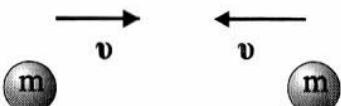


5 ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κρούσεις

- 5.1 α) Η ορμή συστήματος σωμάτων είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα. Η κινητική ενέργεια συστήματος σωμάτων είναι το αλγεβρικό άθροισμα των κινητικών ενεργειών τους. Είναι δυνατόν το διανυσματικό άθροισμα των ορμών να είναι μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των κινητικών ενεργειών διάφορο του μηδενός. Για παράδειγμα στο σύστημα του σχήματος  $\mathbf{p}_{\text{ολ}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ και $K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \neq 0$
- β) Για να έχει ένα σώμα κινητική ενέργεια πρέπει να κινείται ($v \neq 0$) και κατά συνέπεια να έχει ορμή.
- 5.26.....9.....3.....3.....
- 5.3 (γ)
- 5.4 (α)
- 5.5 (γ)
- 5.6 Όχι. Αν η κρούση ήταν ελαστική, οι σφαίρες εφόσον έχουν ίσες μάζες, θα έπρεπε να ανταλλάξουν ταχύτητες. Όμως $v'_1 \neq v_2$.
- 5.7 (δ)
- 5.8 (α), (β), (δ).
- 5.9 (δ)

Συστήματα αναφοράς

- 5.10 Για τον επιβάτη του τρένου το αντικείμενο κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0 . Για τον παρατηρητή του σταθμού το αντικείμενο κάνει πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα v η οποία έχει οριζόντια συνιστώσα την ταχύτητα του τρένου και κατακόρυφη συνιστώσα την v_0 .
- 5.11 (α)
- 5.12 (δ)
- 5.13 Η ταχύτητα του επιβάτη ως προς το έδαφος θα είναι $v_E = v + u$, με μέτρο $v_E = v - u$.
- 5.14 Το πλοίο B κινείται ως προς την ακτή με ταχύτητα $v_B = u + v$, με μέτρο $v_B = \sqrt{u^2 + v^2}$.
- 5.15 (γ), (δ), (στ).
- 5.16 Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα είναι μηδέν. Αν η συνισταμένη κάποιων δυνάμεων είναι μηδέν ως προς ένα αδρανειακό σύστημα θα είναι μηδέν και ως προς οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα. Άρα αν η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα θα διατηρείται και ως προς κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα.
- 5.17 Όχι. Αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα των σωμάτων είναι διάφορη του μηδενός τότε το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας δεν είναι αδρανειακό.
- 5.18 (β), (γ).

Φαινόμενο Doppler

5.19 (γ)

- 5.20 α) $f_A > f_\Pi$ β) $f_A < f_\Pi$ γ) $f_A < f_\Pi$
δ) $f_A = f_\Pi$ ε) $f_A > f_\Pi$ στ) $f_A > f_\Pi$

- 5.21 α) μεγαλύτερη β) ίδιες
γ) μεγαλύτερη συχνότητα έχει ο ανακλώμενος ήχος

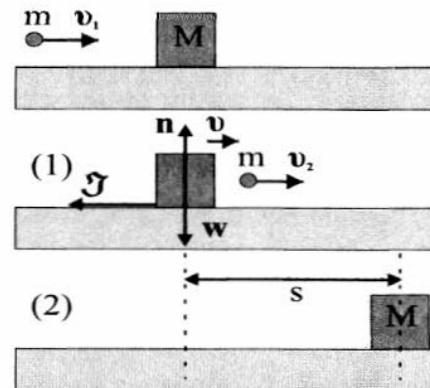
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κρούσεις

- 5.22 α) Από τη διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα – σώμα αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση έχουμε

$$m v_1 = M v + m v_2$$

$$\text{οπότε } v = \frac{m(v_1 - v_2)}{M} = 20 \text{ m/s}.$$



$$\beta) \Delta K = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -13600 \text{ J}$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι κατά την κρούση η μηχανική ενέργεια του συστήματος μειώθηκε.

γ) Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα μάζας M από τη θέση (1) έως τη θέση (2), όπου το σώμα σταματά, έχουμε

$$0 - \frac{1}{2} M v^2 = W_f \quad \text{δηλαδή} \quad -\frac{1}{2} M v^2 = -\mu_K n s$$

$$\text{Όμως } n = Mg \quad \text{και επομένως} \quad \frac{1}{2} M v^2 = \mu_K M g s .$$

Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε

$$s = \frac{v^2}{2 \mu_K g} = 40 \text{ m}$$

- 5.23 Εφόσον η κρούση είναι κεντρική και ελαστική ανάμεσα σε ένα κινούμενο και ένα ακίνητο σώμα για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση ισχύουν οι σχέσεις (5.8) και (5.9) (σελίδα 156 σχολικό βιβλίο), οπότε

$$v'_1 = \frac{m - 3m}{m + 3m} v = -6 \text{ m/s} \quad \text{το (-) δείχνει ότι η } v'_1 \text{ έχει αντίθετη φορά με την } v.$$

$$v'_2 = \frac{2m}{m + 3m} v = 6 \text{ m/s}$$

- 5.24 α) Από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος των σφαιρών αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση έχουμε

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{όποτε} \quad v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0,33 \text{ m/s}$$

το (-) δείχνει ότι το συσσωμάτωμα κινείται με την ίδια φορά με το σώμα μάζας m_2 .

β) Το ποσοστό κατά το οποίο ελαττώθηκε η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σφαιρών κατά την κρούση είναι

$$\frac{|\Delta K|}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} 100\% = 98\%$$

- 5.25 Εφόσον η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και το ένα από τα δύο σώματα ήταν αρχικά ακίνητο, η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας μετά την

κρούση θα είναι $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

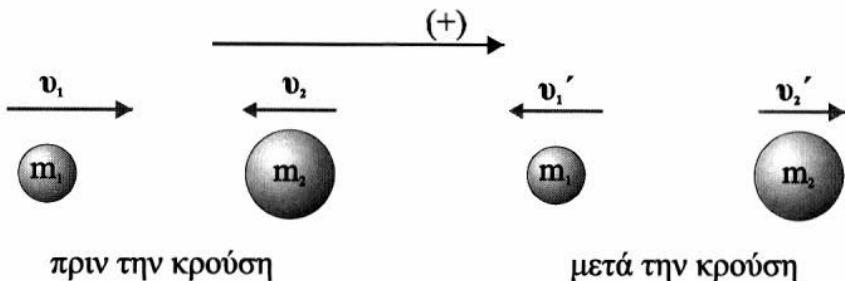
Στην πρώτη περίπτωση $\frac{v_1}{3} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

οπότε $m_2 = \frac{m_1}{2} = 0,5 \text{ kg}$

Στη δεύτερη περίπτωση $-\frac{v_1}{3} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

οπότε $m_2 = 2m_1 = 2 \text{ kg}$

5.26



Θεωρούμε ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας v_1 .

Αφού η κρούση είναι ελαστική θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2)$$

η (1) γράφεται και

$$m_1 (v_1 + v_1') = m_2 (v_2' + v_2) \quad (3)$$

ενώ η (2) γράφεται

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \quad (4)$$

Διαιρούμε τις (4) και (3) κατά μέλη και βρίσκουμε

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2 \quad \text{και} \quad v_2' = v_1 - v_1' + v_2 \quad (5)$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του v_2' στην (1) και λύνουμε ως προς v_1'

$$v_1' = \frac{m_2 (v_1 + 2v_2) - m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 8 \text{ m/s}$$

Αντικαθιστούμε στην (5) και βρίσκουμε

$$v_2' = 1 \text{ m/s}$$

5.27

Η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να αποκτήσει η σφαίρα μάζας m_2 μετά την κρούση είναι το σύνολο της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών πριν την κρούση. Για να συμβεί αυτό πρέπει μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m_1 να ακινητοποιηθεί κάτι που συμβαίνει όταν οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες.

5.28 Αν η μάζα του νετρονίου είναι m_n τότε

ο πυρήνας πρωτίου (1 πρωτόνιο) έχει μάζα περίπου ίση με m_n ,

ο πυρήνας του δευτερίου (1 πρωτόνιο + 1 νετρόνιο) $2m_n$

και ο πυρήνας ηλίου (2 πρωτόνια + 2 νετρόνια) $4 m_n$

Σύμφωνα με τη σχέση (5.8) η ταχύτητα του νετρονίου μετά την κρούση, σε κάθε περίπτωση, θα είναι

$$\text{με το πρώτιο} \quad v_1' = \frac{m_n - m_n}{m_n + m_n} v_1 = 0$$

$$\text{με το δευτέριο} \quad v_1' = \frac{m_n - 2m_n}{m_n + 2m_n} v_1 = -\frac{v_1}{3}$$

$$\text{με το ήλιο} \quad v_1' = \frac{m_n - 4m_n}{m_n + 4m_n} v_1 = -\frac{3v_1}{5}$$

Αν K_1 η κινητική ενέργεια του νετρονίου πριν την κρούση το ποσοστό της απώλειας κινητικής ενέργειας για το νετρόνιο κατά την κρούση θα είναι κατά περίπτωση

$$\text{με το πρώτιο} \quad \frac{|\Delta K_1|}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_n v_1^2 - 0}{\frac{1}{2} m_n v_1^2} 100\% = 100\%$$

$$\text{με το δευτέριο} \quad \frac{|\Delta K_1|}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_n v_1^2 - \frac{1}{2} m_n \left(\frac{v_1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2} m_n v_1^2} 100\% = 88,9\%$$

$$\text{με το ήλιο} \quad \frac{|\Delta K_1|}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_n v_1^2 - \frac{1}{2} m_n \left(\frac{3v_1}{5}\right)^2}{\frac{1}{2} m_n v_1^2} 100\% = 64\%$$

5.29 α) Έστω \mathbf{V} η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

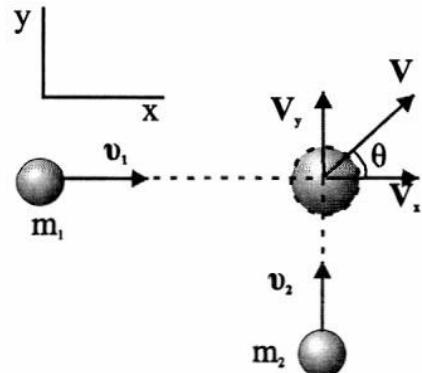
Αν $\mathbf{p}_{\text{πριν}}$ η ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και $\mathbf{p}_{\text{μετά}}$ η ορμή αμέσως μετά την κρούση θα είναι

$$\mathbf{p}_{\text{πριν}} = \mathbf{p}_{\text{μετά}}$$

Αναλύουμε το διάνυσμα \mathbf{V} σε δύο συνιστώσες τη V_x κατά την διεύθυνση x και τη V_y κατά την διεύθυνση y (σχ. 5.7). Όταν δύο διανύσματα είναι ίσα, είναι ίσες και οι συνιστώσες τους, επομένως

$$\mathbf{p}_{\text{πριν}} = \mathbf{p}_{\text{μετά}} \quad \text{άρα} \quad p_x^{\text{πριν}} = p_x^{\text{μετά}} \\ p_y^{\text{πριν}} = p_y^{\text{μετά}}$$

ή $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_x$
 $m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_y$



Από όπου $V_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

και $V_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Επομένως, η ταχύτητα του συσσωματώματος θα έχει μέτρο

$$V = \sqrt{\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2} = 6 \text{ m/s}$$

και θα σχηματίζει με την ταχύτητα v_1 , γωνία θ για την οποία

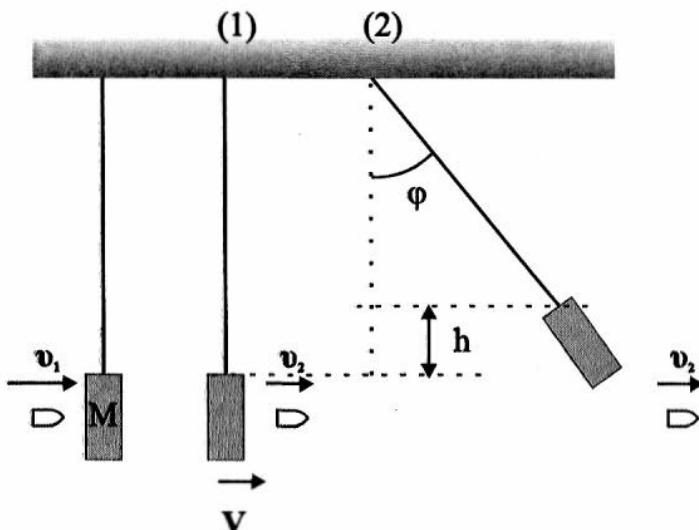
$$\varepsilon \phi \theta = \frac{\frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}}{\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}} = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{3}{4}$$

β) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι

$$\Delta K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) = -174 \text{ J}$$

- 5.30 Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα – πλάκα αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση έχουμε

$$m v_1 = M V + m v_2 \quad \text{οπότε} \quad V = \frac{m(v_1 - v_2)}{M} = 4,4 \text{ m/s}$$



Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για την πλάκα από τη θέση (1) έως τη θέση (2)

$$0 - \frac{1}{2} M V^2 = -Mgh = -Mgl(1 - \sigma v n \varphi)$$

$$\text{οπότε} \quad \sigma v n \varphi = 1 - \frac{V^2}{2gl} = 0,516$$

Κινήσεις σε αδρανειακά συστήματα

- 5.31 Το ποταμόπλοιο έχει ως προς την ξηρά ταχύτητα

$$v_\pi = v + u \quad (\text{u η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού})$$

Όταν το πλοίο κινείται ομόρροπα με το ρεύμα η ταχύτητά του έχει μέτρο

$$v_{1\pi} = v + u = 25 \text{ km/h},$$

ενώ όταν κινείται αντίρροπα με το ρεύμα,

$$v_{2\pi} = v - u = 15 \text{ km/h}$$

Ο συνολικός χρόνος για τη διαδρομή ABA είναι

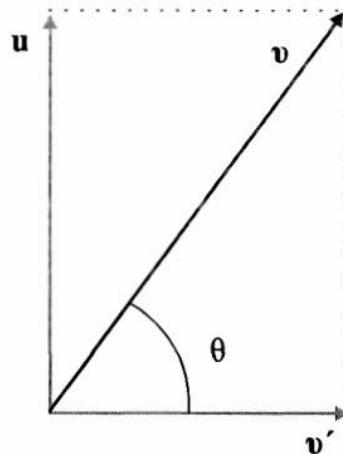
$$t_{o\lambda} = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_{1\pi}} + \frac{s}{v_{2\pi}} = 2,56 \text{ h}$$

- 5.32 Αν \mathbf{u} η ταχύτητα με την οποία κινείται ως προς τη Γη το πρώτο αεροπλάνο και \mathbf{v}' η ταχύτητα του δεύτερου αεροπλάνου ως προς το πρώτο, τότε τα ραντάρ στη Γη βλέπουν το δεύτερο αεροπλάνο να κινείται με ταχύτητα

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$$

οπότε $v = \sqrt{u^2 + v'^2} = 500 \text{ m/s}$

και $\epsilon\phi\theta = \frac{u}{v'} = \frac{4}{3}$



- 5.33 α) Για τον παρατηρητή του Σ

$$mv = (m+M)V \quad \text{οπότε} \quad V = \frac{m}{m+M}v = 2 \text{ m/s}$$

- β) Για τον παρατηρητή του Σ'

το σώμα με μάζα m πριν την κρούση κινείται με ταχύτητα $v' = v - u$

το σώμα με μάζα M πριν την κρούση κινείται με ταχύτητα

$$v'_2 = -u$$

το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα

$$V' = V - u$$

Αν ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση όπως τη βλέπει ο παρατηρητής του Σ' πρέπει

$$mv' + Mv'_2 = (m+M)V'$$

ή $m(v-u) - Mu = (m+M)(V-u)$, που είναι αληθές.

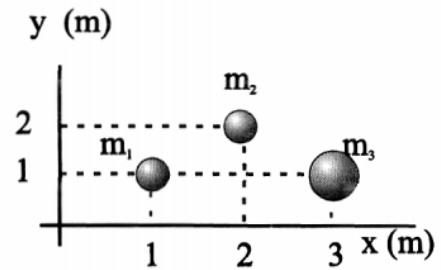
Κέντρο μάζας – Σχετικές κινήσεις

- 5.34 Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{15}{7}$$

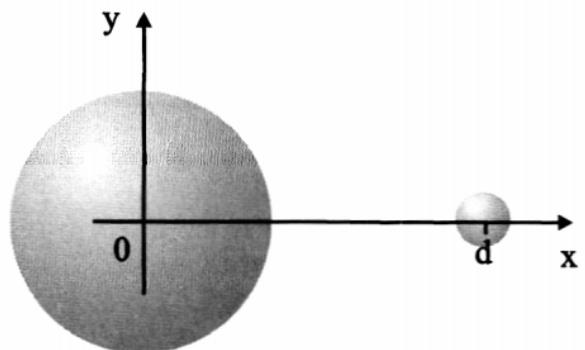
και

$$y_{cm} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{9}{7}$$



- 5.35 Αν θεωρήσουμε ότι το κέντρο του Ήλιου βρίσκεται στη θέση $(0, 0)$ και ότι το κέντρο της Γης βρίσκεται στη θέση $(d, 0)$ το κέντρο μάζας του συστήματος Ήλιος – Γη βρίσκεται στη θέση

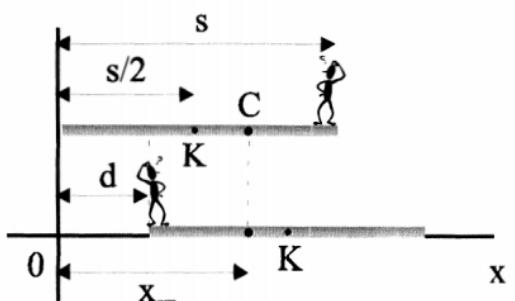
$$x = \frac{dm_\Gamma}{m_\Gamma + m_H} = 4,46 \times 10^5 \text{ m}$$



Παρατηρούμε ότι η απόσταση του κέντρου μάζας του συστήματος από το κέντρο του Ήλιου είναι περίπου 1500 φορές μικρότερη από την ακτίνα του Ήλιου.

- 5.36 α' τρόπος

Το σύστημα βάρκα – άνθρωπος μπορεί να θεωρηθεί απομονωμένο. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη μετακίνηση του ανθρώπου πάνω στη βάρκα το κέντρο μάζας C θα παραμείνει ακίνητο. Για να συμβεί αυτό πρέπει ταυτόχρονα με τον άνθρωπο να μετατοπίζεται και η βάρκα στην αντίθετη κατεύθυνση. Θεωρούμε ότι η βάρκα έχει το κέντρο μάζας της στο μέσον της.



Για την αρχική κατάσταση ισχύει

$$x_{cm} = \frac{M \frac{s}{2} + ms}{M + m} \quad (1)$$

Για την τελική κατάσταση ισχύει

$$x_{cm} = \frac{M\left(d + \frac{s}{2}\right) + md}{M + m} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{M\frac{s}{2} + ms}{M + m} = \frac{M\left(d + \frac{s}{2}\right) + md}{M + m}$$

από όπου προκύπτει $d = \frac{ms}{M + m} = 2m$

β' τρόπος

Εφόσον οι τριβές μεταξύ βάρκας και νερού είναι αμελητέες το σύστημα βάρκα – άνθρωπος μπορεί να θεωρηθεί απομονωμένο. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα.

$$0 = Mv_\beta - mv_\alpha \quad (3)$$

όπου v_β και v_α οι ταχύτητες του ανθρώπου και της βάρκας ως προς το νερό. Αν θεωρήσουμε ότι οι ταχύτητες της βάρκας και του ανθρώπου είναι σταθερές η (3) γράφεται και ως εξής

$$0 = M \frac{d}{t} - m \frac{s-d}{t} \quad (4)$$

όπου d η μετατόπιση της βάρκας ως προς το νερό.

Τελικά από την (4) βρίσκουμε $d = \frac{ms}{m + M} = 2m$.

5.37 Η προωστική δύναμη που ασκούν τα καυσαέρια στον πύραυλο δίνεται

από τη σχέση $F = u \frac{dm}{dt} = 140000 N$

όμως επίσης $F = Ma$ και $a = \frac{F}{M} = 14 m/s^2$.

$$5.38 \quad F = u \frac{dm}{dt} \quad \text{επίσης} \quad F = Ma$$

οπότε $u \frac{dm}{dt} = Ma$ και $\frac{dm}{dt} = \frac{Ma}{u} = 40 \text{ kg/s}$.

Φαινόμενο Doppler

- 5.39 Η σχέση που δίνει τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής όταν αυτός απομακρύνεται από ακίνητη πηγή είναι

$$f_A = \frac{\nu - v_A}{\nu} f_s$$

όπου ν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, v_A η ταχύτητα του παρατηρητή και f_s η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή.

$$f_A = \frac{9}{10} f_s \quad \text{οπότε} \quad \frac{9}{10} f_s = \frac{\nu - v_A}{\nu} f_s$$

και $v_A = \frac{\nu}{10} = 34 \text{ m/s}$.

- 5.40 Όταν το περιπολικό πλησιάζει ο παρατηρητής ακούει ήχο συχνότητας

$$f_1 = \frac{\nu}{\nu - v_s} f_s \quad (1)$$

όπου ν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, v_s η ταχύτητα του περιπολικού και f_s η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει το περιπολικό.

Όταν το περιπολικό απομακρύνεται, ο παρατηρητής ακούει ήχο συχνότητας

$$f_2 = \frac{\nu}{\nu + v_s} f_s \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\nu + v_s}{\nu - v_s}$

οπότε $v_s = \nu \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} = 17,9 \text{ m/s}$

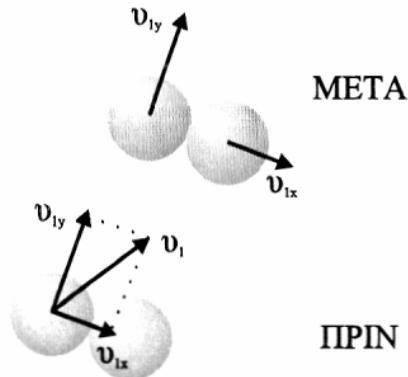
Από την (1) βρίσκουμε

$$f_s = f_1 \frac{(v - v_s)}{v} = 473,7 \text{ Hz}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.41 α' τρόπος

Αναλύουμε την ταχύτητα v_1 της κινούμενης σφαίρας αμέσως πριν την κρούση σε δύο άξονες. Ο ένας περνάει από τα κέντρα των σφαιρών και ο άλλος είναι κάθετος σ' αυτόν. Αν η σφαίρα 1 είχε πριν την κρούση μόνο την v_{1x} η κρούση θα ήταν κεντρική και ελαστική, οι σφαίρες θα άλλαζαν μεταξύ τους ταχύτητες, επειδή έχουν ίδιες μάζες, δηλαδή η σφαίρα 1 θα έμενε ακίνητη μετά την κρούση ενώ η σφαίρα 2 θα αποκτούσε ταχύτητα v_{1x} . Αν η σφαίρα 1 είχε πριν την κρούση μόνο την v_{1y} δεν θα γινόταν κρούση και η σφαίρα 1 θα συνέχιζε την κίνησή της με v_{1y} . Συνδυάζοντας τα δύο αποτελέσματα καταλήγουμε ότι μετά την κρούση η σφαίρα 1 κινείται με v_{1y} ενώ η σφαίρα 2 με v_{1x} . Οι δύο ταχύτητες είναι κάθετες μεταξύ τους.



β' τρόπος

Από τη διατήρηση ορμής για την κρούση έχουμε

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2 \quad \text{οπότε} \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$$

όπου \mathbf{v}_1 η ταχύτητα της κινούμενης σφαίρας πριν την κρούση, \mathbf{v}'_1 η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας μετά την κρούση και \mathbf{v}'_2 η ταχύτητα της αρχικά ακίνητης σφαίρας μετά την κρούση.

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε

$$v_1^2 = v'_1{}^2 + v'_2{}^2 + 2v'_1 v'_2 \sin \theta \quad (1)$$

όπου θ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα \mathbf{v}'_1 και \mathbf{v}'_2

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική ισχύει επίσης

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2$$

ή

$$\upsilon^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι

$$\sigma v n \theta = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \theta = 90^\circ$$

- 5.42 α) Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε
- $$m\upsilon = (m+M)V$$

οπότε $V = \frac{m\upsilon}{m+M}$

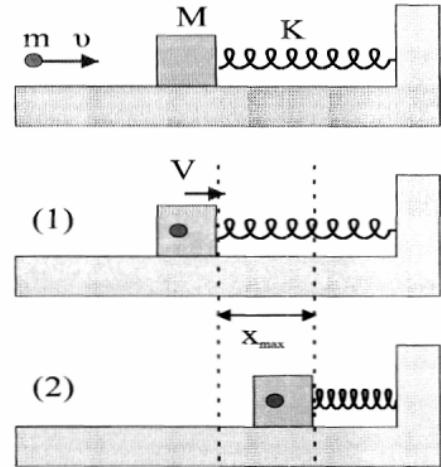
Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (1) έως τη θέση (2) έχουμε

$$0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = W_{F_{el}}$$

ή

$$-\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m\upsilon}{m+M}\right)^2 = -\frac{1}{2}Kx_{max}^2$$

και $x_{max} = \sqrt{\frac{m^2\upsilon^2}{K(m+M)}} = 0,1m$



- β) Πριν την κρούση το σύστημα είχε την κινητική ενέργεια του βλήματος

$$E_{apx} = K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Τελικά το σύστημα έχει τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου

$$E_{tel} = U_{el} = \frac{1}{2}Kx_{max}^2$$

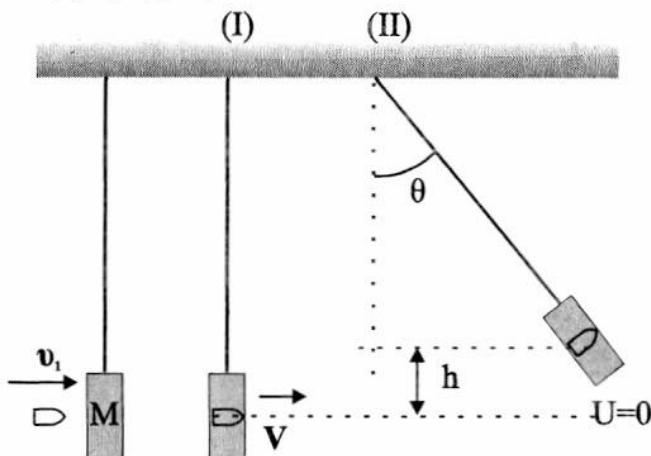
Το ποσοστό της ενέργειας που έχασε το σύστημα είναι

$$\frac{|\Delta E|}{E_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}Kx_{\max}^2}{\frac{1}{2}mv^2} \cdot 100\% = 95\%$$

5.43 Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε
 $mv = (m+M)V$

οπότε $v = \frac{m+M}{m}V$ (1)

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (I) έως τη θέση (II) έχουμε



$$0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = -(m+M)gh = -(m+M)gl(1 - \sigma v v \theta)$$

οπότε $V = \sqrt{2gl(1 - \sigma v v \theta)}$

Αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε

$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gl(1 - \sigma v v \theta)}$$

Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το κέντρο μάζας του συσσωματώματος στη θέση (I) ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω θέσης μέσα στο πεδίο βαρύτητας

Αρχικά το σύστημα είχε την κινητική ενέργεια του βλήματος

$$E_{\alpha\rho\chi} = K_1 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ή}$$

$$E_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m \left(\frac{m+M}{m} \sqrt{2gl(1 - \sigma v v \theta)} \right)^2 = \frac{(m+M)^2}{m} gl(1 - \sigma v v \theta)$$

Τελικά το σύστημα έχει τη δυναμική ενέργεια του συσσωματώματος λόγω της θέσης του μέσα στο πεδίο βαρύτητας

$$E_{\text{rel}} = U = (m + M)gh = (m + M)gl(1 - \sigma v n \theta)$$

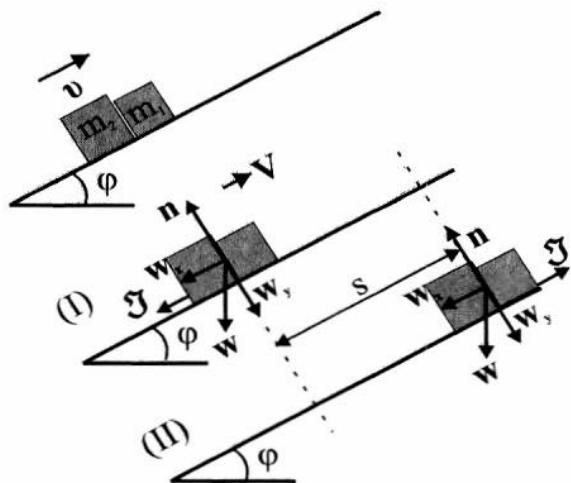
Η μηχανική ενέργεια που έχασε το σύστημα είναι

$$|\Delta E_{Mhx}| = \frac{(m + M)^2}{m} gl(1 - \sigma v n \theta) - (m + M)gl(1 - \sigma v n \theta) = 255 J$$

- 5.44 Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε

$$m_2 v = (m_1 + m_2) V$$

$$\text{οπότε } V = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}$$



Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (I) έως τη θέση (II) έχουμε

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = W_w + W_{\mathfrak{I}}$$

$$W_w = -(m_1 + m_2)g \eta \mu \varphi s$$

$$W_{\mathfrak{I}} = -\mathfrak{I}s = -\mu_K ns = -\mu_K (m_1 + m_2)g \sigma v n \varphi s$$

$$\begin{aligned} \text{οπότε } & -\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{m_2 v}{m_1 + m_2} \right)^2 = \\ & = -(m_1 + m_2)g \eta \mu \varphi s - \mu_K (m_1 + m_2)g \sigma v n \varphi s \end{aligned}$$

και τελικά $s = \frac{m_2^2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2 g(\eta \mu \varphi + \mu_K \sigma v n \varphi)} = 1,8 m$

β) Το συσσωμάτωμα θα επιστρέψει αν η συνιστώσα w_x του βάρους είναι μεγαλύτερη από το όριο της στατικής τριβής την οποία εδώ θεωρούμε ίση με την τριβή ολίσθησης

$$w_x = (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi = 250 \text{ N}$$

$$\mathfrak{I} = \mu_K n = \mu_K (m_1 + m_2)g\sigma\nu\nu\varphi = 250 \text{ N}$$

Παρατηρούμε ότι $w_x = \mathfrak{I}$ οπότε το συσσωμάτωμα δεν επιστρέφει.

5.45 α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το σώμα 1 από τη θέση (I) έως τη θέση (II)

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_{w1}$$

$$W_{w1} = mg\eta\mu\varphi s_1 \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\eta\mu\varphi s_1 \quad \text{και}$$

$$v = \sqrt{2g\eta\mu\varphi s_1}$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε

$$mv = 2mV \quad \text{οπότε}$$

$$V = \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{g\eta\mu\varphi s_1}{2}}$$

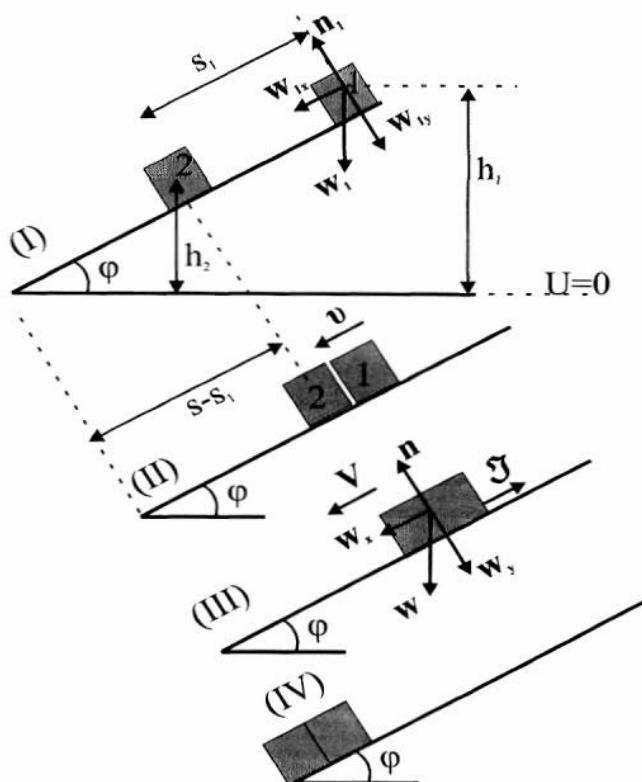
Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (III) έως τη θέση (IV)

$$0 - \frac{1}{2}2mV^2 = W_w + W_{\mathfrak{I}}$$

$$W_w = 2mg\eta\mu\varphi (s - s_1)$$

$$W_{\mathfrak{I}} = -\mathfrak{I}(s - s_1) = -\mu_K n(s - s_1) = -\mu_K 2mg\sigma\nu\nu\varphi(s - s_1)$$

οπότε



$$-m \frac{g\eta\mu\varphi s_1}{2} = 2mg\eta\mu\varphi(s - s_1) - \mu_K 2mg\sigma\nu\varphi(s - s_1)$$

και τελικά $\mu_K = \frac{\frac{\eta\mu\varphi s_1}{2} + 2\eta\mu\varphi(s - s_1)}{2\sigma\nu\varphi(s - s_1)} = \frac{5\sqrt{3}}{13}$

β) Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από τη βάση του πλάγιου επιπέδου.

Η αρχική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων είναι
 $E_{\alpha\rho\chi} = mgh_1 + mgh_2 = mg\eta\mu\varphi[s + (s - s_1)] = 34J$

Η τελική ενέργεια του συστήματος είναι $E_{\tau\epsilon\lambda} = 0$

Η συνολική θερμότητα που παράχθηκε είναι

$$|\Delta E| = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\epsilon\lambda} = 34J$$

5.46 Το σύστημα άνθρωπος – αερόστατο αρχικά ηρεμεί οπότε η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δέχεται είναι μηδενική και το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητο.

Όταν ο άνθρωπος αρχίσει να ανεβαίνει το αερόστατο θα κατεβαίνει ώστε το κέντρο μάζας να παραμένει ακίνητο στην αρχική του θέση.

Αναγκαστικά το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο συνάντησης του ανθρώπου με το αερόστατο.

Η θέση του κέντρου μάζας βρίσκεται σε ύψος y_2 από το έδαφος και

ισχύει $y_2 = \frac{MH}{m+M}$

και επομένως το αερόστατο θα κατέβει κατά

$$y_1 = H - y_2 = H - \frac{MH}{m+M} = H \frac{m}{m+M}$$

- 5.47 α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από τη θέση (3) έως τη θέση (4)

$$0 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 = W_{\mathfrak{J}}$$

$$W_{\mathfrak{J}} = -\mathfrak{J}x = -\mu_K nx = -\mu_K m_1 gx$$

οπότε

$$-\frac{1}{2}m_1v_1'^2 = -\mu_K m_1 gx$$

$$\text{και } v_1' = \sqrt{2\mu_K gx}$$

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική και μετωπική και το σώμα μάζας m_2 ήταν αρχικά ακίνητο, μετά την κρούση, το σώμα μάζας m_1 θα έχει ταχύτητα

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{v_1}{3} \quad \text{οπότε } v_1 = -3v_1' = -3\sqrt{2\mu_K gx}$$

(Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η v_1 έχει φορά αντίθετη με τη v_1')

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από τη θέση (1) έως τη θέση (2)

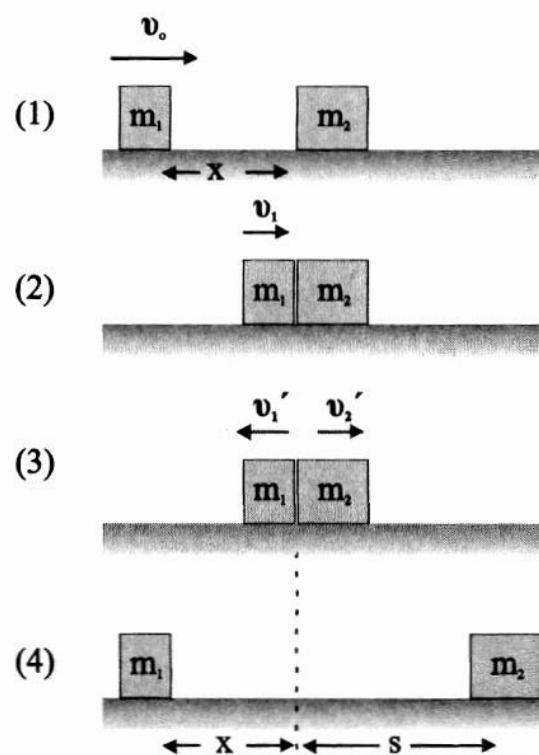
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = W_{\mathfrak{J}}$$

$$W_{\mathfrak{J}} = -\mathfrak{J}x = -\mu_K nx = -\mu_K m_1 gx$$

$$\text{οπότε } \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = -\mu_K m_1 gx$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(3\sqrt{2\mu_K gx})^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -\mu_K gx$$

$$\text{και } v_0 = \sqrt{2\mu_K gx + 18\mu_K gx} = 10 \text{ m/s}$$



β) Η ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση είναι

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{3} 3\sqrt{2\mu_K g x} = \sqrt{8\mu_K g x}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας m_2 από τη θέση (3) έως τη θέση (4)

$$0 - \frac{1}{2} m v'^2_2 = W_3$$

$$W_3 = -\mathfrak{J}s = -\mu_K n_2 s = -\mu_K m_2 g x$$

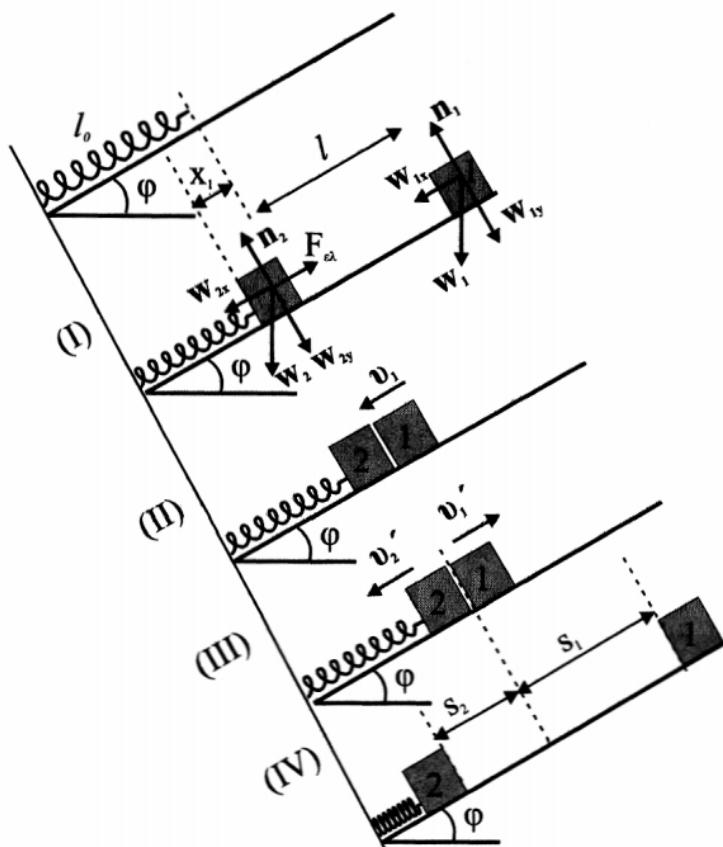
$$\text{οπότε } -\frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = -\mu_K m_2 g s \text{ και } s = \frac{v'^2_2}{2\mu_K g} = \frac{8\mu_K g x}{2\mu_K g} = 4x = 4 \text{ m}$$

5.48 Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα 1 από τη θέση (I) έως τη θέση (II)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = W_{w1}$$

$$W_{w1} = m_1 g \eta \mu \varphi l \quad \text{οπότε} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g \eta \mu \varphi l$$

$$\text{και} \quad v_1 = \sqrt{2g\eta\mu\varphi l}$$



Αμέσως μετά την κρούση τα σώματα θα έχουν ταχύτητες

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{v_1}{2} = -\sqrt{\frac{g \eta \mu \varphi l}{2}}$$

$$\text{και } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{g \eta \mu \varphi l}{2}}$$

Το πρόσημο της ταχύτητας v'_1 υποδηλώνει ότι η φορά κίνησης του σώματος 1 είναι αντίθετη με την αρχική.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας 1 από τη θέση (III) έως τη θέση (IV)

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 = W_{w1}$$

$$\text{Αλλά } W_{w1} = -m_1 g \eta \mu \varphi s_1 \quad \text{επομένως} \quad -\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 = -m_1 g \eta \mu \varphi s_1$$

$$\text{και } s_1 = \frac{v'^2_1}{2g \eta \mu \varphi} = \frac{\frac{g \eta \mu \varphi l}{2}}{2g \eta \mu \varphi} = \frac{l}{4} = 1m$$

Το σώμα 2 πριν την κρούση ισορροπεί στη θέση στην οποία η συσπείρωση του ελατηρίου είναι x_1 , οπότε

$$F_{\varepsilon\lambda} = w_{2x} \quad \text{ή} \quad Kx_1 = m_2 g \eta \mu \varphi$$

$$\text{και } x_1 = \frac{m_2 g \eta \mu \varphi}{K} = 0,025m$$

Η ταχύτητα του σώματος 2 θα μηδενιστεί όταν διανύσει στο πλάγιο επίπεδο απόσταση s_2 .

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα 2 από τη θέση (III) έως τη θέση (IV).

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = W_{w2} + W_{F\varepsilon\lambda}$$

$$W_{w2} = m_2 g \eta \mu \varphi s_2 \text{ και}$$

$$W_{F\lambda} = \frac{1}{2} K x_1^2 - \frac{1}{2} K (s_2 + x_1)^2$$

οπότε $-\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 g \eta \mu \varphi s_2 + \frac{1}{2} K x_1^2 - \frac{1}{2} K (s_2 + x_1)^2$
 ή $-\frac{1}{2} m_2 \frac{g \eta \mu \varphi l}{2} = m_2 g \eta \mu \varphi s_2 + \frac{1}{2} K x_1^2 - \frac{1}{2} K (s_2 + x_1)^2$

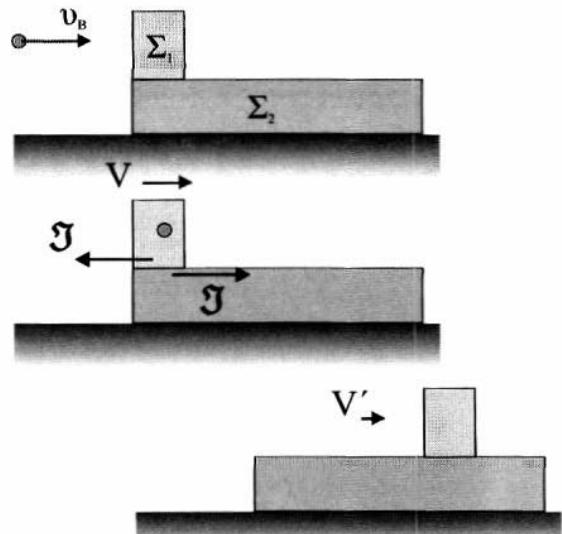
και τελικά $s_2 = 0,1\sqrt{5} m$

- 5.49 α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα - σώμα Σ_1 αμέσως πριν και αμέσως μετά την πλαστική κρούση.

$$m_B v_B = (m_B + m_1) V \text{ οπότε}$$

$$V = \frac{m_B}{m_B + m_1} v_B = 5 m/s$$

Το σύστημα (συσσωμάτωμα - Σ_2) είναι απομονωμένο οπότε η ορμή του διατηρείται σταθερή.



$$(m_B + m_1) V = (m_B + m_1 + m_2) V'$$

όπου V' η κοινή ταχύτητα που αποκτά το σύστημα τελικά

οπότε $V' = \frac{m_B + m_1}{m_B + m_1 + m_2} V = 1 m/s$

Η συνολική θερμότητα που παράγεται είναι ίση με τη διαφορά της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος και της τελικής κινητικής ενέργειας του συστήματος.

$$Q = \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \frac{1}{2} (m_B + m_1 + m_2) V'^2 = 247,5 J$$

β) Το συσσωμάτωμα (βλήμα - Σ_1) επιβραδύνεται λόγω της τριβής που δέχεται από το Σ_2 λόγω της σχετικής του κίνησης με αυτό. Η τριβή είναι σταθερή και έχει μέτρο $\mathfrak{I} = \mu n = \mu(m_B + m_1)g$

Η επιβράδυνση με την οποία κινείται το συσσωμάτωμα είναι

$$a = \frac{\mathfrak{I}}{(m_B + m_1)} = \frac{\mu(m_B + m_1)g}{(m_B + m_1)} = 5 \text{ m/s}^2$$

Από $V' = V - at_1$ βρίσκουμε τον χρόνο κίνησης του συσσωματώματος μέχρι να αποκτήσει το σύστημα κοινή ταχύτητα

$$t_1 = \frac{V - V'}{a} = 0,8 \text{ s}$$

Το διάστημα που διάνυσε το συσσωμάτωμα ως προς το έδαφος στον χρόνο αυτό είναι

$$s = Vt_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = 2,4 \text{ m}$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το Σ_2 κάνει κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη με την επίδραση της δύναμης που του ασκεί το συσσωμάτωμα και είναι η αντίδραση στην τριβή που δέχεται το συσσωμάτωμα από το Σ_2 .

Το Σ_2 σε χρόνο t_1 διανύει, ως προς το έδαφος, διάστημα

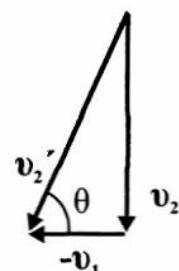
$$s' = \frac{1}{2}a't_1^2 \quad \text{όπου} \quad a' = \frac{\mathfrak{I}}{m_2} = \frac{\mu(m_B + m_1)g}{m_2} = 1,25 \text{ m/s}^2$$

οπότε $s' = 0,4 \text{ m}$

Τελικά το συσσωμάτωμα μετακινήθηκε ως προς το Σ_2 κατά

$$\Delta s = s - s' = 2 \text{ m}$$

- 5.50 Η μεγαλύτερη κάλυψη επιτυγχάνεται όταν ο άξονας της ομπρέλας τοποθετείται κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας των σταγόνων όπως την αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος. Το διάνυσμα της ταχύτητας της βροχής ως προς τον άνθρωπο είναι $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$



$$\varepsilon \phi \theta = \frac{v_2}{v_1}$$

όπου θ η γωνία της ομπρέλας με το οριζόντιο επίπεδο.

- 5.51 Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο κινούμενος παρατηρητής δίνεται από τη σχέση

$$f_A = \frac{v + v_A}{v} f_s \quad (1)$$

άρα η ταχύτητα με την οποία κινείται κάθε στιγμή ο παρατηρητής δίνεται από τη σχέση $v_A = \frac{f_A - f_s}{f_s} v$

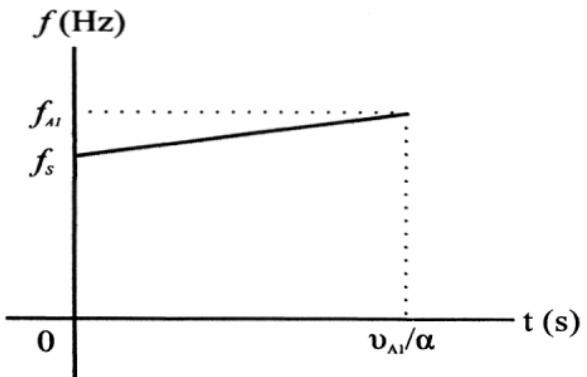
Θέτουμε $f_A = f_{A1} = 603,5 \text{ Hz}$ και βρίσκουμε την ταχύτητα του παρατηρητή τη στιγμή που φτάνει στην πηγή $v_{A1} = 40 \text{ m/s}$.

Ο παρατηρητής κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα οπότε $v_{A1} = at_1$ και $d = \frac{1}{2}at_1^2$

Απαλείφουμε το χρόνο από τις παραπάνω εξισώσεις και βρίσκουμε

$$a = \frac{v_{A1}^2}{2d} = 2 \text{ m/s}^2$$

Θέτουμε στην (1) $v_A = at$ και βρίσκουμε την f_A ως συνάρτηση του χρόνου



$$f_A = \frac{v + at}{v} f_s \quad \text{ή} \quad f_A = f_s + \frac{a}{v} t$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

$$5.52 \quad f_A = \frac{v + v_A}{v + v_S} f_S = 415 \text{ Hz}$$

- 5.53 Αν f_A η συχνότητα που ακούει ο σιδηροδρομικός όταν είναι ακίνητος, f_S η συχνότητα που εκπέμπει το τρένο και v_S η ταχύτητα του τρένου ισχύει $f_A = \frac{v}{v + v_S} f_S$ οπότε $v_S = \frac{f_A - f_S}{f_A} v = 18,9 \text{ m/s}$

Αν ο υπάλληλος τρέχοντας με ταχύτητα v_A διανύει διάστημα $s_1 = 500\text{m}$ στον ίδιο χρόνο το τρένο διανύει διάστημα $s_2 = 2000\text{m}$.

$$s_1 = v_A t_1 \quad \text{και} \quad s_2 = v_S t_1$$

$$\text{οπότε} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_A}{v_S} \quad \text{και} \quad v_A = v_S \frac{s_1}{s_2} = 4,72\text{ m/s}$$

Ενώ τρέχει, ο σιδηροδρομικός ακούει ήχο συχνότητας

$$f'_A = \frac{v - v_A}{v - v_S} f_S = 355\text{ Hz}$$