ΦΥΣΙΚΗ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΕΤΑΡΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. δ	6. α	11. δ	16. γ	21. γ
2. β	7. γ	12. β	17. α	
3. α	8. δ	13. α	18. β	
4. β	9. β	14. δ	19. γ	
5. γ	10. γ	15. γ	20. δ	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου Σωστό /Λάθος

1. Σ	10. Σ	19. Σ	28. Λ	37. Λ	46. Σ
2. Λ	11. Λ	20. Σ	29. Σ	38. Λ	47. Λ
3. Σ	12. Σ	21. Λ	30. Σ	39. Σ	48. Λ
4. Σ	13. Λ	22. Σ	31. Σ	40. Λ	49. Λ
5. Λ	14. Λ	23. Σ	32. Σ	41. Σ	50. Σ
6. Λ	15. Σ	24. Σ	33. Λ	42. Σ	51. Σ
7. Σ	16. Σ	25. Λ	34. Λ	43. Λ	52. Σ
8. Λ	17. Λ	26. Λ	35. Σ	44. Σ	53. Λ
9. Σ	18. Λ	27. Λ	36. Σ	45. Λ	54. Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχησης

1. Α → 4 Β → 2 Γ → 1	**5.** Α → 2 Β → 1 Γ → 3	**9.** Α → 2 Β → 1 Γ → 4
2. Α → 2 Β → 3 Γ → 1	**6.** Α → 3 Β → 2	**10.** Α → 4 Β → 3 Δ → 2
3. Α → 3 Β → 1 Γ → 4	**7.** Α → 4 Β → 2	**11.** Α → 4 Β → 2 Γ → 3
4. Α → 3 Β → 1 Γ → 4	**8.** Α → 3 Β → 1	

Απαντήσεις σε ερωτήσεις ανοικτού τύπου

26.

α. Η εξίσωση της επιτάχυνσης του αντικειμένου είναι

$$\alpha = -\omega^2 x_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \qquad (1)$$

Από το νόμο του Newton $F = m\alpha$ και την (1) προκύπτει $F = -m\omega^2 x$

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Η εξίσωση της ταχύτητας του αντικειμένου είναι

$$\upsilon = \omega x_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \text{ ή } \upsilon = \upsilon_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

Η φάση της ταχύτητας είναι $\varphi_\upsilon = \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$

Η φάση της απομάκρυνσης είναι $\varphi_x = \omega t + \varphi_0$

Επομένως $\Delta\varphi = \varphi_\upsilon - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Η εξίσωση της επιτάχυνσης γράφεται $\alpha = -\alpha_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ ή $\alpha = \alpha_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0 + \pi)$

Η φάση της επιτάχυνσης είναι $\varphi_\alpha = \omega t + \varphi_0 + \pi$

Η φάση της απομάκρυνσης είναι $\varphi_x = \omega t + \varphi_0$

Επομένως $\Delta\varphi = \varphi_\alpha - \varphi_x = \pi$

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

27.

Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι η απομάκρυνση x του σημειακού αντικειμένου δίνεται από τη σχέση $x = x_0 ημωt$, όπου $x_0 = 0,2$ m και $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8\,s} = \frac{\pi}{4} s^{-1}$.

Δηλαδή είναι $x = 0,2ημ\frac{\pi}{4}t$ (S.I) (1)

α. Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι τις χρονικές στιγμές 0, 4 s και 8 s είναι x = 0. Αυτό σημαίνει ότι το σημειακό αντικείμενο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και επομένως έχει ταχύτητα μέγιστη κατά μέτρο.

<u>Η πρόταση (α) είναι σωστή.</u>

β. Τις χρονικές στιγμές 2 s και 6 s, το σημειακό αντικείμενο βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του, στις θέσεις $+x_0$ και $-x_0$ αντίστοιχα. Η επιτάχυνση και η απομάκρυνση συνδέονται με τη σχέση $\alpha = -\omega^2 x$. (2)

Σύμφωνα με τη σχέση αυτή όταν η απομάκρυνση γίνεται μέγιστη τότε και η επιτάχυνση γίνεται μέγιστη κατ' απόλυτο τιμή.

<u>Η πρόταση (β) είναι σωστή.</u>

γ. Τη χρονική στιγμή t = 4 s είναι x = 0 και σύμφωνα με τη (2) είναι α = 0.

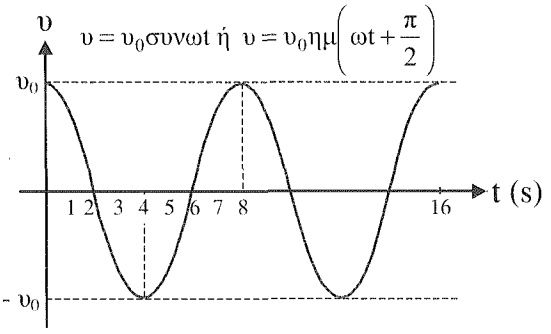
<u>Η πρόταση (γ) είναι λανθασμένη.</u>

δ. Τη χρονική στιγμή t = 2 s το σημειακό αντικείμενο είναι στη θέση $x = +x_0$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_2 = 0$, ενώ τη χρονική στιγμή t = 7 s βρίσκεται στη θέση $x = -x_1$ κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή με $\upsilon_7 > 0$.

<u>Η πρόταση (δ) είναι λανθασμένη.</u>

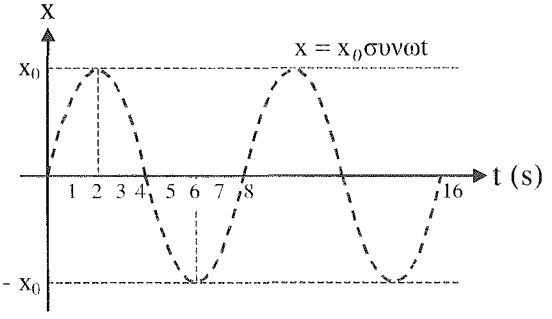
28.

α. Η εξίσωση της ταχύτητας του αντικειμένου είναι $\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\omega t$ και επομένως η εξίσωση της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του θα είναι $x = x_0 \eta\mu\omega t$.



Από τα διαγράμματα υ = f (t) και x = f (t) παρατηρούμε ότι τις χρονικές στιγμές 0 s, 4 s, 8 s είναι x = 0.

Το αντικείμενο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.



Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $\alpha = \omega^2 |x|$. Από το διάγραμμα x = f (t) προκύπτει ότι τις χρονικές στιγμές 2 s και 6 s είναι $x = +x_0$ και $x = -x_0$, αντίστοιχα.

Επομένως το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $\alpha = \omega^2 x_0 = \alpha_0$

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Από το διάγραμμα υ = f (t) προκύπτει ότι το αντικείμενο κινείται κατά το χρονικό διάστημα από 6 s μέχρι 8 s, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, αφού είναι υ > 0 και προς τη θέση ισορροπίας του.

Από το διάγραμμα x = f (t) προκύπτει ότι στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι x < 0. Επομένως η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης $F = -m\omega^2 x$ είναι θετική.

Συνεπώς τα διανύσματα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{F}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα κατά το χρονικό διάστημα από 6 s μέχρι 8 s.

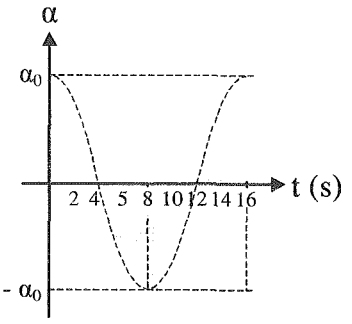
Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

δ. Στο χρονικό διάστημα από 0 s μέχρι 2 s το αντικείμενο, όπως προκύπτει από το διάγραμμα x = f (t) [ή το διάγραμμα υ = f (t)], κινείται προς τη θετική κατεύθυνση, από τη θέση ισορροπίας του προς τη θέση $x = +x_0$

Η πρόταση (δ) είναι λανθασμένη.

29.

α. Τις χρονικές στιγμές 0 s, 8 s, 16 s η επιτάχυνση του αντικειμένου είναι μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) άρα το αντικείμενο βρίσκεται στις θέσεις $-x_0, +x_0, -x_0$ αντίστοιχα, στις οποίες η ταχύτητα έχει μηδενική τιμή.



Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Τη χρονική στιγμή 14 s είναι $\alpha > 0$, άρα $x < 0$ εφόσον $\alpha = -\omega^2 x$. Επειδή η αλγεβρική τιμή της α τείνει να αυξηθεί, συμπεραίνουμε ότι το αντικείμενο κινείται προς τη θέση $x = -x_0$.

Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.

γ. Τις χρονικές στιγμές 4 s, 12 s είναι $\alpha = 0$, άρα $x = 0$. Το αντικείμενο περνάει από τη θέση ισορροπίας του όπου το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο, δηλαδή $\upsilon_0 = \omega x_0$.

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

δ. Από το διάγραμμα $\alpha = f(t)$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha = \alpha_0 \sigma\upsilon\nu\omega t$ ή $\alpha = \alpha_0 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$

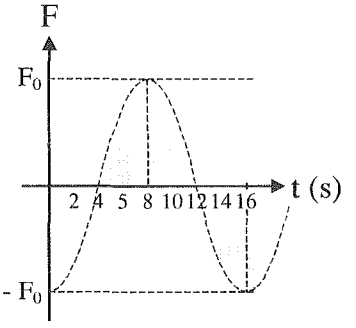
Άρα η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι $\upsilon = \upsilon_0 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \upsilon = \upsilon_0 \eta\mu\omega t$

Επομένως η πρόταση (δ) είναι λανθασμένη.

30.

α. Τις χρονικές στιγμές 0 s, 8 s, 16 s, η δύναμη επαναφοράς είναι μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) άρα το αντικείμενο βρίσκεται στις θέσεις $+x_0, -x_0, +x_0$ αντίστοιχα, στις οποίες η ταχύτητα έχει μηδενική τιμή.

<u>Η πρόταση (α) είναι σωστή.</u>



β. Τη χρονική στιγμή 6 s είναι F > 0, άρα x < 0 εφόσον F = –Dx. Επειδή η αλγεβρική τιμή της F τείνει να αυξηθεί, συμπεραίνουμε ότι το αντικείμενο κινείται προς τη θέση $x = -x_0$.

<u>Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.</u>

γ. Τις χρονικές στιγμές 4 s, 12 s είναι F = 0, άρα x = 0. Το αντικείμενο περνάει από τη θέση ισορροπίας του όπου το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο, δηλαδή $\upsilon_0 = \omega x_0$.

<u>Η πρόταση (γ) είναι σωστή.</u>

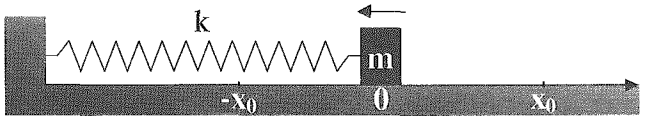
δ. Από το διάγραμμα F = f (t) συμπεραίνουμε ότι $F = -F_0 \sigma\upsilon\nu\omega t$ ή $F = F_0 \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2})$

Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι $x = x_0 \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2} - \pi) \rightarrow x = x_0 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$

<u>Η πρόταση (δ) είναι λανθασμένη.</u>

31.

α. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο, είναι της μορφής



$x = x_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Για t = 0 δίνεται ότι x = 0 και υ < 0.

Άρα $\varphi_0 = \pi$ και η x = f (t) γράφεται $x = x_0 \eta\mu(\omega t + \pi)$ (1)

Η εξίσωση της επιτάχυνσης θα είναι $\alpha = -\alpha_0 \eta\mu(\omega t + \pi)$ ή $\alpha = \alpha_0 \eta\mu\omega t = \alpha_0 \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$

Για $t = \frac{T}{8}$ έχουμε $\alpha = \alpha_0 \eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8} = \alpha_0 \eta\mu \frac{\pi}{4} \rightarrow \alpha = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}$

<u>Η πρόταση (α) είναι σωστή.</u>

β. Η εξίσωση της ταχύτητας, σύμφωνα με την (1), θα είναι $\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \pi)$

<u>Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.</u>

γ. Από (1) για $t = \frac{3T}{8}$ προκύπτει

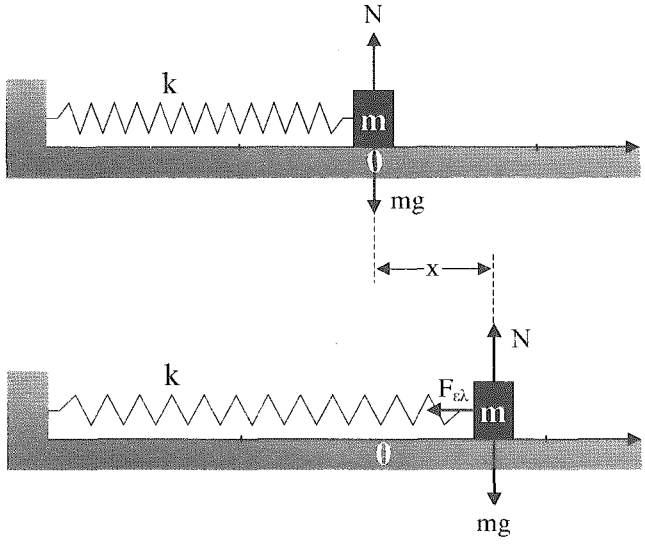
$$x = x_0 \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{8} + \pi\right) = x_0 \eta\mu\left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right) \Rightarrow x = -\frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση αυτή είναι

$$E_\Delta = \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{E_{o\lambda}}{2} \text{ και επομένως}$$

$$E_K = E_{o\lambda} - E_\Delta = E_{o\lambda} - \frac{E_{o\lambda}}{2} \rightarrow E_K = \frac{E_{o\lambda}}{2} = E_\Delta$$

<u>Η πρόταση (γ) είναι σωστή.</u>



δ. Απομακρύνουμε τη μάζα m από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και την αφήνουμε ελεύθερη.

Όταν απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας της ασκούνται σ' αυτήν οι δυνάμεις mg, N και $F_{\varepsilon\lambda}$. Έχουμε:

$\Sigma F_y = 0$ και

$\Sigma F_x = -F_{\varepsilon\lambda} = -kx = -Dx$ με $D = k$.

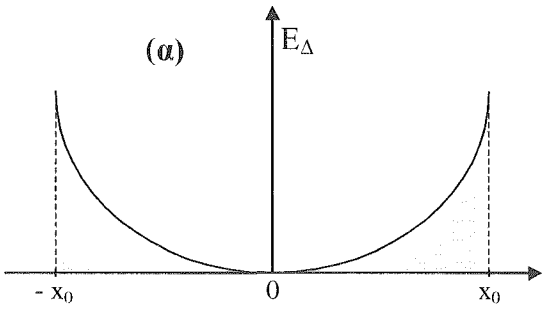
Επομένως η μάζα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

<u>Η πρόταση (δ) είναι σωστή.</u>

32.

i) Η δυναμική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι $E_{\Delta} = \frac{1}{2}kx^2$

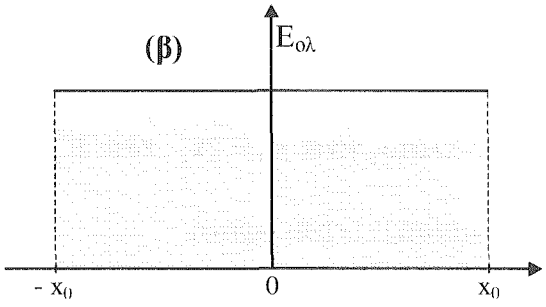
Η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $E_{\Delta} = f(x)$ είναι η (α).



ii) Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι

$E_{ολ} = \frac{1}{2}kx_0^2 = σταθ.$

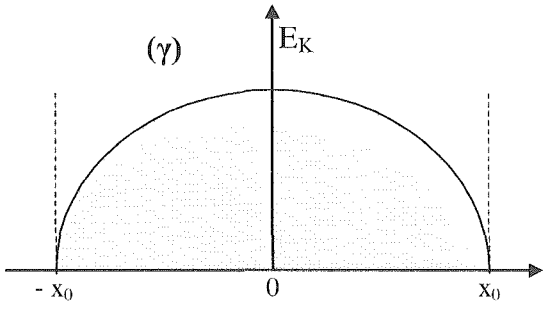
Η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $E_{ολ} = f(x)$ είναι η (β).



iii) Σε κάθε θέση ισχύει $E_{ολ} = E_{\Delta} + E_K$ και άρα

$E_K = E_{ολ} - E_{\Delta}$ ή $E_{κιν} = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $E_K = f(x)$ είναι η (γ).



33.

β. <u>Η πρόταση είναι σωστή.</u>

Έχουμε

$F_{01} = kx_0$ και

$F_{02} = k \cdot 2x_0 = 2F_{01}$

γ. Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του, άρα

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Αν το πλάτος γίνει $x_0' = 2x_0$, τότε $E_{ολ}' = \frac{1}{2}k(2x_0)^2 \rightarrow E_{ολ}' = 4 \cdot \frac{1}{2}kx_0^2 = 4E_{ολ}$

<u>Η πρόταση (γ) είναι σωστή.</u>

34.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης γράφεται $x = x_0 συνωt$ (1)

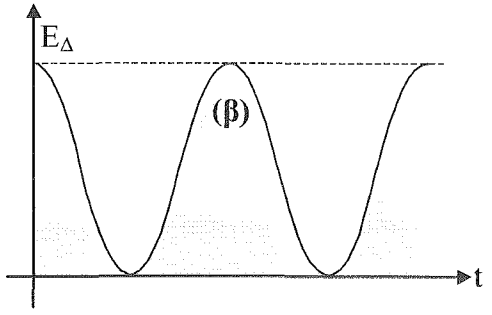
Επομένως η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 συν\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } \upsilon = -\upsilon_0 ημωt \quad (2)$$

α. Η δυναμική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή θα δίνεται από την εξίσωση

$$E_\Delta = \frac{1}{2}kx^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}kx_0^2 συν^2\omega t \text{ ή } E_\Delta = E_{ολ} συν^2\omega t$$

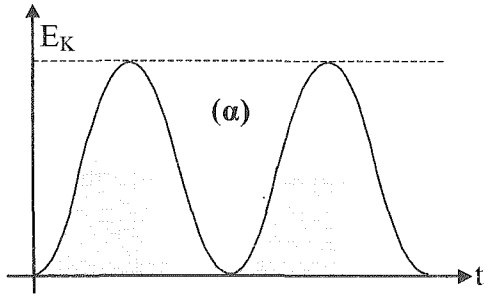
<u>Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η (β).</u>



β. Η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή δίνεται από την εξίσωση $E_K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ και λόγω της (2):

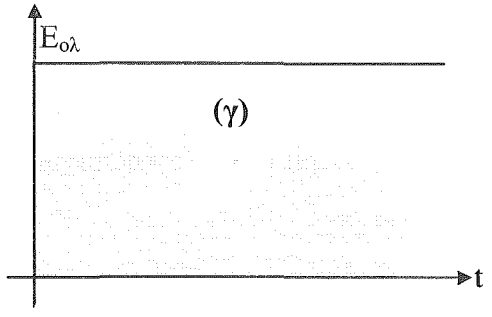
$$E_K = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 ημ^2\omega t \quad \text{ή} \quad E_K = E_{ολ} ημ^2\omega t$$

<u>Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η (α).</u>

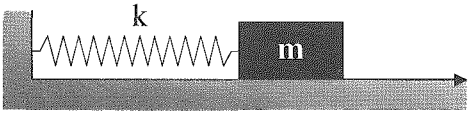


γ. Κάθε χρονική στιγμή ισχύει $E_\Delta + E_K = E_{ολ} = σταθ.$

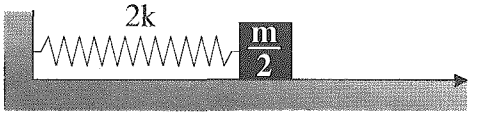
<u>Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η (γ).</u>



35.



(A)



(B)

α. Για καθένα από τους ταλαντωτές (A), (B) θα ισχύει

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}kx_{0A}^2 = \frac{1}{2}2k \cdot x_{0B}^2 \rightarrow x_{0A}^2 = 2x_{0B}^2 \rightarrow x_{0A} = \sqrt{2}\, x_{0B} \qquad (1)$$

<u>Η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.</u>

β. Το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς για καθένα ταλαντωτή είναι

$$F_{0A} = kx_{0A} \text{ και λόγω της (1): } F_{0A} = \sqrt{2}kx_{0B} \qquad (2)$$

$$F_{0B} = 2k \cdot x_{0B} \qquad (3)$$

<u>Από (2), (3) προκύπτει ότι η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.</u>

γ. Η συχνότητα ταλάντωσης για καθένα ταλαντωτή είναι

$$\nu_A = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \nu_B = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{\frac{m}{2}}} \rightarrow \nu_B = 2 \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \nu_B = 2\nu_A \qquad (4)$$

<u>Η πρόταση (γ) είναι λανθασμένη.</u>

δ. Για το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας κάθε ταλαντωτή έχουμε

$$\upsilon_{0A} = \omega_A x_{0A}$$
$$\upsilon_{0B} = \omega_B x_{0B}$$

Με διαίρεση κατά μέλη, προκύπτει

$$\frac{\upsilon_{0A}}{\upsilon_{0B}} = \frac{\omega_A}{\omega_B} \cdot \frac{x_{0A}}{x_{0B}} \text{ και λόγω των (1), (4) βρίσκουμε:}$$

$$\frac{\upsilon_{0A}}{\upsilon_{0B}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \rightarrow \upsilon_{0B} = \upsilon_{0A}\sqrt{2}$$

<u>Η πρόταση (δ) είναι σωστή.</u>

36.

α. Η περίοδος της ταλάντωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή υπολογίζεται από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Αν η μάζα διπλασιαστεί τότε $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = T\sqrt{2}$

<u>Η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.</u>

β. Η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του, άρα $E_{ολ} = \frac{1}{2}kx_0^2$

Εφόσον το πλάτος της ταλάντωσης διατηρείται σταθερό, η $E_{ολ}$ δε μεταβάλλεται.

<u>Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.</u>

γ. Για το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας έχουμε

$$\upsilon_0 = \omega x_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_0$$

Αν η μάζα διπλασιαστεί, τότε $\upsilon_0' = \sqrt{\frac{k}{2m}} \cdot x_0 = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}}$

<u>Η πρόταση (γ) είναι σωστή.</u>

δ. Το μέτρο α_0 της μέγιστης επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_0 = \omega^2 x_0 = \frac{k}{m} \cdot x_0$$

Αν διπλασιάσουμε τη μάζα, διατηρώντας το πλάτος σταθερό, θα έχουμε

$$\alpha_0' = \frac{k}{2m} \cdot x_0 = \frac{\alpha_0}{2}$$

<u>Η πρόταση (δ) είναι σωστή.</u>

37.

α. Η συχνότητα της ταλάντωσης απλού εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Αν τετραπλασιαστεί το μήκος ℓ του νήματος τότε έχουμε

$$\nu' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{4\ell}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \rightarrow \nu' = \frac{\nu}{2}$$

<u>Συνεπώς η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.</u>

β. Για το μέτρο υ_0 της μέγιστης ταχύτητας ισχύει

$$\upsilon_0 = \omega x_0 = 2\pi\nu x_0$$

Όταν γίνει $\ell' = 4\ell$ είναι $\nu' = \frac{\nu}{2}$ και άρα $\upsilon_0' = 2\pi\frac{\nu}{2}x_0 \rightarrow \upsilon_0' = \frac{\upsilon_0}{2}$

<u>Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.</u>

γ. Η σταθερά επαναφοράς στο απλό εκκρεμές είναι $D = \frac{mg}{\ell}$

Αν γίνει $\ell' = 4\ell$, τότε είναι $D' = \frac{mg}{4\ell} \rightarrow D' = \frac{D}{4}$

<u>Η πρόταση (γ) είναι σωστή.</u>

δ. Η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος, αυτή δηλαδή που πρέπει να προσφέρουμε για να το θέσουμε σε ταλάντωση όταν τετραπλασιάσουμε το μήκος ℓ του νήματος, υπολογίζεται από τη σχέση

$$E_{ολ} = E_{K,\,max} = \frac{1}{2}m\upsilon_0'^2 = \frac{1}{2}m\frac{\upsilon_0^2}{4} = \frac{E_{ολ}}{4}$$

<u>Η πρόταση (δ) είναι σωστή.</u>

38.

α. Η περίοδος του απλού εκκρεμούς είναι ανεξάρτητη του πλάτους (για μικρές γωνίες), όπως προκύπτει από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.

β. Το μέτρο υ_0 της μέγιστης ταχύτητας του σφαιριδίου δίνεται από την εξίσωση

$$\upsilon_0' = \omega x_0' = \omega \cdot \frac{x_0}{2} = \frac{\upsilon_0}{2} \qquad (1)$$

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Η σταθερά επαναφοράς στο απλό εκκρεμές είναι ίση με $D = \frac{mg}{\ell}$, ανεξάρτητη του πλάτους (για μικρές γωνίες).

Η πρόταση (γ) είναι λανθασμένη.

δ. Η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια του σφαιριδίου.

$E_{ολ}' = \frac{1}{2} m \upsilon_0'^2$ και λόγω της (1): $E_{ολ}' = \frac{1}{2} m \frac{\upsilon_0^2}{4} = \frac{E_{ολ}}{4}$

Η πρόταση (δ) είναι σωστή.

39.

α. Η περίοδος του απλού εκκρεμούς είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του σφαιριδίου, όπως προκύπτει από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.

β. Η σταθερά επαναφοράς στο απλό εκκρεμές είναι ίση με $D = \frac{mg}{\ell}$

Εφόσον η μάζα υποδιπλασιάζεται, η τιμή της σταθεράς επαναφοράς γίνεται $D' = \frac{mg}{2\ell} = \frac{D}{2}$

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης του σφαιριδίου δίνεται από την εξίσωση $\alpha_0 = \omega^2 x_0$ και είναι ανεξάρτητο της μάζας.

Η πρόταση (γ) είναι λανθασμένη.

δ. Η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος είναι ίση με τη μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του σφαιριδίου. Για τις δύο τιμές της μάζας θα έχουμε:

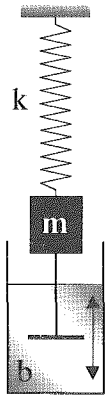
$$E_{ολ} = \frac{1}{2}Dx_0^2 \text{ και } E'_{ολ} = \frac{1}{2}D'x_0^2 = \frac{1}{2}\frac{D}{2}x_0^2 = \frac{E_{ολ}}{2}$$

Η πρόταση (δ) είναι σωστή.

40.

α. Σύμφωνα με το 2° νόμο του Newton, θα έχουμε για τον ταλαντωτή

$$\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow -kx - b\upsilon = m\alpha \rightarrow m\alpha + kx + b\upsilon = 0 \qquad (1)$$



Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Το πλάτος της φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης του ταλαντωτή, για τον οποίο ισχύει η εξίσωση (1), μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\Lambda t} \qquad (2)$$

όπου Λ σταθερά εξαρτώμενη από τη σταθερά απόσβεσης b.

Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.

γ. Στην εξίσωση (2) ο χρόνος t παίρνει τιμές ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου T.

Δηλαδή $t = nT$.

Για δύο διαδοχικές τιμές $t_1 = nT$ και $t_2 = (n+1)T$ θα έχουμε, σύμφωνα με την εξίσωση (2)

$$\alpha_n = \alpha_0 e^{-\Lambda nT} \quad \text{και} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_0 e^{-\Lambda(n+1)T}$$

Με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{\alpha_0 e^{-\Lambda nT}}{\alpha_0 e^{-\Lambda nT} e^{-\Lambda t}} \rightarrow \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = e^{\Lambda T} = \text{σταθ.}$$

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

δ. Βάζουμε $\alpha = \frac{\alpha_0}{2}$ στην εξίσωση $\alpha = \alpha_0 e^{-\Lambda t}$ και βρίσκουμε $\frac{\alpha_0}{2} = \alpha_0 e^{-\Lambda t} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t}$

Με λογαρίθμηση προκύπτει

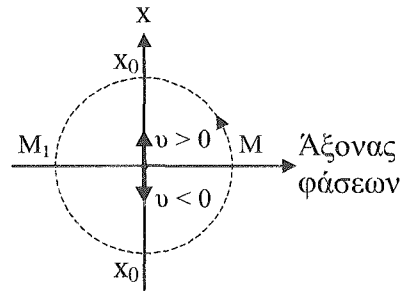
$$\ell n\frac{1}{2} = \ell n e^{-\Lambda t} \rightarrow \ell n1 - \ell n2 = -\Lambda t \rightarrow \ell n2 = \Lambda t \rightarrow t = \frac{\ell n2}{\Lambda} = \text{σταθ.}$$

Η πρόταση (δ) είναι σωστή.

41.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής $x = x_0 ημ(ωt + φ_0)$. Η αρχική φάση $φ_0$ αντιστοιχεί στην επιλογή της χρονικής στιγμής $t_0 = 0$.

Είναι βολικό να εργαστούμε με τον κύκλο αναφοράς.



Εύκολα βρίσκουμε ότι

α. για $υ > 0$ είναι $φ_0 = 0$

β. για $υ < 0$ είναι $φ_0 = π$

Η εξίσωση x = f (t) για κάθε μια από τις περιπτώσεις (α), (β) γράφεται, αντίστοιχα

$x = 0{,}2\ ημ20t$ (SI) και $x = 0{,}2\ ημ(20t + π)$ (SI)

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>

Κύκλος αναφοράς της ταλάντωσης ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο τη θέση ισορροπίας του ταλαντούμενου υλικού σημείου και ακτίνα ίση με το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Όταν ένα υλικό σημείο γράφει ομαλά τον κύκλο, η προβολή του στον άξονα y΄y εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και έχει κάθε στιγμή απομάκρυνση από το κέντρο ίση με $y = y_0 ημ(ωt + φ_0)$.

Για την εύρεση της αρχικής φάσης μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

Είναι $x = x_0 ημ(ωt + φ_0)$ και $υ = υ_0 συν(ωt + φ_0)$

Για t = 0 είναι x = 0. Με αντικατάσταση προκύπτει $ημφ_0 = 0$ και $υ = υ_0 συνφ_0$

Από την $ημφ_0 = 0 \rightarrow φ_0 = kπ \xrightarrow{0 \le φ_0 < 2π} \begin{cases} φ_0 = 0 \text{ για } k = 0 \\ φ_0 = π \text{ για } k = 1 \end{cases}$

α. Για $υ > 0 \rightarrow υ_0 συνφ_0 > 0 \rightarrow συνφ_0 > 0$, δεκτή είναι η λύση $φ_0 = 0$.

β. $υ < 0 \rightarrow υ_0 συνφ_0 < 0 \rightarrow συνφ_0 < 0$, δεκτή είναι η λύση $φ_0 = π$

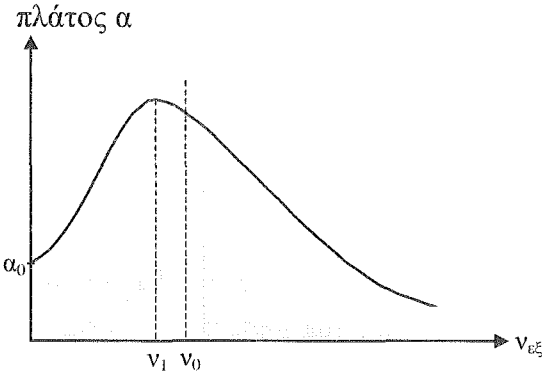
42.

α. Σύμφωνα με το 2° Νόμο του Newton, για τον ταλαντωτή θα έχουμε

$\Sigma F_x = m\alpha$ ή $F_0 \eta\mu\omega t - kx - b\upsilon = m\alpha$

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται με τη συχνότητα $\nu_{\varepsilon\xi}$ της περιοδικής δύναμης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Συντονισμό (μεγιστοποίηση του πλάτους) έχουμε για μια τιμή ν_1 της συχνότητας της περιοδικής δύναμης η οποία είναι λίγο μικρότερη από την τιμή ν_0 της ιδιοσυχνότητας



του συστήματος. Αν είναι $\nu_{\varepsilon\xi} < \nu_1$ και η συχνότητα της περιοδικής δύναμης αυξάνεται συνεχώς, το πλάτος της ταλάντωσης θα αυξάνεται μέχρι να μεγιστοποιηθεί στην κατάσταση του συντονισμού. Αν είναι $\nu_1 < \nu_{\varepsilon\xi} < \nu_0$ ή $\nu_{\varepsilon\xi} > \nu_0$ και αυξάνεται η συχνότητα της περιοδικής δύναμης, από το διάγραμμα $\alpha = f(\nu_{\varepsilon\xi})$ προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται.

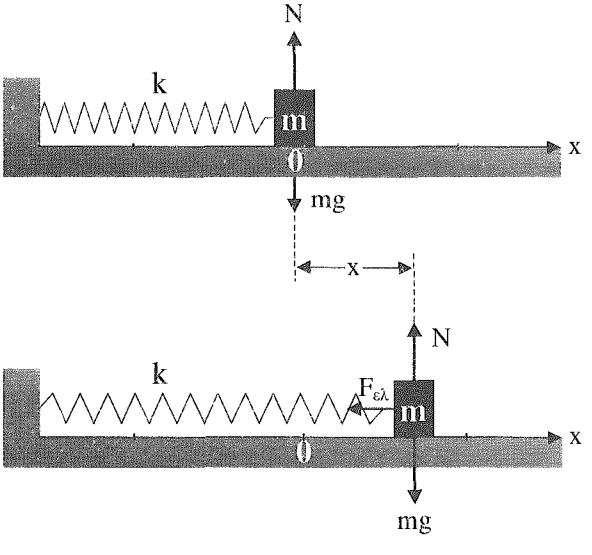
Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.

γ. Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή μάζα-ελατήριο είναι ίση με τη συχνότητα της ελεύθερης αμείωτης ταλάντωσης του συστήματος.

Αν η μάζα απομακρυνθεί κατά x από τη θέση ισορροπίας της θα έχουμε

$\Sigma F_y = 0,\ \Sigma F_x = -F_{\varepsilon\lambda} = -kx = -Dx$ και

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

δ. Όταν ένας ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, η συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με τη συχνότητα που επιβάλλει η περιοδική δύναμη.

Η πρόταση (δ) είναι λανθασμένη.

43.

α. i) Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται:

$$\frac{1}{2}Dx_0^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \xrightarrow{D=m\,\omega^2} m\omega^2 x_0^2 = m\omega^2 x^2 + m\upsilon^2 \rightarrow \upsilon = \pm\,\omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$$

ii) Ισχύουν οι σχέσεις

$\upsilon = \omega x_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$ και $\alpha = -\omega^2 x_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

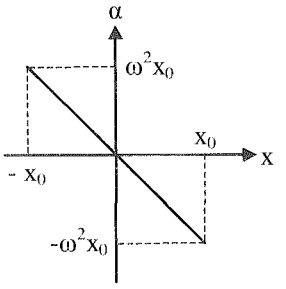
Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{\upsilon^2}{\omega^2 x_0^2} &= \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{\alpha^2}{\omega^4 x_0^2} &= \eta\mu^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\} \text{ Προσθέτοντας κατά μέλη: } \frac{\upsilon^2}{\omega^2 x_0^2} + \frac{\alpha^2}{\omega^4 x_0^2} = 1 \rightarrow$$

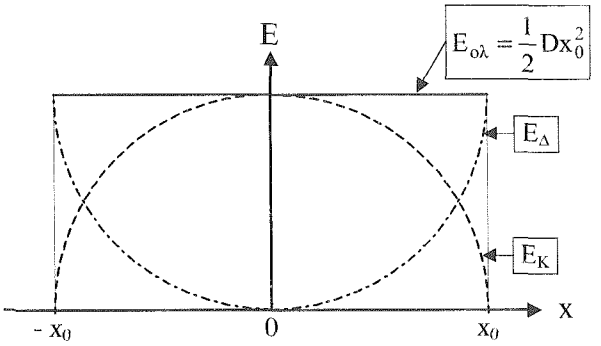
$$\frac{\upsilon^2}{\upsilon_0^2} + \frac{\alpha^2}{\omega^2 \upsilon_0^2} = 1 \rightarrow \omega^2\upsilon^2 + \alpha^2 = \omega^2\upsilon_0^2 \rightarrow \alpha = \pm\,\omega\sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}$$

β. i) Η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι $\alpha = -\omega^2 x$

Η γραφική παράσταση $\alpha = f(x)$ φαίνεται στο σχήμα.



ii) Το κοινό διάγραμμα $E_\Delta = f(x)$, $E_K = f(x)$, $E_{o\lambda} = f(x)$ φαίνεται στο σχήμα.



44.

α. Τα σημεία Α, Β θα είναι συμμετρικά ως προς τη θέση ισορροπίας Ο, όπως προκύπτει από τη σχέση

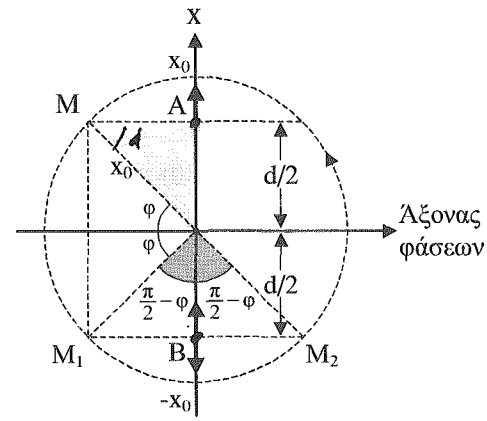
$$\upsilon = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$2\varphi + (90^o - \varphi) + (90^o - \varphi) = 180^o$$

Το υλικό σημείο που διαγράφει ομαλά τον κύκλο διαγράφει ένα ημικύκλιο σε χρονικό διάστημα $t_1 + t_2$,

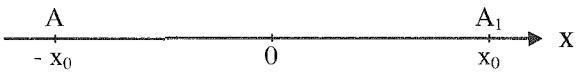
δηλαδή $\frac{T}{2} = t_1 + t_2 \rightarrow T = 2(t_1 + t_2) \rightarrow T = 16\ s$



β. Ισχύει $2\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t_1 \rightarrow 2\varphi = \frac{2\pi}{16} \cdot 4 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

Από το τρίγωνο ΑΜΟ προκύπτει ότι $x_0 = \frac{d}{2\eta\mu\varphi} = \frac{20\sqrt{2}\ cm}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow x_0 = 20\ cm$

45.



α. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου είναι $x = x_0 ημ(\omega t + \varphi_0)$ και η εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon = \omega x_0 συν(\omega t + \varphi_0)$.

Οι εξισώσεις αυτές γράφονται:
$$\left.\begin{array}{l} ημ(\omega t+\varphi_0)=\dfrac{x}{x_0} \\ συν(\omega t+\varphi_0)=\dfrac{\upsilon}{\omega x_0}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l} ημ^2(\omega t+\varphi_0)=\dfrac{x^2}{x_0^2} \\ συν^2(\omega t+\varphi_0)=\dfrac{\upsilon}{\omega^2 x_0^2}\end{array}\right\}\xrightarrow{(+)}$$

$$1=\frac{x^2}{x_0^2}+\frac{\upsilon^2}{\omega^2 x_0^2}\rightarrow x_0^2=x^2+\frac{\upsilon^2}{\omega^2} \qquad (1)$$

Για τις θέσεις x_1 και x_2 η (1) γίνεται, αντίστοιχα:

$$\left.\begin{array}{l} x_0^2=x_1^2+\dfrac{\upsilon_1^2}{\omega^2} \\ x_0^2=x_2^2+\dfrac{\upsilon_2^2}{\omega^2}\end{array}\right\}\rightarrow x_1^2+\frac{\upsilon_1^2}{\omega^2}=x_2^2+\frac{\upsilon_2^2}{\omega^2}\rightarrow x_2^2-x_1^2=\frac{1}{\omega^2}\left(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2\right)\rightarrow \omega=\sqrt{\frac{\upsilon_1^2-\upsilon_2^2}{x_2^2-x_1^2}} \qquad (2)$$

Είναι $T=\dfrac{2\pi}{\omega}\xrightarrow{(2)}T=2\pi\sqrt{\dfrac{x_2^2-x_1^2}{\upsilon_1^2-\upsilon_2^2}}$

<u>Εφαρμογή:</u>

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(144\cdot10^{-4}-256\cdot10^{-4})\ m^2}{(1{,}44-2{,}56)\ m^2\cdot s^{-2}}}\rightarrow T=0{,}2\pi\ s$$

β. Η σχέση (1) για τη θέση x_1 γράφεται:

$$x_0^2=x_1^2+\frac{\upsilon_1^2}{\omega^2}\xrightarrow{(2)}x_0^2=x_1^2+\upsilon_1^2\frac{x_2^2-x_1^2}{\upsilon_1^2-\upsilon_2^2}\rightarrow x_0^2(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2)=x_1^2(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2)+\upsilon_1^2(x_2^2-x_1^2)\rightarrow$$

$$x_0^2(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2)=\upsilon_1^2x_2^2-\upsilon_2^2x_1^2\rightarrow x_0=\sqrt{\frac{\upsilon_1^2x_2^2-\upsilon_2^2x_1^2}{\upsilon_1^2-\upsilon_2^2}}$$

<u>Εφαρμογή:</u>

$$x_0=\sqrt{\frac{1{,}44\ m^2\cdot s^{-2}\times144\cdot10^{-4}\,m^2-2{,}56\ m^2s^{-2}\times256\cdot10^{-4}\,m^2}{(1{,}44-2{,}56)\ m^2\cdot s^{-2}}}\rightarrow x_0=0{,}2\ m$$

46.

α. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $x_0 = \frac{d}{2} \rightarrow x_0 = 0{,}1\ m$

Ισχύει $\upsilon^2 = \omega^2(x_0^2 - x^2) \xrightarrow{x=\frac{x_0}{2}} \upsilon^2 = \omega^2(x_0^2 - \frac{x_0^2}{4}) = \omega^2 \cdot \frac{3x_0^2}{4} \rightarrow$

$$\omega^2 = \frac{4\upsilon^2}{3x_0^2} \rightarrow \omega = \frac{2|\upsilon|}{\sqrt{3}\ x_0} = \frac{2\sqrt{3}\ m \cdot s^{-1}}{\sqrt{3} \cdot 0{,}1\ m} \rightarrow \omega = 20\ \frac{rad}{s}$$

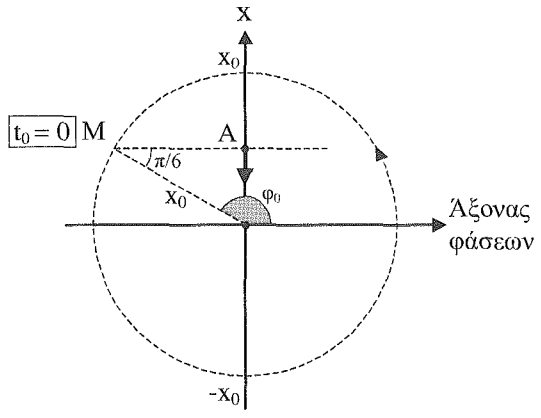
Από τον κύκλο αναφοράς εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$$

(Δίνεται ότι για $t_0 = 0,\ x = \frac{x_0}{2},\ \upsilon < 0$)

Η εξίσωση της απομάκρυνσης γράφεται

$$x = 0{,}1\eta\mu\,(20t + \frac{5\pi}{6})\ (SI)$$

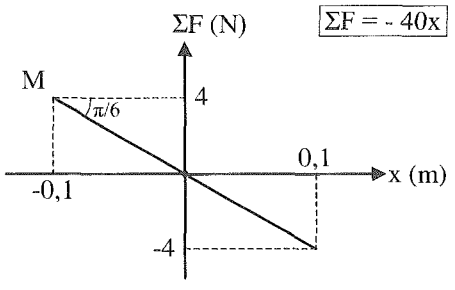


β. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι

$$\alpha = -\omega^2 x = -400\ s^{-2} \times 0{,}05\ m \rightarrow \alpha = -20\ \frac{m}{s^2}$$

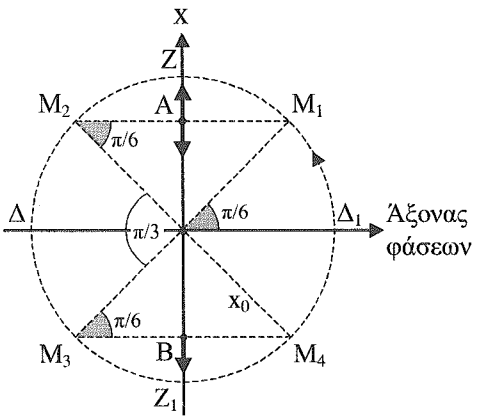
γ. Είναι $\Sigma F = -Dx = -m\omega^2 x = -40x$

Η γραφική παράσταση της $\Sigma F = f(x)$ φαίνεται στο σχήμα.



47.

α. i) Ο χρόνος $t_{AZB} = t_1$ μετάβασης του υλικού σημείου είναι ίσος με το χρόνο που χρειάζεται το υλικό σημείο που κινείται ομαλά στον κύκλο αναφοράς να διαγράψει το τόξο $M_1ZM_2M_3$. Από το σχήμα προκύπτει ότι $t_1 = \frac{T}{2} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}\,s$



ii) Ο χρόνος μετάβασης είναι

$$t_2 = t_{AB} = t_{M_2\Delta M_3} = \frac{\pi}{3\omega} \rightarrow$$

$$t_2 = \frac{\pi}{3 \cdot 2\pi} T \rightarrow t_2 = \frac{T}{6} \rightarrow t_2 = \frac{\pi}{6}\,s$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του υλικού σημείου είναι

$$A: \frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x = -m\omega^2 x_1 = -0{,}01\,kg \times 4\,s^{-2} \times 0{,}1\,m \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -4 \cdot 10^{-3}\,N$$

$$B: \frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x = -m\omega^2 x_2 = -0{,}01\,kg \times 4\,s^{-2} \times (-0{,}1\,m) \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 4 \cdot 10^{-3}\,N$$

48.

α. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου

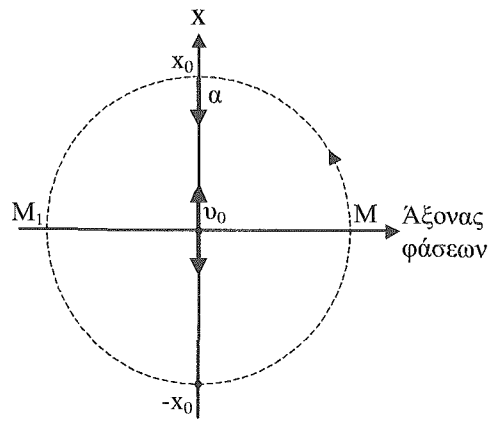
έχει τη μορφή $x = x_0 ημ(\omega t + \varphi_0)$ (1)

Έχουμε

$x_0 = 4 \cdot 10^{-2}\ m, \quad \omega = 2\pi\nu = 4\pi \frac{rad}{s}, \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}\ s$

Για t = 0 είναι x = 0 και υ > 0. Από τον κύκλο αναφοράς προκύπτει $\varphi_0 = 0$. Η εξίσωση (1) γράφεται

$x = 4 \cdot 10^{-2} ημ 4\pi t\ (SI)$ (2)



β. Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του υλικού σημείου είναι

$\upsilon_0 = \omega x_0 = 4\pi\ s^{-1} \times 4 \cdot 10^{-2}\ m \rightarrow \upsilon_0 = 0{,}16\pi \frac{m}{s}$

Μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το μέτρο της ταχύτητας γίνεται υ_0 τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{2}$ κατά την οποία το υλικό σημείο θα περάσει από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο κατά την αρνητική κατεύθυνση. Δηλαδή $t_1 = \frac{1}{4}\ s \rightarrow t_1 = 0{,}25\ s$

γ. Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης του υλικού σημείου είναι $\alpha_0 = \omega^2 x_0$. Δηλαδή

$\alpha_0 = 16\ \pi^2 \times 4 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2} \rightarrow \alpha_0 = 0{,}64\pi^2 \frac{m}{s^2}$

Μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το μέτρο της επιτάχυνσης θα γίνει για πρώτη φορά ίσο με α_0 τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{T}{4}$ κατά την οποία το υλικό σημείο θα βρεθεί στη θέση $x = +x_0$.

Δηλαδή $t_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\ s \rightarrow t_2 = \frac{1}{8}\ s$

δ. Το χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_0 = 1{,}25\ s$ αντιστοιχεί σε $\lambda = \frac{\Delta t}{T}$ περιόδους.

Είναι $\lambda = \frac{1{,}25}{1/2} \rightarrow \lambda = 2{,}5$ περίοδοι.

Η συνολική απόσταση d που διανύει το σωμάτιο θα είναι

$d = \lambda \cdot 4x_0 \rightarrow d = 10x_0 \rightarrow d = 0{,}4\ m$

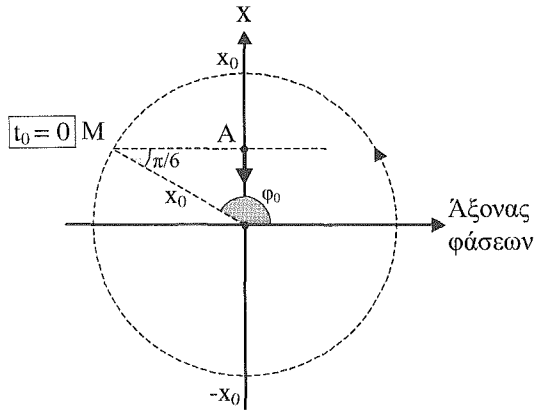
49.

α. Σε κάθε θέση το υλικό σημείο έχει σταθερή ολική ενέργεια και ισχύει

$$E_\Delta + E_K = E_{ολ} \xrightarrow{E_\Delta = E_K} E_\Delta = \frac{E_{ολ}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Dx_0^2 \rightarrow x = \pm\frac{x_0}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -0{,}2\ m \\ x_2 = +0{,}2\ m \end{matrix}$$

β. Για $E_K = \frac{3}{4}E_{ολ}$ θα είναι

$$E_\Delta = \frac{1}{4}E_{ολ} \rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}Dx_0^2 \rightarrow x = \pm\frac{x_0}{2}$$



Θέλουμε για t = 0 να είναι x > 0 και υ < 0. Από τον κύκλο αναφοράς βρίσκουμε ότι $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$

Για την εύρεση της αρχικής φάσης μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

Δίνεται ότι για t = 0 είναι x > 0 και υ <0.

$$\left.\begin{matrix} x = x_0 ημ(\omega t + \varphi_0) \\ υ = υ_0 συν(\omega t + \varphi_0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x_0}{2} = x_0 ημφ_0 \\ 0 > υ_0 συνφ_0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} ημφ_0 = \frac{1}{2} & (1) \\ συνφ_0 < 0 & (2) \end{matrix}$$

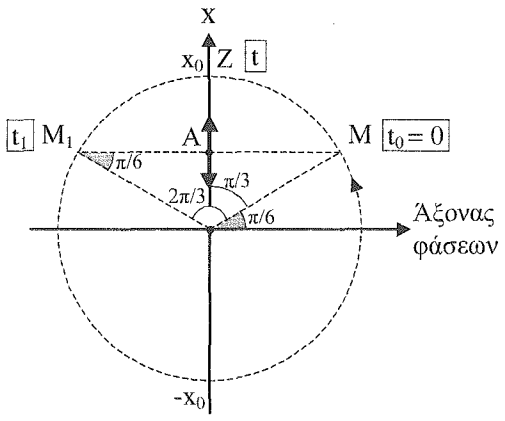
Από την (1) $$\left.\begin{matrix} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{matrix} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \end{matrix} \quad \text{για } k = 0$$

Δεκτή είναι η λύση $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ γιατί ικανοποιεί και την (2)

50.

α. Από τον κύκλο αναφοράς εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} t_1 \rightarrow T = 3t_1 \rightarrow T = 2\ s \qquad (1)$$



β. i) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου έχει τη μορφή

$$x = x_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

Έχουμε $x_0 = 0{,}2\ m$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \frac{rad}{s}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

Η εξίσωση (2) γράφεται $x = 0{,}2\eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)(SI)$ (3)

ii) Η εξίσωση ταχύτητας είναι $\upsilon = 0{,}2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)(SI)$

iii) Η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι: $\alpha = -2\eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)(SI)$

γ. Για $t = \frac{1}{3}\ s$ από (3) προκύπτει $x = +\ 0{,}2\ m$.

i) Εφαρμόζουμε το Θ.Ω.Ο.για το χρονικό διάστημα t_0 έως t_1.

$$m\upsilon + \Omega = 0 \rightarrow \Omega = -m\upsilon \qquad (4)$$

Η ταχύτητα υ στη θέση Α, για t = 0, είναι $\upsilon = 0{,}1\pi\sqrt{3}\ \frac{m}{s}$ (5)

Από (4), (5): $\Omega = -10^{-2}\ kg \times 0{,}1\ \pi\sqrt{3}\ \frac{m}{s} \rightarrow \Omega = -\sqrt{3}\ \pi \cdot 10^{-3}\ N \cdot s$

ii) Εφαρμόζουμε το Θ Μ Κ Ε για κίνηση του σώματος από τη θέση Α μέχρι τη θέση Ζ.

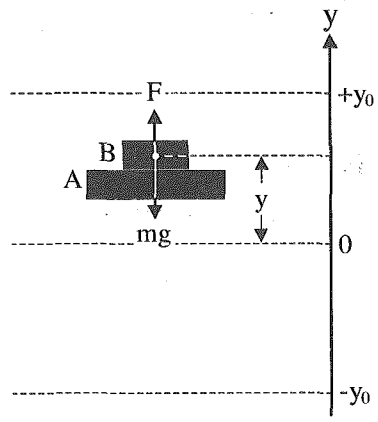
$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + W = 0 \rightarrow W = -\frac{1}{2}m\upsilon^2 = -\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\ kg \times (0{,}1\ \pi\sqrt{3}\ m \cdot s^{-1})^2 \rightarrow W = -15 \cdot 10^{-4}\ J$$

51.

α. Για το σώμα Β, όταν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι y, ισχύει

$\Sigma F_y = -m\omega^2 y \rightarrow F - mg = -m\omega^2 y \rightarrow F = m(g - \omega^2 y) \rightarrow$

$F = m(g - \frac{4\pi^2}{T^2} y)$ (1)



i) $y = 0 \xrightarrow{(1)} F = mg = 0{,}2\ kg \times 10\frac{m}{s^2} \rightarrow F = 2\ N$

ii) $y = -0{,}25\ m \xrightarrow{(1)} F = 0{,}2\ kg\ (10\frac{m}{s^2} + \frac{40}{4\ s^2} \cdot 0{,}25\ m) \rightarrow$

$F = 2{,}5\ N$

iii) $y = 0{,}25\ m \xrightarrow{(1)} F = 0{,}2\ kg\ (10\frac{m}{s^2} - \frac{40}{4\ s^2} \cdot 0{,}25\ m) \rightarrow F = 1{,}5\ N$

Το σώμα Β ασκεί στο σώμα Α δύναμη $\vec{F}' = -\vec{F}$

β. Για να είναι το σώμα Β σε επαφή με το σώμα Α πρέπει $F \geq 0$. Από (1) προκύπτει:

$g - \frac{4\pi^2}{T^2} y \geq 0 \rightarrow y \leq \frac{gT^2}{4\pi^2} \rightarrow y \leq \frac{10\ m \cdot s^{-2} \times 4\ s^2}{40} \rightarrow y \leq 1\ m \rightarrow y_{max} = 1\ m.$

(Για y = 1 m είναι F = 0 και χάνεται η επαφή του σώματος Β με το σώμα Α).

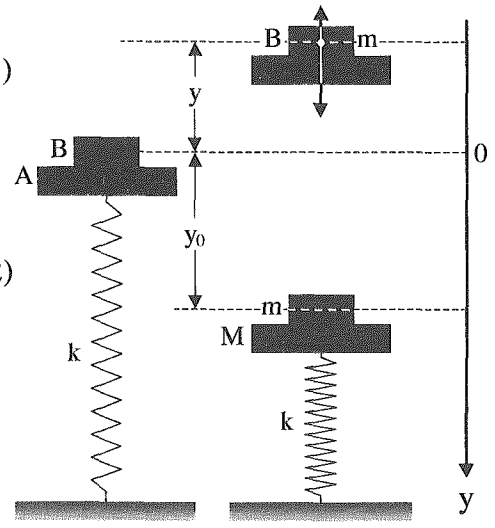
γ. Πρέπει $F \geq 0$. Από (1): $g - 4\pi^2 \nu^2 y_0 \geq 0 \rightarrow \nu^2 \leq \frac{g}{4\pi^2 y_0} \rightarrow \nu^2 \leq \frac{10\ m \cdot s^{-2}}{40 \cdot 0{,}25\ m} \rightarrow$

$\nu^2 \leq 1\ s^{-2} \rightarrow \nu \leq 1\ s^{-1} \rightarrow \nu_{max} = 1\ Hz$

52.

α. Για το σώμα Β, όταν έχει απομάκρυνση y, θα ισχύει

$$\Sigma F_y = -m\omega^2 y \rightarrow mg - F = -m\omega^2 y \rightarrow F = m(g + \omega^2 y) \quad (1)$$



Για να είναι το σώμα σε επαφή με το δίσκο θα πρέπει $F \geq 0$. Από (1) προκύπτει

$$g + \omega^2 y \geq 0 \rightarrow y \geq -\frac{g}{\omega^2} \quad (2)$$

Για όσο χρόνο το σώμα Β είναι σ' επαφή με το δίσκο, το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{200\ N \cdot m^{-1}}{2\ kg}} \rightarrow \omega = 10\ s^{-1}$$ και η

(2) δίνει $y \geq -\frac{10\ m \cdot s^{-2}}{100\ s^{-2}} \rightarrow y \geq -0{,}1\ m$

Για $y_1 = -0{,}1\ m$ το σώμα Β εγκαταλείπει το δίσκο. Δίνεται $y_0 = \frac{\sqrt{5}}{10}\ m \cong 0{,}22\ m$ άρα

$y_1 > -y_0$.

Αυτό σημαίνει ότι θα εγκαταλείπει το σώμα Β το δίσκο Α, στη θέση $y_1 = -0{,}1\ m$, κινούμενο προς τα πάνω, δηλαδή με $\upsilon < 0$.

β. Στη θέση εγκατάλειψης έχουμε:

$$\upsilon = -\omega\sqrt{y_0^2 - y_1^2} \rightarrow \upsilon = -10\ s^{-1}\sqrt{\frac{5}{100}\ m^2 - \frac{1}{100}\ m^2} \rightarrow \upsilon = -2\ \frac{m}{s} \quad (3)$$

Η επιτάχυνση α του σώματος Β, τη στιγμή της εγκατάλειψης, είναι:

$$\alpha = -\omega^2 y_1 = -100\ s^{-2} \times (-0{,}1)\ m \rightarrow \alpha = 10\ \frac{m}{s^2}$$

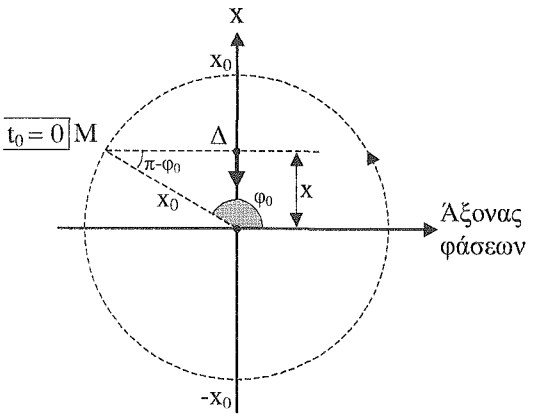
γ. Το σώμα Β, μετά την εγκατάλειψη, εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και φθάνει σε

ύψος $h = \frac{\upsilon^2}{2g} \xrightarrow{(3)} h = \frac{(-2\ m \cdot s^{-1})^2}{20\ m \cdot s^{-2}} \rightarrow h = 0{,}2\ m$

53.

α. Η εξίσωση x = f (t) είναι της μορφής

$$x = x_0 \eta\mu(\omega\, t + \varphi_0) \qquad (1)$$



Είναι $x_0 = 0{,}1\ \text{m}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

Από τον κύκλο αναφοράς βρίσκουμε ότι το υλικό σημείο που τον διαγράφει, τη στιγμή t = 0 βρίσκεται στη θέση Μ. Από το τρίγωνο ΑΟΜ προκύπτει:

$$x = x_0 \eta\mu(\pi - \varphi_0) \rightarrow 5\sqrt{3} \cdot 10^{-2} = 0{,}1 \eta\mu(\pi - \varphi_0) \rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu(\pi - \varphi_0) \rightarrow \pi - \varphi_0 = \frac{\pi}{3} \rightarrow \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο γράφεται

$$x = 0{,}1 \eta\mu\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (2)$$

β. i) Η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου είναι $E_\Delta = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$.

Για $t = \dfrac{T}{4} = \dfrac{1}{2}\ \text{s}$ είναι $x = 0{,}1 \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = -0{,}05\ \text{m}$

Άρα $E_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}1\ \text{kg} \times (\pi\ \text{s}^{-1})^2 \times (-0{,}05\ \text{m})^2 \rightarrow E_\Delta = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$

ii) $E_{ολ} = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}1\ \text{kg} \times (\pi\ \text{s}^{-1})^2 \times (10^{-1}\ \text{m})^2 \rightarrow E_{ολ} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$

και $E_K = E_{ολ} - E_\Delta \rightarrow E_K = 3{,}75 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$

iii) $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x = -m\omega^2 x \rightarrow \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = -0{,}1\ \text{kg} \times (\pi\ \text{s}^{-1})^2 \times (-0{,}05\ \text{m}) \rightarrow \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{N}$

54.

α. Είναι $\alpha = -\omega^2 x \rightarrow \omega^2 x = 16x \rightarrow \omega^2 = 16\ s^{-2} \rightarrow \omega = 4\ s^{-1}$

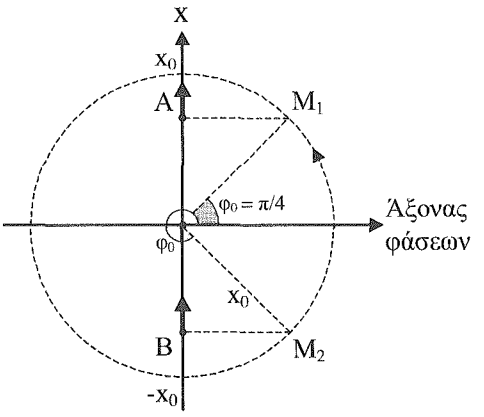
Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4}\ s \rightarrow T = \frac{\pi}{2}\ s.$

Η ολική ενέργεια του υλικού σημείου είναι $E_{ολ} = \frac{1}{2}Dx_0^2$ ή $E_{ολ} = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$

Άρα $x_0 = \sqrt{\frac{2E_{ολ}}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\times 32\cdot 10^{-4}\ J}{0{,}01\ kg\times 16\ s^{-2}}} \rightarrow x_0 = 0{,}2\ m$

β. Για $E_\Delta = E_K$ έχουμε:

$E_\Delta = \frac{E_{ολ}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Dx_0^2 \rightarrow x = \pm x_0\frac{\sqrt{2}}{2}$



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

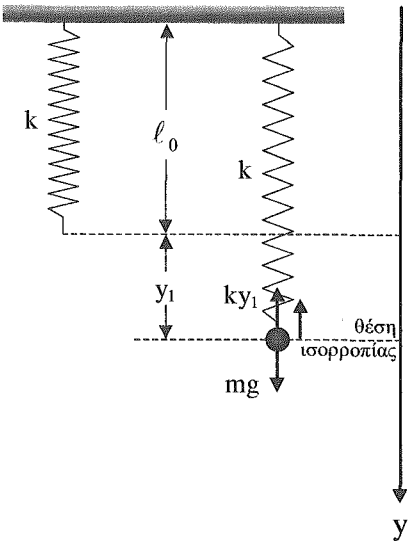
- Το υλικό σημείο τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση $x = +x_0\frac{\sqrt{2}}{2}$ (σημείο Α). Όπως φαίνεται από τον κύκλο αναφοράς, η αρχική φάση είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ και η εξίσωση της απομάκρυνσης γράφεται $x = 0{,}2ημ\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)(SI)$

- Το υλικό σημείο τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση $x = -x_0\frac{\sqrt{2}}{2}$ (σημείο Β).

  Από τον κύκλο αναφοράς προκύπτει $\varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο γράφεται $x = 0{,}2ημ\left(4t + \frac{7\pi}{4}\right)(SI)$

55.

Α. α. Τη στιγμή που ακινητοποιείται ο ανελκυστήρας, η μάζα m βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της. Σύμφωνα με τον 1° νόμο του Newton, η μάζα θα κινηθεί προς τα πάνω, δηλαδή προς την αρνητική κατεύθυνση.

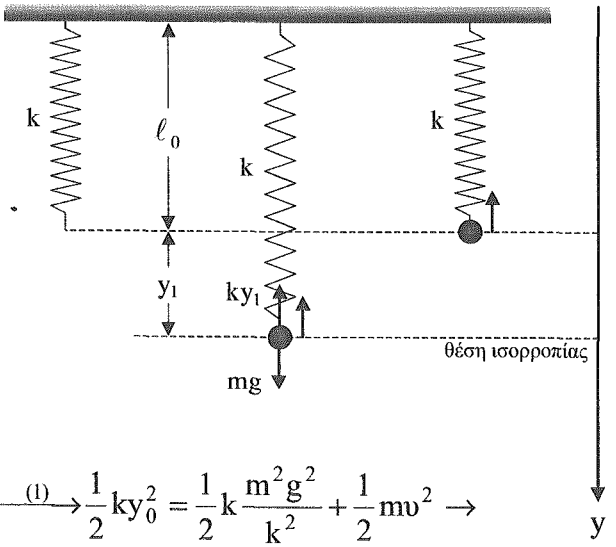


Η ταχύτητα υ της μάζας τη στιγμή που ακινητοποιείται ο ανελκυστήρας είναι (κατά μέτρο) η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, γιατί η μάζα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της.

Θα ισχύει $\upsilon_0 = \upsilon = \omega y_0 \rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, y_0$ και άρα

$$y_0 = \upsilon_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{2}\,\frac{m}{s} \times \sqrt{\frac{1\,kg}{400\,N \cdot m^{-1}}} \rightarrow y_0 = \frac{\sqrt{2}}{20}\,m$$

β. Όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, τη στιγμή που ακινητοποιείται ο ανελκυστήρας, η μάζα m απέχει από τη θέση ισορροπίας της κατά $y_1 = \frac{mg}{k}$ (1)



και έχει ταχύτητα υ κατά την αρνητική κατεύθυνση. Η ολική ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος διατηρείται. Έχουμε:

$$E_{ολ} = E_\Delta + E_K \rightarrow \frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2}k\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \rightarrow$$

$$y_0^2 = \frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{m\upsilon^2}{k} \rightarrow y_0 = \frac{\sqrt{m^2g^2 + km\upsilon^2}}{k} \rightarrow$$

$$y_0 = \frac{\sqrt{(1\,kg \times 10\,m \cdot s^{-2})^2 + 400\,N \cdot m^{-1} \times 1\,kg \times (\sqrt{2}\,m \cdot s^{-1})^2}}{400\,N \cdot m^{-1}} \rightarrow$$

$$y_0 = \frac{30}{400}\,m \rightarrow y_0 = 0{,}075\,m$$

Β. Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι της μορφής $y = y_0 ημ(ωt + φ_0)$.

Η κυκλική συχνότητα θα είναι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ και για τις δύο περιπτώσεις.

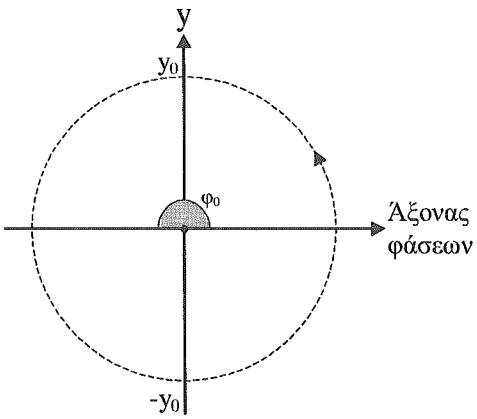
$$\omega = \sqrt{\frac{400\ N \cdot m^{-1}}{1\ kg}} \rightarrow \omega = 20\ \frac{rad}{s}$$

Η αρχική φάση φ_0 καθορίζεται εύκολα από τον κύκλο αναφοράς με βάση τις αρχικές συνθήκες.

Για $t = 0$ έχουμε $y = 0$ και $\upsilon < 0$. Άρα $\varphi_0 = \pi$.

Η εξίσωση $y = f(t)$ γράφεται

$$y = \frac{\sqrt{2}}{20} ημ(20t + \pi)\ (SI)$$



56.

α. i) Στη θέση ισορροπίας (θέση 1) ι-σχύει $\Sigma F_y = 0 \rightarrow mg - ky_1 = 0$ (1)

ii) Στη θέση 2, όπου η απομάκρυνση της μάζας από τη θέση ισορροπίας της είναι y, έχουμε:

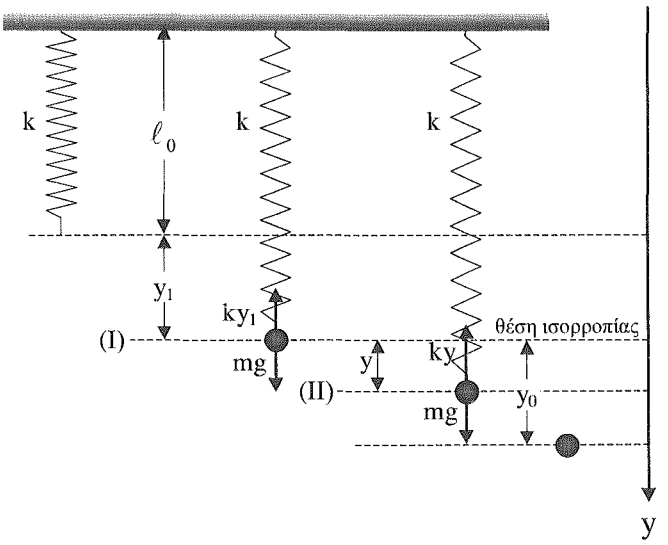
$\Sigma F_y = mg - F_{\varepsilon\lambda} = mg - k(y_1 + y) \rightarrow$

$\Sigma F_y = mg - ky_1 - ky \xrightarrow{(1)}$

$\Sigma F_y = -ky = -Dy$ με $D = k$.

Το σύστημα εκτελεί α.α.τ. με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5\ kg}{50\ N \cdot m^{-1}}} \rightarrow T = \frac{\pi}{5}\ s \qquad (2)$$



β. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_{\Delta,\,max} = \frac{1}{2}Dy_0^2 = \frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 50\,\frac{N}{m}\times 4\cdot 10^{-2}\ m^2 \rightarrow E_{\Delta,\,max} = 1\ J$$

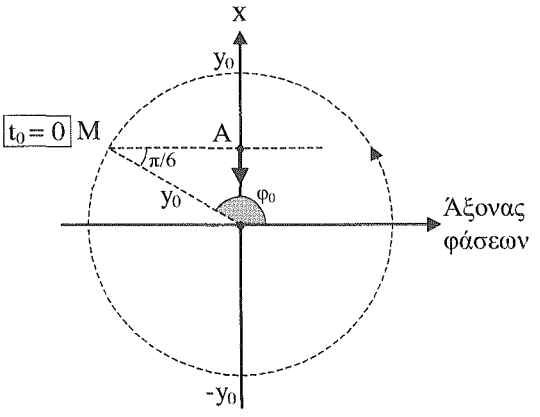
γ. Η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου είναι

$$y_2 = y_1 + y_0 \xrightarrow{(1)} y_2 = \frac{mg}{k} + y_0 = \frac{0{,}5\ kg \times 10\ m\cdot s^{-2}}{50\ N\cdot m^{-1}} + 0{,}2\ m \rightarrow y_2 = 0{,}3\ m$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι:

$$E_{\varepsilon\lambda,\,max} = \frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 50\,\frac{N}{m}\times 9\cdot 10^{-2}\ m^2 \rightarrow E_{\varepsilon\lambda,\,max} = 2{,}25\ J$$

δ. Τη χρονική στιγμή t = 0 η μάζα βρίσκεται στη θέση $y = +0{,}1\ m = \frac{y_0}{2}$, (θέση Α) κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση.



Από τον κύκλο αναφοράς προκύπτει $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$

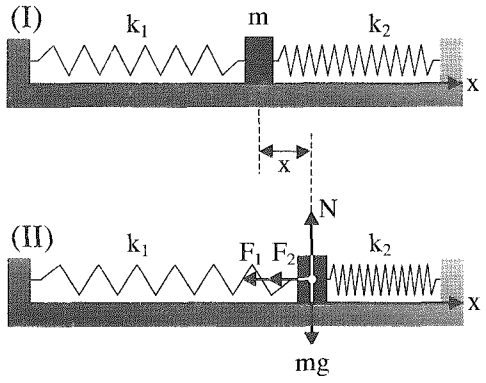
Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}\,\frac{rad}{s} \rightarrow \omega = 10\,\frac{rad}{s}$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της μάζας m από τη θέση ισορροπίας της, σε συνάρτηση με το χρόνο, γράφεται:

$$y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow y = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)(SI)$$

57.

α. Στη θέση (ΙΙ) για το σώμα έχουμε:



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = mg$$

$$\Sigma F_x = -F_1 - F_2 \qquad (1)$$

Είναι: $F_1 = k_1\ x$, $F_2 = k_2\ x$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει $\Sigma F_x = -(k_1 + k_2)x = -Dx$ με

$D = k_1 + k_2$

Το σύστημα εκτελεί α. α. τ. με περίοδο

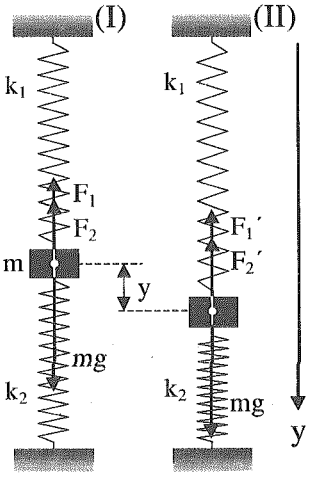
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1\,kg}{400\ N \cdot m^{-1}}} \rightarrow T = \frac{\pi}{10}\ s$$

β. Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}Dx_0^2 \rightarrow E_{ολ} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_0^2 = \frac{1}{2} \times 400\frac{N}{m} \times 4 \cdot 10^{-2}\ m^2 \rightarrow E_{ολ} = 8\ J$$

58.

α. Στην κατάσταση ισορροπίας (I) έχουμε:



$\Sigma F_y = 0 \rightarrow mg - F_1 - F_2 = 0$ όπου $F_1 = k_1 y_1$ και $F_2 = k_2 y_2$

Άρα $mg - k_1 y_1 - k_2 y_2 = 0$ (1)

Στην κατάσταση (II), όπου η απομάκρυνση της μάζας από τη θέση ισορροπίας της είναι y, θα έχουμε $\Sigma F_y = mg - F_1' - F_2'$ (2)

Το ελατήριο σταθεράς k_1 θα είναι τώρα τεντωμένο κατά $y_1 + y$, ενώ το ελατήριο σταθεράς k_2 θα είναι συσπειρωμένο κατά $y_2 + y$.

Για τις δυνάμεις F_1' και F_2' που ασκούν τα ελατήρια στη μάζα θα ισχύουν:

$F_1' = k_1(y_1 + y)$ και $F_2' = k_2(y_2 + y)$. Με αντικατάσταση στη (2) προκύπτει:

$\Sigma F_y = mg - k_1(y_1 + y) - k_2(y_2 + y) \rightarrow$

$\Sigma F_y = mg - k_1 y_1 - k_2 y_2 - (k_1 + k_2)y \xrightarrow{(1)} \Sigma F_y = -(k_1 + k_2)y = -Dy$ με $D = k_1 + k_2$

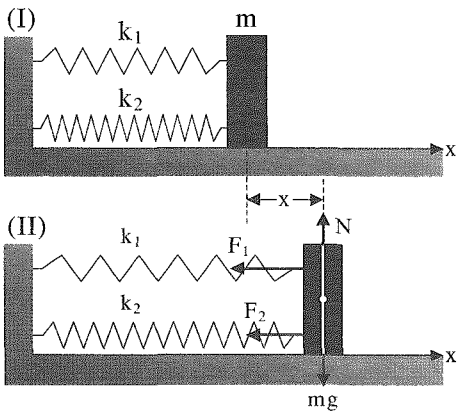
Το σύστημα εκτελεί α.α.τ. με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1\,kg}{400\,N \cdot m^{-1}}} \rightarrow T = \dfrac{\pi}{10}\,s$

β. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της μάζας m θα είναι ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης.

$$E_{K,max} = E_{ολ} \rightarrow E_{K,max} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)y_0^2 = \frac{1}{2} \times 400\,\frac{N}{m} \times (2 \cdot 10^{-1}\,m)^2 \rightarrow E_{κ,max} = 8\,J$$

59.

α. Στη θέση (ΙΙ), όπου η απομάκρυνση της μάζας m από τη θέση ισορροπίας της είναι x, θα έχουμε



$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = mg$

$\Sigma F_x = -F_1 - F_2$ (1)

Είναι $\begin{matrix} F_1 = k_1 x \\ F_2 = k_2 x \end{matrix}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει $\Sigma F_x = -(k_1 + k_2)x = -Dx$

με $D = k_1 + k_2$

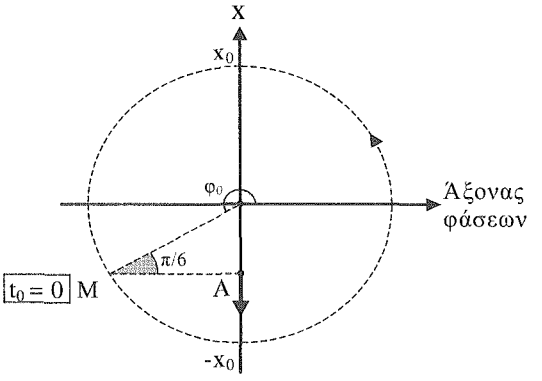
Το σύστημα εκτελεί α.α.τ. με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1\ kg}{400\ N \cdot m^{-1}}} \rightarrow T = \frac{\pi}{10}\ s$$

β. Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_0^2 = \frac{1}{2} \times 400\frac{N}{m} \times (2 \cdot 10^{-1}\ m)^2 \rightarrow E_{ολ} = 8\ J$$

γ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης x της μάζας από τη θέση ισορροπίας της θα είναι



$x = x_0 ημ(\omega t + \varphi_0)$

Είναι $x_0 = 0{,}2\ m$ και

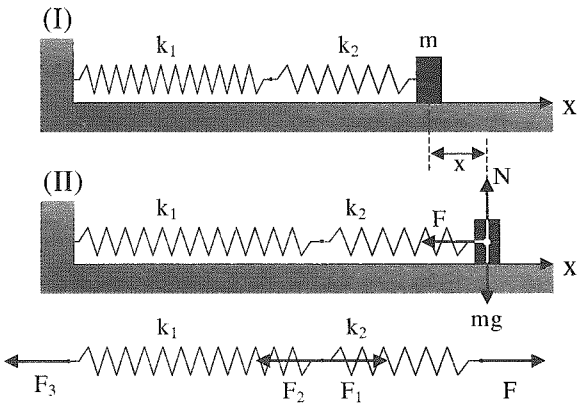
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}s} \rightarrow \omega = 20\frac{rad}{s}$$

Η αρχική φάση φ_0 καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες και βρίσκεται εύκολα από τον κύκλο αναφοράς.

Για t = 0 έχουμε $x = -\frac{x_0}{2}$ και $\upsilon < 0$, άρα $\varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow \varphi_0 = \frac{7\pi}{6}$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης γράφεται $x = 0{,}2ημ\left(20t + \frac{7\pi}{6}\right)(SI)$

60.



Επειδή τα ελατήρια θεωρούνται ιδανικά,

θα είναι $F = F_1 = F_2 = F_3$.

Η απομάκρυνση είναι

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \rightarrow F = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \quad (1)$$

Για το σώμα στη θέση (II) ισχύουν οι σχέσεις

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_x = -F \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = -Dx$$

με $D = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

Το σύστημα θα εκτελέσει α.α.τ. με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{D}}$ (2)

Είναι $D = \dfrac{(2 \cdot 10^2\ N \cdot m^{-1}) \times (3 \cdot 10^2\ N \cdot m^{-1})}{500\ N \cdot m^{-1}} \rightarrow D = 120\ \dfrac{N}{m}$ (3)

Από (2), (3) προκύπτει: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}3\ kg}{120\ N \cdot m^{-1}}} \rightarrow T = \dfrac{\pi}{10}\ s$

β. Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} D x_0^2 \xrightarrow{(3)} E_{ολ} = \frac{1}{2} \times 120 \frac{N}{m} \times (2 \cdot 10^{-1}\ m)^2 \rightarrow E_{ολ} = 2{,}4\ J$$

γ. Στη θέση $x = 0{,}1\ m$ η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_\Delta = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} \times 120 \frac{N}{m} \times 10^{-2}\ m^2 \rightarrow E_\Delta = 0{,}6\ J$$

Η κινητική ενέργεια της μάζας στην ίδια θέση είναι

$$E_K = E_{ολ} - E_\Delta = 2{,}4\ J - 0{,}6\ J \rightarrow E_K = 1{,}8\ J$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$x\ \% = \frac{E_K}{E_{ολ}} \cdot 100\ \% = \frac{1{,}8}{2{,}4} \cdot 100\ \% \rightarrow x\ \% = 75\ \%$$

61.

α. Κάθε ελατήριο επιμηκύνεται από δύναμη μέτρου F.

Για το σώμα στη θέση (I) ισχύει

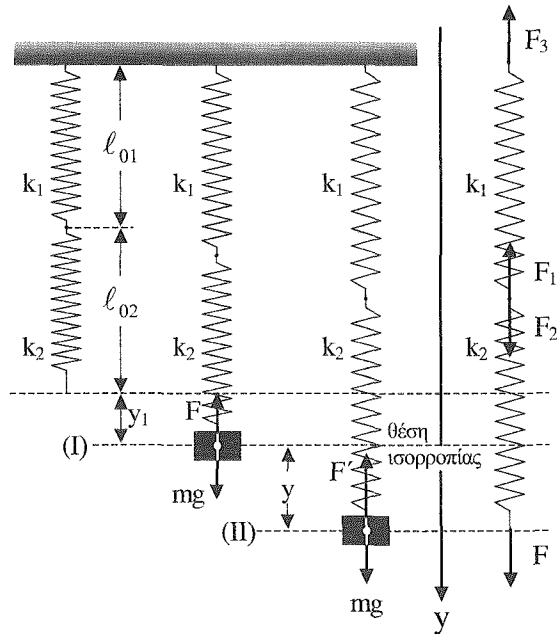
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow mg - F = 0 \qquad (1)$$

Συμβολίζουμε ψ_1, ψ_2 τις παραμορφώσεις των δύο ελατηρίων.

Είναι

$$y_1 = \psi_1 + \psi_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \rightarrow$$

$$F = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y_1 \xrightarrow{(1)} mg = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y_1 \qquad (2)$$



Συμβολίζουμε ψ_1', ψ_2' τις παραμορφώσεις των δύο ελατηρίων στη θέση (II).

Είναι $y + y_1 = \psi_1' + \psi_2' = \frac{F'}{k_1} + \frac{F'}{k_2} \rightarrow F' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}(y_1 + y)$ (3)

Για το σώμα στη θέση (II) ισχύει

$$\Sigma F_y = mg - F' \xrightarrow{(3)} \Sigma F_y = mg - \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}(y_1 + y) = mg - \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y_1 - \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y \xrightarrow{(2)}$$

$$\Sigma F_y = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y = -Dy \quad \text{με} \quad D = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Το σύστημα εκτελεί α.α.τ. με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

Είναι $D = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{150\ N \cdot m^{-1} \times 300\ N \cdot m^{-1}}{450\ N \cdot m^{-1}} \rightarrow D = 100\ \frac{N}{m}$

Άρα $T = 2\pi\sqrt{\frac{1\ kg}{100\ N \cdot m^{-1}}} \rightarrow T = \frac{\pi}{5}\ s$

β. Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} D y_0^2 \rightarrow E_{ολ} = \frac{1}{2} \times 100\ \frac{N}{m} \times 4 \cdot 10^{-2}\ m^2 \rightarrow E_{ολ} = 2\ J$$

γ. Στη θέση $y = \frac{-\sqrt{3}}{10}$ m η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_\Delta = \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}\times 100\,\frac{N}{m}\times\frac{3}{100}\,m^2 \rightarrow E_\Delta = 1{,}5\ J$$

Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι $E_K = E_{ολ} - E_\Delta \rightarrow$

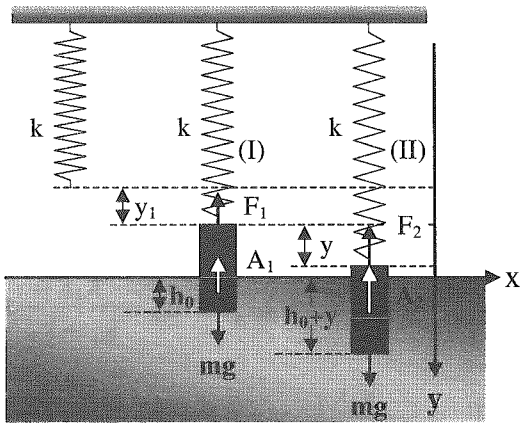
$$E_K = 2\ J - 1{,}5\ J \rightarrow E_K = 0{,}5\ J$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$\lambda\,\% = \frac{E_K}{E_{ολ}}\cdot 100\,\% = \frac{0{,}5}{2}\cdot 100\,\% \rightarrow x\,\% = 25\,\%$$

62.

α. Θέση (I)



Έχουμε $\Sigma F_y = 0 \rightarrow mg - F_1 - A_1 = 0$

Είναι $F_1 = ky_1$ και $A_1 = \rho g S h_0$

Άρα $mg - ky_1 - \rho g S h_0 = 0$ (1)

Θέση (II)

$\Sigma F_y = mg - F_2 - A_2$ (2)

Είναι $F_2 = k(y_1 + y)$ και

$A_2 = \rho g S(h_0 + y) = \rho g S h_0 + \rho g S y$

Με αντικατάσταση στην (2) προκύπτει:

$$\Sigma F_y = mg - ky_1 - ky - \rho g S h_0 - \rho g S h_0 + \rho g S y \xrightarrow{(1)} \Sigma F_y = -(k + \rho g S)y \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = -Dy \quad \text{με} \quad D = k + \rho g S$$

Άρα το σύστημα εκτελεί α.α.τ με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k+\rho g S}} \rightarrow$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1\ kg}{380\ N\cdot m^{-1} + 10\ m\cdot s^{-2}\times 10^3\ kg\cdot m^{-3}\times 20\cdot 10^{-4}\ m^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{400}}\ s \rightarrow T = \frac{\pi}{10}\ s$$

β. Ο κύλινδρος θα περάσει από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά, από τη χρονική στιγμή που αφέθηκε ελεύθερος, μετά από χρόνο $t_1 = \frac{T}{4} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{40}$ s.

γ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης y σε συνάρτηση με το χρόνο είναι της μορφής

$$y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \qquad (3)$$

Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}\,s} \rightarrow \omega = 20\,\frac{rad}{s}$ και $y_0 = 2 \cdot 10^{-2}\ m$

Για t = 0 έχουμε $y = \sqrt{2} \cdot 10^{-2}\ m$ ή $y = y_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\upsilon < 0$

Από τον κύκλο αναφοράς προκύπτει $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$

Η εξίσωση (3) γράφεται $y = 2 \cdot 10^{-2} \eta\mu\left(20t + \frac{3\pi}{4}\right)(SI)$

Για την εύρεση της αρχικής φάσης μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

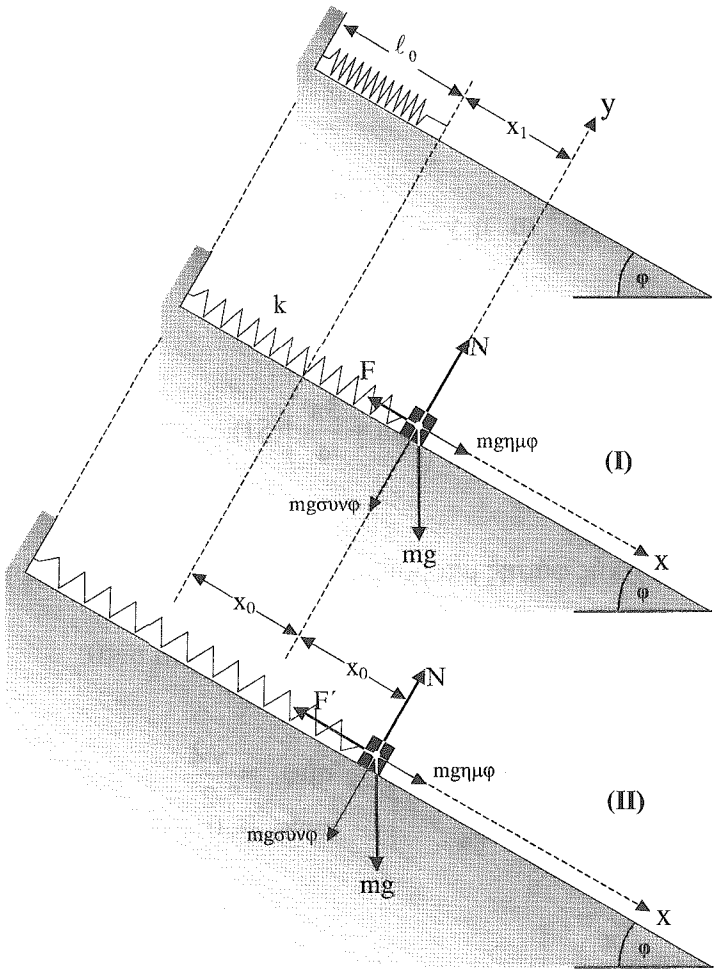
Δίνεται ότι για t = 0 είναι $y = \sqrt{2} \cdot 10^{-2}\ m$ ή $y = y_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\upsilon < 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \\ \upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = y_0 \eta\mu\varphi_0 \\ 0 > \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\varphi_0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) \\ \sigma\upsilon\nu\varphi_0 < 0 \quad (5) \end{array}$$

Από την (4) $\left.\begin{array}{l} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{4} \end{array}$ για k = 0

Δεκτή είναι η λύση $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$ γιατί ικανοποιεί και την (5).

63.



α. Θέση (Ι)

$\Sigma F_y = 0$ και $\Sigma F_x = 0 \rightarrow mg\eta\mu\varphi - kx_1 = 0$ (1)

Θέση (ΙΙ)

$\Sigma F_y = 0$ και $\Sigma F_x = mg\eta\mu\varphi - F' = mg\eta\mu\varphi - k(x_1 + x) \rightarrow$

$\Sigma F_x = mg\eta\mu\varphi - kx_1 - kx \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -kx = -Dx$ με $D = k$.

Το σύστημα εκτελεί α.α.τ. με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1\,kg}{100\,N \cdot m^{-1}}} \rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$

β. i) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης στις θέσεις $x = \pm 0{,}05\ \text{m}$ είναι

$$E_\Delta = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 100\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\times 25\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \rightarrow E_\Delta = 0{,}125\ \text{J}$$

ii) Για $x = +0{,}05$ m, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $E_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(x_1 + x)^2$

Είναι $kx_1 = mg\eta\mu\varphi \rightarrow x_1 = \frac{mg\eta\mu\varphi}{k} = \frac{1\ \text{kg}\times 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\times 0{,}5}{100\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}} \rightarrow x_1 = 0{,}05$ m.

Άρα $E_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\times 100\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\times(0{,}05\ \text{m} + 0{,}05\ \text{m})^2 \rightarrow E_{\varepsilon\lambda} = 0{,}5\ \text{J}$

Για $x = -0{,}05$ m το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και άρα $E_{\varepsilon\lambda} = 0$.

iii)Για $x = 0{,}05$ m έχουμε $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x = mg\eta\mu\varphi - F' \rightarrow$

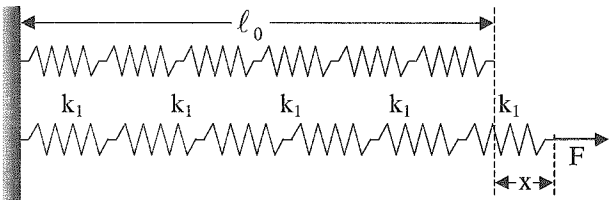
$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = mg\eta\mu\varphi - k(x_1 + x) = 1\ \text{kg}\times 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\times\frac{1}{2} - 100\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\times 0{,}1\ \text{m} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -5\ \text{N}$$

Για $x = -0{,}05$ m έχουμε $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x = mg\eta\mu\varphi - 0 \rightarrow$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = 1\ \text{kg}\times 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\times\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 5\ \text{N}$$

64.

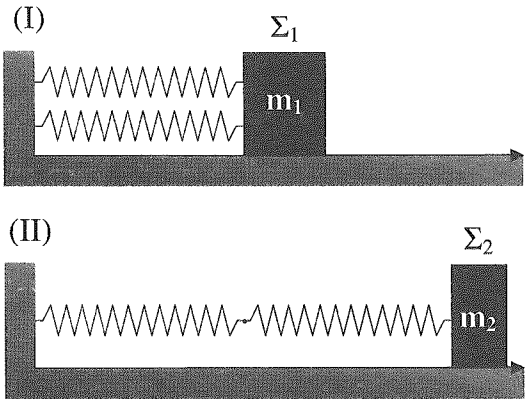
α. Θεωρούμε το ελατήριο αποτελούμενο από Ν όμοια ελατήρια συνδεδεμένα σε σειρά. Καθένα επιμηκύνεται από δύναμη μέτρου F που εμείς ασκούμε στην άκρη Α του ελατηρίου.



Θα ισχύει: $x = x_1 + x_2 + ... + x_\nu = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_1} + ... + \frac{F}{k_1} = N \cdot \frac{F}{k_1} \rightarrow$

$$\frac{F}{k} = N \cdot \frac{F}{k_1} \rightarrow k_1 = Nk \qquad (1)$$

β. Για τις περιόδους των συστημάτων (I), (II) έχουμε:



$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D_1}} \text{ και } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{D_2}}$$

Θέλουμε $T_1 = T_2$. Άρα: $\frac{m_1}{D_1} = \frac{m_2}{D_2}$ ή $\frac{m_1}{m_2} = \frac{D_1}{D_2}$ (2)

Σύμφωνα με τις ερωτήσεις (59) και (60) έχουμε:

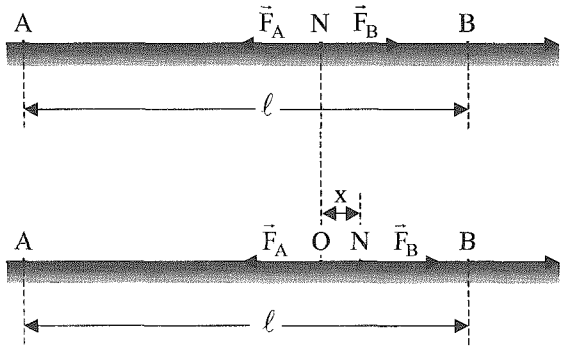
$$D_1 = k_1 + k_2 \xrightarrow{(1)} D_1 = 2Nk \qquad (3)$$

$$D_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \xrightarrow{(1)} D_2 = \frac{Nk \cdot Nk}{2Nk} \rightarrow D_2 = \frac{Nk}{2} \qquad (4)$$

Από (2), (3), (4): $\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{2Nk}{\frac{Nk}{2}} \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4$

65.

α. Βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας Ο του υλικού σημείου.



Θα είναι

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_B - F_A = 0 \rightarrow$

$1{,}6\ (BN) = 0{,}8\ (AN) \rightarrow (AN) = 2\ (BN)$

Ισχύει $(AN) + (NB) = \ell$.

Άρα $3(BN) = \ell \rightarrow (BN) = \dfrac{\ell}{3} = 0{,}3$ m.

Επομένως, στη θέση ισορροπίας του υλικού σημείου έχουμε: (AN) = 0,6 m και (NB) = 0,3 m.

Απομακρύνουμε το υλικό σημείο από τη θέση ισορροπίας του και υπολογίζουμε το άθροισμα ΣF_x.

Έχουμε (στο SI):

$\Sigma F_x = F_B - F_A = 1{,}6\,[(OB) - x] - 0{,}8\,[(AO) + x] \rightarrow$

$\Sigma F_x = 1{,}6(0{,}3 - x) - 0{,}8(0{,}6 + x) = 0{,}48 - 1{,}6x - 0{,}48 - 0{,}8x \rightarrow$

$\Sigma F_x = -2{,}4x = -Dx$ με $D = 2{,}4\dfrac{N}{m}$.

Άρα το υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Έστω x_0 το πλάτος της ταλάντωσης.

Για την ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου όταν αυτό περνάει από τα σημεία Α και Β θα ισχύει

$$E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2}Dx_A^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 = \frac{1}{2}Dx_B^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 \rightarrow \upsilon_B = \sqrt{\upsilon_A^2 + \frac{D}{m}(x_A^2 - x_B^2)} \rightarrow$$

$$\upsilon_B = \sqrt{2{,}25\,\frac{m^2}{s^2} + \frac{2{,}4\ N\cdot m^{-1}}{96\cdot 10^{-3}\ kg}(0{,}36\ m^2 - 0{,}09\ m^2)} \rightarrow \upsilon_B = 3\,\frac{m}{s}$$

66.

α. Θέση ισορροπίας (Ι):

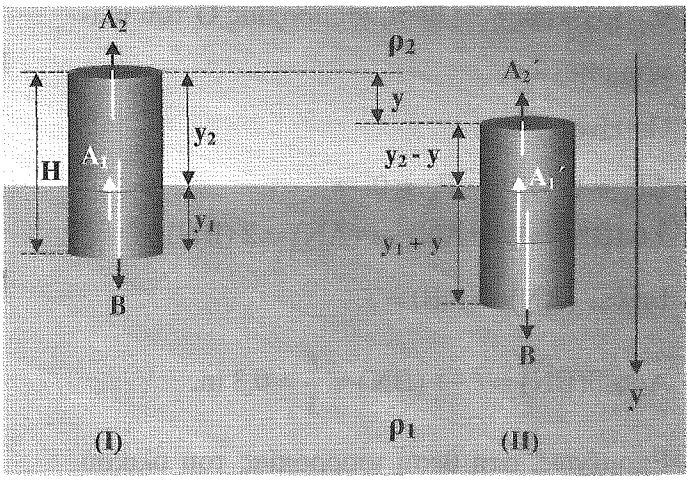
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow B - A_1 - A_2 = 0$

Είναι $A_1 = \rho_1 g S y_1$ και $A_2 = \rho_2 g S y_2$

Άρα $B - \rho_1 g S y_1 - \rho_2 g S y_2 = 0$ (1)

Θέση (ΙΙ):

$\Sigma F_y = B - A_1' - A_2'$ (2)



Έχουμε: $A_1' = \rho_1 g S(y_1 + y) = \rho_1 g S y_1 + \rho_1 g S y$ και

$A_2' = \rho_2 g S(y_2 - y) = \rho_2 g S y_2 - \rho_2 g S y$

Με αντικατάσταση στη (2) προκύπτει

$\Sigma F_y = B - \rho_1 g S y_1 - \rho_1 g S y - \rho_2 g S y_2 + \rho_2 g S y \xrightarrow{(1)}$

$\Sigma F_y = -(\rho_1 - \rho_2) g S y = -D_y$ με $D = (\rho_1 - \rho_2) g S$ (3)

Άρα ο κύλινδρος θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (4)

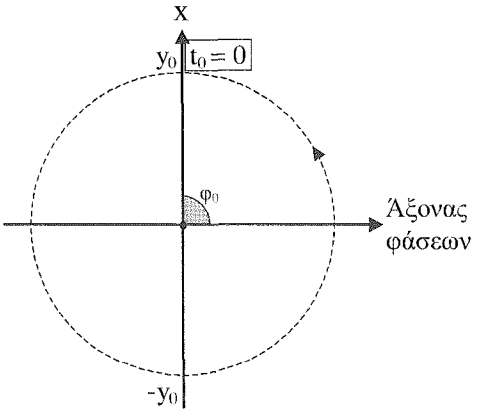
Είναι $m = \rho V = \rho S H$ (5)

Από (3), (4), (5) προκύπτει: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho S H}{(\rho_1 - \rho_2) S g}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \frac{H}{g}} \rightarrow$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7{,}2 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}{(13{,}6 - 1) \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} \cdot \frac{25{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}} \rightarrow T = 2\pi \frac{12}{100}\ \text{s} \rightarrow T = 0{,}24\pi\ \text{s}$$

β. Η εξίσωση της απομάκρυνσης y σε συνάρτηση με το χρόνο είναι της μορφής:

$y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (6)



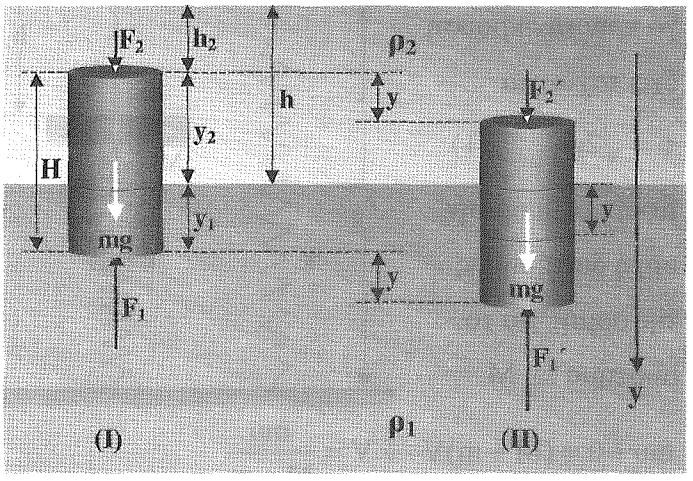
Για $t = 0$ είναι $y = +1\ \text{cm} = y_0 = 10^{-2}$ m.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}24\pi\ \text{s}} \rightarrow \omega = \frac{25}{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

Άρα η (6) γράφεται $y = 10^{-2} \eta\mu(\frac{25}{3} t + \frac{\pi}{2})$ (SI)

Παρατήρηση

Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης του ερωτήματος (α) είναι ο ακόλουθος:



Ο κύλινδρος δέχεται από το υγρό πυκνότητας ρ_2 κατακόρυφη δύναμη F_2 η οποία, σύμφωνα με το νόμο της υδροστατικής και την αρχή του Pascal, έχει μέτρο

$$F_2 = P_0S + \rho_2 gSh_2 \qquad (1)$$

όπου P_0 η εξωτερική (ατμοσφαιρική) πίεση και S το εμβαδόν της βάσης του.

Ο κύλινδρος δέχεται και από το υγρό πυκνότητας ρ_1 κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F_1 = P_0S + \rho_2 gSh + \rho_1 gSy_1$ (2)

Στη θέση ισορροπίας (I) ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow mg + F_2 - F_1 = 0 \xrightarrow{(1),(2)} mg + P_0S + \rho_2 gSh_2 - P_0S - \rho_2 gSh - \rho_1 gSy_1 = 0 \rightarrow$$

$$mg + \rho_2 gSh_2 - \rho_2 gSh - \rho_1 gSy_1 = 0 \qquad (3)$$

Σε τυχαία απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας (θέση II) είναι

$$F_2' = P_0S + \rho_2 gS(h_2 + y) \qquad (4)$$

$$F_1' = P_0S + \rho_2 gSh + \rho_1 gS(y_1 + y) \qquad (5)$$

$$\Sigma F_y = mg + F_2' - F_1' \xrightarrow{(4),(5)}$$

$$\Sigma F_y = mg + P_0S + \rho_2 gS(h_2 + y) - P_0S - \rho_2 gSh - \rho_1 gS(y_1 + y) \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = mg + \rho_2 gSh_2 + \rho_2 gSy - \rho_2 gSh - \rho_1 gSy_1 - \rho_1 gSy \xrightarrow{(3)} \Sigma F_y = -(\rho_1 gS - \rho_2 gS)y \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = -D \cdot y \text{ με } D = (\rho_1 - \rho_2)gS \qquad (6)$$

Άρα ο κύλινδρος θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (7)

Είναι $m = \rho V \rightarrow m = \rho SH$ (8)

Από την (7) με τη βοήθεια των (6) και (8) προκύπτει: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho SH}{(\rho_1 - \rho_2)gS}} \rightarrow$

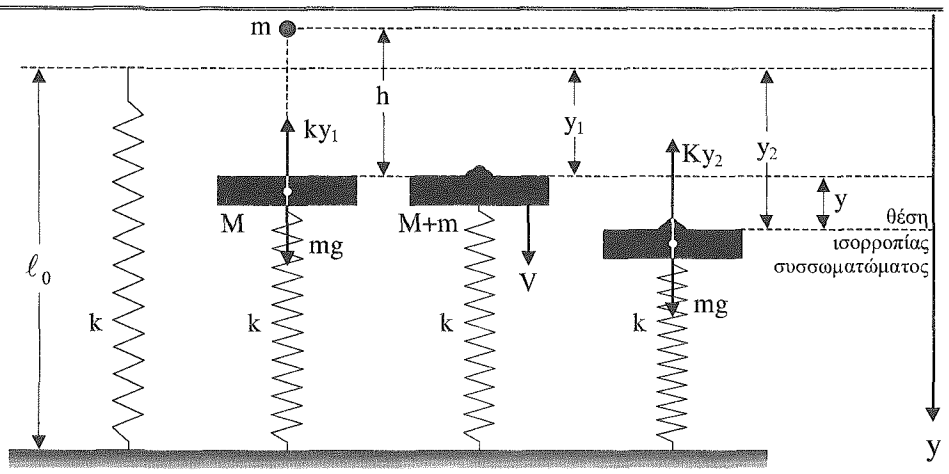
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \frac{H}{g}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{7{,}2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{(13{,}6 - 1) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \cdot \frac{25{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \rightarrow T = 0{,}24\pi \text{ s}$$

67.

α. Το σφαιρίδιο λίγο πριν την κρούση έχει ταχύτητα

$\upsilon = \sqrt{2gh}$ (1)

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα m, M.



$$m\upsilon + 0 = (M+m)V \rightarrow V = \frac{m\upsilon}{M+m} \qquad (2)$$

Αμέσως μετά την κρούση, η απόσταση τοῦ συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $y = y_2 - y_1 = \frac{(M+m)}{k} - \frac{Mg}{k} \rightarrow y = \frac{mg}{k}$ (3)

Το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει α.α.τ. γύρω από τη θέση ισορροπίας του. Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται. Έχουμε:

$$\frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}ky_0^2 \xrightarrow{(3),(2)} \frac{m^2g^2}{k} + \frac{m^2\upsilon^2}{(M+m)} = ky_0^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$y_0^2 = \frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{m^2 2gh}{k(M+m)} \rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{g(M+m)}} \rightarrow$$

$$y_0 = \frac{0{,}25\ \text{kg}\cdot 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{400\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}\sqrt{1 + \frac{2\times 0{,}7\ \text{m}\times 400\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}{10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 4\ \text{kg}}} \rightarrow y_0 = 25\cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

β. Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{(M+m)}} = \sqrt{\frac{400\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}{4\ \text{kg}}} \rightarrow \omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

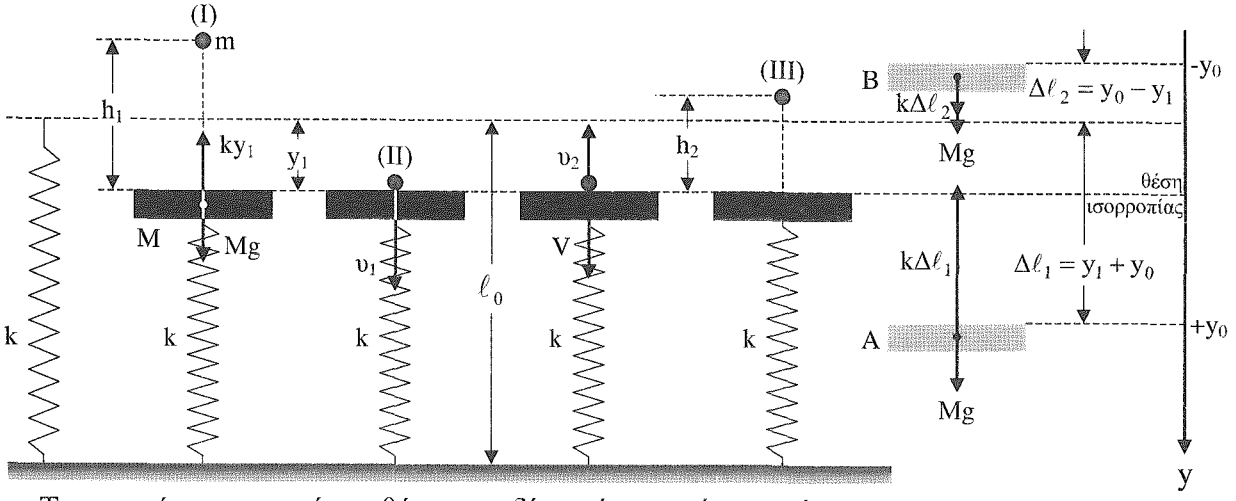
Η εξίσωση της απομάκρυνσης $y = f(t)$ έχει τη γενική μορφή $y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Η ταχύτητα της ταλάντωσης δίνεται από την εξίσωση $\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

Για $t = 0$ έχουμε $y = 0$ και $\upsilon < 0$. Άρα $\varphi_0 = \pi$ και η $y = f(t)$ γράφεται:

$y = 25\cdot 10^{-3}\,\eta\mu(10t + \pi)$ (SI)

68.



α. Τη στιγμή που η σφαίρα φθάνει στο δίσκο έχει ταχύτητα μέτρου

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \times 5\ \mathrm{m}} \rightarrow \upsilon_1 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη σφαίρα, αμέσως μετά την κρούση, για την κίνηση της από τη θέση (ΙΙ) μέχρι τη θέση (ΙΙΙ):

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - mgh_2 = 0 \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2\times 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \times 1{,}25\ \mathrm{m}} \rightarrow \upsilon_2 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (2)$$

Σύμφωνα με την ΑΔΟ για το σύστημα σφαίρα – δίσκος έχουμε:

$$m\upsilon_1 + 0 = -m\upsilon_2 + MV \rightarrow \frac{m(\upsilon_1+\upsilon_2)}{M} = \frac{1\ \mathrm{kg}\times(10+5)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\ \mathrm{kg}} \rightarrow V = 1{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (3)$$

β. Ταλάντωση θα εκτελέσει μόνον ο δίσκος γύρω από τη θέση ισορροπίας του Ο, με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1000\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}}{10\ \mathrm{kg}}} \rightarrow \omega = 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ (4)

Η ταχύτητα V είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης για το δίσκο, εφόσον αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του.

Ισχύει $V = \omega y_0 \rightarrow y_0 = \frac{V}{\omega} = \frac{1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} \rightarrow y_0 = 0{,}15\ \mathrm{m}$ (5)

γ. Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει παραμόρφωση:

$$y_1 = \frac{Mg}{k} \rightarrow y_1 = \frac{10\ \mathrm{kg}\times 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{1000\ \mathrm{Nm^{-1}}} \rightarrow y_1 = 0{,}1\ \mathrm{m}$$

Στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του δίσκου, οι αντίστοιχες παραμορφώσεις του ελατηρίου είναι:

$A: \Delta\ell_1 = y_1 + y_0 = 0{,}25\ \text{m}$ (συσπείρωση)

$B: \Delta\ell_2 = y_0 - y_1 = 0{,}05\ \text{m}$ (επιμήκυνση)

Για το ρυθμό μεταβολής της ορμής του δίσκου έχουμε, αντίστοιχα:

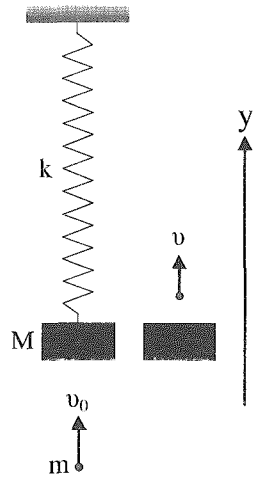
$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F_A = Mg - k\Delta\ell_1 = 10\ \text{kg} \times 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} - 1000\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \times 0{,}25\ \text{m} \rightarrow F_A = -150\ \text{N}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F_B = Mg + k\Delta\ell_2 = 10\ \text{kg} \times 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} + 1000\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \times 0{,}05\ \text{m} \rightarrow F_B = 150\ \text{N}$$

69.

Εφαρμόζουμε για το σύστημα m, M την ΑΔΟ:

$$m\upsilon_0 + 0 = m\upsilon + MV = m\lambda\upsilon_0 + MV \rightarrow V = \frac{m(1-\lambda)}{M}\cdot\upsilon_0 \qquad (1)$$



Η ταχύτητα V είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει ο κύβος με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (2)

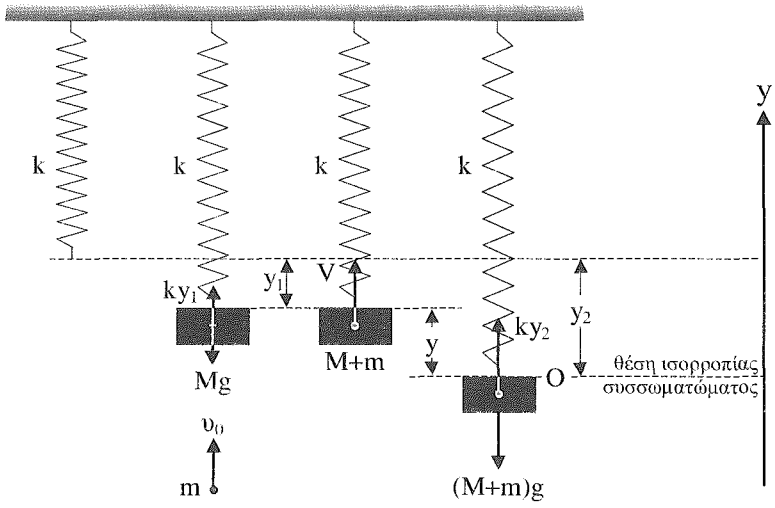
Θα ισχύει $V = \omega y_0$, άρα

$$y_0 = \frac{V}{\omega} \xrightarrow{(1)(2)} y_0 = (1-\lambda)\frac{m\upsilon_0}{M}\sqrt{\frac{M}{k}} \rightarrow y_0 = (1-\lambda)m\upsilon_0\sqrt{\frac{1}{kM}}$$

β. Στην περίπτωση αυτή, ταλάντωση θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα M + m, γύρω από τη θέση ισορροπίας του O.

Εφαρμόζουμε για την πλαστική κρούση την ΑΔΟ.

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση απέχει από τη θέση ισορροπίας του:



$$y = y_2 - y_1 = \frac{(M+m)g}{k} - \frac{Mg}{k} \rightarrow y = \frac{mg}{k} \qquad (2)$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται. Έτσι έχουμε

$$\frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}ky_0^2 \xrightarrow{(1)(2)} \frac{m^2g^2}{k} + \frac{m^2\upsilon_0^2}{M+m} = ky_0^2 \rightarrow$$

$$y_0^2 = \frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{m^2\upsilon_0^2}{k(M+m)} \rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{k\upsilon_0^2}{(M+m)g^2}}$$

70.

Α. Η ταχύτητα που θα αποκτήσει η μάζα m_2 αμέσως μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, αφού βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της.

Η μάζα m_1 έχει πριν την κρούση ταχύτητα υ_1 που βρίσκεται με εφαρμογή του ΘΜΚΕ για κίνησή της από τη θέση (Ι) μέχρι τη θέση (ΙΙ).

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 - m_1 g\eta\mu\varphi \cdot s = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gs\eta\mu\varphi} \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\left(5\frac{m}{s}\right)^2 - 2\times 10\frac{m}{s^2}\times 0{,}9\ m\times\frac{1}{2}} \rightarrow \upsilon_1 = 4\frac{m}{s}$$

Η μάζα m_2 αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα:

$$\upsilon_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} = \frac{2\times 1\ kg\times 4\ m\cdot s^{-1}}{4\ kg} \rightarrow \upsilon_2 = 2\frac{m}{s}$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{300\ N\cdot m^{-1}}{3\ kg}} \rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

Ισχύει: $\upsilon_2 = \omega x_0$ και άρα $x_0 = \frac{\upsilon_2}{\omega} = \frac{2\ m\cdot s^{-1}}{10\ s^{-1}} \rightarrow x_0 = 0{,}2\ m$

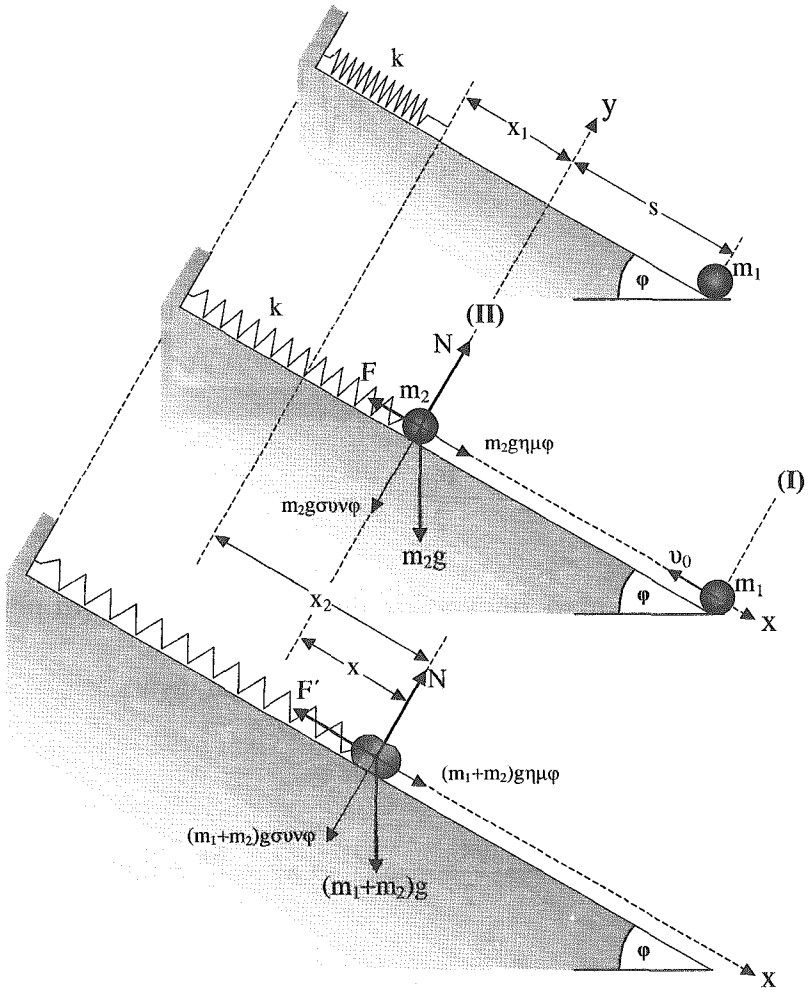
Β.α. Εφαρμόζουμε ΑΔΟ για το σύστημα m_1, m_2 και έχουμε:

$$m_1\upsilon_1 + 0 = (m_1+m_2)V \rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} = \frac{1\ kg\times 4\ m\cdot s^{-1}}{4\ kg} \rightarrow V = 1\frac{m}{s}$$

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα $V = 1\frac{m}{s}$ και η απόστασή του από τη θέση ισορροπίας του Ο είναι

$$x = x_2 - x_1 = \frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi}{k} - \frac{m_2 g\eta\mu\varphi}{k} = \frac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k} \rightarrow$$

$$x = \frac{1\ kg\times 10\ m\cdot s^{-2}\times 0{,}5}{300\ N\cdot m^{-1}} \rightarrow x = \frac{1}{60}\ m$$



Επειδή η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται, έχουμε

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2=\frac{1}{2}kx_0^2 \rightarrow x_0=\sqrt{x^2+\frac{(m_1+m_2)V^2}{k}} \rightarrow$$

$$x_0=\sqrt{\frac{1}{3600\ m^2}+\frac{4\ kg\times(1\ m\cdot s^{-1})^2}{300\ N\cdot m^{-1}}} \rightarrow x_0=\sqrt{\frac{49}{3600}}\ m \rightarrow x_0=\frac{7}{60}\ m$$

β. Το ελατήριο έχει τη μέγιστη παραμόρφωσή του όταν το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση $x=-x_0$, δηλαδή όταν το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell=x_2+x_0$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Είναι:

$$\Delta\ell=x_2+x_0=\frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi}{k}+x_0 \rightarrow$$

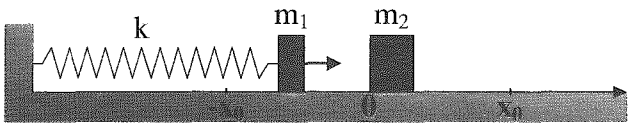
$$\Delta\ell=\frac{4\ kg\times 10\ m\cdot s^{-2}\times 0{,}5}{300\ N\cdot m^{-1}}+\frac{7}{60}\ m=\left(\frac{1}{15}+\frac{7}{60}\right)m \rightarrow \Delta\ell=\frac{11}{60}\ m$$

71.

Το σώμα Σ_1 εκτελεί α.α.τ. με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{400\ N \cdot m^{-1}}{1\ kg}} = 20\ \frac{rad}{s}$ (1)

και με μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_0 = \omega x_0$ (2)

α. Ελαστική κρούση:



Αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_1 θα αποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon_0' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0 = \frac{(1-3)\ kg}{4\ kg} \cdot \upsilon_0 \rightarrow \upsilon_0' = -\frac{\upsilon_0}{2}$$

Επομένως, το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου $\frac{\upsilon_0}{2}$ κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x. Δηλαδή για τα μέτρα θα ισχύει

$$\upsilon_0' = \frac{\upsilon_0}{2} \quad (3)$$

Είναι $\upsilon_0' = \omega x_0' \xrightarrow{(3)} \frac{\upsilon_0}{2} = \omega x_0' \xrightarrow{(2)} \frac{\omega x_0}{2} = \omega x_0' \rightarrow x_0' = \frac{x_0}{2} = 0{,}05\ m$

β. Πλαστική κρούση:

Το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει ταλάντωση με κυκλική συχνότητα

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{400\ N \cdot m^{-1}}{4\ kg}} \rightarrow \omega' = 10\ \frac{rad}{s} \quad (4)$$

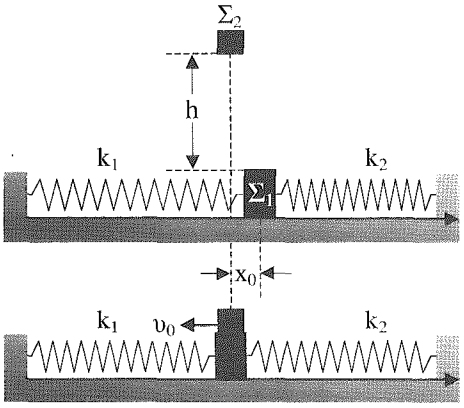
Η ταχύτητα υ_0'' που αποκτά το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής του και είναι $\upsilon_0'' = \omega' x_0''$ (5)

Εφαρμόζουμε για την κρούση την ΑΔΟ

$$m_1\upsilon_0 + 0 = (m_1 + m_2)\upsilon_0'' \rightarrow \upsilon_0'' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0 \rightarrow \upsilon_0'' = \frac{1\ kg}{4\ kg} \cdot \upsilon_0 \rightarrow$$

$$\upsilon_0'' = \frac{\upsilon_0}{4} \xrightarrow{(5),(2)} \omega' x_0'' = \frac{\omega x_0}{4} \rightarrow x_0'' = \frac{\omega}{4\omega'} x_0 \xrightarrow{(1),(4)} x_0'' = \frac{20\ s^{-1}}{4 \cdot 10\ s^{-1}} \times 0{,}1\ m \rightarrow x_0'' = 0{,}05\ m$$

72.



α. Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 είναι $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k_1+k_2}}$ ενώ ο χρόνος πτώσης του σώματος Σ_2 κατά ύψος h είναι $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Για να γίνει συνάντηση στη θέση ισορροπίας θα πρέπει:

$$t_1 = \frac{T}{4} \rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1+k_2}} \rightarrow \frac{2h}{g} = \frac{\pi^2 m_1}{4(k_1+k_2)} \rightarrow h = \frac{g\pi^2 m_1}{8(k_1+k_2)} \rightarrow$$

$$h = \frac{10\ m\cdot s^{-2}\times 10\times 1\ kg}{8\times 200\ N\cdot m^{-1}} \rightarrow h = \frac{1}{16}\ m$$

β. Για την πλαστική κρούσηςτων σωμάτων Σ_1 και Σ_2 εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στον άξονα x:

$$-m_1\upsilon_0 + 0 = (m_1+m_2)V_0 \rightarrow V_0 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_0 \qquad (1)$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση, θα είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει, αφού βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του.

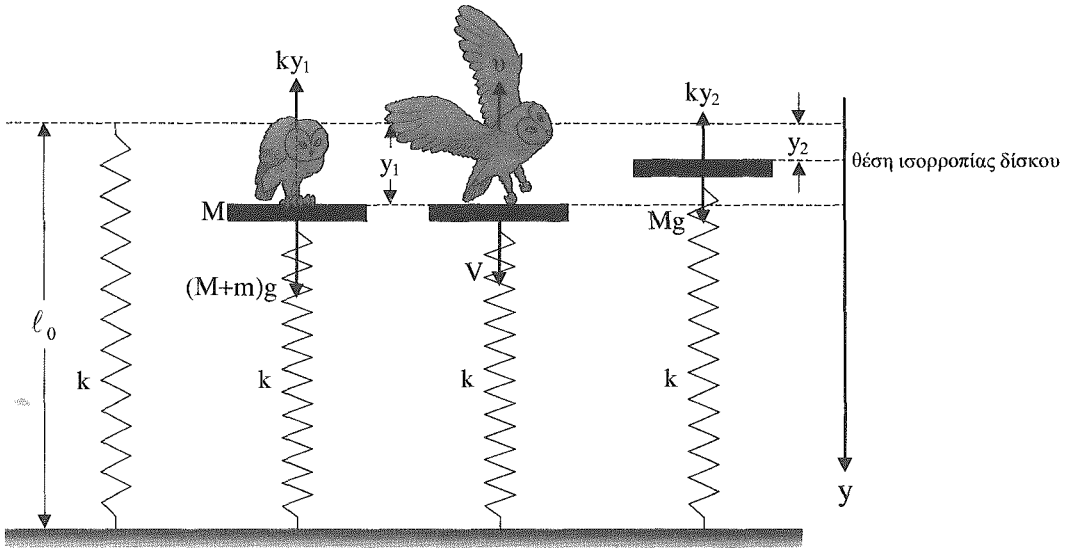
Για τα μέτρα των ταχυτήτων θα έχουμε $V_0 = \omega' x_0'$ και $\upsilon_0 = \omega x_0$.

Από την (1): $\omega' x_0' = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\omega x_0 \rightarrow \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1+m_2}}\cdot x_0' = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1}}\cdot x_0 \rightarrow$

$$x_0' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}\cdot x_0 \rightarrow x_0' = \sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\cdot x_0 \rightarrow$$

$$x_0' = \sqrt{\frac{1\ kg}{1{,}44\ kg}}\cdot 0{,}24\ m \rightarrow x_0' = 0{,}2\ m$$

73.



α. Για το σύστημα πουλί - δίσκος ισχύει η ΑΔΟ:

$$0 = -m\upsilon + MV \rightarrow V = \frac{m}{M}\upsilon = \frac{0{,}2\ \text{kg}}{1\ \text{kg}} \times 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \rightarrow V = 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (1)$$

β. Μετά την εκτίναξη του πουλιού, ο δίσκος θα εκτελέσει α.α.τ γύρω από τη θέση ισορροπίας του Ο από την οποία, αμέσως μετά την εκτίναξη, απέχει:

$$y = y_1 - y_2 \rightarrow y = \frac{(M+m)g}{k} - \frac{Mg}{k} \rightarrow y = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}2\ \text{kg}\cdot 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{200\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}} \rightarrow y = 0{,}01\ \text{m} \qquad (2)$$

Η ενέργεια ταλάντωσης του δίσκου διατηρείται:

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}ky_0^2 \rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{MV^2}{k} + y^2} \xrightarrow{(1)\,(2)}$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{1\ \text{kg} \times (0{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{200\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}} + 10^{-4}\ \text{m}^2} = \sqrt{9\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} \rightarrow y_0 = 0{,}03\ \text{m}$$

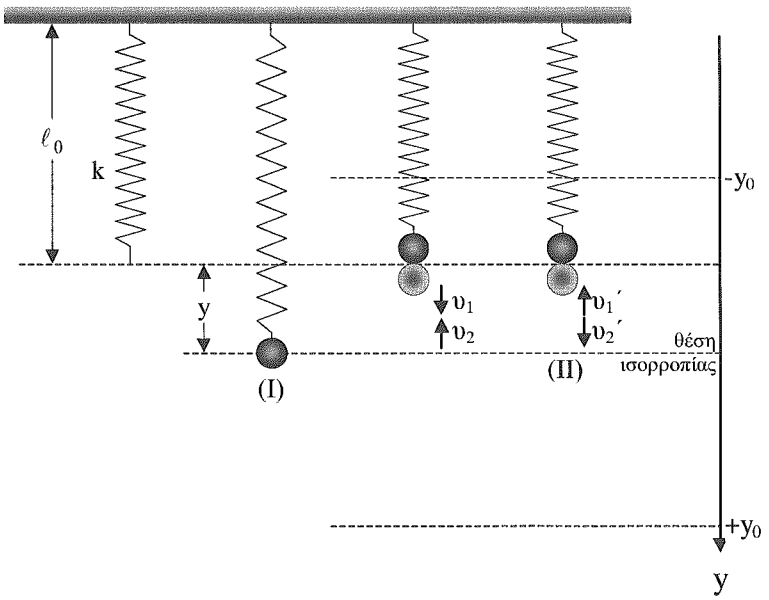
γ. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_{\Delta,\,\max} = \frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2} \times 200\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \times (3\cdot 10^{-2}\ \text{m})^2 \rightarrow E_{\Delta,\,\max} = 0{,}09\ \text{J}$$

δ. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι $E_{\varepsilon\lambda,\,\max} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$ όπου

$$\Delta\ell = \frac{Mg}{k} + y_0 = 0{,}08\ \text{m},\ \text{άρα}\ E_{\varepsilon\lambda,\,\max} = \frac{1}{2}\cdot 200\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \times (8\cdot 10^{-2}\ \text{m})^2 \rightarrow E_{\varepsilon\lambda,\,\max} = 0{,}64\ \text{J}$$

74.



Το σώμα μάζας m ισορροπεί στη θέση (I) παραμορφώνοντας το ελατήριο κατά

$$y = \frac{mg}{k} = \frac{0,2 \cdot 10}{20} m \rightarrow y = 0,1 \text{ m} \qquad (1)$$

Δίνεται ότι το πλάτος της ταλάντωσης την οποία εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι $y_0 = 0,2$ m. Τη στιγμή της κρούσης με το Σ_2, το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη θέση $y = -0,1$ m, δηλαδή πάνω από τη θέση ισορροπίας του κατά $y_1 = 0,1$ m. Με τη βοήθεια της σχέσης (1) συμπεραίνουμε ότι η κρούση γίνεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Στη θέση αυτή το σώμα Σ_1 κατέρχεται άρα έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = \omega\sqrt{y_0^2 - y^2}$ όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{0,2 \text{ kg}}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Άρα: $\upsilon_1 = 10 \text{ s}^{-1} \times \sqrt{(0,2 \text{ m})^2 - (0,1 \text{ m})^2} \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

α. Η κρούση είναι ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες. Συνεπώς θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι το Σ_1 θα έχει μετά την κρούση ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και το Σ_2 ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2' = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, με φορά που φαίνεται στο σχήμα.

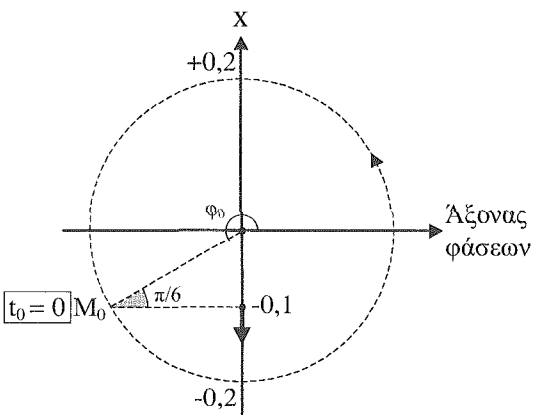
Το Σ_1 θα εκτελέσει ταλάντωση με την ίδια περίοδο και το ίδιο πλάτος, αφού το μέτρο της ταχύτητάς του στην ίδια θέση είναι ίδιο και μετά την κρούση, όπως προκύπτει από τις σχέσεις:

$$\frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}ky_0^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}m(\upsilon_1')^2 = \frac{1}{2}k(y_0')^2$$

που εκφράζουν τη διατήρηση της ενέργειας για τις δύο ταλαντώσεις του Σ_1 (πριν και μετά την κρούση). Συμπεραίνουμε ότι $y_0 = y_0'$.

Η εξίσωση κίνησης, μετά την κρούση, για το Σ_1 θα είναι της μορφής $y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Είναι $y_0 = 0{,}2\ \text{m},\ \ \omega = 10\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$



Υπολογισμός της αρχικής φάσης φ_0.

Αμέσως μετά την κρούση, τη στιγμή t = 0, έχουμε: $y = -0{,}1\ \text{m}$ και $\upsilon_1' < 0$.

Από τον κύκλο αναφοράς βρίσκουμε $\varphi_0 = \dfrac{7\pi}{6}$

Έτσι η εξίσωση κίνησης για το Σ_1 είναι:

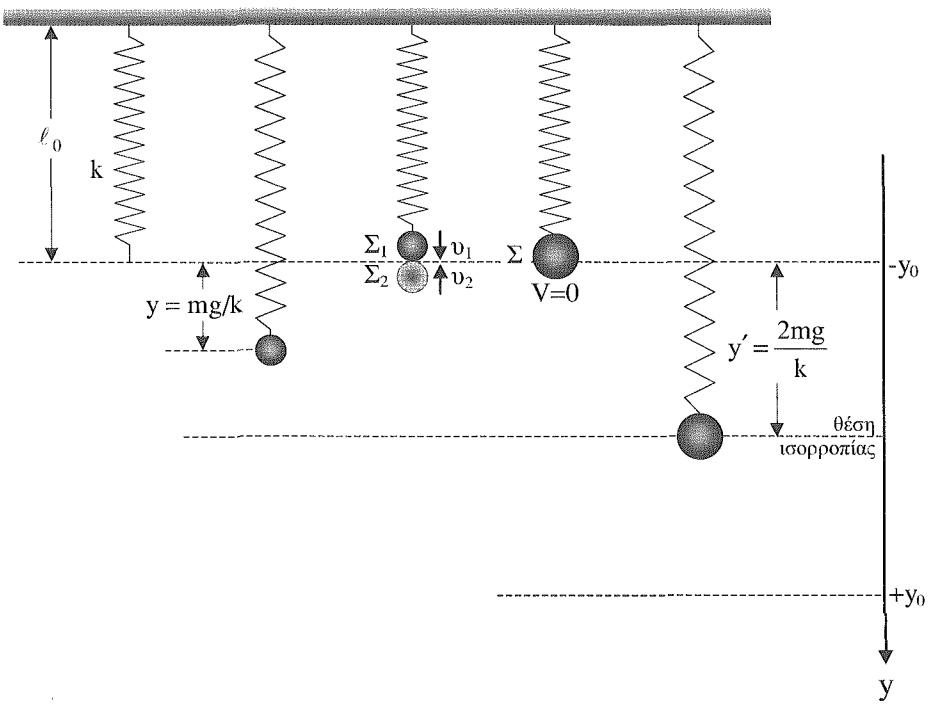
$$y = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{7\pi}{6}\right)(\text{SI})$$

Το Σ_2 θα εκτελέσει κατακόρυφη προς τα κάτω βολή.

Για t = 0 έχει $y_{02} = -0{,}1\ \text{m}$ ($y = 0$, η θέση ισορροπίας του Σ_1) και $\upsilon_{02} = \sqrt{3}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η εξίσωση κίνησης για το Σ_2 είναι $y = y_{02} + \upsilon_{02}t + \dfrac{1}{2}gt^2 \rightarrow y = -0{,}1 + \sqrt{3}t + 5t^2$ (SI)

β.



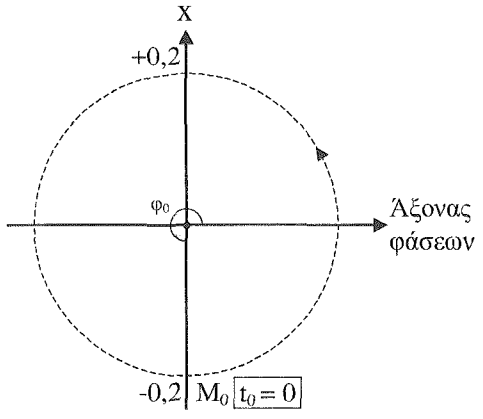
Όταν η κρούση είναι μετωπική και πλαστική έχουμε $m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = 2mV \rightarrow 0 = 2mV \rightarrow$ $V = 0$.

Το συσσωμάτωμα Σ ηρεμεί στιγμιαία και απέχει από τη θέση ισορροπίας του $y' = \frac{2mg}{k} \rightarrow$

$y' = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10}{20} m \rightarrow y' = 0{,}2$ m.

Επειδή η θέση της κρούσης αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος του ελατηρίου, το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα είναι

$y'_0 = y' = 0{,}2$ m.



Για $t = 0$ έχουμε $y = -y'_0$ και $V = 0$.

Η εξίσωση κίνησης είναι: $y = y'_0 \eta\mu(\omega' t + \varphi'_0)$

Αλλά $\omega' = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}4}} \frac{rad}{s} \rightarrow \omega' = 5\sqrt{2} \frac{rad}{s}$

Από τον κύκλο αναφοράς βρίσκουμε $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

Άρα: $y = 0{,}2\eta\mu\left(5\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (SI)

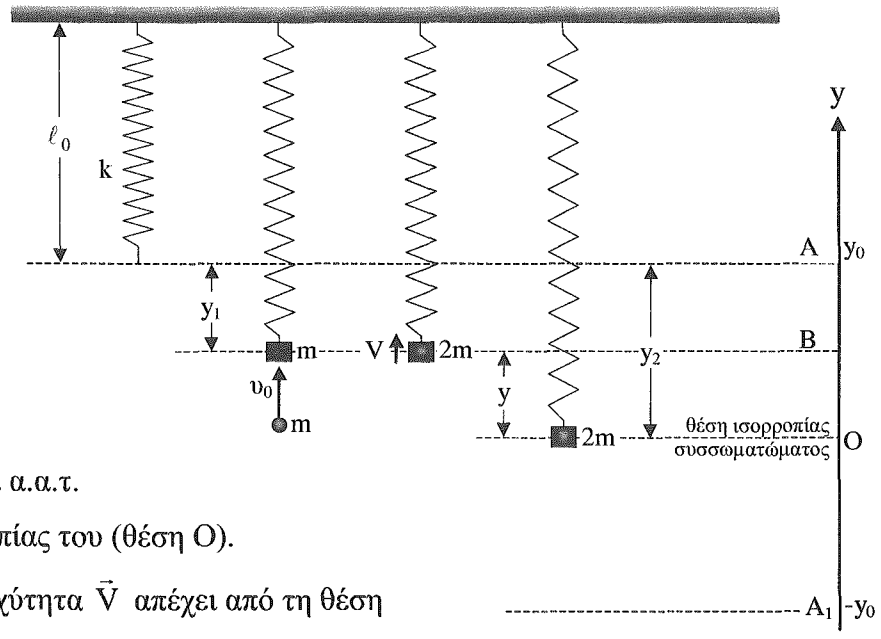
75.

α. Για το σύστημα βλήμα-κύβος, το οποίο θεωρούμε μονωμένο, ισχύει η ΑΔΟ

$\vec{p}_{\text{ολ, πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ, μετά}} \rightarrow$

$m\upsilon_0 + 0 = 2mV \rightarrow$

$V = \frac{\upsilon_0}{2} \rightarrow V = \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{m}{s}$



Το συσσωμάτωμα εκτελεί α.α.τ. γύρω από τη θέση ισορροπίας του (θέση Ο).

Τη στιγμή που αποκτά ταχύτητα $\vec{V}$ απέχει από τη θέση ισορροπίας του κατά

$$y = y_2 - y_1 = \frac{2mg}{k} - \frac{mg}{k} \rightarrow y = \frac{mg}{k} \rightarrow y = \frac{1\,kg \times 10\,m \cdot s^{-2}}{100N \cdot m^{-1}} \rightarrow y = 0{,}1\,m$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται. Συνεπώς

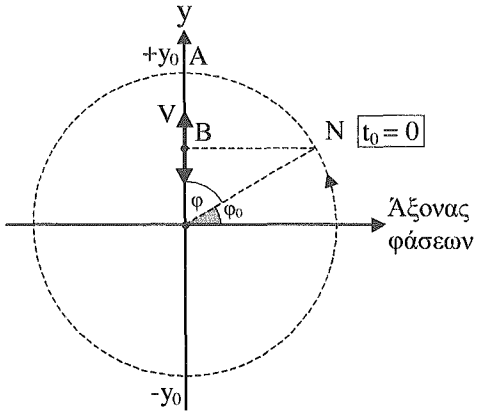
$$E_\Delta + E_K = E_{\text{ολ}} \rightarrow \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}\cdot 2mV^2 = \frac{1}{2}ky_0^2 \rightarrow y_0 = \sqrt{y^2 + \frac{2mV^2}{k}} \rightarrow$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $y_0 = 0{,}2$ m.

Βλέπουμε ότι το πάνω άκρο της ταλάντωσης του συσσωματώματος συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

β. Θα βρούμε το χρόνο μετάβασης στο ακρότατο της κίνησης χρησιμοποιώντας τον κύκλο αναφοράς.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση $B(\frac{y_0}{2})$ και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. Από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.



Ο χρόνος μετάβασης του συσσωματώματος από τη θέση $\frac{+y_0}{2}$ στη θέση $+y_0$ όπως προκύπτει από το σχήμα είναι

$t_1 = \frac{\varphi}{\omega}$ όπου $\varphi = \frac{\pi}{3}$ και $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \sqrt{\frac{100\ N \cdot m^{-1}}{2\ kg}} \rightarrow \omega = 5\sqrt{2}\ \frac{rad}{s}$

Άρα $t_1 = \frac{\pi}{15\sqrt{2}}\ s \rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{2}}{30}\pi\ s$

γ. i) Το συσσωμάτωμα σε χρονικό διάστημα t_1 μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά $h = \frac{y_0}{2}$.

Άρα $W_B = -2mg \cdot \frac{y_0}{2} \rightarrow W_B = -2 \times 1\ kg \times 10\ m \cdot s^{-2} \times \frac{0,2\ m}{2} \rightarrow W_B = -2\ J$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση Β στη θέση Α.

$\frac{1}{2} \cdot 2mV^2 + W_B + W_{F\varepsilon\lambda} = 0 \rightarrow W_{F\varepsilon\lambda} = -W_B - mV^2 \rightarrow$

$W_{F\varepsilon\lambda} = 2\ J - 1\ kg \times \frac{6}{4} m^2 s^{-2} \rightarrow W_{F\varepsilon\lambda} = 0,5\ J$

ii) Για την ώθηση του βάρους έχουμε:

$\Omega_B = -2mgt_1 \rightarrow \Omega_B = -2 \times 1\ kg \times 10\ m \cdot s^{-2} \times \frac{\sqrt{2}}{30}\pi\ s \rightarrow \Omega_B = -2\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\ N \cdot s$

iii)Εφαρμόζουμε Θ.Ω.Ο. για το χρονικό διάστημα t_1, για το συσσωμάτωμα.

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} + \vec{\Omega}_B + \vec{\Omega}_{F\varepsilon\lambda} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow 2mV + \Omega_B + \Omega_{F\varepsilon\lambda} = 0 \rightarrow$

$\Omega_{F\varepsilon\lambda} = -\Omega_B - 2mV = -\left(-\frac{2\sqrt{2}\pi}{3} N \cdot s\right) - 2 \times 1\ kg \times \frac{\sqrt{6}}{2}\ m \cdot s^{-1} \rightarrow$

$\Omega_{F\varepsilon\lambda} = \sqrt{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) N \cdot s$

δ. i) $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{\Sigma F} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -2mg + ky_1 = -2mg + k\frac{mg}{k} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -mg \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -10\ N$

ii) <u>Θέση Α:</u> Το ελατήριο δεν είναι παραμορφωμένο. Άρα

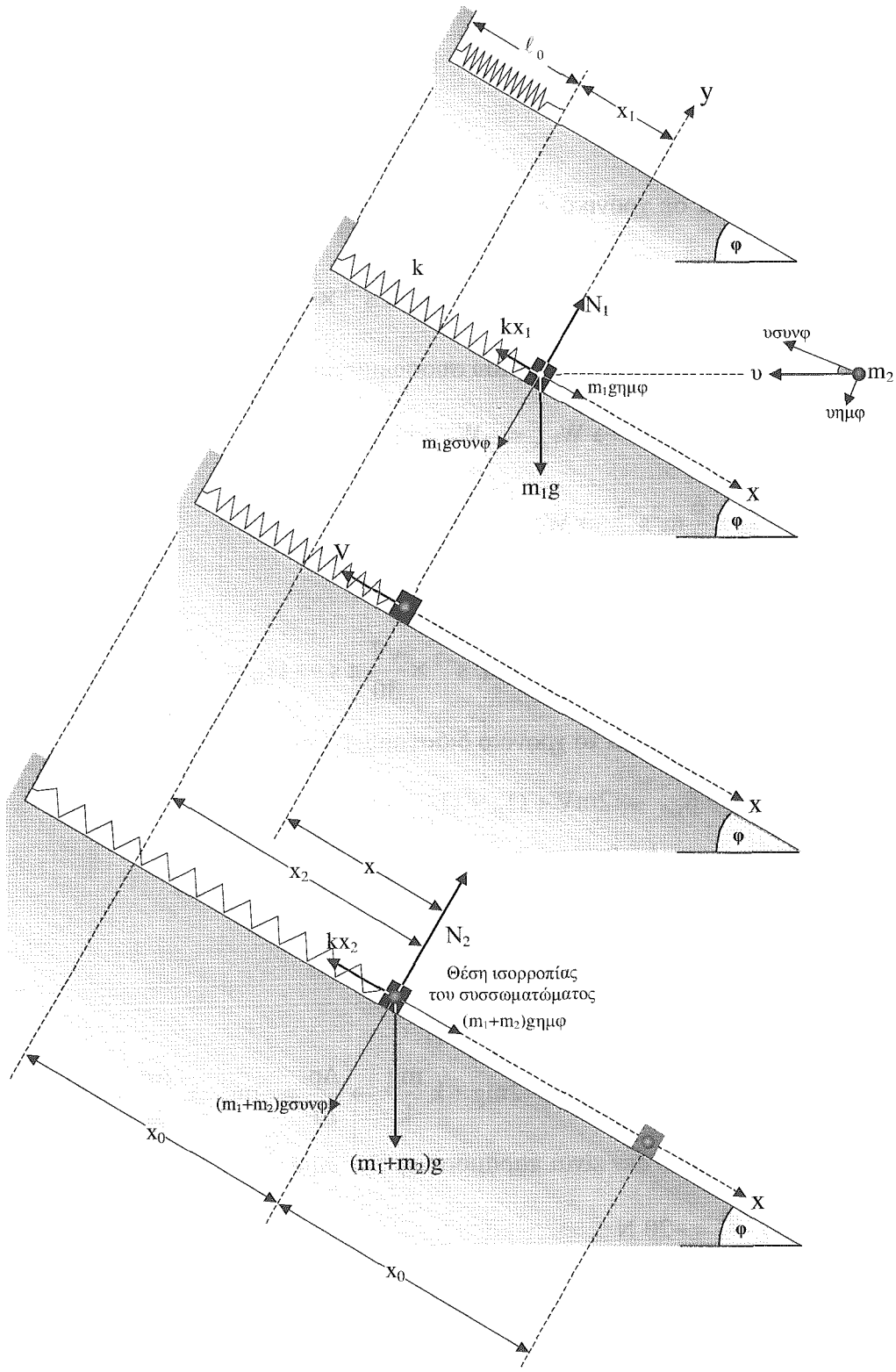
$\frac{\Delta p}{\Delta t} = -2mg \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -20\ N$

<u>Θέση Α1:</u> Το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $2y_0$. Άρα έχουμε:

$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -2mg + k \cdot 2y_0 \rightarrow$

$\frac{\Delta p}{\Delta t} = -2 \times 1\ kg \times 10\ m \cdot s^{-2} + 100\ N \cdot m^{-1} \times 2 \times 0,2\ m \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 20\ N$

76.


ℓ0
x1
y
φ
k
N1
kx1
υσυνφ
υ
m2
m1gημφ
υημφ
m1gσυνφ
m1g
x
φ
V
x
φ
x2
x
N2
kx2
Θέση ισορροπίας
του συσσωματώματος
(m1+m2)gημφ
(m1+m2)gσυνφ
x0
(m1+m2)g
x
φ
x0

α. Για το σύστημα βλήμα-σώμα, το οποίο θεωρούμε μονωμένο κατά τη x-διεύθυνση, ισχύει η

ΑΔΟ: $m_2 \upsilon \sigma \upsilon \nu \varphi + 0 = (m_1 + m_2)V \rightarrow V = \dfrac{\upsilon \sigma \upsilon \nu \varphi}{2} \rightarrow V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{m}{s}$

Το συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση, απέχει από τη θέση ισορροπίας του κατά

$$x = \frac{(m_1 + m_2) g \eta \mu \varphi}{k} - \frac{m_1 g \eta \mu \varphi}{k} \rightarrow x = \frac{m_2 g \eta \mu \varphi}{k} = \frac{2\ kg \times 10\ m \cdot s^{-2} \times 0{,}5}{100\ N \cdot m^{-1}} \rightarrow x = 0{,}1\ m$$

και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση αυτή.

Η ενέργεια ταλάντωσης διατηρείται. Άρα ισχύει:

$E_\Delta + E_K = E_{ολ} \rightarrow$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \rightarrow x_0 = \sqrt{x^2 + \frac{(m_1 + m_2)}{k}V^2}$$

$$x_0 = \sqrt{10^{-2} m^2 + 4\ kg \times \frac{3}{4} m^2 \cdot s^2 \cdot \frac{1}{100\ N \cdot m^{-1}}} \rightarrow x_0 = 0{,}2\ m$$

Βλέπουμε ότι το πάνω άκρο της ταλάντωσης του συσσωματώματος συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

β. Η εξίσωση της κίνησης του συσσωματώματος θα είναι της μορφής $x = x_0 \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ (1)

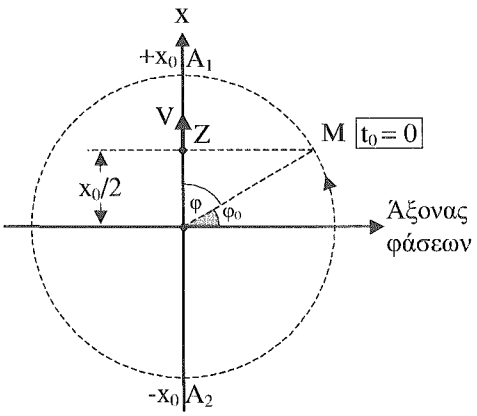
Για $t_0 = 0$ είναι $x = +0{,}1\ m$, δηλ. $x = +\dfrac{x_0}{2}$ και $V > 0$

Από τον κύκλο αναφοράς έχουμε $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{100\ N \cdot m^{-1}}{4\ kg}} \rightarrow \omega = 5\ \frac{rad}{s}$$

Η εξίσωση κίνησης (1) γράφεται $x = 0{,}2 \eta \mu\left(5t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (SI)



γ. Ο χρόνος μετάβασης από το $Z(+\frac{x_0}{2})$ στο $A_1(+x_0)$ είναι

$$t_1 = \frac{\varphi}{\omega} \rightarrow t_1 = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_0}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{5\ s^{-1}} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{15}\ s.$$

δ. <u>Θέση Ζ:</u> Έχουμε $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x = kx_1 - (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi \rightarrow$

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{x=x_1} = 100\ N \cdot m^{-1} \times 0{,}1\ m - 4\ kg \times 10\ m \cdot s^{-2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{x=x_1} = -10\ N$$

<u>Θέση Α1:</u> Το ελατήριο δεν είναι παραμορφωμένο, οπότε $F_{\varepsilon\lambda} = 0$ και

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x = -(m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -4\ kg \times 10\ m \cdot s^{-2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{x=+x_0} = -20\ N$$

<u>Θέση Α2:</u> Το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $2x_0$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x = k \cdot 2x_0 - (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi \rightarrow$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = 100\ N \cdot m^{-1} \times 2 \times 0{,}2\ m - 4\ kg \times 10\ m \cdot s^{-2} \times \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{x=-x_0} = 20\ N$$

77.

α. Αν x_1 η επιμήκυνση του ελατηρίου τη στιγμή που κόβεται το νήμα θα ισχύει:

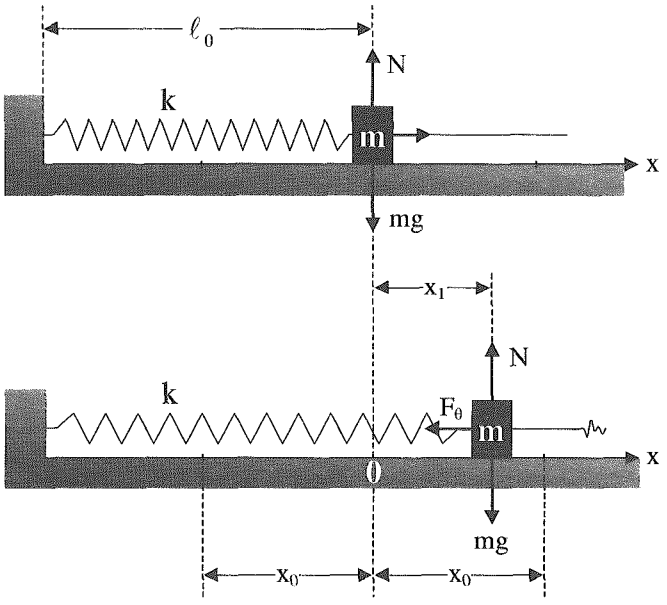
$F_\Theta = 80 + 200x_1 = 120 \rightarrow x_1 = 0{,}2\ \text{m}$

Η δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο ελατήριο θα είναι:

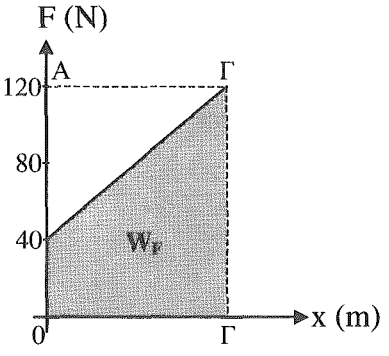
$E_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx_1^2 \rightarrow$

$E_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} \times 250\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \times 4\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2 \rightarrow$

$E_{\varepsilon\lambda} = 0{,}5\ \text{J}$



β. Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει ο κύβος είναι ίση με την ενέργεια που μεταφέρθηκε σ' αυτόν μέσω του έργου της F μέχρι να κοπεί το νήμα.



$E_{o\lambda} = W_F = E_{0AB\Gamma} = \frac{(120+80)}{2}\text{N} \times 0{,}2\text{m} \rightarrow E_{o\lambda} = 20\ \text{J} \quad (1)$

Το πλάτος της ταλάντωσης καθορίζεται από την ολική ενέργεια. Θα έχουμε:

$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}kx_0^2$ και $x_0 = \sqrt{\frac{2E_{o\lambda}}{k}}$

Λόγω της (1) προκύπτει: $x_0 = \sqrt{\frac{2 \times 20\ \text{J}}{250\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}} \rightarrow x_0 = 0{,}4\ \text{m}.$

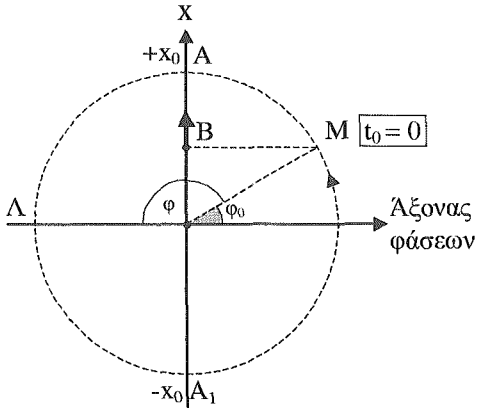
γ. Τη στιγμή που κόβεται το νήμα ο κύβος έχει κινητική ενέργεια

$E_K = E_{o\lambda} - E_{\varepsilon\lambda} = 20\ \text{J} - 0{,}5\ \text{J} = 19{,}5\ \text{J}$

και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση.

Για $t_0 = 0$ είναι $x_1 = 0{,}2\ \text{m}$ ή $x_1 = +\frac{x_0}{2}$ και $\upsilon > 0$.

Από τον κύκλο αναφοράς βρίσκουμε $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.



Ο χρόνος t_1 για να περάσει ο κύβος από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά θα είναι

$t_1 = \frac{\varphi}{\omega}$.

Έχουμε: $\varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ και $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{250\ N \cdot m^{-1}}{10 \cdot kg}} = 5\ \frac{rad}{s}$ και ο χρόνος

$t_1 = \frac{\frac{5\pi}{6}}{5}\ s \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6} s$

78.

α. Η περίοδος του εκκρεμούς, όταν ταλαντώνεται στο ύψος h θα είναι:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\frac{g_0}{4}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4\ell}{g_0}} = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_0}} \rightarrow T = 2T_0$ όπου $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_0}}$ η περίοδος

του εκκρεμούς όταν ταλαντώνεται στην επιφάνεια της Γης.

β. Για να γίνει $T = T_0$ θα πρέπει το μήκος του νήματος να γίνει $\ell_1 = \frac{\ell}{4}$ αφού στο ύψος h είναι $g = \frac{g_0}{4}$.

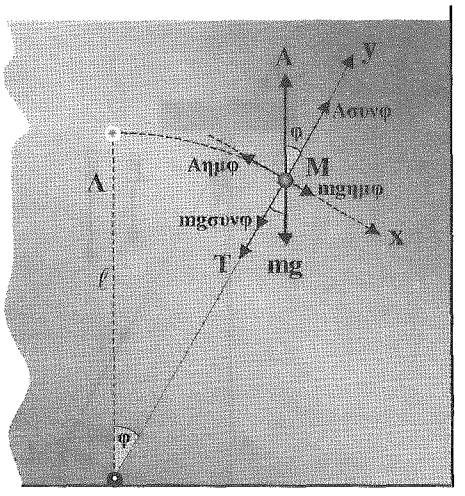
Η μεταβολή του μήκους του νήματος θα είναι $\Delta\ell = \ell_1 - \ell = \frac{\ell}{4} - \ell = \frac{-3\ell}{4}$

Η επί τοις % μεταβολή είναι $x\% = \frac{\Delta\ell}{\ell} \cdot 100\% \rightarrow x\% = \frac{\frac{-3\ell}{4}}{\ell} \cdot 100\% \rightarrow x\% = -75\%$

79.

α. Απομακρύνουμε το σφαιρίδιο από τη θέση ισορροπίας του, ώστε το νήμα να σχηματίσει με την κατακόρυφη μικρή γωνία φ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi \cong \varphi = \frac{x}{\ell}$

[φ σε rad], όπου x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο.



Στη θέση M για το σφαιρίδιο ισχύει

$$\Sigma F_x = (mg - A)\cdot \eta\mu\varphi = (mg - A)\cdot \frac{x}{\ell}$$

Είναι όμως $m = \rho_\xi \cdot V$, $A = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V$ και επομένως

$$\Sigma F_x = (\rho_\xi g - \rho_\upsilon g)\frac{V}{\ell}x = -(\rho_\upsilon - \rho_\xi)\cdot g\frac{V}{\ell}x = -Dx \qquad (1)$$

$$\text{όπου } D = (\rho_\upsilon - \rho_\xi)g\cdot\frac{V}{\ell} \qquad (2)$$

Εφόσον για τη x-διεύθυνση ισχύει η (1), το σφαιρίδιο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Η περίοδος της ταλάντωσης του σφαιριδίου δίνεται από την εξίσωση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ και λόγω της (2) θα έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_\xi \cdot V}{(\rho_\upsilon - \rho_\xi)g\cdot\frac{V}{\ell}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_\xi}{\rho_\upsilon - \rho_\xi}\cdot\frac{\ell}{g}} \qquad (3)$$

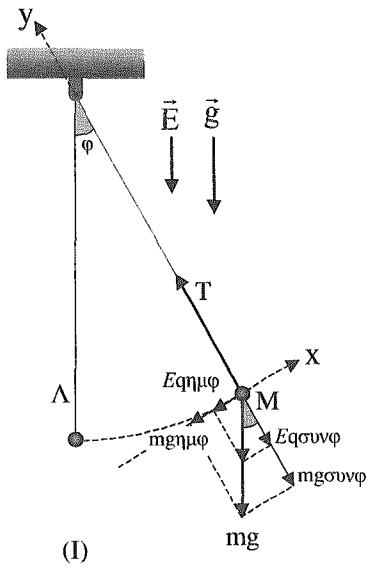
Λύνουμε την (3) ως προς ρ_ξ :

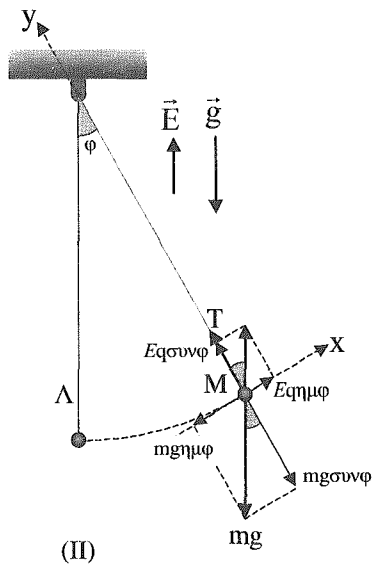
$$T^2 = 4\pi^2\frac{\rho_\xi}{\rho_\upsilon - \rho_\xi}\cdot\frac{\ell}{g} \rightarrow \frac{gT^2}{\ell}\rho_\upsilon - \frac{gT^2}{\ell}\rho_\xi = 4\pi^2\rho_\xi \rightarrow \rho_\xi\cdot\left(4\pi^2 + \frac{gT^2}{\ell}\right) = \frac{gT^2}{\ell}\cdot\rho_\upsilon \rightarrow$$

$$\rho_\xi = \frac{gT^2}{4\pi^2\ell + gT^2}\cdot\rho_\upsilon \rightarrow \rho_\xi = \frac{1}{\frac{4\pi^2\ell}{gT^2} + 1}\rho_\upsilon$$

Με αντικατάσταση: $\rho_\xi = \frac{1}{\frac{4\times 10\times 0{,}6\ m}{10\ m\cdot s^{-2}\times 4\ s^2} + 1}\cdot 10^3\ kg\cdot m^{-3} \rightarrow \rho_\xi = 625\ \frac{kg}{m^3}$

80.





α. i) $\vec{E}, \vec{g}$ ομόρροπα: Για την τυχαία θέση Μ του σφαιριδίου έχουμε:

$$\Sigma F_x = -(mg + Eq)\cdot \eta\mu\varphi \rightarrow \Sigma F_x = -\frac{(mg+Eq)}{\ell}x = -Dx$$

$$\text{όπου } D = \frac{mg+Eq}{\ell} \qquad (1)$$

Άρα το σφαιρίδιο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

ii) $\vec{E}, \vec{g}$ αντίρροπα: Στην περίπτωση αυτή για την τυχαία θέση Μ του σφαιριδίου θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = -mg\eta\mu\varphi + Eq\cdot\eta\mu\varphi = -\frac{(mg-Eq)}{\ell}\cdot x = -D'x \text{ όπου } D' = \frac{mg-Eq}{\ell} \qquad (2)$$

Επομένως το σφαιρίδιο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης δίνεται από την εξίσωση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (3)

Είναι φανερό ότι η μικρότερη περίοδος του απλού εκκρεμούς θα αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη σταθερά επαναφοράς. Από (1), (2) έχουμε $D > D'$.

Δίνεται $T_1 = \pi\sqrt{2}$ s και $T_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ s, δηλαδή $T_1 > T_2$.

Η σχέση (3) για τις δύο κατευθύνσεις του $\vec{E}$ γίνεται:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D'}} \text{ και } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{3} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell \cdot m}{mg + Eq}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D'}} \rightarrow \pi\sqrt{2} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell \cdot m}{mg - Eq}}$$

Έχουμε διαδοχικά:

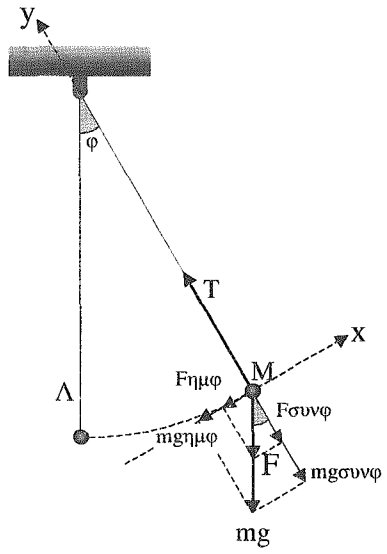
$$\frac{2\pi^2}{9} = 4\pi^2 \frac{\ell m}{mg + Eq} \rightarrow mg + Eq = 18\ell m \qquad (4)$$

$$2\pi^2 = 4\pi^2 \frac{\ell m}{mg - Eq} \rightarrow mg - Eq = 2\ell m \qquad (5)$$

Από (4), (5) $\rightarrow g = 10\ell \rightarrow g = 10\frac{m}{s^2}$

Από (5): $E = \frac{mg - 2\ell m}{q} = \frac{0{,}1\,kg \times 10\,m \cdot s^{-2} - 2 \times 1\,m \times 0{,}1\,kg}{200 \cdot 10^{-6}\,C} \rightarrow E = 4 \cdot 10^3\,\frac{N}{C}$

81.



α. Από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ προκύπτει $\ell = \frac{gT^2}{4\pi^2}$ και με αντικατάσταση των μεγεθών βρίσκουμε:

$$\ell = \frac{10\ m \cdot s^{-2} \times 1\ s^2}{4 \cdot 10} \rightarrow \ell = 0{,}25\ m \qquad (1)$$

β. Όταν το εκκρεμές ταλαντώνεται μόνο μέσα στο βαρυτικό πεδίο έχουμε $D = \frac{mg}{\ell}$ και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$.

Όταν συνυπάρχει με το βαρυτικό πεδίο και ένα δυναμικό πεδίο έχουμε $T' = \frac{2}{3}\ s$ δηλαδή $T' < T$. Αυτό σημαίνει ότι $D' > D$. Η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να είναι ομόρροπη του $\vec{B}$.

Βρίσκουμε τη σταθερά D':

Για την τυχαία θέση Μ του σφαιριδίου έχουμε:

$$\Sigma F_x = -B_x - F_x \rightarrow \Sigma F_x = -(mg + F) \cdot \eta\mu\varphi \rightarrow \Sigma F_x = -\frac{(mg+F)}{\ell} x = -D'x$$

$$\text{όπου } D' = \frac{mg + F}{\ell} \qquad (2)$$

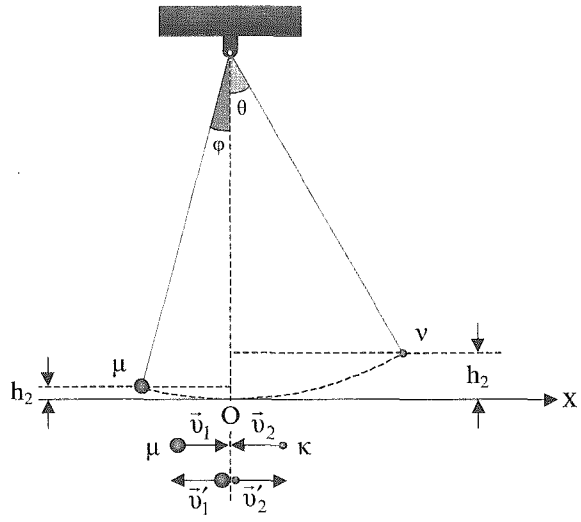
Η περίοδος $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D'}}$ και λόγω της (2):

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell m}{mg+F}} \rightarrow T'^2 = \frac{4\pi^2 \ell m}{mg+F} \rightarrow mg + F = \frac{4\pi^2 \ell m}{T^2} \rightarrow F = \frac{4\pi^2 \ell m}{T^2} - mg \rightarrow$$

$$F = \frac{4 \cdot 10 \times 0{,}25\ m \times 0{,}01\ kg}{\frac{4}{9} s^2} - 0{,}01\ kg \times 10\ m \cdot s^{-2} \rightarrow F = 0{,}125\ N$$

82.

α. Η περίοδος του απλού εκκρεμούς, για μικρές γωνίες, είναι ανεξάρτητη του πλάτους. Δηλαδή, οι μικρού πλάτους αιωρήσεις είναι ισόχρονοι. Αυτό σημαίνει ότι τα σφαιρίδια θα φθάσουν ταυτόχρονα (σε χρόνο T/4) στη θέση ισορροπίας τους O, όταν αφεθούν ταυτόχρονα ελεύθερα



β. Τα σφαιρίδια θα έχουν λίγο πριν την κρούση ταχύτητες με αντίστοιχα μέτρα:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)} \qquad (1)$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh_2} \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{2g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta)} \qquad (2)$$

Εφόσον μετά την κρούση θέλουμε τα σφαιρίδια να ανέρχονται στις θέσεις που τα αφήσαμε ελεύθερα, θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{\upsilon}_1' = -\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2' = -\vec{\upsilon}_2$, ή κατά μέτρο:

$$\begin{aligned} \upsilon_1' &= \upsilon_1 \\ \upsilon_2' &= \upsilon_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για τη κρούση:

$\vec{p}_{\text{ολ, πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ, μετά}} = \mu\upsilon_1 - \nu\upsilon_2 = -\mu\upsilon_1' + \nu\upsilon_2'$ και λόγω των (3) προκύπτει:

$$\mu\upsilon_1 - \nu\upsilon_2 = -\mu\upsilon_1 + \nu\upsilon_2 \rightarrow 2\mu\upsilon_1 = 2\nu\upsilon_2 \rightarrow \frac{\mu}{\nu} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \qquad (4)$$

Από (2), (4) $\rightarrow \dfrac{\mu}{\nu} = \sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}} = \sqrt{\dfrac{1-0{,}996}{1-0{,}999}} \rightarrow \dfrac{\mu}{\nu} = 2$

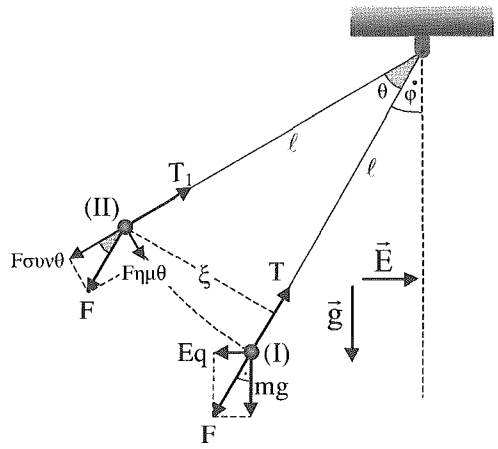
γ. Από τη χρονική στιγμή της $1^{\eta\varsigma}$ κρούσης και μετά τα σφαιρίδια θα συγκρούονται περιοδικά. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο συγκρούσεων θα είναι $T_1 = \dfrac{T}{2}$ όπου T η περίοδος ταλάντωσης καθενός εκκρεμούς.

Είναι $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3{,}6\ \text{m}}{10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} \Rightarrow T = 1{,}2\pi\ \text{s}$ και άρα $T_1 = 0{,}6\pi\ \text{s}$

83.

α. Στη θέση ισορροπίας του σφαιριδίου, θέση (I), ασκούνται σ' αυτό οι δυνάμεις $m\vec{g}$, $\vec{E}q$ και $\vec{T}$. Η συνισταμένη δύο οιωνδήποτε εξ αυτών είναι αντίθετη της τρίτης δύναμης. Στο σχήμα βλέπουμε ότι

$$m\vec{g} + \vec{E}q = -\vec{T}$$



β. Από το σχήμα, έχουμε για τη θέση ισορροπίας του σφαιριδίου:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{Eq}{mg} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot 10^{6}\,\frac{N}{C}\times 2\cdot 10^{-6}\,C}{0{,}1\,kg\times 10\,\frac{m}{s^{2}}} \rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \sqrt{15}$$

γ. Η δύναμη $\vec{F}$ έχει μέτρο $F = \sqrt{E^2q^2 + m^2g^2}$ και είναι σταθερή γιατί οι δυνάμεις $m\vec{g}$ και $\vec{E}q$ είναι σταθερές. Στην τυχαία θέση (II) του σφαιριδίου η δύναμη $\vec{F}$ θα έχει ίδιο μέτρο και κατεύθυνση όπως και στη θέση (I).

Έχουμε:

$$\Sigma F = -F\eta\mu\theta = -\sqrt{E^2q^2 + m^2g^2}\cdot\eta\mu\theta \qquad (1)$$

Για μικρή γωνία θ μπορούμε να γράψουμε $\eta\mu\theta = \frac{\xi}{\ell}$ και η (1) γράφεται:

$$\Sigma F = -\frac{\sqrt{E^2q^2 + m^2g^2}}{\ell}\cdot\xi = -D\cdot\xi \quad \text{όπου } D = \frac{\sqrt{E^2q^2 + m^2g^2}}{\ell}.$$

Επομένως το σφαιρίδιο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{\sqrt{E^2q^2 + m^2g^2}}} \rightarrow$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1\,kg\times 0{,}1\,m}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot 10^{6}\,\frac{N}{C}\right)^{2}\times 4\cdot 10^{-12}\,C^{2} + 10^{-2}\,kg\times\left(10\,\frac{m}{s^{2}}\right)^{2}}}} \rightarrow T = \frac{\pi}{10}\,s$$

84.

α. Στην εξίσωση $\alpha = \alpha_0 e^{-\Lambda t}$ ο χρόνος παίρνει τιμές $t = n \cdot T,\ n = 0, 1, 2\ldots$

Για δύο διαδοχικές τιμές του πλάτους θα έχουμε:

$$\alpha_n = \alpha_0 e^{-\Lambda \cdot nT} \tag{1}$$

$\alpha_{n+1} = \alpha_0 e^{-\Lambda \cdot (n+1)T} \rightarrow \alpha_{n+1} = \alpha_0 e^{-\Lambda nT} \cdot e^{-\Lambda T}$ και λόγω της (1)

$\alpha_{n+1} = \alpha_n e^{-\Lambda T}$ ή $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = e^{\Lambda T} =$ σταθ.

β. Επειδή η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι σταθερή θα ισχύει:

$$T = \frac{t_1}{N_1} = \frac{t_2}{N_1 + N_2} \rightarrow t_2 = \frac{(N_1 + N_2)}{N_2} t_1 = \frac{(18+72)}{18} \cdot t_1 \rightarrow t_2 = 5t_1 \tag{2}$$

Το πλάτος ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι ίσο με $\alpha = \alpha_0 e^{-\Lambda t_2}$

και λόγω της (2) προκύπτει: $\alpha = \alpha_0 e^{-5\Lambda t_1}$ (3)

Για $\alpha = \dfrac{\alpha_0}{2}$ θα έχουμε $\alpha = \dfrac{\alpha_0}{2} = \alpha_0 e^{-\Lambda t_1} \rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \dfrac{1}{2}$ (4)

Από (3), (4): $\alpha = \alpha_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \rightarrow \alpha = \dfrac{\alpha_0}{32}$

85.

α. Από την εξίσωση $\alpha = \alpha_0 e^{-\Lambda t}$ για $\alpha = \frac{\alpha_0}{2}$ έχουμε:

$$\frac{\alpha_2}{2} = \alpha_0 e^{-\Lambda t} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \rightarrow \ell n1 - \ell n2 = -\Lambda \cdot t \rightarrow t = \frac{\ell n2}{\Lambda}$$

β. Η απώλεια ενέργειας για μια πλήρη ταλάντωση θα είναι: $\Delta E = E_n - E_{n+1}$ ή σε ποσοστό επί τοις %.

$$x\% = \frac{\Delta E}{E_n} \cdot 100\% = \frac{E_n - E_{n+1}}{E_n} \cdot 100\% = (1 - \frac{E_{n+1}}{E_n}) \cdot 100\%$$

Δίνεται ότι $x\% = 36\%$. Άρα: $(1 - \frac{E_{n+1}}{E_n}) \cdot 100 = 36 \rightarrow \frac{E_{n+1}}{E_n} = 0{,}64 \rightarrow E_{n+1} = 0{,}64\ E_n$

Η ολική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους.

Άρα: $\frac{1}{2} D\alpha_{n+1}^2 = 0{,}64 \cdot \frac{1}{2} D\alpha_n^2 \rightarrow \alpha_{n+1} = 0{,}8\alpha_n$

Η επί τοις % μεταβολή του πλάτους θα είναι:

$$y\% = \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n} \cdot 100\% = \frac{0{,}8\alpha_n - \alpha_n}{\alpha_n} \cdot 100\% \rightarrow y\% = -20\%$$

Το (–) σημαίνει ελάττωση.

86.

α. Η δύναμη F μετριέται σε N στο SI.

Έχουμε (μέτρο): $F = b\upsilon$ και $1\,N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$, $\upsilon = 1\,\frac{m}{s}$

Άρα: $b = \frac{F}{\upsilon} = \frac{1\,kg \cdot m \cdot s^{-2}}{1\,m \cdot s^{-1}} = \frac{kg}{s}$

β. Από τον ελεύθερο αρμονικό ταλαντωτή θα αφαιρείται ενέργεια μέσω του έργου της $\vec{F}$ και η μηχανική του ενέργεια θα ελαττώνεται.

Θα έχουμε: $\frac{dE}{dt} = |F| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = -|F| \cdot |\upsilon| = -b\upsilon^2$.

87.

α. Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή δίνεται από την εξίσωση:

$$E = \frac{1}{2}D\alpha^2 = \frac{1}{2}D(\alpha_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2}D\alpha_0^2 \cdot e^{-2\Lambda t} \rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t} \qquad (1)$$

όπου $E_0 = \frac{1}{2}D\alpha_0^2$ και $t = nT$

Για $E = \frac{E_0}{2}$ από την (1) προκύπτει:

$$\frac{E_0}{2} = E_0 e^{-\Lambda t_1} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-2\Lambda t_1} \rightarrow \qquad (2)$$

$$-\ell n2 = -2\Lambda t_1 \rightarrow t_1 = \frac{\ell n2}{2\Lambda}$$

β. Για $t = t_2 = 3t_1$ θα έχουμε από την (1):

$$E_2 = E_0 e^{-2\Lambda \cdot 3t_1} \rightarrow E_2 = E_0\left(e^{-2\Lambda \cdot t_1}\right)^3 \xrightarrow{(2)} E_2 = E_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow E_2 = \frac{E_0}{8}$$

88.

α. Ο αριθμός των αδιάσπαστων πυρήνων τη χρονική στιγμή t δίνεται από την εξίσωση

$$N = N_0 e^{-\Lambda t} \qquad (1)$$

Ο χρόνος ημίσειας ζωής T βρίσκεται αν στην (1) βάλουμε $N = \frac{N_0}{2}$. Έχουμε:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\Lambda T} \rightarrow e^{-\Lambda T} = \frac{1}{2} \rightarrow \qquad (2)$$

$$T = \frac{\ell n 2}{\Lambda} \qquad (3)$$

Εφόσον έχουν διασπαστεί τα $\frac{15}{16}$ του αρχικού αριθμού N_0 των πυρήνων θα έχουν μείνει α-διάσπαστοι $N = N_0 - \frac{15}{16} N_0 \rightarrow N = \frac{N_0}{16}$ (4)

Από (1), (4) προκύπτει: $\frac{N_0}{16} = N_0 e^{-\Lambda t_1} \rightarrow \frac{1}{2^4} = e^{-\Lambda t_1} \rightarrow t_1 = 4\frac{\ell n 2}{\Lambda} \xrightarrow{(3)} t_1 = 4\,T$

β. Τη χρονική στιγμή $t = 2T$, οι αδιάσπαστοι πυρήνες θα είναι:

$$N_1 = N_0 e^{-\Lambda \cdot 2T} = N_0 \left(e^{-\Lambda \cdot T}\right)^2 \xrightarrow{(2)} N_1 = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow N_1 = \frac{N_0}{4}$$

Επομένως έχουν διασπαστεί $N_2 = N_0 - N_1 = N_0 - \frac{N_0}{4} = \frac{3N_0}{4}$ ή σε ποσοστό επί τοις %:

$$x\% = \frac{N_2}{N_0} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% \rightarrow x\% = 75\%$$

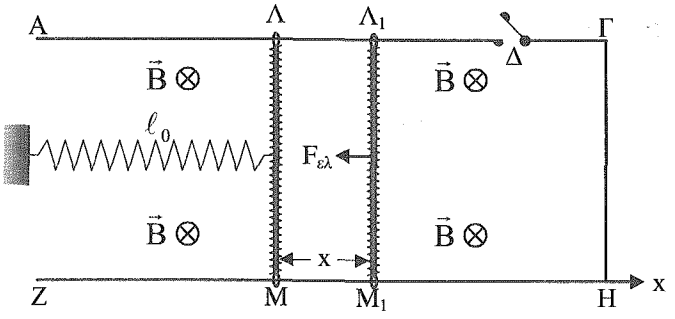
89.

α. Για τη ράβδο, όταν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας της είναι x θα ισχύει:

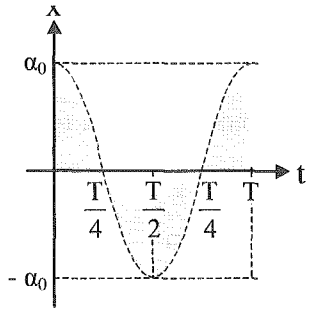
$\Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_x = -F_{\varepsilon\lambda} = -kx = -Dx$

με $D = k$.

Η ράβδος θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση περιόδου $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (1)



β. Η απομάκρυνση της ράβδου από τη θέση ισορροπίας της θα δίνεται από την εξίσωση $x = \alpha_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (2)

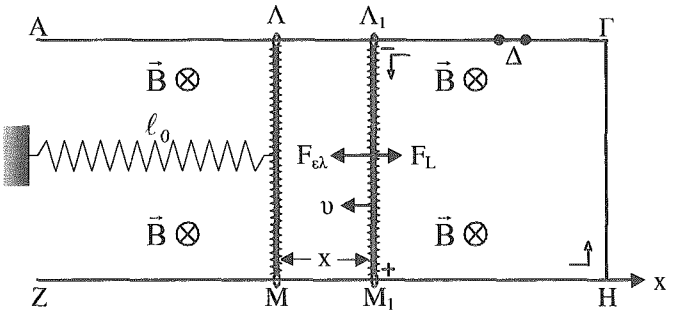


Για $t_0 = 0$ έχουμε $x = +\alpha_0$ άρα $\eta\mu\varphi_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ και η (2) γράφεται:

$$x = \alpha_0 \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{(1)} x = \alpha_0 \eta\mu\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

Η γραφική παράσταση της (3) φαίνεται στο σχήμα.

γ. i) Όταν η ράβδος αφεθεί ελεύθερη θα κινηθεί προς τη θέση ισορροπίας της. Επειδή κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, επάγεται σ' αυτή ΗΕΔ από επαγωγή με την πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα.



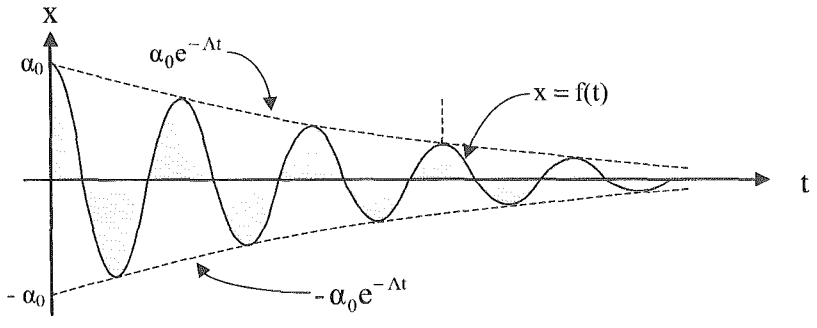
Στο βρόχο $\Lambda_1 M_1 H \Gamma \Lambda_1$ θα κυκλοφορεί επαγωγικό ρεύμα με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Στη ράβδο θα ασκείται δύναμη Laplace μέτρου $F_L = BI\ell$ (4)

Είναι $I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R} = \frac{B\ell\upsilon}{R}$ οπότε η (4) γράφεται $F_L = \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R}$

Η κατεύθυνση της $\vec{F}_L$ είναι αντίρροπη της $\vec{\upsilon}$. Άρα για τις αλγεβρικές τιμές των μεγεθών έχουμε $F_L = -\frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon \rightarrow F_L = -b\upsilon$ με $b = \frac{B^2 l^2}{R}$.

Στη ράβδο, εκτός από την ελαστική δύναμη επαναφοράς ενεργεί δύναμη αντίστασης $F = -b\upsilon$. Άρα η ράβδος θα εκτελέσει φθίνουσα αρμονική ταλάντωση με σταθερά απόσβεσης $b = \frac{B^2\ell^2}{R}$

ii) Η γραφική παράσταση της x = f (t) φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



90.

α. Η ιδιοσυχνότητα του αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100\ N\cdot m^{-1}}{1\ kg}} \rightarrow \nu_0 = \frac{5}{\pi}\ Hz$$

β. Η ενέργεια που αφαιρείται μέσω του έργου των τριβών από τον ταλαντωτή στη διάρκεια μιας περιόδου θα είναι: $W_1 = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_0'^2$ όπου $x_0' = 0{,}8x_0$. Άρα:

$$W_1 = \frac{1}{2}kx_0^2 - 0{,}64\cdot\frac{1}{2}kx_0^2 \rightarrow W_1 = 0{,}36\cdot\frac{1}{2}kx_0^2 \rightarrow$$

$$W_1 = 0{,}36\times\frac{1}{2}\times 100\ N\cdot m^{-1}\times 4\cdot 10^{-2}\ m \rightarrow W_1 = 0{,}72\ J$$

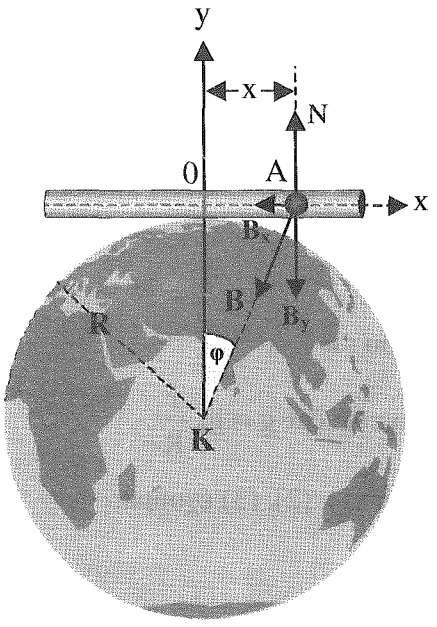
γ. Η ιδιοπερίοδος του αρμονικού ταλαντωτή είναι $T_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{\pi}{5}\ s = 0{,}628\ s$.

Σε χρόνο t = 62,8 s ο ταλαντωτής θα εκτελέσει 100 πλήρεις ταλαντώσεις. Από τον ταλαντωτή θα αφαιρεθεί ενέργεια μέσω του έργου των τριβών ίση προς $W = 100\cdot W_1 = 72\ J$

Συνεπώς, η ενέργεια που πρέπει να μεταφερθεί στον ταλαντωτή μέσω του έργου εξωτερικής περιοδικής δύναμης είναι 72 J.

91.

α. Επειδή είναι $x << R$, η απόσταση του σωματ ιδίου από το κέντρο της Γης είναι με καλή προσέγγιση συνεχώς ίση με την ακτίνα R της Γης και $g = g_0$.



Για το σωματίδιο στη θέση Α έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = B_y$$

$$\Sigma F_x = -B_x = -mg_0 \eta\mu\varphi \qquad (1)$$

Από το τρίγωνο ΟΚΑ προκύπτει: $\eta\mu\varphi = \frac{x}{R}$ και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\Sigma F_x = -\frac{mg_0}{R}x = -Dx \text{ με } D = \frac{mg_0}{R} \qquad (2)$$

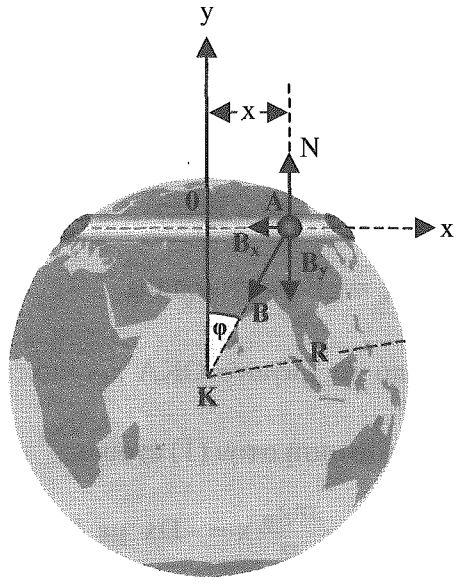
Συνεπώς το σωματίδιο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \xrightarrow{(2)} T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg_0}{R}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$

Εφαρμογή: $T = 2\pi\sqrt{\frac{64 \cdot 10^5 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \rightarrow T = 1600\pi \text{ s}$

92.

α. Για το αντικείμενο, στη θέση Α έχουμε:



$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = B_y$

$\Sigma F_x = -B_x = -mg\eta\mu\varphi$ (1)

Από το τρίγωνο ΟΚΑ προκύπτει

$\eta\mu\varphi = \frac{x}{r}$ (2)

όπου $r = KA$

Δίνεται ότι $g = g_0 \frac{r}{R}$ (3)

Από (1), (2), (3) έχουμε:

$$\Sigma F_x = -mg_0 \frac{r}{R} \cdot \frac{x}{r} \rightarrow \Sigma F_x = -\frac{mg_0}{R} x \rightarrow \Sigma F_x = -Dx \text{ με } D = \frac{mg_0}{R} \quad (4)$$

Συνεπώς το αντικείμενο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

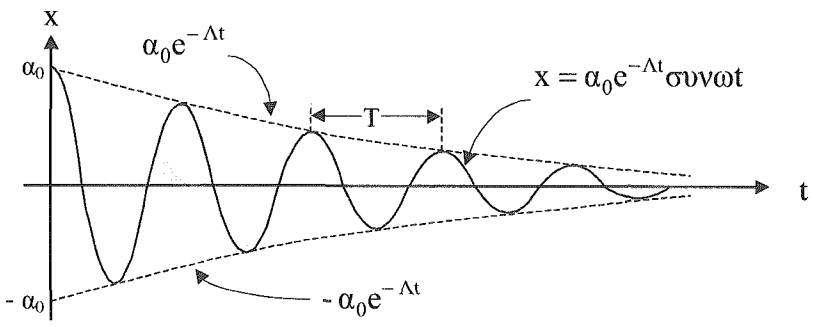
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \xrightarrow{(4)} T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} \rightarrow T = 1600\pi \text{ s}$$

β. Η σταθερά επαναφοράς D είναι ανεξάρτητη της r, δηλαδή ανεξάρτητη από τη θέση της σήραγγας.

Επομένως η περίοδος ταλάντωσης θα ήταν ίδια δηλ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$

93.

α. Το διάγραμμα x = f (t) είναι το ακόλουθο:



β. Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_{o\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\alpha^2$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση αυτή τις τιμές των ω, α και έχουμε:

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}m\left(\frac{k}{m} - \Lambda^2\right)\cdot\alpha_0^2\cdot e^{-2\Lambda\cdot t} \qquad (1)$$

Επειδή $\Lambda^2 << \frac{k}{m}$ θα είναι $\frac{k}{m} - \Lambda^2 \cong \frac{k}{m}$ και επομένως

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}\alpha_0^2 e^{-2\Lambda\cdot t} = \frac{1}{2}k\alpha_0^2 e^{-2\Lambda\cdot t} \qquad (2)$$

γ. Στην εξίσωση (2) είναι t = nT. Για δύο διαδοχικές τιμές του n θα έχουμε:

$E_n = E_0 e^{-2\Lambda\cdot nT}$ όπου $E_0 = \frac{1}{2}k\alpha_0^2$

$E_{n+1} = E_0 e^{-2\Lambda\cdot(n+1)T}$

Με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει $\frac{E_n}{E_{n+1}} = \frac{E_0 e^{-2\Lambda\cdot nT}}{E_0 e^{-2\Lambda\cdot nT}\cdot e^{-2\Lambda T}} \rightarrow \frac{E_n}{E_{n+1}} = e^{2\Lambda T} =$ σταθ.