2 ΚΥΜΑΤΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Μηχανικά κύματα

2.1 (γ)

2.2 α) Β β) Γ

2.3 1α) Γ 1β) Α
2α) Α, Δ 2β) Β, Ε 2γ) Β, Ε

2.4 (α), (β), (δ)

2.5 1) (β) 2) (γ)

Συμβολή – στάσιμα

2.6 1) Δ

2.7 Δύο πηγές λέγονται σύγχρονες ή σε φάση όταν δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα.

2.8 ……αντίθετες……..παραμένουν συνεχώς ακίνητα ……μέγιστο πλάτος……κοιλίες ……$\lambda/2$.

2.9 1) (β) 2) (α)

2.10 α) όχι β) Γ

2.11 α) Δεσμοί Β, Δ, Ζ Κοιλίες Α, Γ, Ε, Η
β) π rad
γ) Μηδέν
δ) $\lambda/4$

2.48 (α)

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

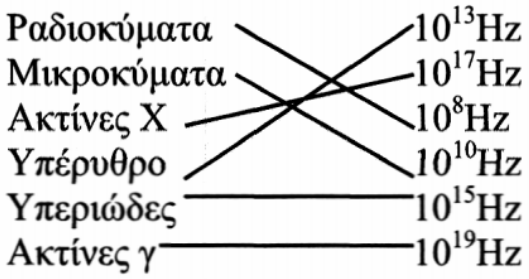
2.13 $1{,}53 \times 10^8$ km.

2.14 7,46 φορές.

2.15 (δ)

2.16 (γ)

2.17



2.18 α) Ραδιοκύματα.
β) Μικροκύματα.
γ) Ακτίνες Χ.
δ) Ακτίνες γ.

2.19 (α).

2.20 (γ).

Ανάκλαση – διάθλαση

2.21 Όταν υφίσταται ανάκλαση ή διάθλαση.

2.22 60° και στις δύο επιφάνειες.

2.23 (α).

2.24 Η συχνότητα παραμένει σταθερή, η ταχύτητα διάδοσης μειώνεται, το μήκος κύματος μειώνεται.

2.25 (α).

2.26 Το μπλε.

2.27 Στην πλάκα με δείκτη διάθλασης $n = 1,6$.

2.28 α) Α.
β) Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μηχανικά κύματα

2.29 Ο χρόνος που χρειάζεται ένα σημείο της χορδής για να μετατοπισθεί από τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης στη θέση ισορροπίας είναι ίσος με *T/4*
$\frac{T}{4} = 0,15\,s$ οπότε $T = 0,6\,s$ και $f = \frac{1}{T} = \frac{10}{6}\,Hz$.
Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι
$\upsilon = \lambda f = 2\,m/s$.

2.30 Συγκρίνοντας τη σχέση $y = 3\times10^{-2}\,\eta\mu(1320t - 4x)$

με τη γενική σχέση $y = A\,\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

βρίσκουμε

α) $\frac{2\pi}{\lambda} = 4\,rad/m$ οπότε $\lambda = \frac{2\pi}{4} = 1,57\,m$.

β) $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 1320\,rad/s$ οπότε $f = \frac{1320}{2\pi}\,Hz$

και $\upsilon = \lambda f = 330\,m/s$

γ) $A = 3\times10^{-2}\ m$ και $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1320\,rad/s$

οπότε $\upsilon_{\max} = A\omega = 39{,}6\,m/s$

δ) $\varphi_1 = 1320t - 4x_1$ και $\varphi_2 = 1320t - 4x_2$

$\varphi_1 - \varphi_2 = 4(x_2 - x_1)$ οπότε

$$\Delta x = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{4} = 0{,}523\,m$$

2.31 α) Το κύμα φτάνει στο σημείο Β μετά από χρόνο

$$t = \frac{x}{\upsilon} = 20\,s$$

β) Θέτουμε στην εξίσωση κύματος $t = 21{,}5\,s$ και $x = 60\,m$ και βρίσκουμε την απομάκρυνση

$$y = 0{,}1\eta\mu 2\pi(0{,}25\times 21{,}5 - 5) = 0{,}05\sqrt{2}\,m = 5\sqrt{2}cm$$

Στάσιμο κύμα

2.32 α) Ένα στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \qquad (1)$$

προκύπτει από τη συμβολή δύο κυμάτων που περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \qquad \text{και} \qquad y_2 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

Συγκρίνουμε την (1) με την $y = 0{,}5\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3}\eta\mu 40\pi t$

και βρίσκουμε

$2A = 0{,}5\,cm$ και $A = 0{,}25\,cm$

$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}$ και $\lambda = 6\,cm$

$\frac{2\pi}{T} = 40\pi$ και $f = \frac{1}{T} = 20\,Hz$

Τελικά $y_1 = 0{,}25\eta\mu 2\pi(20t - \frac{x}{6})$

και $y_2 = 0{,}25\eta\mu 2\pi(20t + \frac{x}{6})$

β) Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι $d = \frac{\lambda}{2} = 3\,cm$

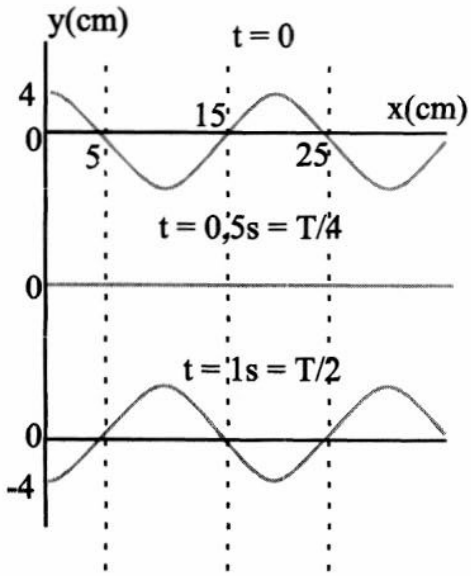
γ) Η σχέση που δίνει την ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται ένα σημείο του μέσου είναι $\upsilon = 2\mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}$

ή $\upsilon = 2\mathrm{A}2\pi f\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}$

Για $x = 1\,cm$ και $t = \frac{9}{8}s$ βρίσκουμε $\upsilon = -31{,}4\,cm/s$

δ) $\upsilon = \lambda \cdot f = 120\,cm/s = 1{,}2\,m/s$

2.33 β) Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου δίνεται από τη σχέση



$$|A'| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$$

$2A = 4cm$

$\frac{\lambda}{2} = 10cm$ οπότε $\lambda = 20cm$

$T = 2s$

οπότε $|A'| = \left|4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\right|$.

Για $x = 12{,}5cm$

$$|A'| = \left|4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right| = 2\sqrt{2}\ \ cm$$

2.34 α) Η ένταση του ήχου, άρα και η ένδειξη του δέκτη, μηδενίζεται στις θέσεις που αντιστοιχούν σε δεσμούς του στάσιμου κύματος που δημιουργείται από τη συμβολή του ήχου που εκπέμπει το διαπασών και του ήχου που ανακλάται.Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $d = \frac{\lambda}{2}$ οπότε $\lambda = 2d = 1m$ και $\upsilon = \lambda f = 340m/s$.

β) Τα μέγιστα του ήχου αντιστοιχούν σε δυο διαδοχικές κοιλίες του στάσιμου κύματος. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών είναι $d' = \frac{\lambda'}{2}$ οπότε $\lambda' = 2d' = 0{,}4m$.

$\upsilon = \lambda' f'$ οπότε $f' = \frac{\upsilon}{\lambda'} = 850Hz$.

2.35 $$y_1 = 5\,\eta\mu\,\pi(5t - x) = 5\,\eta\mu\,2\pi(2{,}5t - \frac{x}{2}) \qquad (1)$$

και $$y_1 = 5\,\eta\mu\,\pi(5t + x) = 5\,\eta\mu\,2\pi(2{,}5t + \frac{x}{2}) \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) με την εξίσωση κύματος

$$y = A\,\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

ή $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$

βρίσκουμε $A = 5\,cm$ $f = \frac{1}{T} = 2{,}5\,Hz$ $\lambda = 2\,cm$

α) $\upsilon = \lambda f = 5\,cm/s$

β) Το στάσιμο κύμα που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων έχει εξίσωση

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} = 10\sigma\upsilon\nu\,\pi x\,\eta\mu\,5\pi t$$

Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου δίνεται από τη σχέση $|A'| = |10\sigma\upsilon\nu\ \ \pi x|$

Οι δεσμοί του στάσιμου κύματος αντιστοιχούν στις λύσεις της εξίσωσης $A' = 0$

ή $\sigma\upsilon\nu\,\pi x = 0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$ οπότε

$\pi x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}$ οπότε $x = \frac{1}{2}cm$ ή $x = \frac{5}{2}cm$ ή .....

και $\pi x = 2K\pi - \frac{\pi}{2}$ οπότε $x = \frac{3}{2}cm$ ή $x = \frac{7}{2}cm$ ή .....

Δεσμούς θα έχουμε τελικά στις θέσεις
$0{,}5\,cm,\ 1{,}5\,cm,\ 2{,}5\,cm,\ 3{,}5\,cm,.....$

Παρατηρούμε ότι δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν μεταξύ τους $\frac{\lambda}{2} = 1\,cm$.

Για να βρούμε τις θέσεις των κοιλιών θέτουμε $|A'| = 10\,cm$ και λύνουμε ως προς x

$\sigma\upsilon\nu\,\pi x = \sigma\upsilon\nu\,0$ ή $\sigma\upsilon\nu\,\pi x = \sigma\upsilon\nu\,\pi$ οπότε

$\pi x = K\pi$ και $x = 0$ ή $x = 1\,cm$ ή $x = 2\,cm$ ή.....

Κοιλίες θα έχουμε τελικά στις θέσεις
$0,\ 1\,cm,\ 2\,cm, 3\,cm,.....$

Παρατηρούμε ότι δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν μεταξύ τους $\frac{\lambda}{2} = 1cm$.

Επίσης ένας δεσμός απέχει από την πιο κοντινή του κοιλία $\frac{\lambda}{4} = 0{,}5\,cm$.

γ) $|A'| = |10\sigma\upsilon\nu \ \pi x|$ οπότε $|A'_{\max}| = 10 \ cm$

2.36 $\upsilon = \lambda f$ οπότε $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = 2\,m$

Εφόσον τα άκρα της χορδής είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία θα είναι δεσμοί και εφόσον το σύνολο των δεσμών είναι τρεις υπάρχει ένας ακόμη δεσμός μεταξύ των άκρων. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$ και το συνολικό μήκος της χορδής θα είναι $d = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda = 2\,m$.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

2.37 α) $c = \lambda f$ οπότε $\lambda = \frac{c}{f} = 3\,m$

β) Για κάθε θέση $c = \frac{E}{B}$ οπότε $B = \frac{E}{c}$ και

$$B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = 4 \times 10^{-11}\,T$$

γ) Η συχνότητα του κύματος πρέπει να είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του δέκτη, οπότε

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{ή} \quad C = \frac{1}{4\pi^2 L f^2} = 5 \times 10^{-16}\,F$$

Ανάκλαση – Διάθλαση

2.38 $n = \dfrac{c}{\upsilon}$ οπότε $\upsilon = \dfrac{c}{n} = 2 \times 10^8\ m/s$

2.39 Η γωνία ανάκλασης είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης οπότε $\vartheta_r = \vartheta_a = 30^o$

Από το νόμο του Snell έχουμε

$n_1 \eta\mu\vartheta_\alpha = n_2 \eta\mu\vartheta_b$ οπότε $\eta\mu\vartheta_b = \eta\mu\vartheta_\alpha \dfrac{n_1}{n_2} = 0{,}4375$

2.40 $\eta\mu\vartheta_{crit} = \dfrac{n_b}{n_a}$ οπότε $n_a = \dfrac{n_b}{\eta\mu\vartheta_{crit}} = \sqrt{3}$

2.41 Η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο νερό είναι $\upsilon = \lambda f = 22{,}44 \times 10^7\ m/s$. Επομένως,

ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι $n = \dfrac{c}{\upsilon} = 1{,}33$.

2.42 α) $c = \lambda_0 f$ οπότε $f = \dfrac{c}{\lambda_0} = 4{,}6 \times 10^{14}\ Hz$

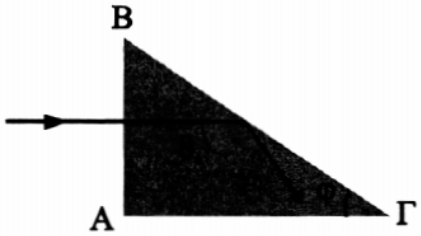
β) Από τη σχέση $n = \dfrac{\lambda_0 f}{\lambda f} = \dfrac{\lambda_0}{\lambda}$ προκύπτει $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n} = 464\,nm$.

γ) $\upsilon = \lambda f = 2{,}14 \times 10^8\ m/s$.

2.43 $n = \dfrac{c}{\upsilon} = 1{,}56$

2.44 Η φωτεινή δέσμη πέφτει στην έδρα ΒΓ υπό γωνία $\vartheta_a = \hat{B} = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$

και υφίσταται ολική ανάκλαση όταν ισχύει $\vartheta_a \geq \vartheta_{crit}$



$$\eta\mu\vartheta_{crit} = \frac{n_b}{n_a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

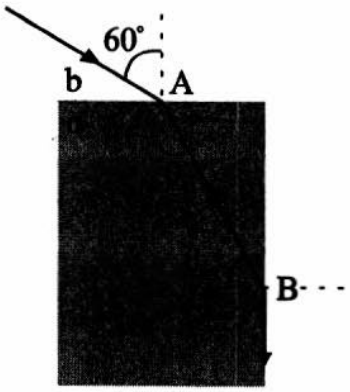
(μέσον b είναι ο αέρας)

Αν $\vartheta_a = \vartheta_{crit}$ τότε

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\max}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{οπότε} \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

δηλαδή $\varphi_{\max} = 45^o$

2.45 Η ελάχιστη τιμή του δείκτη διάθλασης της γυάλινης πλάκας αντιστοιχεί στην περίπτωση στην οποία η δέσμη προσπίπτει στο Β με την κρίσιμη γωνία.



Αν ως μέσον b θεωρήσουμε τον αέρα και ως μέσον α τη γυάλινη πλάκα, από το νόμο του Snell, για το σημείο Α έχουμε

$$n_b \eta\mu\vartheta_b = n_a \eta\mu\vartheta_\alpha \qquad (1)$$

Όμως $n_b = 1$,

$\vartheta_b = 60^o$

και $\vartheta_\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{crit}\right)$

οπότε η (1) δίνει $\eta\mu 60^o = n_a \sigma\upsilon\nu\vartheta_{crit} = n_a\sqrt{1 - \eta\mu^2\vartheta_{crit}}$ (2)

$$\eta\mu\vartheta_{crit} = \frac{n_b}{n_a} = \frac{1}{n_a}$$

Αντικαθιστούμε στη (2) οπότε

$$\eta\mu 60^o = n_a\sqrt{1 - \frac{1}{n_a^2}}$$

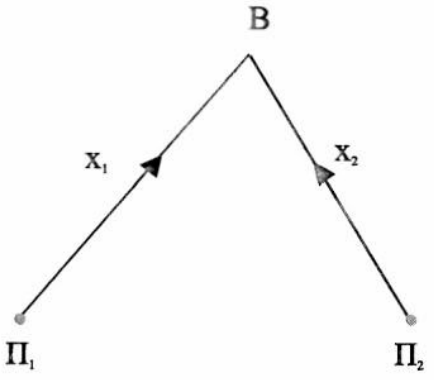
και τελικά $n_a = \sqrt{1 + \eta\mu^2 60^o} = 1{,}32$

2.46 Η εξίσωση του κύματος που φτάνει στο σημείο Β από την πηγή Π_1 είναι

$$y_1 = A\eta\mu \ \ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)$$

ενώ η εξίσωση κύματος που φτάνει από την πηγή Π_2 είναι

$$y_2 = A\eta\mu \ \ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$$



Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση του σημείου Β δίνεται από τη σχέση

$$y = y_1 + y_2 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_2-r_1)}{2\lambda}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) \quad (1)$$

στην οποία το μήκος κύματος έχει την τιμή $\lambda = \upsilon T = 2\,m$

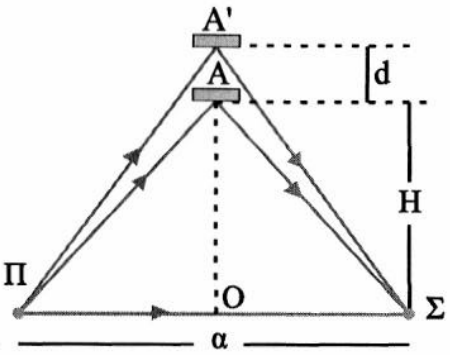
Η εξίσωση (1) είναι εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης με πλάτος

$$A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_2-r_1}{2\lambda}\right| = \left|6\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = 3\sqrt{2} \ \ mm$$

2.47 Με τη μετακίνηση του ανακλαστήρα η διαδρομή του κύματος που φτάνει στο Σ μετά από την ανάκλαση αυξάνεται κατά λ/2 επομένως:

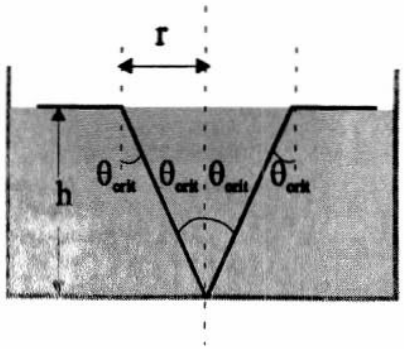
$$\Pi A'\Sigma - \Pi A\Sigma = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{ή}$$

$$2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+(H+d)^2} - 2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+H^2} = \frac{\lambda}{2}$$



και τελικά $\lambda = 2\sqrt{a^2+4(H+d)^2} - 2\sqrt{a^2+4H^2}$

2.48 Στον παρατηρητή φτάνουν φωτεινές ακτίνες από την πηγή όταν προσπίπτουν στην ελεύθερη επιφάνεια με γωνία $\theta \le \theta_{crit}$.



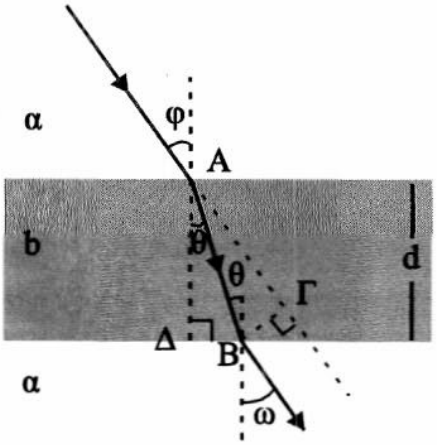
Αν το μέσον b είναι ο αέρας και το μέσον α το νερό ισχύει

$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_\alpha} = \frac{1}{n}$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$r = h\varepsilon\varphi\theta_{crit} = \frac{h\eta\mu\theta_{crit}}{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta_{crit}}} = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}}$$

2.49 α) Εφαρμόζουμε το νόμο του Snell για την είσοδο της ακτίνας στη γυάλινη πλάκα και για την έξοδό της απ' αυτήν.



$$n_a\eta\mu\varphi = n_b\eta\mu\theta$$

$$n_b\eta\mu\theta = n_\alpha\eta\mu\omega$$

Από τις δύο σχέσεις προκύπτει

$n_a\eta\mu\varphi = n_\alpha\eta\mu\omega$ οπότε

$\eta\mu\varphi = \eta\mu\omega$ και

$\varphi = \omega$ (φ, ω στο πρώτο τεταρτημόριο)

Άρα η ακτίνα βγαίνει από τη γυάλινη πλάκα παράλληλα με την αρχική της διεύθυνση.

β) Στο τρίγωνο ΑΓΒ είναι $l = \text{ΒΓ} = \text{ΑΒ}\,\eta\mu(\varphi-\theta)$ (1)

Αλλά από το τρίγωνο ΑΔΒ βρίσκουμε ότι

$$\text{ΑΒ} = \frac{\text{ΑΔ}}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{d}{\sigma\upsilon\nu\theta} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει

$$l = \frac{d\eta\mu(\varphi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta} = d\eta\mu\varphi - \frac{d\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\theta} = d\eta\mu\varphi - \frac{d\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}} \qquad (3)$$

Από το νόμο του Snell

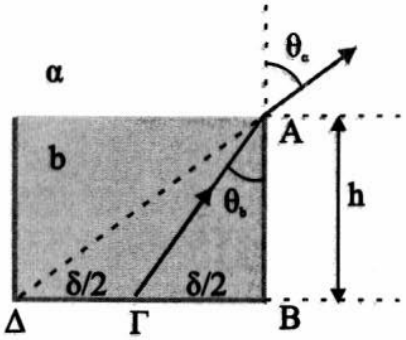
$n_a \eta\mu\varphi = n_b \eta\mu\theta$ και επειδή $n_a = 1$ και $n_b = n$

προκύπτει $$\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\varphi}{n} \qquad (4)$$

Από (3) και (4) $$l = d\eta\mu\varphi - \frac{d\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\eta\mu^2\varphi}{n^2}}}$$

και τελικά $$l = d\eta\mu\varphi\left(1 - \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{n^2 - \eta\mu^2\varphi}}\right)$$

2.50 Αν θεωρήσουμε τον αέρα ως μέσον a $(n_a = 1)$ και το νερό ως μέσον b $(n_b = n)$, από το νόμο του Snell έχουμε



$$n_a \eta\mu\theta_a = n_b \eta\mu\theta_b$$

οπότε $\eta\mu\theta_a = n\eta\mu\theta_b$ (1)

Από το τρίγωνο ΑΒΔ προκύπτει ότι

$$\eta\mu\theta_a = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\sqrt{\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΔ}^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{h^2 + \delta^2}} \qquad (2)$$

Επίσης από το τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε

$$\eta\mu\theta_b = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\sqrt{\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2}} = \frac{\delta}{2\sqrt{h^2 + \frac{\delta^2}{4}}} \qquad (3)$$

Από (1), (2) και (3) προκύπτει

$$\frac{\delta}{\sqrt{h^2 + \delta^2}} = n\frac{\delta}{2\sqrt{h^2 + \frac{\delta^2}{4}}}$$

και τελικά $$h = \delta\sqrt{\frac{n^2-1}{4-n^2}} = 8cm$$

2.51 Για $x = 0{,}408\,m$ έχουμε απόσβεση, οπότε η διαφορά δρόμων για τα δύο ηχητικά κύματα είναι

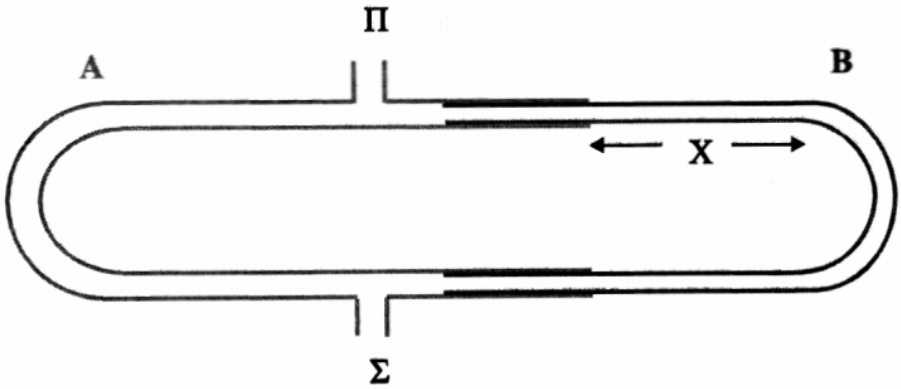
$$\Delta l = (2K+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Αν μετακινήσουμε το σωλήνα Β κατά Δx η διαφορά των δρόμων θα γίνει $\Delta l + 2\Delta x$

και επειδή είναι η πρώτη φορά που θα έχουμε πάλι απόσβεση θα ισχύει

$$\Delta l + 2\Delta x = (2K+1)\frac{\lambda}{2} + \lambda \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$



$\upsilon = \lambda f$ οπότε $\lambda = \frac{\upsilon}{f}$

και $$\Delta x = \frac{\upsilon}{2f} = 0{,}136\,m$$

Η νέα απόσταση είναι $x' = x + \Delta x = 0{,}544\,m$.

2.52 α) Συγκρίνοντας την εξίσωση ενός από τα κύματα $y_1 = A\eta\mu(2\pi t - \pi r_1 + \varphi_o)$ με τη γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος προκύπτει ότι:

$2\pi = \frac{2\pi}{T}$ άρα $T = 1s$ και $\pi = \frac{2\pi}{\lambda}$ άρα $\lambda = 2m$

$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = 2m/s$

β) Η απομάκρυνση του σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του κάποια στιγμή είναι

$y = y_1 + y_2 = A\eta\mu(2\pi t - \pi r_1 + \varphi_o) + A\eta\mu(2\pi t - \pi r_2)$ ή

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\varphi_o}{2}\right) \eta\mu\left(2\pi t - \frac{r_1 + r_2}{2}\pi + \frac{\varphi_o}{2}\right) \quad (1)$$

Για $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ η (1) γίνεται

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \eta\mu\left(2\pi t - \frac{r_1 + r_2}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

i. Για να μένει το σημείο αυτό διαρκώς ακίνητο θα πρέπει

$$2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

ή $\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4} = (2N+1)\frac{\pi}{2}$ όπου $N = 0,\ \pm 1,\ \pm 2.....$

άρα $r_1 - r_2 = \left(2N + \frac{3}{2}\right)$ m

ii. Για να ταλαντώνεται το σημείο Κ με πλάτος 2Α πρέπει

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$$

ή $\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\pi}{4} = N\pi$ όπου $N = 0,\ \pm 1,\ \pm 2.....$

άρα $r_1 - r_2 = \left(2N + \frac{1}{2}\right)$ m

γ) Για να παραμένει το σημείο Μ ακίνητο θα πρέπει

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\pi - \frac{\varphi_o}{2}\right) = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\varphi_o}{2}\right) = 0$$

άρα $\varphi_o = \pi$ rad

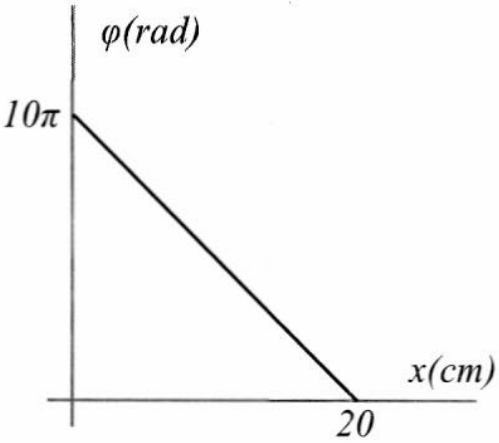
2.53 α) Από τη σχέση $y = 5\eta\mu 10\pi t$ βρίσκουμε $A = 5\,cm$ και $\omega = 10\pi\, rad/s$

οπότε $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 5\,Hz$

Από τη σχέση $\upsilon = \lambda f$ προκύπτει $\lambda = \dfrac{\upsilon}{f} = 4\,cm$

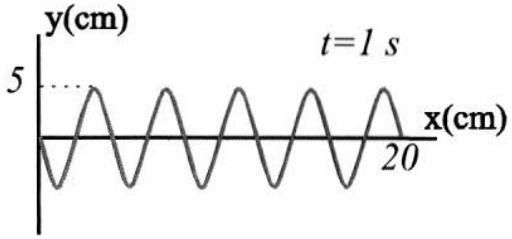
Η εξίσωση του κύματος θα είναι $y = 5\eta\mu 2\pi\left(5t - \dfrac{x}{4}\right)$ (τα x, y σε cm, το t σε s)

β) Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 1s$ δίνεται από τη σχέση $\phi = 10\pi - \dfrac{\pi}{2}x$



γ) Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1 = 20cm$. Ο αριθμός των μηκών κύματος, τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$N = \frac{x_1}{\lambda} = 5$$



2.54 α) Συγκρίνουμε τη σχέση $y = 8\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}\eta\mu 10\pi t$ με την $y = 2A\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\dfrac{2\pi t}{T}$ και βρίσκουμε $\lambda = 4\,cm$ και $f = \dfrac{1}{T} = 5\,Hz$

οπότε $\upsilon = \lambda f = 20\,cm/s$

β) $y_M = 8\sigma\upsilon\nu\dfrac{0,5\pi}{2}\eta\mu 10\pi\dfrac{1}{40} = 8\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}\eta\mu\dfrac{\pi}{4} = 4\,cm$

$$\upsilon = A'\omega \ \ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{T}t = 2A\omega \ \ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \ \ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}$$

οπότε $\upsilon_{\mathrm{M}} = 8\ 10\pi \ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x_{\mathrm{M}}}{2} \ \sigma\upsilon\nu 10\pi t = 40\pi\, cm/s$

γ) Δεσμοί υπάρχουν στις θέσεις για τις οποίες $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} = 0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$

οπότε $\frac{\pi x}{2} = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ και $x = 2K+1$.

Για $x_A < x < x_B$ δηλαδή $-4 < 2K+1 < 10$ βρίσκουμε $K = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, 3, 4$

Επομένως υπάρχουν 7 δεσμοί. Οι δεσμοί βρίσκονται στις θέσεις: $-3cm,\ -1cm,\ 1cm,\ 3cm,\ 5cm,\ 7cm$ *και* $9cm$