όλα τα σημεία του υγρού, άρα και στο έμβολο διατομής A_2 δηλαδή, $p = \frac{F_2}{A_2}$. Η δύναμη F_2 που ασκείται στο μεγάλο έμβολο από το υγρό επομένως είναι $F_2 = pA_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} > F_1$. Άρα ο υδραυλικός ανυψωτής πολλαπλασιάζει τη δύναμη κατά παράγοντα ίσο με το λόγο των εμβαδών των δύο εμβόλων.

Άλλες εφαρμογές που χρησιμοποιούν την αρχή του Pascal είναι ο υδραυλικός ανελκυστήρας, η οδοντιατρική πολυθρόνα, ο υδραυλικός γρύλλος και το σύστημα φρεναρίσματος ενός αυτοκινήτου, που περιγράφεται στη συνέχεια (βλ. διπλανό σχήμα).



Όταν ο οδηγός πιέζει το πεντάλ, η πίεση στον κύριο κύλινδρο αυξάνεται. Αυτή η αύξηση της πίεσης μεταφέρεται στο υγρό των φρένων σύμφωνα με την αρχή του Pascal, ωθώντας τελικά τα τακάκια στους δίσκους που είναι συνδεδεμένοι στους τροχούς του αυτοκινήτου, με αποτέλεσμα την επιβράδυνση του οχήματος.

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/10/2015

Επιμέλεια: Σδρίμας Ιωάννης
Επιστημονικός έλεγχος: Παλόγος Αντώνιος, Στεφανίδης Κωνσταντίνος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ – ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ρευστά σε κίνηση

Ιδανικό ρευστό – Στρωτή, τυρβώδης ροή

Η ροή ενός ρευστού μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκη, όπως φαίνεται από τα ρεύματα ενός πλημμυρισμένου ποταμού, ή τις στροβιλιζόμενες φλόγες μιας φωτιάς. Παρόλα αυτά μερικές καταστάσεις μπορούν να εξηγηθούν με απλά εξιδανικευμένα μοντέλα.

Ιδανικό ρευστό ονομάζουμε εκείνο το ρευστό που εκπληρώνει τις παρακάτω τρεις προϋποθέσεις:

α) είναι τελείως ασυμπίεστο

β) είναι απαλλαγμένο δυνάμεων μεταξύ των μορίων τους (εσωτερική τριβή) και

γ) είναι απαλλαγμένο δυνάμεων μεταξύ αυτού και των τοιχωμάτων του σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει (δυνάμεις συνάφειας).

Για να διακρίνουμε τα υπαρκτά ρευστά από τα ιδανικά θα τα ονομάζουμε **πραγματικά ρευστά.** Τα πραγματικά ρευστά διαφέρουν λίγο ή πολύ από τη συμπεριφορά των ιδανικών ρευστών.

Διακρίνουμε δύο είδη ροής ρευστών, την **τυρβώδη** και την **στρωτή** ροή.

Στη τυρβώδη ροή δεν έχουμε εικόνα μόνιμης κατάστασης αλλά δημιουργία δινών (δινορεύματα = ακανόνιστοι κύκλοι) που απορροφούν μεγάλο μέρος της ενέργειας του ρευστού. Στην τυρβώδη ροή, η ροή διαρκώς αλλάζει. Τυρβώδη ροή παρατηρούμε π.χ. στους καταρράκτες μετά την πτώση του νερού στη λίμνη υποδοχής, στις φλόγες μιας πυρκαγιάς κ.λ.π.

Αν η ροή είναι ομαλή, δηλαδή χωρίς τη δημιουργία δινών και σταθερή με το χρόνο, την ονομάζουμε **στρωτή ροή** . Στρωτή ροή παρατηρούμε στη στήλη νερού που σχηματίζεται στη βρύση της κουζίνας μας, όταν είναι ανοιγμένη λίγο.

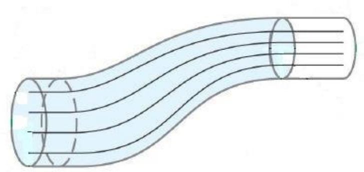
Στα ιδανικά ρευστά συναντάμε μόνο στρωτή ροή. Στα πραγματικά ρευστά έχουμε στρωτή ροή όταν οι δυνάμεις εσωτερικής τριβής και οι δυνάμεις συνάφειας έχουν τιμές μικρότερες από κάποιο όριο. Όταν ξεπεραστεί αυτό το όριο η ροή μεταπίπτει σε τυρβώδη.

Όλα όσα ακολουθούν αφορούν τη στρωτή ροή.

Ρευματική γραμμή – Φλέβα

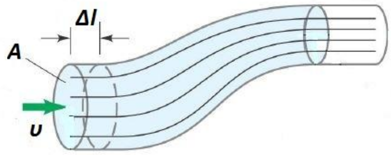
Ονομάζουμε **ρευματική γραμμή,** τη γραμμή που ορίζεται από το σύνολο των θέσεων (τροχιά) από τις οποίες περνά ένα μόριο του ρευστού στη διάρκεια της κίνησης του. Στη στρωτή ροή που αποτελεί το αντικείμενο της μελέτης μας, κάθε μόριο του ρευστού που διέρχεται από κάποιο σημείο ακολουθεί την ίδια ρευματική γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι όταν ένα μόριο του ρευστού διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο, έχει την ίδια ταχύτητα που είχε κάθε άλλο μόριο που πέρασε προηγουμένως καθώς και κάθε επόμενο που θα περάσει από το σημείο αυτό. Η διεύθυνση της ταχύτητας κάθε σημείου του ρευστού είναι εφαπτόμενη της ρευματικής γραμμής. Επομένως δύο ρευματικές γραμμές δεν μπορεί να τέμνονται γιατί αλλιώς στο σημείο τομής, το μόριο του ρευστού θα είχε δύο ταχύτητες (καθεμιά εφαπτόμενη της αντίστοιχης γραμμής).

Οι ρευματικές γραμμές που περνούν από το περίγραμμα μιας φανταστικής επιφάνειας Α κάθετης στις ρευματικές γραμμές (βλ. διπλανό σχήμα) σχηματίζουν έναν νοητό σωλήνα που ονομάζεται **φλέβα** ή **σωλήνας ροής**. Από τον ορισμό της ρευματικής γραμμής προκύπτει ότι το ρευστό που κυλάει σε μια φλέβα δεν μπορεί να διασχίσει τα πλευρικά της τοιχώματα και επομένως δεν μπορεί να γίνει ανάμιξη των ρευστών που περιέχονται σε γειτονικές φλέβες.



Παροχή φλέβας

Το διπλανό σχήμα δείχνει τη ροή ενός ρευστού μέσα από κάποιο σωλήνα. Σε κάποια θέση ο σωλήνας έχει διατομή Α και το ρευστό ρέει με ταχύτητα υ. Έτσι, στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα Δt, το ρευστό διανύει απόσταση Δl=υΔt και από τη διατομή διέρχεται όγκος ρευστού ίσος με ΔV=ΑΔl=ΑυΔt.



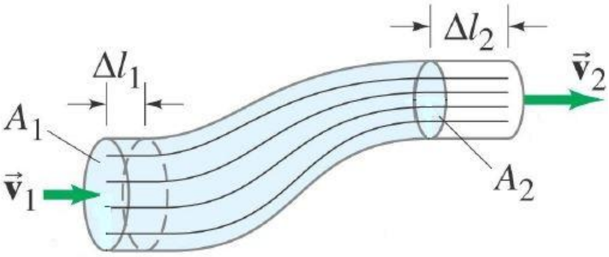
Ορίζουμε ως **παροχή** της φλέβας ή του σωλήνα, Π, το φυσικό μέγεθος που ισούται με το πηλίκο του όγκου του ρευστού που διέρχεται από μια διατομή προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα, δηλαδή

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A\Delta l}{\Delta t} \text{ ή } \Pi = A\upsilon$$

με μονάδα στο S.I. το $1 m^3/s$.

Διατήρηση ύλης – Εξίσωση συνέχειας

Το σχήμα δείχνει τμήμα μιας φλέβας μεταξύ δύο σταθερών διατομών με εμβαδά A_1 και A_2 ($A_1 > A_2$).



Ο ρυθμός ροής μάζας ισούται με τη μάζα Δm του ρευστού που διέρχεται από μία διατομή, δια του αντίστοιχου χρόνου Δt.

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \quad \textbf{(1)}$$

Ο όγκος του ρευστού που διέρχεται από τη διατομή A_1 σε χρονικό διάστημα Δt είναι $A_1\Delta l_1$, όπου Δl_1 η απόσταση που διανύει το ρευστό στο χρόνο Δt. Επειδή η ταχύτητα του ρευστού είναι $\upsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{\Delta t}$, ο ρυθμός ροής της μάζας από την διατομή A_1 γίνεται:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 A_1 \Delta l_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 \upsilon_1 \quad \textbf{(2)}$$

Στο εσωτερικό της φλέβας δεν υπάρχουν ούτε πηγές που να παράγουν ρευστό, ούτε καταβόθρες που να απορροφούν ρευστό. Άρα, η μάζα ρευστού που διέρχεται από τη διατομή A_1 σε χρονικό διάστημα Δt είναι ίση με τη μάζα που εκρέει από τη διατομή A_2 στον ίδιο χρονικό διάστημα, δηλαδή ισχύει **η αρχή διατήρησης της ύλης.**

Άρα, σύμφωνα με την **αρχή διατήρησης της ύλης** μπορούμε να γράψουμε:

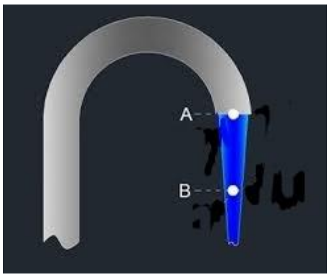
$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \Rightarrow \rho_1 A_1 \upsilon_1 = \rho_2 A_2 \upsilon_2 \quad \textbf{(3)}$$

Αν το ρευστό είναι ιδανικό, είναι ασυμπίεστο , οπότε ισχύει $\rho_1=\rho_2$ και η σχέση **(3)** παίρνει τη μορφή

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \;\; \text{ή} \;\; \Pi = \text{σταθερή} \quad \textbf{(4)}$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται **εξίσωση της συνέχειας** είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ύλης και διατυπώνεται ως εξής:

Κατά μήκος μιας φλέβας ή ενός σωλήνα η παροχή διατηρείται σταθερή.



Η εξίσωση **(4)** υποδεικνύει ότι αν η επιφάνεια διατομής είναι μεγάλη, η ταχύτητα ροής είναι μικρή και αντίστροφα, όταν η επιφάνεια είναι μικρή η ταχύτητα είναι μεγάλη. Σαν παράδειγμα μπορούμε να αναλογιστούμε την κατακόρυφη στήλη νερού που δημιουργείται στην βρύση της κουζίνας μας όταν έχουμε στρωτή ροή (βλέπε σχήματα). Καθώς το νερό εξέρχεται επιταχύνεται λόγω βαρύτητας με συνέπεια να αυξάνεται διαρκώς η ταχύτητα ροής του. Για να διατηρείται η παροχή σταθερή κατά μήκος της στήλης νερού που σχηματίζεται, ελαττώνεται διαρκώς η κάθετη διατομή της. Έτσι η διατομή της στήλης στο σημείο Β του σχήματος είναι μικρότερη από ότι στο Α γιατί το νερό εκεί κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα .

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ροή ενός ποταμού σταθερού πλάτους και μεταβλητού βάθους. Όταν το ποτάμι βαθαίνει αυξάνεται η εγκάρσια διατομή του Α με συνέπεια η ροή του να είναι αργή, ενώ όταν το ποτάμι γίνεται ρηχό ελαττώνεται η εγκάρσια διατομή του Α με συνέπεια η ροή του να γίνεται γρήγορη.

Από τα παραπάνω, παραστατικά μπορούμε να πούμε ότι :

όπου πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη.

Ημερομηνία τροποποίησης: 10/11/2015

Επιμέλεια: Σδρίμας Ιωάννης

Επιστημονικός έλεγχος: Παλόγος Αντώνιος, Στεφανίδης Κωνσταντίνος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Εισαγωγικές γνώσεις – Η μηχανική ενέργεια στα ρευστά

Για να περιγράψουμε ενεργειακά τα ρευστά εισάγουμε τα φυσικά μεγέθη: δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού, κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού , μηχανική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού και έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου του ρευστού.

Δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού : $\frac{U}{\Delta V} = \frac{mgh}{\Delta V} = \rho g h$

Κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού : $\frac{K}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$

Έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου του ρευστού:

$$\frac{W}{\Delta V} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta V} = \frac{F_1 \Delta x - F_2 \Delta x}{\Delta V} = \frac{(p_1 - p_2) A \cdot \Delta x}{\Delta V} = p_1 - p_2$$

Η εξίσωση του Bernoulli

Γνωρίζουμε ότι η πίεση σε ένα ρευστό που ρέει σε σωλήνα συνήθως δεν είναι ίδια σε δύο σημεία του όταν αυτά βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος. Η πίεση για παράδειγμα στους σωλήνες των υψηλότερων ορόφων σε μια πολυκατοικία είναι μικρότερη αυτής του ισογείου. Γνωρίζουμε επίσης, από το νόμο της συνέχειας, ότι η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται ανάλογα με τη διατομή του σωλήνα στον οποίο ρέει. Το 1738 ο Daniel Bernoulli βρήκε τη σχέση που συνδυάζει την πίεση σε ένα σημείο του υγρού με την ταχύτητά του και το ύψος.

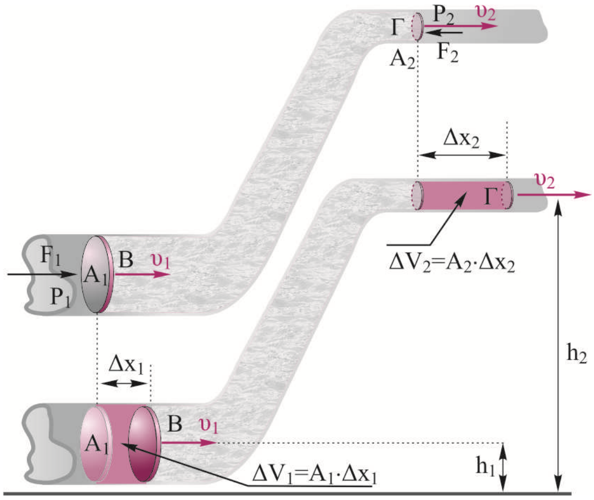
Η **εξίσωση του Bernoulli** είναι μια συνέπεια της αρχής **διατήρησης της ενέργειας** στα ρευστά και διατυπώνεται ως εξής:

Το άθροισμα της πίεσης p, της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του ρευστού $\rho g h$, έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο μιας ρευματικής φλέβας.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p + \rho g h = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα ιδανικό (ασυμπίεστο) ρευστό το οποίο ρέει σε πλάγιο σωλήνα μεταβλητής διατομής. Διαλέγουμε δύο σημεία Β και Γ που είναι σημεία της ίδιας ρευματικής γραμμής τα οποία βρίσκονται σε ύψη h_1 και h_2 από το έδαφος αντίστοιχα. Η πίεση στο Β είναι p_1 και στο σημείο αυτό η διατομή του σωλήνα είναι A_1 ενώ στο Γ, p_2 και A_2 ($A_2 < A_1$) αντίστοιχα. Θεωρούμε σαν σύστημα το τμήμα του ρευστού μεταξύ των Β και Γ και ότι αυτό ρέει από το Β προς το Γ. Επειδή η διατομή του σωλήνα από το Β προς το Γ μειώνεται, σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται, άρα το ρευστό επιταχύνεται με τη βοήθεια μιας δύναμης που ασκείται σε αυτό από το περιβάλλον του.



Σε χρονικό διάστημα Δt ένα στοιχειώδες τμήμα μάζας Δm του ρευστού μετατοπίζεται από το Β προς το Γ. Εφαρμόζουμε για το Δm το θεώρημα έργου ενέργειας (ΘΕΕ).

$$K_\Gamma - K_B = W_{F\varepsilon\xi} + W_w$$

Όπου $W_{Fεξ}$ είναι το έργο που προσφέρεται στο τμήμα του ρευστού που περιέχεται μεταξύ των διατομών A_1 και A_2. Στο τμήμα του ρευστού μεταξύ των διατομών A_1 και A_2 ασκούνται δύο δυνάμεις από το περιβάλλον ρευστό. Στη διατομή A_1 ασκείται η δύναμη F_1 της οποίας το έργο είναι θετικό και στη διατομή A_2 ασκείται η δύναμη F_2 της οποίας το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή

$$W_{Fεξ} = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 \text{ ή}$$

$$W_{Fεξ} = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$$

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

Και η παραπάνω σχέση γίνεται $W_{Fεξ} = (p_1 - p_2)\Delta V$.

Το έργο του βάρους είναι $W_{w(B\to\Gamma)} = U_B - U_\Gamma = -\Delta m g(h_2 - h_1)$ και είναι αρνητικό αφού η στοιχειώδης μάζα Δm κατά τη μετακίνησή της από το Β στο Γ ανεβαίνει.

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\Delta m \upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}\Delta m \upsilon_B^2 = (p_1 - p_2)\Delta V - \Delta m g(h_2 - h_1) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V}\upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V}\upsilon_B^2 = (p_1 - p_2) - \frac{\rho \Delta V}{\Delta V} g(h_2 - h_1) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\rho \upsilon_\Gamma^2 + p_2 + \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^2 + p_1 + \rho g h_1$$

Επομένως για οποιοδήποτε σημείο ενός ιδανικού ρευστού ισχύει

$$\frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + p + \rho g h = σταθ.$$

που αποτελεί την εξίσωση του Bernoulli.

Η παραπάνω εξίσωση όπως είδαμε αποτελεί μια έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στα ρευστά. Η εξίσωση του Bernoulli ισχύει κάτω από τις εξής προϋποθέσεις:

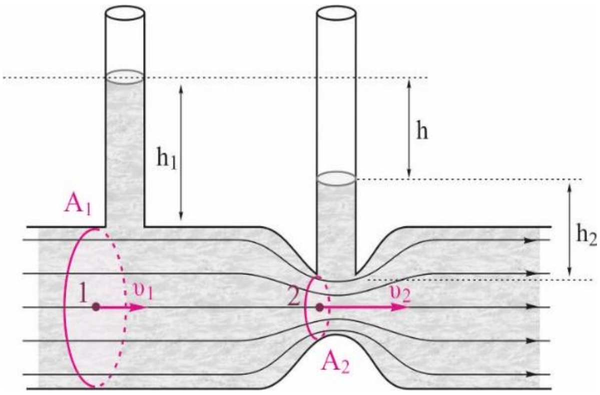
- Το ρευστό είναι ασυμπίεστο,
- Οι τριβές μεταξύ του ρευστού και των τοιχωμάτων του σωλήνα είναι αμελητέες,
- Η ροή είναι στρωτή.

Η εξίσωση Bernoulli σε οριζόντιο σωλήνα.

Σε οριζόντιο σωλήνα, έστω και αν υπάρχουν στενώσεις, κατά τη μετακίνηση του ρευστού θεωρούμε ότι δεν υπάρχει έργο βάρους και η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Το παραπάνω μας δείχνει ότι όπου η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται (στένωση σωλήνα και αύξηση πυκνότητας ρευματικών γραμμών), η πίεση ελαττώνεται και αντίστροφα. Στο σχήμα, παρατηρούμε ότι εφόσον $A_1>A_2$, έχουμε $\upsilon_1<\upsilon_2$ και $p_1>p_2$.



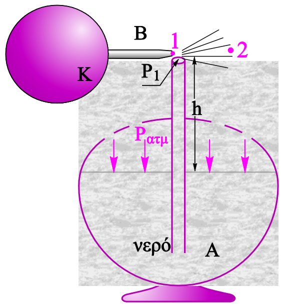
Σχόλια για την εφαρμογή του νόμου του BERNOULLI

- Σε ένα ακίνητο ρευστό οι προϋποθέσεις εφαρμογής του νόμου του Bernoulli ισχύουν, άρα ο νόμος εφαρμόζεται και σε ακίνητα ρευστά.
- Σε μια οριζόντια φλέβα ανεξάρτητα από στενώσεις θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του ρευστού δεν μεταβάλλεται, οπότε ο όρος $\rho g h$ παραμένει σταθερός.
- Στον όρο ρgh, το h εκφράζει το ύψος της στοιχειώδους μάζας από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, ενώ στον τύπο της υδροστατικής πίεσης, $p=\rho g h$, το h δηλώνει βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.
- Ένα ρευστό που ρέει σε σωλήνα, μόλις εξέλθει στην ατμόσφαιρα θεωρούμε ότι έχει πίεση ίση με την ατμοσφαιρική, $p_{ατμ}$.
- Ο νόμος του Bernoulli εφαρμόζεται και στα αέρια.
- Τα φαινόμενα ροής γύρω από ένα σώμα είναι ίδια είτε το σώμα κινείται και το ρευστό ηρεμεί, είτε το σώμα ηρεμεί και το ρευστό κινείται με αντίθετη ταχύτητα. Κατά την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli, *όταν έχουμε εμπόδιο που κινείται μέσα σε ακίνητο ρευστό (π.χ. αεροπλάνο), η ταχύτητα που υπεισέρχεται στον τύπο είναι η σχετική ταχύτητα του ρευστού ως προς το εμπόδιο. Δηλαδή, την εξίσωση του Bernoulli την γράφει ο παρατηρητής που βρίσκεται πάνω στο εμπόδιο*.

Εφαρμογές της εξίσωσης Bernoulli

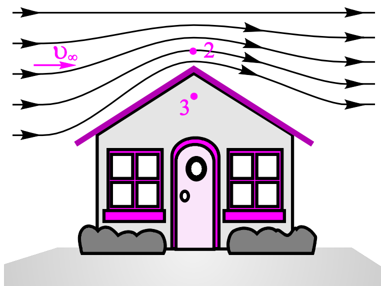
- Ψεκαστήρας.

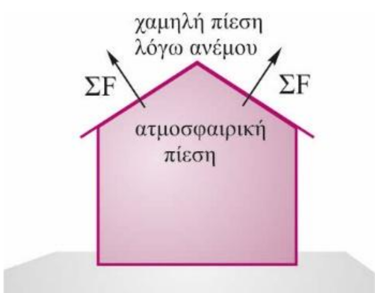
Με τη βοήθεια της ελαστικής κάψας διοχετεύουμε αέρα στον οριζόντιο σωλήνα ο οποίος εξέρχεται από το άκρο του 1. Σύμφωνα με τον Bernoulli, στο σημείο 1 της ρευματικής φλέβας που το ρευστό (αέρας) έχει μεγάλη ταχύτητα, η πίεση είναι μικρότερη από το σημείο 2, που είναι ίση με την $p_{ατμ}$ όση και στην επιφάνεια του υγρού. Έτσι, το υγρό του δοχείου ανέρχεται τον κατακόρυφο σωλήνα και παρασυρόμενο από το οριζόντιο ρεύμα του αέρα εκτοξεύεται υπό μορφή σταγονιδίων.



- Αναρπαγή στέγης

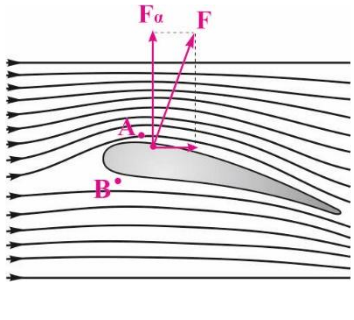
Όταν φυσάει άνεμος οριζόντια με μεγάλη ταχύτητα υπάρχει κίνδυνος αρπαγής μιας στέγης. Καθώς ο άνεμος περνά από το υψηλότερο σημείο της στέγης (σημείο 2 στο σχήμα), υπάρχει στένωση των ρευματικών γραμμών, δηλαδή αύξηση ταχύτητας και σύμφωνα με τον Bernoulli ελάττωση της πίεσης, $p_2 < p_\infty$. Στο εσωτερικό του σπιτιού (σημείο 3) η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή ακόμα μεγαλύτερη από την p_∞. Έτσι, λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ του εσωτερικού και εξωτερικού της στέγης αναπτύσσονται δυνάμεις κάθετες στην επιφάνεια της, με φορά προς τα πάνω, που ξεπερνώντας κάποιο όριο μπορούν να την ξεκολλήσουν.



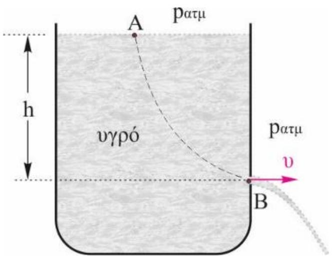


- Δυναμική άνωση και ανύψωση του αεροπλάνου.

Η κίνηση ενός αεροπλάνου είναι η περίπτωση ενός εμποδίου που τρέχει μέσα σε ακίνητο ρευστό. Τα φτερά του αεροπλάνου έχουν τέτοια τομή ώστε όπως αυτό κινείται, να υπάρχει πύκνωση των ρευματικών γραμμών του αέρα στο πάνω μέρος και αραίωση στο κάτω. Η διαφοροποίηση αυτή δημιουργεί διαφοράς πίεσης μεταξύ του κάτω και πάνω μέρους του αεροπλάνου. Η διαφορά πίεσης προκαλεί την άσκηση δύναμης **F**, (**αεροδύναμη**), κάθετης στην επιφάνεια των φτερών. Όταν η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης, **F$_α$** (**δυναμική άνωση**) είναι μεγαλύτερη από το βάρος του αεροπλάνου, αυτό ανέρχεται.



- Θεώρημα Torricelli.



Ένα ανοικτό δοχείο περιέχει υγρό. Σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υπάρχει μικρή τρύπα από την οποία το υγρό βγαίνει με ταχύτητα υ. Με εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli μεταξύ του σημείου Α της ελεύθερης επιφάνειας και του σημείου Β , που ανήκουν στην ίδια ρευματική φλέβα, υπολογίζεται η ταχύτητα εκροής υ από το σημείο Β. Βρίσκεται ότι είναι ίση με αυτήν που θα είχε αν αφηνόταν να πέσει ελεύθερα από το ίδιο ύψος, δηλαδή $\upsilon = \sqrt{2gh}$. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα Torricelli.**

Ημερομηνία τροποποίησης: 24/11/2015

<u>Επιμέλεια</u>: Ποντικός Ηλίας
<u>Επιστημονικός έλεγχος</u>: Παλόγος Αντώνιος, Στεφανίδης Κωνσταντίνος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{\text{ο}}$: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Η ΤΡΙΒΗ ΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

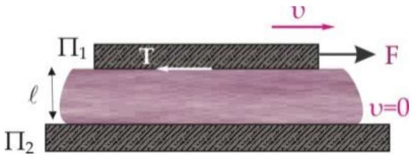
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ιξώδες ενός ρευστού

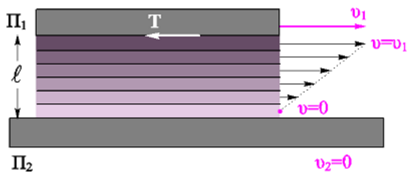
Στις προηγούμενες παραγράφους θεωρήσαμε τα ρευστά ιδανικά, δηλαδή ότι δεν αναπτύσσονται δυνάμεις μεταξύ των γειτονικών μορίων τους ή μεταξύ αυτών και των τοιχωμάτων του σωλήνα ροής.

Στα πραγματικά ρευστά, όταν ένα τμήμα του ρευστού κινείται ως προς ένα άλλο τμήμα του, εμφανίζονται δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνησή του. Οι δυνάμεις αυτές της εσωτερικής τριβής ονομάζονται **ιξώδες** του ρευστού.

Στο πείραμα του σχήματος, η πλάκα $Π_2$ είναι ακλόνητη ενώ η $Π_1$ μπορεί να κινείται μέσω μιας εξωτερικής δύναμης F. Μεταξύ των δύο πλακών τοποθετούμε ένα παχύρευστο υγρό, όπως π.χ. μέλι, πάχους l. Όταν η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα, τότε η εξωτερική δύναμη F αντισταθμίζει τις τριβές (ιξώδες) που αναπτύσσονται μεταξύ των στρωμάτων του υγρού που κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο.



Παρατηρούμε ότι το ανώτερο στρώμα του υγρού είναι προσκολλημένο στην $Π_1$ και κινείται με ταχύτητα υ, ενώ το χαμηλότερο στρώμα είναι προσκολλημένο στην $Π_2$ και παραμένει ακίνητο. Όλα τα ενδιάμεσα στρώματα κινούνται με ταχύτητες που αυξάνουν από 0 μέχρι υ.



Η εξωτερική δύναμη F που θα ασκήσουμε για να εξισορροπήσουμε τις εσωτερικές τριβές εξαρτάται από

- τη φύση του υγρού. Αν αντικαταστήσουμε το υγρό με άλλο που είναι λιγότερο παχύρευστο, όπως το λάδι, για να διατηρήσουμε την ταχύτητα της πάνω πλάκας σταθερή πρέπει να εφαρμόσουμε δύναμη μικρότερου μέτρου.
- από το πάχος l του ρευστού. Αν αυξήσουμε το πάχος, για να διατηρήσουμε την ταχύτητα της πάνω πλάκας σταθερή πρέπει να εφαρμόσουμε δύναμη μικρότερου μέτρου.
- από την επιφάνεια, Α, των πλακών. Για πλάκες μεγαλύτερης επιφάνειας, η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι μεγαλύτερη.
- από την ταχύτητα μετακίνησης, υ*, της πάνω πλάκας. Για να την μετακινήσουμε με μεγαλύτερη ταχύτητα, πρέπει να εφαρμόσουμε δύναμη μεγαλύτερου μέτρου.

Τα παραπάνω συνοψίζονται από τη σχέση

$F = nA\frac{\upsilon}{\ell}$, (1)

*Το υ στη σχέση (1) δηλώνει τη διαφορά ταχυτήτων μεταξύ της κάτω και πάνω επιφάνειας.

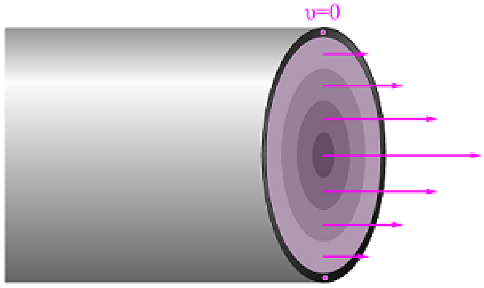
Όπου το **n** χαρακτηρίζει το ρευστό και ονομάζεται **συντελεστής ιξώδους**.

Μονάδα μέτρησης του συντελεστή ιξώδους στο S.I. είναι το Ns/m^2. Στην πράξη ο συντελεστής ιξώδους μετριέται σε poise (p). 1p = 0,1Pa s = 0,1 $\frac{N}{m^2}s$.

Εφαρμογές της τριβής των ρευστών

Οι δυνάμεις εσωτερικής τριβής που εμφανίζονται στα ρευστά έχουν σημαντικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στη λίπανση των τμημάτων μιας μηχανής που θα ήταν αδύνατη αν το λιπαντικό κατά τη ροή του δεν παρουσίαζε τέτοιες δυνάμεις. Η τιμή για το συντελεστή ιξώδους του νερού στους 20^oC είναι $n_v = 10^{-3}$ Ns/m^2, ενώ για το μηχανέλαιο $n_{\mu\eta\chi} = 250\cdot 10^{-3}$ Ns/m^2. Αυτό σημαίνει ότι το νερό είναι ακατάλληλο για τη λίπανση των τμημάτων μιας μηχανής καθώς δεν προσκολλάται στα μέταλλα, ενώ το μηχανέλαιο που έχει 250 φορές μεγαλύτερο συντελεστή ιξώδους προσκολλάται εύκολα στα κινητά μέρη της μηχανής.

Σε ένα πραγματικό ρευστό που ρέει σε σωλήνα, η κατανομή των ταχυτήτων κατά μήκος μιας διαμέτρου του σωλήνα είναι όπως στο σχήμα. Τα μόρια του ρευστού που είναι σε επαφή με τα τοιχώματα, δεν κινούνται λόγω των δυνάμεων συνάφειας ενώ, τα μόρια που βρίσκονται πιο κοντά στον άξονα του σωλήνα έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες. Έτσι για να εφαρμόσουμε τον τύπο της παροχής σε ένα πραγματικό ρευστό πρέπει να αντικαταστήσουμε την μέση ταχύτητα. $\Pi = A\bar{\upsilon}$.



Νευτώνεια ρευστά - η ιδιαιτερότητα του αίματος.

Η σχέση $F = nA\frac{\upsilon}{\ell}$ δεν ισχύει για όλα τα ρευστά. Τα ρευστά που υπακούουν στη σχέση αυτή ονομάζονται **Νευτώνεια** ρευστά. Είναι αυτά στα οποία η εσωτερική τριβή είναι ανάλογη της ταχύτητας ροής τους.

Το αίμα δεν ανήκει στα Νευτώνεια ρευστά και παρουσιάζει την εξής ιδιαιτερότητα. Είναι ένα ρευστό που περιέχει πολλά στερεά σωματίδια τα οποία αιωρούνται μέσα σε υγρό. Όταν η ταχύτητα ροής του αίματος αυξάνεται, για να μην αυξηθούν υπέρμετρα οι εσωτερικές τριβές, τα σωματίδια παραμορφώνονται και προσανατολίζονται έτσι ώστε να διευκολύνεται η ροή.

Μια τυπική τιμή για το συντελεστή ιξώδους του αίματος στους 37^{o} C είναι $n_{αιμ} = 2{,}7\cdot10^{-3}$ Ns/m^2.

Ημερομηνία τροποποίησης: 3/11/2015

<u>Επιμέλεια</u>: Ποντικός Ηλίας
<u>Επιστημονικός έλεγχος</u>: Παλόγος Αντώνιος, Στεφανίδης Κωνσταντίνος