ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΚΥΜΑΤΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. δ	**7. α**	**13. β**
2. β	**8. γ**	**14. α**
3. β	**9. δ**	**15. δ**
4. γ	**10. δ**	**16. β**
5. δ	**11. β**	**17. α**
6. γ	**12. γ**	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου Σωστό /Λάθος

1. Σ	**7. Σ**	**13. Λ**	**19. Λ**	**25. Σ**
2. Σ	**8. Λ**	**14. Σ**	**20. Λ**	**26. Σ**
3. Λ	**9. Λ**	**15. Λ**	**21. Λ**	**27. Λ**
4. Σ	**10. Σ**	**16. Λ**	**22. Λ**	**28. Σ**
5. Λ	**11. Σ**	**17. Σ**	**23. Λ**	**29. Σ**
6. Σ	**12. Σ**	**18. Σ**	**24. Σ**	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχησης

1. A → 3 B → 1 Γ → 2 Δ → 5	**2.** A → 5 B → 2 Γ → 4 Δ → 3 E → 1	**3.** A → 3 B → 1 Γ → 2
4. β → 3 γ → 1 δ → 2	**5.** A → 3 B → 5 Γ → 4 Δ → 2	

15.

α. Η εξίσωση δονήσεως του σημείου Μ(x), λόγω του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, είναι $y = y_0 \eta\mu(\omega t - \varphi)$ (1)

Η φάση της ταλάντωσης του σημείου Μ(x) υστερεί της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Ο κατά $\varphi = \dfrac{2\pi x}{\lambda}$. Επομένως η εξίσωση (1) γράφεται:

$$y = y_0 \eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

Είναι $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ και $\lambda = \upsilon T$. Συνεπώς $\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda / \upsilon} = \dfrac{2\pi\upsilon}{\lambda}$ και η (2) γράφεται

$$y = y_0 \eta\mu\left(\frac{2\pi\upsilon t}{\lambda} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \rightarrow y = y_0 \eta\mu \frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - x)$$

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Η εξίσωση δονήσεως του σημείου Μ(x), λόγω του κύματος που διαδίδεται προς τ' αριστερά, θα είναι $y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi)$ (1)

Η φάση της ταλάντωσης του σημείου Μ(x) προηγείται της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Ο κατά $\varphi = \dfrac{2\pi x}{\lambda}$. Επομένως η εξίσωση (1) γράφεται

$$y = y_0 \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = y_0 \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \rightarrow y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων δύο σημείων του ελαστικού μέσου την ίδια χρονική στιγμή είναι

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \frac{(x_2 - x_1)}{\lambda} \qquad (1)$$

Συμφωνία φάσης σημαίνει $\Delta\varphi = 2k\pi, \quad k \in Z$ οπότε η (1) γράφεται:

$$2k\pi = 2\pi\frac{(x_2 - x_1)}{\lambda} \rightarrow x_2 - x_1 = k\lambda \rightarrow |x_2 - x_1| = |k|\cdot\lambda \rightarrow d = |k|\cdot\lambda$$

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

16.

α. Η εξίσωση δονήσεως του σημείου Ο είναι $y = y_0\eta\mu\omega t$. Η φάση της ταλάντωσης του σημείου Μ(x) υστερεί της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Ο κατά $\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda}$.

$$x' \xrightarrow{\quad O \quad \xrightarrow{\upsilon} \quad M(x) \quad} x$$

Άρα η εξίσωση δονήσεως του σημείου Μ(x) θα είναι

$$y = y_0\eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = y_0\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Συνεπώς η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.

β. Σύμφωνα με την εξίσωση (1), η φάση της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου με συντεταγμένη x θα είναι $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (2)

Για τα δύο σημεία Μ, Ν έχουμε $\varphi_M > \varphi_N$ και επομένως με βάση την (1) θα είναι $x_M < x_N$.

Επομένως το κύμα διαδίδεται με κατεύθυνση από το σημείο Μ προς το σημείο Ν.

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων Μ και Ν, την ίδια χρονική στιγμή, είναι $\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N = \frac{20\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \rightarrow \Delta\varphi = 6\pi = 3\cdot(2\pi)$. Τα σημεία ταλαντώνονται με συμφωνία φάσης.

Από τη (2) έχουμε:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_N}{\lambda}\right) = 2\pi\frac{(x_M - x_N)}{\lambda} \rightarrow 3\cdot(2\pi) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_M - x_N) \rightarrow$$

$$x_M - x_N = 3\lambda$$

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

δ. Το στιγμιότυπο του κύματος αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της εξίσωσης του κύματος για t = σταθερό. Είναι η φωτογραφία του ελαστικού μέσου μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Για t = σταθερό η εξίσωση του κύματος γράφεται:

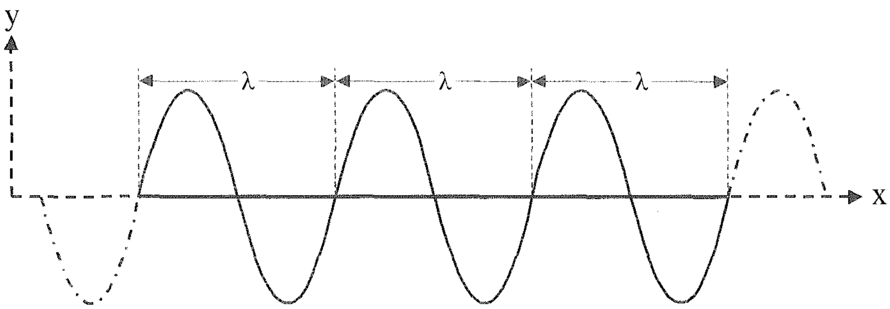
$$y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\Lambda - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

όπου $\Lambda = \frac{t}{T}$ = σταθερή ποσότητα.

Η εξίσωση (1) μας πληροφορεί ότι η απομάκρυνση y των σημείων του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας τους την ίδια χρονική στιγμή είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Προκύπτει ακόμη ότι έχουμε το ίδιο y αν το x αυξηθεί κατά λ (περίοδος διαστήματος).

Πράγματι: $y_1 = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\Lambda - \frac{x+\lambda}{\lambda}\right) = y_0 \eta\mu\left[2\pi\left(\Lambda - \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi\right] = y$

Είναι φανερό ότι διαπιστώνουμε τη χωρική περιοδικότητα που παρουσιάζει το ελαστικό μέσο. Στο στιγμιότυπο του αρμονικού κύματος μπορούμε να μετρήσουμε το μήκος κύματος λ. Η πρόταση (δ) είναι σωστή.



17.

α. Η εξίσωση δονήσεως του σημείο Ο είναι $y = y_0 \eta\mu\omega t$.

Η φάση της ταλάντωσης του σημείου M(x) προηγείται της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Ο κατά $\varphi = 2\pi\frac{x}{\lambda}$. Άρα η εξίσωση δονήσεως του σημείου M(x) θα είναι

$$y = y_0 \eta\mu\left(\omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Σύμφωνα με την εξίσωση (1) η φάση της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου με συντεταγμένη x θα είναι $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$ (2)

Για τα δύο σημεία Α και Β έχουμε $\varphi_A > \varphi_B$ και επομένως, με βάση την (2), θα είναι $x_A > x_B$. Επομένως το κύμα διαδίδεται με κατεύθυνση από το σημείο Α προς το σημείο Β.
Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.

γ. Η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων Α, Β τη ίδια χρονική στιγμή είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x_A}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x_B}{\lambda}\right) = \frac{15\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} \rightarrow$$

$$2\pi\frac{(x_A - x_B)}{\lambda} = 5\pi \rightarrow x_A - x_B = 5\frac{\lambda}{2}$$

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

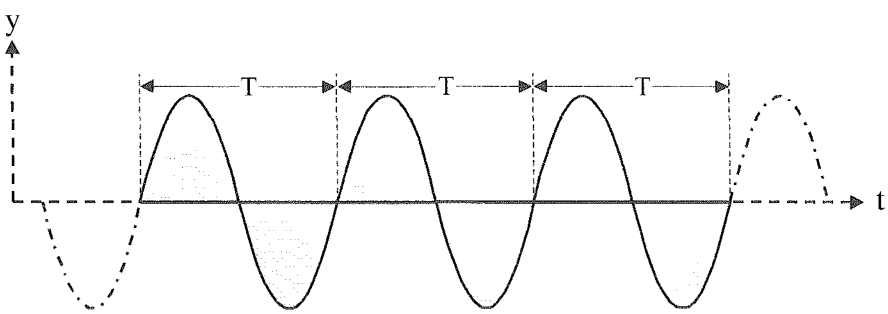
δ. Στην ημιτονοειδή κυματική κίνηση $y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$ (1)

έχουμε δύο περιοδικότητες:

i) ως προς το χώρο, που δίνεται από το μήκος κύματος λ, και
ii) ως προς το χρόνο, που δίνεται από την περίοδο Τ

Για $\frac{x}{\Lambda}$ = σταθερά, η εξίσωση $y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\Lambda\right)$ (2)

μας δίνει αρμονική ταλάντωση. Δηλαδή δείχνει τη χρονική περιοδικότητα που παρουσιάζει η απομάκρυνση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του.



Στη γραφική παράσταση της εξίσωσης (2) μπορούμε να μετρήσουμε την περίοδο Τ του κύματος.
Η πρόταση (δ) είναι σωστή.

18.

α. Το σημείο Ο στο στιγμιότυπο (1) έχει y = 0, ενώ τη χρονική στιγμή t_1 φθάνει σ' αυτό κοιλάδα και έχει απομάκρυνση $y=-y_0$. Είναι φανερό ότι το στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$.

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Στο στιγμιότυπο (3) το σημείο Ο έχει y = 0 και ταχύτητα $\upsilon_0=\omega y_0$. Αφού το στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$, είναι φανερό ότι το στιγμιότυπο (3) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_2=\frac{T}{2}$.

Η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.

γ. Τα σημεία Α, Β στο στιγμιότυπο (1), έχουν y = 0 και επομένως μέγιστη ταχύτητα (κατά μέτρο). Τη χρονική στιγμή $\frac{T}{4}$ θα φτάσει στο Α «όρος» ενώ στο Β «κοιλάδα».

Επομένως το Α κινείται προς τη θετική κατεύθυνση ενώ το Β προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $y'y$ με ταχύτητες, αντίστοιχα, $V_1=\omega y_0$ και $V_2=-\omega y_0$.

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

δ. Για τα σημεία Γ, Δ στο στιγμιότυπο (3) έχουμε, αντίστοιχα, $y_1=+y_0$ και $y_2=0$. Επομένως οι αντίστοιχες επιταχύνσεις είναι $\alpha_1=-\omega^2 y_0$ και $\alpha_2=0$.

Η πρόταση (δ) είναι σωστή.

19.

α. Θεωρούμε ως αρχήν του άξονα $x'x$ σημείο O του ελαστικού μέσου το οποίο τη στιγμή $t = 0$ αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ταλάντωση με εξίσωση $y = 4\eta\mu 10\pi t$.

Η εξίσωση $y = 4\eta\mu\pi\left(10t - \frac{x}{10}\right)$ γράφεται

$$y = 4\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{x}{20}\right) \text{ ή } y = 4\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{1/5} - \frac{x}{20}\right) \qquad (1)$$

Η εξίσωση αρμονικού κύματος το οποίο διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$ είναι $y = y_0\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (2)

Η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.

β. Από τη σύγκριση των εξισώσεων (1), (2) προκύπτει

$y_0 = 4\,\text{cm}$ και $T = \frac{1}{5}\text{s} = 0{,}2\,\text{s}$

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Από τη σύγκριση των εξισώσεων (1), (2) βρίσκουμε

$\lambda = 20\,\text{cm}$ και επειδή $T = 0{,}2$ s είναι $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \upsilon = 1\frac{m}{s}$.

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

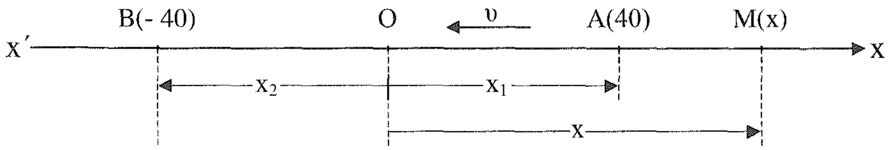
δ. Η ταχύτητα της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου, σύμφωνα με τη δοσμένη εξίσωση του κύματος, θα είναι $V = 40\pi\sigma\upsilon\nu\pi\left(10t - \frac{x}{10}\right)$

Για $x = 20$ cm και $t = 2{,}5$ s προκύπτει $V = 40\pi\sigma\upsilon\nu\pi(25 - 2) \rightarrow V = -40\pi\frac{cm}{s}$

Η πρόταση (δ) είναι λανθασμένη.

20.

α. Η εξίσωση δονήσεως του σημείου M(x) του ελαστικού μέσου είναι



$y = 2\eta\mu(20\pi t + \varphi)$ όπου $\varphi = 2\pi\frac{x}{\lambda}$. Άρα

$$y = 2\eta\mu\left(20\pi t + \frac{2\pi x}{20}\right) \text{ ή } y = 2\eta\mu 2\pi\left(10t + \frac{x}{20}\right) \qquad (1)$$

(x, y σε cm, t σε s).

Σύμφωνα με την (1) η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Από την (1) για τα σημεία Α, Β του ελαστικού μέσου θα έχουμε:

$$y_A = 2\eta\mu 2\pi\left(10t + \frac{x_1}{20}\right) \text{και } y_B = 2\eta\mu 2\pi\left(10t + \frac{x_2}{20}\right)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων Α και Β, την ίδια χρονική στιγμή, είναι $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = 2\pi\left(10t + \frac{x_1}{20}\right) - 2\pi\left(10t + \frac{x_2}{20}\right) \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{(x_1 - x_2)}{20} \rightarrow$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{40cm - (-40cm)}{20cm} \rightarrow \Delta\varphi = 8\pi$$

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης V του σημείου Β του ελαστικού μέσου είναι

$$V = 40\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(10t + \frac{x_2}{20}\right)$$

Για t = 3 s και $x_2 = -40$ cm έχουμε: $V = 40\pi\ \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(30 - \frac{40}{20}\right) \rightarrow V = 40\pi\ \frac{cm}{s}$.

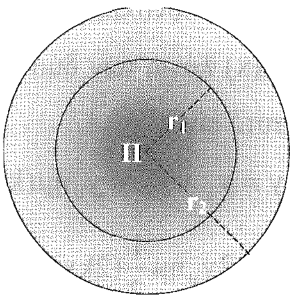
Η πρόταση (γ) είναι λανθασμένη.

δ. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{20\text{ cm} \times 20\pi\text{ s}^{-1}}{2\pi} \rightarrow \upsilon = 2\,\frac{m}{s}$$

Η πρόταση (δ) είναι σωστή.

21.



α. Η ένταση του κύματος σ' ένα σημείο που απέχει απόσταση r από την πηγή Π θα είναι

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \rightarrow I = \frac{20\pi\ W}{4\pi \cdot (5\ m)^2} \rightarrow I = 0{,}2\frac{W}{m^2}$$

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Η ενέργεια που εκπέμπει η πηγή κατανέμεται πάνω σε σφαιρικές επιφάνειες των οποίων τα εμβαδά είναι ανάλογα των τετραγώνων των ακτίνων τους. Επειδή η ενέργεια που εκπέμπει η πηγή είναι ίδια για όλες τις σφαιρικές επιφάνειες, θα έχουμε:

$$I_1 = \frac{W}{4\pi r_1^2 \cdot \Delta t} \text{ και } I_2 = \frac{W}{4\pi r_2^2 \cdot \Delta t}$$

Με διαίρεση αυτών των σχέσεων κατά μέλη προκύπτει $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$.

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Αν είναι $\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta S}$ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας, τότε η μάζα $m_{ολ}$ των υλικών σημείων τα οποία βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r και αρχίζουν να δονούνται την ίδια στιγμή θα είναι $m_{ολ} = \sigma \cdot 4\pi r^2$. Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} m_{ολ} V_0^2 = \frac{1}{2}(\sigma \cdot 4\pi r^2) \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 \rightarrow E_{ολ} = k \cdot y_{0,1}^2 \cdot r_1^2 = k \cdot y_{0,2}^2 \cdot r_2^2 \rightarrow \frac{y_{0,2}}{y_{0,1}} = \frac{r_1}{r_2} \text{ όπου}$$

$k = 2\pi\sigma\omega^2 =$ σταθ.

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

22.

α. Η συνολική απομάκρυνση του σημείου M(x) λόγω των δύο κυμάτων που φθάνουν σ' αυτό είναι

$$y = y_1 + y_2 = y_0 \eta\mu(kx - \omega t) + y_0 \eta\mu(kx + \omega t) \rightarrow$$

$$y = 2y_0 \eta\mu \frac{1}{2}(2kx) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{2}(-2\omega t) \rightarrow y = 2y_0 \eta\mu kx \sigma\upsilon\nu \omega t \qquad (1)$$

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

β. Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου είναι, σύμφωνα με την (1):

$$A = 2y_0 |\eta\mu kx| \qquad (2)$$

Στις θέσεις των κοιλιών έχουμε $A = 2y_0$ και λόγω της (2):

$$\eta\mu kx = \pm 1 \rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n \in Z$$

Η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Στις θέσεις των δεσμών $A = 0$ και λόγω της (1):

$$\eta\mu kx = 0 \rightarrow kx = n\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}, \quad n \in Z$$

Η πρόταση (γ) είναι λανθασμένη.

δ. Για $x = (4n+1)\frac{\lambda}{4}$ και $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, η σχέση (1) γίνεται:

$$y = 2y_0 \eta\mu\left[\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(4n+1)\lambda}{4}\right] \sigma\upsilon\nu\omega t \rightarrow y = 2y_0 \eta\mu\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\omega t \rightarrow y = 2y_0 \sigma\upsilon\nu\omega t.$$

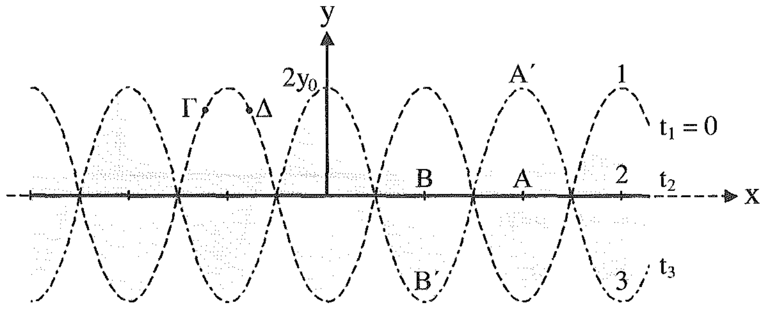
Η εξίσωση της ταχύτητας για τα σημεία αυτά είναι $V = 2\omega y_0 \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$

$$V = -2y_0 \eta\mu\omega t.$$

Η πρόταση (δ) είναι σωστή.

23.

α. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0$, όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου (εκτός των δεσμών) βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνση $|A|$ από τη θέση ισορροπίας τους. Επειδή ταλαντώνονται όλα τα σημεία με την ίδια συχνότητα, θα περάσουν ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους. Συνεπώς το στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{T}{4}$.



Είναι φανερό ότι στο στιγμιότυπο (3) όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου (εκτός των δεσμών) βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνση $|A|$ από τη θέση ισορροπίας τους.

Συμπεραίνουμε ότι το στιγμιότυπο αυτό αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_3 = \frac{T}{2}$.

Η πρόταση (α) είναι σωστή.

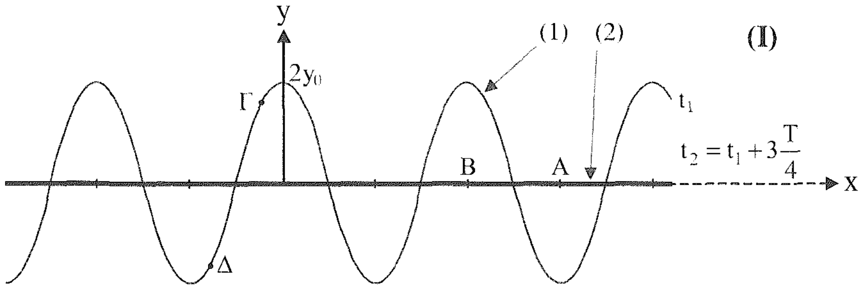
β. Εφόσον το στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{T}{4}$ και το στιγμιότυπο (3) αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_3 = \frac{T}{2}$, συμπεραίνουμε ότι τη χρονική στιγμή t_3 το σημείο Α θα βρεθεί στη θέση Α′ και το σημείο Β στη θέση Β′. Συνεπώς το Α κινείται προς τη θετική κατεύθυνση ενώ το Β κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.
Η πρόταση (β) είναι σωστή.

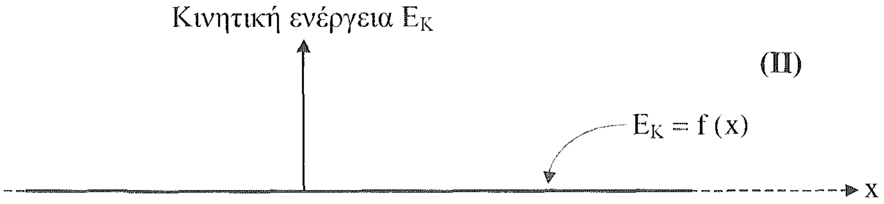
γ. Τα σημεία Γ, Δ βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών και η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων που εκτελούν είναι ίση με μηδέν.
Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

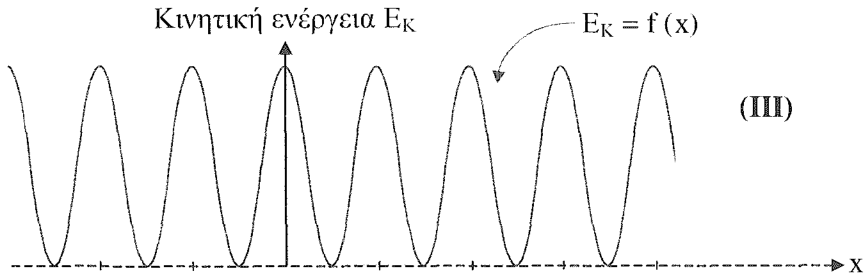
δ. Τη χρονική στιγμή $t_2 + \Delta t$, όπου $\Delta t < \frac{T}{4}$, το σημείο Α το οποίο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση έχει απομάκρυνση $y_A < 2y_0$ και επομένως έχει και κινητική ενέργεια λόγω της ταλάντωσής του.
Η πρόταση (δ) είναι λανθασμένη.

24.

α. Στο στιγμιότυπο (1) όλα τα μόρια του ελαστικού μέσου (εκτός των δεσμών) βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνση $|A|$ από τη θέση ισορροπίας τους και επομένως έχουν μηδενική ταχύτητα και μηδενική τιμή κινητικής ενέργειας. Το διάγραμμα $E_K = f(x)$ που αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο αυτό είναι το (II). Συνεπώς η πρόταση (α) είναι σωστή.







β. Στο στιγμιότυπο (2) όλα τα σημεία διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους. Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης για τα διάφορα σημεία του ελαστικού μέσου είναι

$$V = \frac{4\pi y_0}{T} \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} t \qquad (1)$$

Για $t = t_1$ είναι $V = 0$, επομένως $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} t_1 = 0$ και $\eta\mu \frac{2\pi}{T} t_1 = \pm 1$ Θέτουμε στην (1)

$t = t_1 + \frac{3T}{4}$ και έχουμε

$$V = \frac{4\pi y_0}{T} \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T}\left(t_1 + \frac{3T}{4}\right) = \frac{4\pi y_0}{T} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda}\left(\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} t_1 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} - \eta\mu \frac{2\pi}{T} t_1 \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$V = \pm \frac{4\pi y_0}{T} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \rightarrow V = \pm V_0 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (2)$$

όπου $V_0 = \frac{4\pi}{T} y_0$.

Η κινητική ενέργεια ενός μορίου του ελαστικού μέσου θα είναι:

$$E_K = \frac{1}{2}mV^2 \xrightarrow{(2)} E_K = \frac{1}{2}mV_0^2 συν^2\frac{2\pi x}{\lambda} = E_0 \cdot συν^2\frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (3)$$

όπου $E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2$.

Συμπεραίνουμε από την (3), ότι στο στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί το διάγραμμα $E_K = f(x)$ του σχήματος (III).

Συνεπώς η πρόταση (β) είναι σωστή.

γ. Τη χρονική στιγμή t_2 το μόριο Α κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση ενώ το μόριο Β κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. Οι ταχύτητες της ταλάντωσής τους είναι

$V_A = -\frac{4\pi}{T}y_0$ και $V_B = \frac{4\pi}{T}y_0$. Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

δ. Τα μόρια Γ, Δ ταλαντώνονται με αντίθεση φάσης, όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο (1). Συνεπώς η πρόταση (δ) είναι λανθασμένη.

25.

α. i) Το μήκος κύματος είναι $\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{1000\ m\cdot s^{-1}}{500\ s^{-1}} \rightarrow \lambda = 2\ m$.

ii) Η περίοδος ταλάντωσης ενός μορίου του ελαστικού μέσου είναι:

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{500\ s^{-1}} \rightarrow T = 2\cdot 10^{-3} s$ και η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi\nu \rightarrow \omega = 1000\pi\ \frac{rad}{s}$.

β. Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής Ο είναι $y = y_0 ημ\omega t$. Συνεπώς, η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$ θα είναι

$$y = y_0 ημ2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \rightarrow y = 0{,}05ημ2\pi(\frac{t}{2\cdot 10^{-3}} - \frac{x}{2}) \rightarrow y = 0{,}05ημ2\pi(500t - 0{,}5x)\ (SI)$$

26.

α. Από την εξίσωση δονήσεως της πηγής προκύπτει ότι

$$y_0 = 0{,}04\ \mathrm{m},\ \omega = 4\pi\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}},\ \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 2\ \mathrm{Hz}\ \text{και}\ T = \frac{1}{\nu} = 0{,}5\ \mathrm{s}$$

Το μήκος κύματος είναι $\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\ \mathrm{s}^{-1}} \rightarrow \lambda = 25\ \mathrm{m}$

β. Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή $y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση αυτή των y_0, T, λ με τις τιμές τους βρίσκουμε

$$y = 0{,}04\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{x}{25}\right)(\mathrm{SI}) \qquad (1)$$

γ. Το σημείο Μ θα αρχίσει να κινείται τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{x}{\upsilon} \rightarrow t_1 = \frac{500\ \mathrm{m}}{50\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \rightarrow t_1 = 10\ \mathrm{s}$$

δ. i) Για x = 500 m, t = 20 s από την (1) προκύπτει:

$$y = 0{,}04\eta\mu 2\pi\left(2\cdot 20 - \frac{500}{25}\right) \rightarrow y = 0 \qquad (2)$$

ii) Η ταχύτητα V του σημείου Μ δίνεται από την εξίσωση

$$V = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow V = 0{,}16\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(2t - \frac{x}{25}\right)$$

Για t = 20 s, x = 500 m βρίσκουμε: $V = 0{,}16\pi\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Το σημείο Μ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο κατά τη θετική κατεύθυνση.

iii) Η επιτάχυνση του Μ είναι $\alpha = -\omega^2 y \xrightarrow{(2)} \alpha = 0$

27.

α. Η ταχύτητα του κύματος δίνεται από την εξίσωση: $\upsilon = \lambda \cdot \nu$ (1)

Από την σύγκριση της εξίσωσης $y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ με τη δοσμένη εξίσωση κύματος βρίσκουμε $\frac{1}{T} = \nu = 2\ \text{Hz}$, $\frac{1}{\lambda} = 0{,}1 \rightarrow \lambda = 10\ \text{m}$ οπότε η εξίσωση (1) δίνει

$$\upsilon = 10\ \text{m} \times 2\ \text{s}^{-1} \rightarrow \upsilon = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β. Για τα δύο σημεία του ελαστικού μέσου θα έχουμε:

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \text{ και } \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

Η διαφορά φάσης είναι $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \Delta\varphi.$

Η απόσταση των σημείων είναι $d = |\Delta x|$ και άρα $d = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{2} \rightarrow d = \frac{3\lambda}{4} \rightarrow d = 7{,}5\ \text{m}.$

γ. Για τη φάση ενός σημείου $M(x)$ τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 θα έχουμε

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ και}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi(t_2 - t_1)}{T} \rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{0{,}5}(25 - 20)\ \text{rad} \rightarrow \Delta\varphi = 20\pi\ \text{rad}$$

28.

α. Από την εξίσωση δονήσεως της πηγής έχουμε $\omega = \pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Άρα $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = 2\ \text{s},\ \nu = 0{,}5\ \text{Hz}$

Το μήκος κύματος είναι $\lambda = \dfrac{\upsilon}{\nu} = \dfrac{2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}5\ \text{s}^{-1}} \rightarrow \lambda = 4\ \text{m}$.

β. Η εξίσωση του κύματος γράφεται $y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

Είναι $y_0 = 0{,}08\ \text{m},\ T = 2\ \text{s},\ \lambda = 4\ \text{m}$ και επομένως

$$y = 0{,}08\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) \text{ ή } y = 0{,}08\eta\mu 2\pi(0{,}5t - 0{,}25x)\ (\text{SI}) \qquad (1)$$

γ. Η ταχύτητα του σημείου Μ υπολογίζεται από την εξίσωση

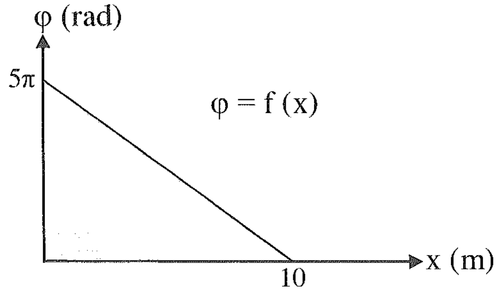
$V = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu 2\pi(0{,}5t - 0{,}25x) \rightarrow V = 0{,}08\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(0{,}5t - 0{,}5)\ (\text{SI})$

Η επιτάχυνση $\alpha = -\omega^2 y \xrightarrow{(1)} \alpha = -0{,}08\pi^2 \eta\mu 2\pi(0{,}5t - 0{,}5)\ (\text{SI})$

δ. Η φάση φ της ταλάντωσης για τα διάφορα σημεία του ημιάξονα Ox, όπως προκύπτει από την εξίσωση του κύματος, βρίσκεται από την εξίσωση $\varphi = 2\pi(0{,}5t - 0{,}25x)\ (\text{SI})$

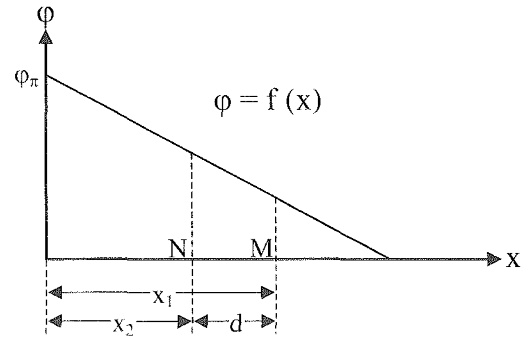
Για $t = 5$ s έχουμε: $\varphi = 2\pi(0{,}5 \cdot 5 - 0{,}25x) = 5\pi - 0{,}5\pi x \qquad (2)$

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης (2) φαίνεται στο σχήμα.



29.

α. Η εξίσωση του κύματος είναι



$$y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Η φάση για ένα σημείο με συντεταγμένη x τη χρονική στιγμή t θα είναι $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Για t = σταθ. μπορούμε να γράψουμε

$\varphi = 2\pi\left(\sigma\tau. - \frac{x}{\lambda}\right)$. Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι αυξανομένου του x η φάση ελαττώνεται.

Άρα το σημείο που έχει μεγαλύτερη φάση, την ίδια χρονική στιγμή, είναι πλησιέστερα στην πηγή.

Επειδή είναι $\varphi_2 > \varphi_1$ το σημείο N είναι πλησιέστερα στην πηγή και το κύμα διαδίδεται με κατεύθυνση από το N προς το M.

β. Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ για τα σημεία N και M τη χρονική στιγμή t είναι

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{(x_1 - x_2)}{\lambda} = \frac{2\pi d}{\lambda} \rightarrow d = \lambda \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \rightarrow$$

$$d = 24\ \text{m}\,\frac{\frac{20\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}}{2\pi} \rightarrow d = 70\ \text{m}$$

30.

Η γενική εξίσωση του ημιτονοειδούς κύματος, το οποίο διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$ όταν η πηγή παραγωγής βρίσκεται στην αρχή O, είναι:

$$y = y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ} + \frac{φ_0}{2π}\right) \qquad (1)$$

όπου $φ_0$ η αρχική φάση της πηγής.

α. Δίνεται ότι στη θέση x = 0, τη στιγμή t = 0 είναι y = 0 και V > 0. Συνεπώς $φ_0 = 0$ και η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή $y = y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right)$. Με αντικατάσταση των δεδομένων προκύπτει $y = 0{,}05ημ2π(4t + 1{,}25x)$ (SI) (2)

β. Από την (1) για x = 0,1 m και t = 0 έχουμε

$$0 = 0{,}05ημ2π\left(0 + \frac{1}{8} + \frac{φ_0}{2π}\right) \to ημ2π\left(\frac{1}{8} + \frac{φ_0}{2π}\right) = 0 \to 2π\left(\frac{1}{8} + \frac{φ_0}{2π}\right) = kπ \to φ_0 = kπ - \frac{π}{4} \qquad (3)$$

Επειδή $0 \le φ_0 < 2π$ ο ακέραιος k μπορεί να πάρει τις τιμές 1 ή 2.

Για k = 1 η σχέση (3) δίνει $φ_0 = \frac{3π}{4}$, ενώ για k = 2 δίνει $φ_0 = \frac{7π}{4}$.

Επειδή V > 0, δεκτή είναι η τιμή $φ_0 = \frac{7π}{4}$. Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$y = 0{,}05ημ2π\left(4t + 1{,}25x + \frac{7}{8}\right) \text{ (SI)}$$

31.

α. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$y=0{,}08\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{\pi/15}-\frac{x}{\pi/0{,}12}+\frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

$$\text{Όμως } y=y_0\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{\varphi_0}{2\pi}\right) \tag{2}$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $T=\frac{\pi}{15}\text{s},\ \lambda=\frac{\pi}{0{,}12}\text{m},\ \varphi_0=\pi.$

i) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι

$$\upsilon=\lambda\nu=\frac{\pi}{0{,}12}\,\text{m}\times\frac{15}{\pi}\text{s}^{-1}\rightarrow\upsilon=125\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ii) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης ενός υλικού σημείου θα είναι

$$V_0=\omega y_0=\frac{2\pi}{T}y_0=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}\text{s}}\times 0{,}08\text{ m}\rightarrow V_0=2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β. Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός υλικού σημείου θα είναι

$$V=V_0\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{\varphi_0}{\pi}\right)\rightarrow V=2{,}4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{15}{\pi}t-\frac{0{,}12x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$$

$$x=\frac{25\pi}{3}\text{m},\ t=0 \text{ άρα } V=2{,}4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\rightarrow V=-2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ. $x=50\pi\text{ m},\ t=\frac{\pi}{10}\text{s}$ άρα $V=2{,}4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(1{,}5-6+\frac{1}{2}\right)\rightarrow V=2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

32.

α. i) Ο κυματικός αριθμός είναι $k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow k = \frac{2\pi}{0{,}4} \rightarrow k = 5\pi \ m^{-1}$

ii) Η περίοδος είναι $T = \frac{1}{\nu} \rightarrow T = \frac{1}{4}$ s και η κυκλική συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = 8\pi \ \frac{rad}{s}$.

iii) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος $\upsilon = \lambda \cdot \nu \rightarrow \upsilon = 0{,}4 \ m \times 4 \ s^{-1} \rightarrow \upsilon = 1{,}6 \ \frac{m}{s}$.

β. Η γενική εξίσωση ημιτονοειδούς κύματος, το οποίο παράγεται από πηγή η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα $x'x$ και διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, είναι

$$y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right) \qquad (1)$$

Για t = 0 στη θέση x = 0 δίνεται $y = 0{,}1 \ m = +y_0$.

Συνεπώς $\eta\mu\varphi_0 = +1 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ και η εξίσωση (1) γράφεται $y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(4t - 2{,}5x + \frac{1}{4}\right)$ (SI)

33.

α. Από την εξίσωση δονήσεως της πηγής $y = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu 10\pi t$ προκύπτει:

$\omega = 10\pi = 2\pi\nu \rightarrow \nu = 5 \ Hz$

Συνεπώς $\upsilon = \lambda\nu = 0{,}8 \ m \times 5 \ Hz \rightarrow \upsilon = 4 \ \frac{m}{s}$

β. Η εξίσωση του κύματος είναι $y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Με αντικατάσταση των μεγεθών y_0, T, λ με τις τιμές τους προκύπτει:

$$y = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu 2\pi(5t - 1{,}25x) \ (SI) \qquad (1)$$

γ. Από την εξίσωση (1) για t = 1,25 s και x = 4 m, προκύπτει:

$$y = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu 2\pi(5 \cdot 1{,}25 - 1{,}25 \cdot 4) = 4 \cdot 10\eta\mu 2\pi \cdot \frac{5}{4} = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu \frac{5\pi}{2} \rightarrow y = 4 \cdot 10^{-2} \ m$$

α. Η συχνότητα του κύματος είναι $\nu = \dfrac{\upsilon}{\lambda} = \dfrac{2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{0{,}2\ \mathrm{m}} \rightarrow \nu = 10\ \mathrm{Hz}$.

Η εξίσωση δονήσεως του σημείου Ο είναι $y = y_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1)

Για t = 0 δίνεται y = 0 και V < 0.

Άρα $\varphi_0 = \pi$ και η εξίσωση (1) γράφεται:

$y = 4\eta\mu(20\pi t + \pi)$ (t σε s, y σε cm) (2)

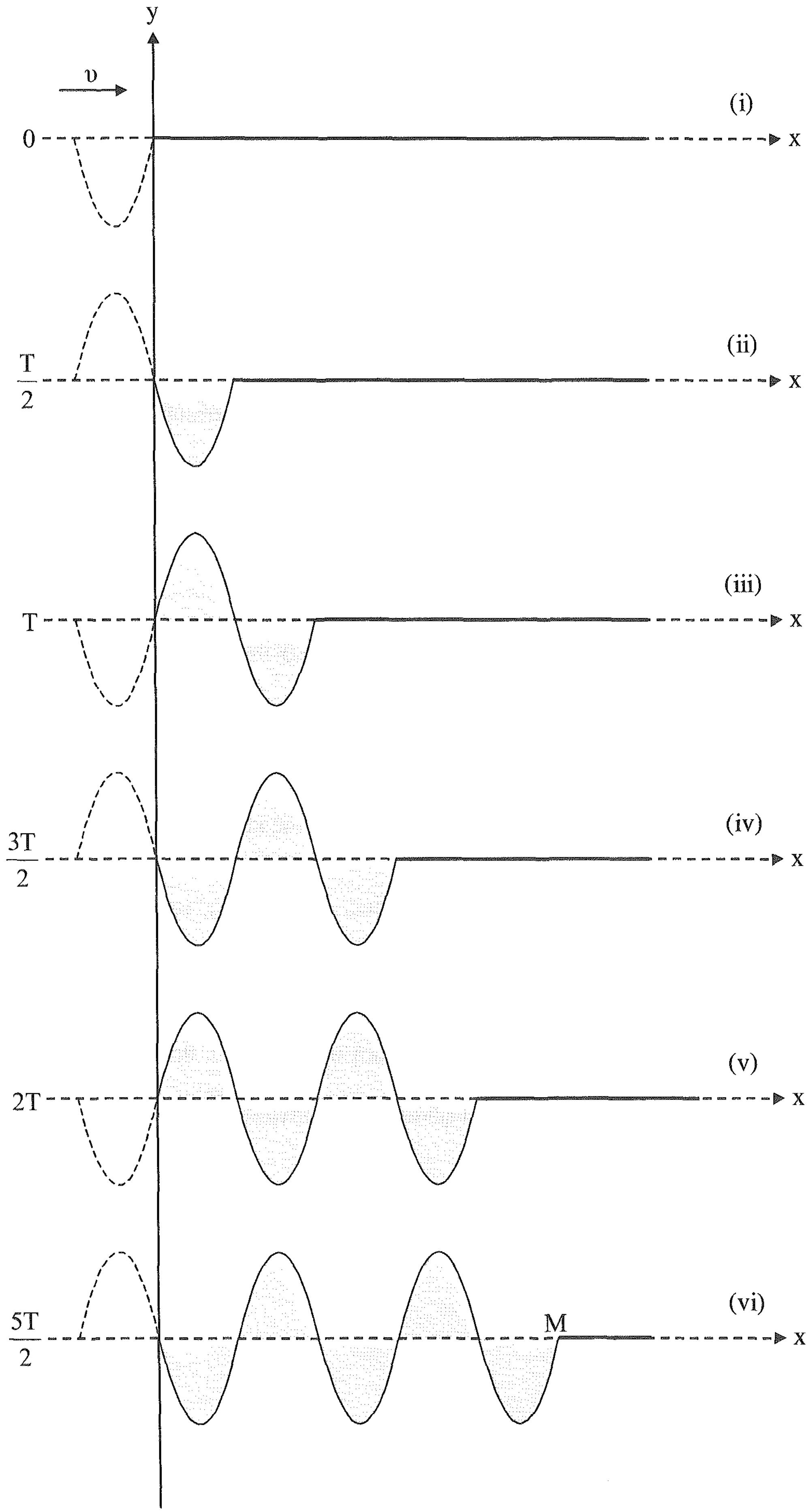
β. Η εξίσωση του κύματος, το οποίο διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$, έχει τη μορφή $y = 4\eta\mu\left(20\pi t + \pi - \dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$

Για το σημείο Α με x = 15 cm θα έχουμε, για $t \geq \dfrac{x}{\upsilon} = 0{,}075\ \mathrm{s}$:

$$y = 4\eta\mu\left(20\pi t + \pi - \frac{30\pi}{20}\right) \rightarrow y = 4\eta\mu\left(20\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(t σε s, y σε cm)}$$

γ. Αφού το Ο έχει για t = 0 απομάκρυνση y = 0 και κινείται κατά την αρνητική φορά, τη στιγμή $t = \dfrac{T}{4}$ θα φθάνει σ' αυτό κοιλάδα. Άρα η μορφή της καμπύλης στο $[-\dfrac{\lambda}{2}, 0]$ θα είναι η εστιγμένη στο διάγραμμα (i) της επόμενης σελίδας. Η θέση της, τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{T}{2}$, φαίνεται στο διάγραμμα (ii) και τη χρονική στιγμή $\dfrac{5T}{2}$ στο διάγραμμα (vi). Το κύμα που φθάνει στο σημείο Ο (αρχή του άξονα) τη χρονική στιγμή t = 0, θα διαδοθεί προς τα δεξιά του και τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{5T}{2}$ θα έχει φθάσει σε απόσταση $\dfrac{5\lambda}{2}$, δηλαδή στο σημείο Μ με συντεταγμένη x = 50 cm.

Τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται δεξιά του σημείου Μ θα είναι ακίνητα.

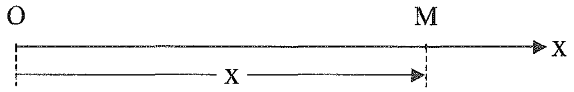


y
υ
(i)
0
x
(ii)
T/2
x
(iii)
T
x
(iv)
3T/2
x
(v)
2T
x
(vi)
5T/2
M
x

35.

α. Η συχνότητα του κύματος είναι

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\pi\, s^{-1}}{2\pi} = 10\ Hz.$$



Από τη σχέση $\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$ προκύπτει: $\lambda = \frac{1\ m \cdot s^{-1}}{10\ s^{-1}} \to \lambda = 0{,}1\ m$

β. Το σημείο M(x) θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{x}{\upsilon} = \frac{2\ m}{1\ m \cdot s^{-1}} \to t = 2\ s$$

γ. Η διαφορά φάσης μεταξύ του σημείου Μ και της πηγής Ο είναι $\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda}$. Συνεπώς η εξίσωση δονήσεως του σημείου Μ θα είναι $y = y_0 \eta\mu(\omega t - \varphi)$ (1)

Έχουμε: $y_0 = 10\ cm$, $\omega = 20\pi\ \frac{rad}{s}$, $\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 2}{0{,}1} = 40\ \pi$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$y = 10\eta\mu(20\pi t - 40\pi) \to y = 10\eta\mu 2\pi(10t - 20)$ (2)

(y σε cm, t σε s) για $t \geq 2\ s$

Για $t_1 = 5{,}625\ s$ η απομάκρυνση του σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του είναι

$$y = 10\eta\mu 2\pi(10 \cdot 5{,}625 - 20) \to y = 10\eta\mu\left(72\pi + \frac{\pi}{2}\right) \to y = 10\ cm.$$

Η φάση του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_1 θα έχει τιμή

$$\varphi_M = 72\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

δ. Η φάση του σημείου Ν, τη χρονική στιγμή t_1, είναι $\varphi_N = 72\pi + \frac{2\pi}{3} > \varphi_M$. Αυτό σημαίνει ότι το κύμα διαδίδεται από το σημείο Ν προς το Μ.

Για τις φάσεις των σημείων Μ και Ν, την ίδια χρονική στιγμή t_1, ισχύουν οι σχέσεις:

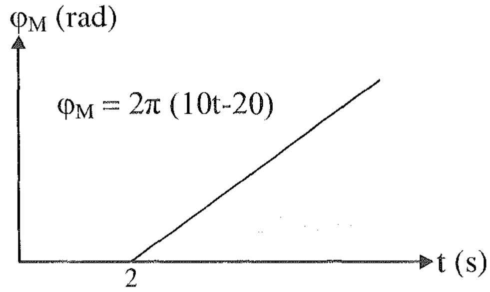
$$\varphi_N = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_N}{\lambda}\right)$$

$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$\varphi_N - \varphi_M = 2\pi\frac{(x_M - x_N)}{\lambda} \rightarrow 72\pi + \frac{2\pi}{3} - \left(72\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\frac{d}{\lambda} \rightarrow \frac{\pi}{6} = 2\pi\frac{d}{\lambda} \rightarrow d = \frac{\lambda}{12} \rightarrow d = \frac{1}{120}\ \mathrm{m}$$

ε. Έχουμε $\varphi_M = 2\pi(10t - 20)$. Το σημείο Μ αρχίζει να δονείται τη χρονική στιγμή $t = 2$ s. Η $\varphi_M = f(t)$ φαίνεται στο σχήμα.



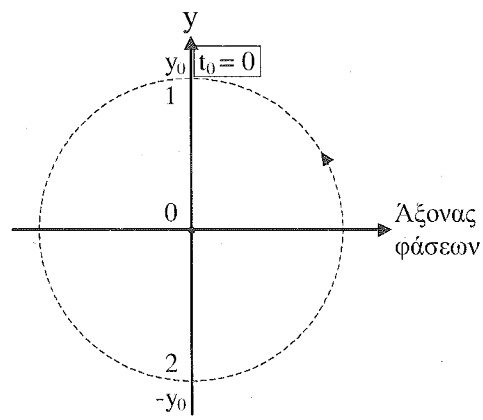
36.

α. Από την εξίσωση $y = 2\eta\mu(2\pi t + \varphi_0)$ για $t = 0$ και $y = +2$ cm έχουμε:

$$\eta\mu\varphi_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0,\ \ 0\le\varphi_0<2\pi} \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

β. Η εξίσωση δονήσεως της πηγής είναι $y = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Για ένα σημείο του ελαστικού μέσου σε απόσταση x από αυτή θα έχουμε:

$$y = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$



Δίνεται ότι το κύμα διανύει απόσταση d = 25 cm από τη στιγμή t = 0 μέχρι να περάσει η πηγή από τη θέση ισορροπίας της για τρίτη φορά. Από τον κύκλο αναφοράς βρίσκουμε εύκολα ότι η πηγή περνάει από τη θέση ισορροπίας της, για τρίτη φορά, τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{T}{4} + \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = \frac{5T}{4}$$

Ισχύει $d = \upsilon t_1 = \frac{5}{4}\upsilon T \rightarrow d = \frac{5\lambda}{4} \rightarrow \lambda = \frac{4}{5}d \rightarrow \lambda = 20\text{ cm}$ (2)

Από (1), (2): $y = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{20}\right) \rightarrow y = 2\eta\mu 2\pi\left(t + \frac{1}{4} - \frac{x}{20}\right)$ (x, y σε cm, t σε s) (3)

γ. Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός μορίου του ελαστικού μέσου θα είναι:

$V = 4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(t + \frac{1}{4} - \frac{x}{20}\right)$ Για x = 10 cm προκύπτει

$V = 4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(t - \frac{1}{4}\right)$ (t σε s, V σε $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$) (4)

$$\upsilon = \lambda \cdot \nu = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} = 20\text{ cm} \times \frac{2\pi\text{ s}^{-1}}{2\pi} \rightarrow \upsilon = 20\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Η εξίσωση (4) ισχύει για $t + \frac{1}{4} - \frac{x}{20} \ge 0$. Για x = 10 cm προκύπτει $t \ge 0{,}25$ s.

Άρα για $t \ge 0{,}25$ s η εξίσωση της επιτάχυνσης για ένα μόριο του ελαστικού μέσου θα είναι

$$\alpha = -\omega^2 x \xrightarrow{(1),\ x=10\,cm} \alpha = -8\pi^2 \eta\mu 2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right) \quad (t \text{ σε s}, \alpha \text{ σε } \frac{cm}{s^2}) \tag{5}$$

Και η (5) ισχύει για $t \geq 0{,}25$ s, δηλαδή μετά από τη στιγμή που φθάνει στο σημείο αυτό η διαταραχή που παράχθηκε από την πηγή τη στιγμή $t = 0$.

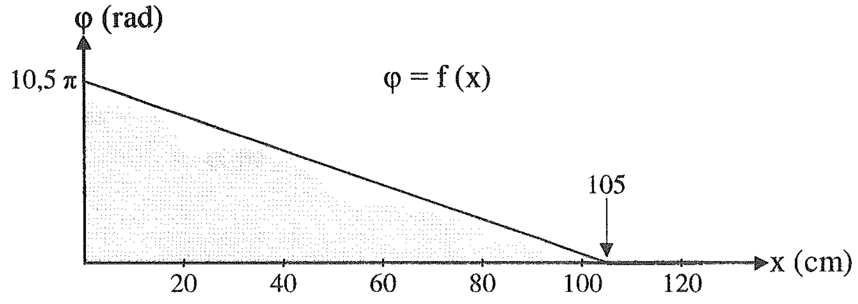
δ. Η φάση του κύματος είναι $\varphi = 2\pi\left(t+\frac{1}{4}-\frac{x}{20}\right)$

Για t = 5 s έχουμε $\varphi = 2\pi\left(5+\frac{1}{4}-\frac{x}{20}\right) \rightarrow \varphi = \frac{42\pi}{4}-\frac{\pi x}{10}$ (6)

Για x = 0 στη θέση της πηγής η φάση του κύματος είναι $\varphi = \frac{42\pi}{4} = 10{,}5\pi$. Η φάση έχει τιμή $\varphi = 0$ στη θέση όπου

$\frac{42\pi}{4}-\frac{\pi x}{10} = 0$ δηλαδή στη θέση όπου x = 105 cm.

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης (6) φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

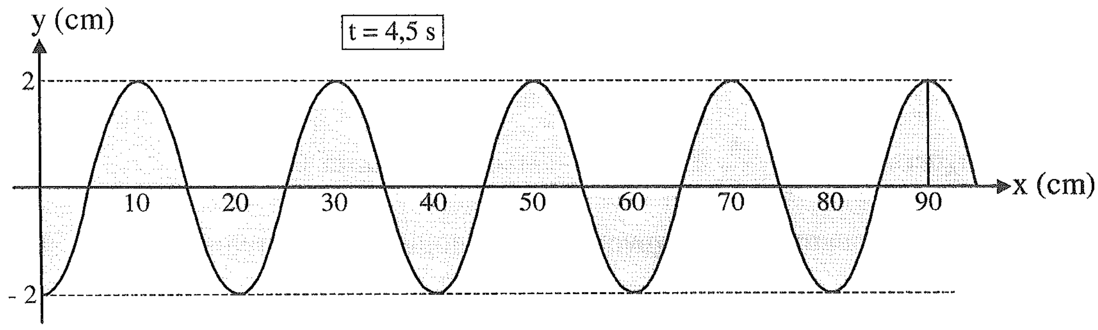


ε. Βρίσκουμε την απομάκρυνση της αρχής O, x = 0, για t = 4,5 s.

Είναι $y = 2\eta\mu 2\pi\left(4{,}5+\frac{1}{4}\right) \rightarrow y = 2\eta\mu\left(9\pi+\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = -2$ cm.

Η θέση στην οποία έχει φτάσει το κύμα τη στιγμή t = 4,5 s είναι η θέση στην οποία η φάση του κύματος μηδενίζεται. Από τη σχέση $\varphi = 2\pi\left(t+\frac{1}{4}-\frac{x}{20}\right)$ για φ = 0 και t = 4,5 s, προκύπτει x = 95 cm.

Το στιγμιότυπο του κύματος φαίνεται στο σχήμα.



37.

α. Από το σχήμα (α) που παριστάνει το στιγμιότυπο του κύματος, βρίσκουμε το μήκος κύματος. Είναι $\lambda = 10$ cm.

Από το σχήμα (β), που παριστάνει την απομάκρυνση της πηγής από τη θέση ισορροπίας της σε συνάρτηση με το χρόνο, βρίσκουμε την περίοδο του κύματος. Είναι $T = 0{,}8$ s.

β. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T} \rightarrow \upsilon = \dfrac{10\text{ cm}}{0{,}8\text{ s}} \rightarrow \upsilon = 12{,}5\,\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$

γ. Η εξίσωση δονήσεως του σημείου Ο, της αρχής, είναι $y = y_0 \eta\mu \dfrac{2\pi}{T} t$ γιατί για $t = 0$ είναι $y = 0$ και $V > 0$, όπως προκύπτει από το σχήμα (β).

Άρα η απομάκρυνση ενός σημείου στη θέση x είναι

$$y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0{,}8} - \frac{x}{10}\right) \rightarrow y = 2\eta\mu 2\pi\left(1{,}25t - \frac{x}{10}\right) \quad (\text{t σε s, x, y σε cm}) \quad (1)$$

δ. Για το σημείο Α στη θέση $x = 10$ cm βρίσκουμε την απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t = 0{,}8$ s. Από την (1): $y_A = 0$ (2)

Η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου υπολογίζεται από την εξίσωση $V = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{0{,}8} \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(1{,}25t - \dfrac{x}{10}\right)$. Για $t = 0{,}8$ s και $x = 10$ cm θα έχουμε για το σημείο Α:

$$V_A = 5\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Η επιτάχυνση, λόγω της ταλάντωσης, ενός σημείου του ελαστικού μέσου υπολογίζεται από την εξίσωση $\alpha = -\omega^2 y$. Για το σημείο Α λόγω της (2) έχουμε $\alpha = 0$.

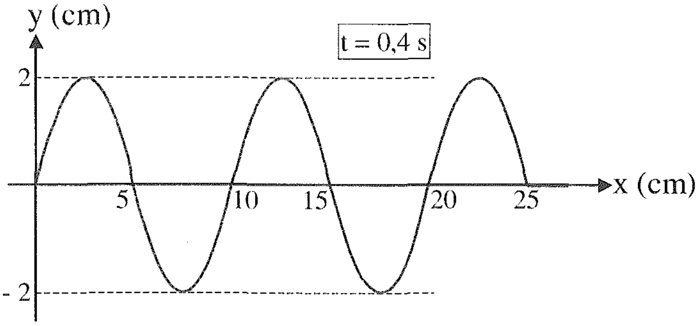
ε. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}4$ s το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$$x = x_0 + \upsilon t = 20\text{ cm} + 12{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \times 0{,}4\text{ s} \rightarrow x = 25\text{ cm}.$$

Από την (1) για $t = 0{,}4$ s έχουμε:

$$y = 2\eta\mu 2\pi\left(1{,}25 \cdot 0{,}4 - \frac{x}{10}\right) = 2\eta\mu\left(\pi - \frac{\pi x}{5}\right) \rightarrow y = 2\eta\mu \frac{\pi x}{5}.$$

Άρα το ζητούμενο στιγμιότυπο του κύματος είναι αυτό που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

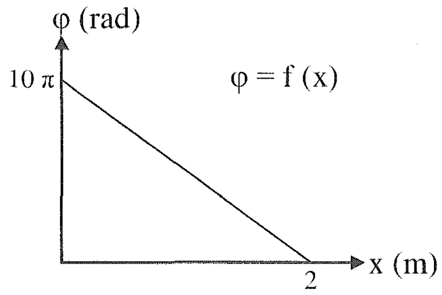


38.

α. Η φάση του κύματος δίνεται από την εξίσωση $\varphi = 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$ (1)

Την εξίσωση (1) θα ικανοποιούν οι τιμές

$$\begin{pmatrix} \varphi = 10\pi \\ x = 0\ \text{m} \\ t = 2\ \text{s} \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} \varphi = 0 \\ x = 2\ \text{m} \\ t = 2\ \text{s} \end{pmatrix}$$



Από την εξίσωση (1) και την πρώτη τριάδα τιμών βρίσκουμε

$$10\pi = 2\pi\left(\frac{2}{T} - 0\right) \rightarrow T = 0{,}4\ \text{s}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη τριάδα τιμών βρίσκουμε

$$0 = 2\pi\left(\frac{2}{0{,}4} - \frac{2}{\lambda}\right) \rightarrow \lambda = 0{,}4\ \text{m}$$

β. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T} \rightarrow \upsilon = 1\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

γ. Η εξίσωση του κύματος είναι

$$y = y_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0{,}4} - \frac{x}{0{,}4}\right) \rightarrow y = 0{,}1\eta\mu 2\pi(2{,}5t - 2{,}5x) \quad \text{(SI)} \qquad (2)$$

δ. i) Από την (2) για x = 1 m και t = 4 s προκύπτει

$$y_A = 0{,}1\eta\mu 2\pi(2{,}5\cdot 4 - 2{,}5\cdot 1) = 0{,}1\eta\mu 2\pi(10-2{,}5) = 0{,}1\eta\mu 15\pi \rightarrow y_A = 0 \qquad (3)$$

ii) Η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου δίνεται από την εξίσωση $V = 0{,}5\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(2{,}5t - 2{,}5x)$. Για t = 4 s και x = 1 m έχουμε

$$V_A = 0{,}5\pi\sigma\upsilon\nu 15\pi \rightarrow V_A = -0{,}5\frac{m}{s}$$

iii) Η επιτάχυνση του σημείου Α τη χρονική στιγμή t = 4 s είναι

$$\alpha_A = -\omega^2 y_A \xrightarrow{(3)} \alpha_A = 0$$

ε. Βρίσκουμε την απομάκρυνση της πηγής από τη θέση ισορροπίας της τη στιγμή t = 2 s. Από τη σχέση (2) για t = 2 s και x = 0 βρίσκουμε:

$$y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\cdot 10 \rightarrow y = 0$$

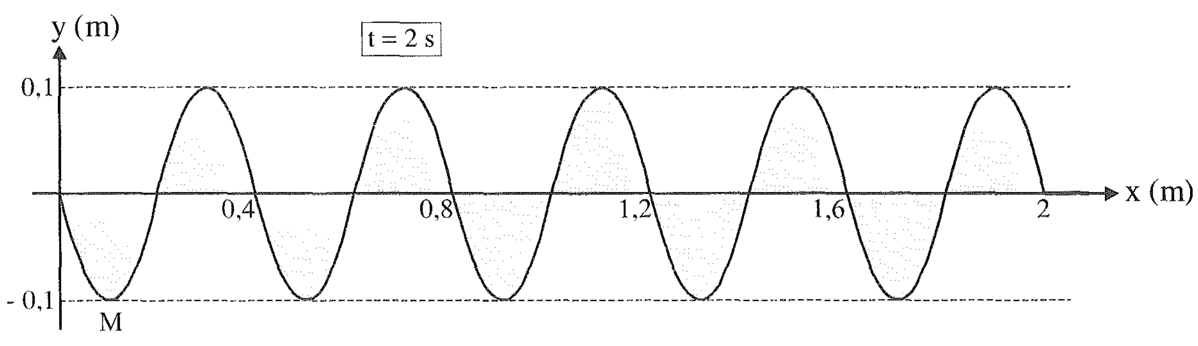
Το σημείο Μ βρίσκεται δεξιά της πηγής, σε απόσταση $x = \frac{\lambda}{4}$ από αυτήν. Βρίσκουμε την απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t = 2 s.

Από τη σχέση (2) για t = 2 s και x = 0,1 m έχουμε

$$y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(2{,}5\cdot 4 - \frac{0{,}1}{0{,}4}\right) = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(10 - \frac{1}{4}\right) \rightarrow y = 0{,}1\eta\mu\left(20\pi - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = -0{,}1 \text{ m}$$

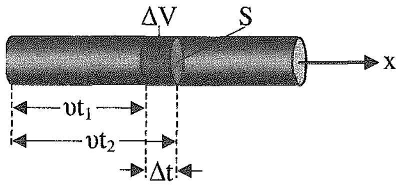
Τη χρονική στιγμή t = 2 s το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x = \upsilon\cdot t = 1\frac{m}{s}\times 2\text{ s} \rightarrow x = 2$ m.

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζεται το στιγμιότυπο του κύματος, όπως φαίνεται στο σχήμα.



39.

α. Από την εξίσωση του κύματος $y = y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$ και τη δοσμένη εξίσωση $y = 0{,}2ημ2π(t - x)$ βρίσκουμε εύκολα ότι $T = 1$ s, $λ = 1$ m.



β. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $υ = \frac{λ}{T} \rightarrow υ = 1\,\frac{m}{s}$.

γ. Θεωρούμε δύο στιγμιότυπα του κύματος. Στο πρώτο στιγμιότυπο το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $υt_1$ από την πηγή ενώ στο δεύτερο έχει διαδοθεί σε απόσταση $υt_2$.

Σε χρόνο $Δt$ το κύμα προχώρησε κατά $υ \cdot Δt$ και μετέφερε ενέργεια σε όλα τα μόρια του ελαστικού μέσου που περιέχονται στον όγκο $ΔV = S \cdot υ \cdot Δt$ (1)

Η ενέργεια αυτή πέρασε από την επιφάνεια εμβαδού S σε χρονικό διάστημα $Δt$ και επομένως για την ένταση I του κύματος θα έχουμε:

$$I = \frac{W}{S \cdot Δt} \qquad (2)$$

Αν κάθε μόριο του ελαστικού μέσου έχει μάζα m, η ολική του ενέργεια θα είναι

$$E_i = \frac{1}{2} m_i V_0^2 = \frac{1}{2} m_i ω^2 y_0^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot 4π^2 ν^2 y_0^2 \rightarrow E = 2π^2 ν^2 m_i y_0^2 \qquad (3)$$

Η ολική ενέργεια W, του αριθμού των μορίων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στον όγκο ΔV θα είναι:

$$W = \sum E \text{ και λόγω της (3): } W = 2π^2 ν^2 y_0^2 \sum m_i \qquad (4)$$

όπου $\sum m_i = M$ η συνολική μάζα που περιέχεται στον όγκο ΔV.

Προφανώς θα ισχύει $\sum m_i = M = ρ \cdot ΔV$ και λόγω της (1) θα έχουμε $\sum m_i = ρ \cdot S \cdot υ \cdot Δt$.

Με αντικατάσταση στην (4) προκύπτει: $W = 2π^2 \cdot ν^2 \cdot y_0^2 \cdot ρ \cdot S \cdot υ \cdot Δt$ (5)

Από τις (1), (5) βρίσκουμε για την ένταση I:

$$I = \frac{2π^2 \cdot ν^2 \cdot y_0^2 \cdot ρ \cdot S \cdot υ \cdot Δt}{S \cdot Δt} \rightarrow I = 2π^2 \cdot ν^2 \cdot ρ \cdot υ \cdot y_0^2 \qquad (6)$$

Βλέπουμε ότι η ένταση I του κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους της ταλάντωσης. Από τη δοσμένη εξίσωση του κύματος προκύπτει $y_0 = 0{,}2\ \mathrm{m}$.

Με αντικατάσταση των μεγεθών με τις τιμές τους στην εξίσωση (6) βρίσκουμε

$$I = 2\times 10\times 1\ s^{-2}\times 10^{-5}\ \frac{kg}{m^3}\times 1\ \frac{m}{s}\times 4\cdot 10^{-2}\ m^2 \rightarrow I = 8\cdot 10^{-6}\ \frac{W}{m^2}$$

40.

α. Η ένταση του κύματος είναι:

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4\pi r^2} \rightarrow I = \frac{8\pi\ W}{4\pi\cdot (2\ m)^2} \rightarrow I = 0{,}5\ \frac{W}{m^2}$$

β. Η ένταση του κύματος στο σημείο A θα είναι

$$I_A = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{8\pi\ W}{4\pi\cdot (10\ m)^2} \rightarrow I_A = 2\cdot 10^{-2}\ \frac{W}{m^2}$$

Ισχύει όμως για την ένταση του κύματος στο σημείο A η σχέση $I_A = \dfrac{W}{\Delta S\cdot \Delta t}$. Άρα

$$W = I_A\cdot \Delta S\cdot \Delta t \rightarrow W = 2\cdot 10^{-2}\ \frac{W}{m^2}\times 20\cdot 10^{-4} m^2\times 10\ s \rightarrow W = 4\cdot 10^{-4}\ J$$

γ. Από τη σχέση $I = \dfrac{P}{4\pi r^2}$ έχουμε $r = \sqrt{\dfrac{P}{4\pi\cdot I}} = \sqrt{\dfrac{8\pi\ W}{4\pi\cdot 8\cdot 10^{-2}\ W\cdot m^{-2}}} \rightarrow r = 5\ m$

41.

α. Γνωρίζουμε ότι $\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$.

Συνεπώς $r_2=r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \rightarrow r_2=r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_1/4}} \rightarrow r_2=2r_1 \rightarrow r_2=6\text{ m}$

β. i) Σε απόσταση r_1 από την πηγή η ένταση του κύματος έχει τιμή I_1 και το πλάτος ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου, στην απόσταση αυτή, είναι $y_{0,1}$.

Θα ισχύει: $I_1=k\cdot y_{0,1}^2$ (1)

Όμοια για ένα σημείο σε απόσταση r_2 από την πηγή θα ισχύει

$I_2=k\cdot y_{0,2}^2$ (2)

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2):

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{y_{0,1}^2}{y_{0,2}^2} \rightarrow y_{0,2}=y_{0,1}\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}=2\cdot 10^{-5}\text{ m}\sqrt{\frac{I_1}{4I_1}} \rightarrow y_{0,2}=10^{-5}\text{ m}$$

ii) Θέλουμε στην απόσταση $r_1=3\text{ m}$ το πλάτος της ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου να διπλασιαστεί. Δηλαδή $y'_{0,1}=2y_{0,1}$.

Η ένταση του κύματος θα γίνει $I_1'=k\cdot y'^2_{0,1}=4k\cdot y_{0,1}^2=4I_1$ οπότε η ισχύς της πηγής πρέπει να γίνει P'.

Έχουμε $I_1=\frac{P}{\Delta S}$ και $I_1'=4I_1 \rightarrow \frac{P'}{\Delta S}=4\frac{P}{\Delta S} \rightarrow P'=4P$.

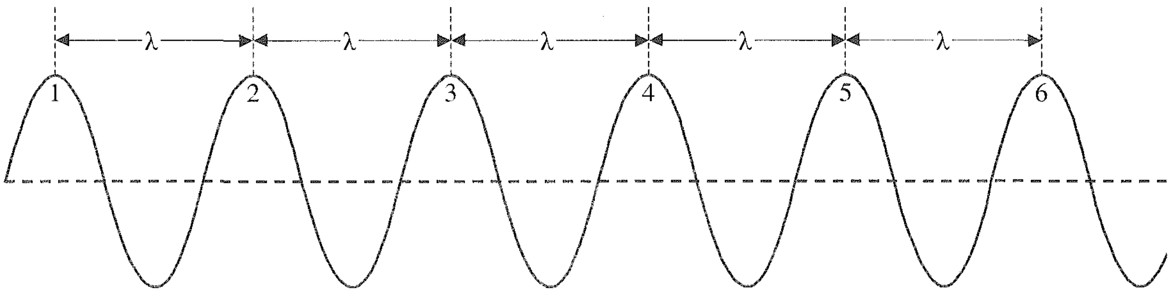
Η επί τοις % μεταβολή της ισχύος της πηγής είναι:

$$x\%=\frac{\Delta P}{P}\cdot 100\%=\frac{P'-P}{P}\cdot 100\%=\frac{4P-P}{P}\cdot 100\% \rightarrow x\%=300\%$$

42.

α. Η συχνότητα του κύματος είναι ίση με τη συχνότητα της διέγερσης της επιφάνειας του νερού. Δηλαδή $v = \frac{N}{\Delta t} = \frac{120}{60\ s} \to v = 2\ Hz$ και άρα $T = 0{,}5\ s$.

Μεταξύ n διαδοχικών «ορέων» ενός εγκάρσιου κύματος περιλαμβάνονται $n-1$ μήκη κύματος. Συνεπώς θα έχουμε: $\lambda = \frac{d}{n-1} \to \lambda = \frac{2{,}5\ m}{5} \to \lambda = 0{,}5\ m$



β. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \to \upsilon = \frac{0{,}5\ m}{0{,}5\ s} \to \upsilon = 1\ \frac{m}{s}$.

γ. i) Όταν η ενέργεια εκπέμπεται από την πηγή ομοιόμορφα πάνω σε ομογενές και ισότροπο ελαστικό μέσον, τότε γύρω από την πηγή δημιουργούνται συγκεντρικά κυκλικά κύματα των οποίων οι ακτίνες αυξάνουν. Η ενέργεια που παρέχει η πηγή στο κύμα κατανέμεται σε μεγαλύτερη μάζα νερού με συνέπεια το πλάτος ταλάντωσης να ελαττώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από την πηγή.

ii) Η ενέργεια που εκπέμπει η πηγή κατανέμεται σε κύκλους των οποίων τα μήκη είναι ανάλογα των ακτίνων τους. Η ενέργεια ταλάντωσης των σημείων ενός κύκλου είναι:

$E_{ολ} = \frac{1}{2} m_{ολ} \cdot V_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (\mu \cdot 2\pi r) \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 = k \cdot y_0^2 \cdot r$ όπου μ η μάζα ανά μονάδα μήκους.

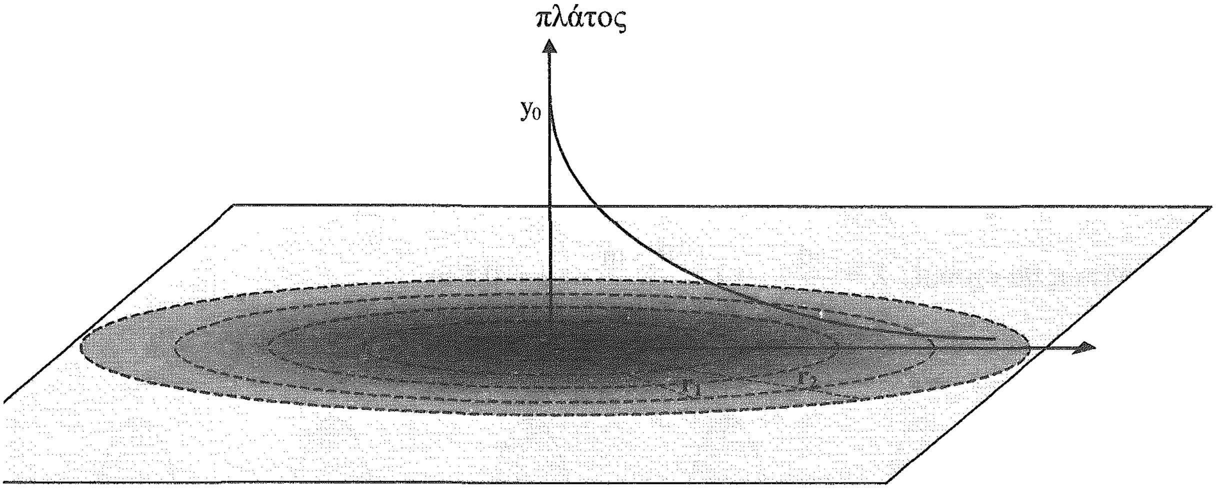
Η εκπεμπόμενη ενέργεια από την πηγή είναι ίδια για όλους τους κύκλους. Για δύο σημεία 1 και 2 που απέχουν από την πηγή Ο αποστάσεις r_1, r_2 και ταλαντώνονται με πλάτη y_{01}, y_{02}, αντίστοιχα, θα ισχύει:

$$E = k \cdot y_{01}^2 \cdot r_1 = k \cdot y_{02}^2 \cdot r_2 \to \frac{y_{0,2}^2}{y_{0,1}^2} = \frac{r_1}{r_2} \to \frac{y_{0,2}}{y_{0,1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \qquad (1)$$

ή γενικότερα $y_{0,x} = \frac{A}{\sqrt{r}}$ (2)

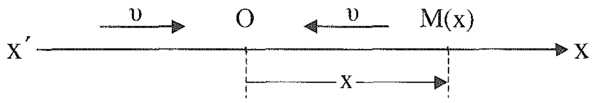
όπου Α σταθερά.

<u>Σχόλιο:</u> Η εξίσωση (2) παριστάνεται γραφικά όπως φαίνεται στο σχήμα.



43.

α. Η εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του σημείου M(x), λόγω του κύματος που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, είναι



$$y_1 = y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) \qquad (1)$$

ενώ λόγω του κύματος που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση είναι

$$y_2 = y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right) \qquad (2)$$

Η συνολική απομάκρυνση του σημείου Μ θα έχει αλγεβρική τιμή

$$y = y_1 + y_2 \xrightarrow{(1),(2)} y = y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) + y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right) \qquad (3)$$

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι

$ημα + ημβ = 2ημ\left(\frac{α+β}{2}\right)συν\left(\frac{α-β}{2}\right)$. Άρα η (3) γράφεται

$$y = 2y_0 ημ\frac{1}{2}\cdot 2π\left\{\frac{t}{T} - \frac{x}{λ} + \frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right\}\cdot συν\frac{1}{2}2π\left\{\frac{t}{T} - \frac{x}{λ} - \frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right\} \rightarrow$$
$$y = 2y_0 ημ\frac{2π}{T}t\ συν2π\frac{(-x)}{λ} \rightarrow y = 2y_0 συν2π\frac{x}{λ}\cdot ημ\frac{2π}{T}t \qquad (4)$$

Η εξίσωση (4) δεν παριστάνει ένα τρέχον κύμα, αλλά μια αρμονική ταλάντωση ίδιας συχνότητας με αυτή των δύο κυμάτων και πλάτος που εξαρτάται από τη θέση του σημείου.

$$A = 2y_0\left|συν\frac{2πx}{λ}\right| \qquad (5)$$

Η εξίσωση (4) ονομάζεται εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β. <u>Θέσεις δεσμών:</u> Οι θέσεις των σημείων του άξονα $x'x$ για τα οποία το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με μηδέν, βρίσκονται από την εξίσωση (5) αν τεθεί $A = 0$. Τα σημεία αυτά ονομάζονται δεσμοί.

Έχουμε $A = 0$ ή $συν\frac{2πx}{λ} = 0$. Άρα $\frac{2πx}{λ} = kπ + \frac{π}{2}$, $k \in Z$ ή $x = (2k+1)\frac{λ}{4}$, $k \in Z$ (6)

Θέσεις κοιλιών: Οι θέσεις των σημείων του άξονα x΄x για τα οποία ισχύει $A = 2y_0$ βρίσκονται από την εξίσωση (5) αν τεθεί $\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$ και

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = k\pi, \quad k \in Z \text{ ή } x = k\frac{\lambda}{2}, \quad k \in Z \qquad (7)$$

γ. i) Από την εξίσωση (6) έχουμε $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ ή $\Delta x = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{4} - (2k+1)\frac{\lambda}{4} \to \Delta x = \frac{\lambda}{2}$

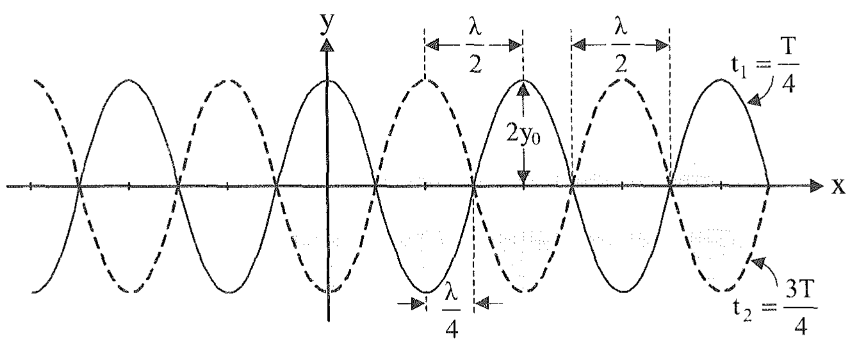
ii) Από την εξίσωση (7) έχουμε: $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ ή $\Delta x = (k+1)\frac{\lambda}{2} - k\frac{\lambda}{2} \to \Delta x = \frac{\lambda}{2}$

iii) Έστω x_Δ, x_k οι συντεταγμένες θέσης του δεσμού και της γειτονικής κοιλίας. Η μεταξύ τους απόσταση θα είναι:

$$d = |x_\Delta - x_k| = \left|2(k+1)\frac{\lambda}{4} - k\frac{\lambda}{2}\right| = \left|k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - k\frac{\lambda}{2}\right| \to d = \frac{\lambda}{4}$$

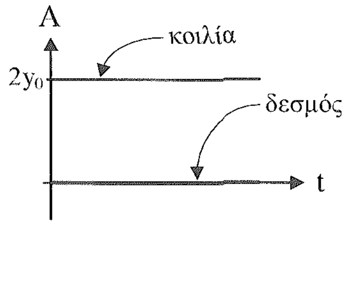
δ. Στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος. Αν θεωρήσουμε το χρόνο σταθερό στην εξίσωση $y = 2y_0\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$ και παραστήσουμε γραφικά την απομάκρυνση y σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη x παίρνουμε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος.

Για $t_1 = \frac{T}{4}$ και $t_2 = 3\frac{T}{4}$ τα στιγμιότυπα φαίνονται στο σχήμα.

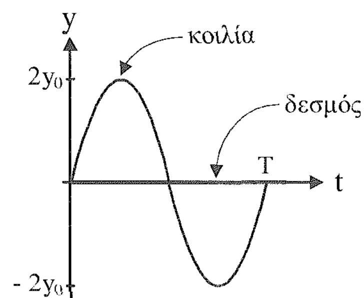


44.

Α. α. β. Το πλάτος ταλάντωσης δεσμού καθώς και η απομάκρυνση y είναι μηδέν κάθε χρονική στιγμή. Το πλάτος ταλάντωσης υλικού σημείου που αντιστοιχεί σε κοιλία είναι σταθερό $(A = 2y_0)$ και η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο. Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα σχήμα (i) και (ii).



(i)



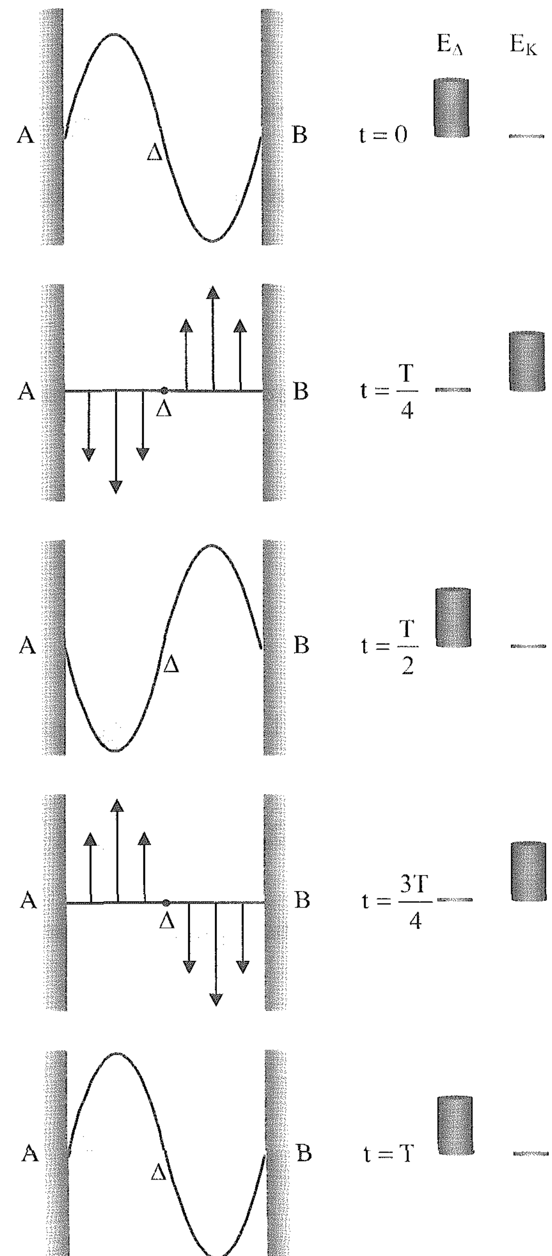
(ii)

Β. α. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος είναι η γραφική παράσταση της εξίσωσης του στάσιμου κύματος μια ορισμένη χρονική στιγμή.

Όλα τα σημεία του νήματος φθάνουν ταυτόχρονα στη θέση ισορροπίας τους και στην συνέχεια ταυτόχρονα φθάνουν στη μέγιστη απομάκρυνσή τους από τη θέση ισορροπίας τους. Το στιγμιότυπο του κύματος, η μορφή του νήματος τις ζητούμενες χρονικές στιγμές, φαίνεται στο σχήμα.

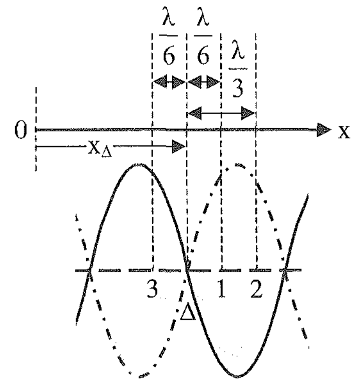
β. Τις χρονικές στιγμές $0, \frac{T}{2}, T$ το νήμα είναι ακίνητο. Όλη η ενέργεια ταλάντωσης είναι δυναμική ενέργεια και είναι αποθηκευμένη στο νήμα ως ενέργεια παραμόρφωσης καθώς αυτό κινείται πάνω κάτω. Τις χρονικές στιγμές $\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}$ όλα τα σημεία του νήματος διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους και όλη η ενέργεια ταλάντωσης είναι κινητική ενέργεια.

Η κατανομή της ενέργειας φαίνεται στο σχήμα.



45.

α. Επειδή η απόσταση των σημείων είναι $\Delta x<\frac{\lambda}{2}$, τα σημεία ή θα βρίσκονται προς την ίδια πλευρά του δεσμού Δ και θα ταλαντώνονται με συμφωνία φάσης ή θα βρίσκονται εκατέρωθεν του δεσμού Δ και θα ταλαντώνονται με αντίθεση φάσης.



<u>Σημεία 1, 2:</u> $\Delta\varphi=0$

<u>Σημεία 2, 3:</u> $\Delta\varphi=\pi$

β. Έστω x_Δ η θέση του δεσμού και $y=2y_0\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T}$ η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

Εφόσον στη θέση x_Δ σχηματίζεται δεσμός θα είναι $\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x_\Delta}{\lambda}=0$. (1)

Είναι $\eta\mu^2 2\pi\frac{x_\Delta}{\lambda}+\sigma\upsilon\nu^2 2\pi\frac{x_\Delta}{\lambda}=1$ άρα $\eta\mu 2\pi\frac{x_\Delta}{\lambda}=\pm 1$ (2)

Για ένα σημείο σε απόσταση Δx από το δεσμό, δηλαδή στη θέση $x_\Delta\pm\Delta x$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A=2y_0\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(x_\Delta\pm\Delta x)}{\lambda}\right|$

Αναπτύσσουμε το $\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(x_\Delta\pm\Delta x)}{\lambda}$ και έχουμε:

$$A=2y_0\left|\left\{\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x_\Delta}{\lambda}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}\mp\eta\mu 2\pi\frac{x_\Delta}{\lambda}\cdot\eta\mu 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}\right\}\right|$$ και λόγω των (1), (2):

$$A=2y_0\left|\eta\mu 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}\right|$$

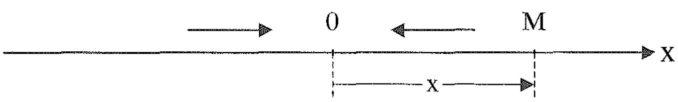
Για $\Delta x=\frac{\lambda}{6}$ (σημείο 1 ή 3): $A=2y_0\left|\eta\mu 2\pi\frac{\lambda/6}{\lambda}\right|\rightarrow A=y_0\sqrt{3}$ (3)

Για $\Delta x=\frac{\lambda}{3}$ (σημείο 2): $A=2y_0\left|\eta\mu 2\pi\frac{\lambda/3}{\lambda}\right|\rightarrow A=y_0\sqrt{3}$ (4)

Από (3), (4) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος $A=y_0\sqrt{3}$.

46.

α. Θεωρούμε ως αρχή του άξονα $x'x$ το σημείο Ο στο οποίο συναντώνται τα δύο κύματα τη χρονική στιγμή $t = 0$.



Η συνολική απομάκρυνση του σημείου Μ, λόγω των δύο κυμάτων, έχει αλγεβρική τιμή

$$y = y_1 + y_2 = y_0 ημ(kx - ωt) + y_0 ημ(kx - ωt) \rightarrow y = 2y_0 ημkx συνωt \qquad (1)$$

όπου $A = 2y_0|ημkx|$ (2)

το πλάτος του στάσιμου κύματος.

β. <u>Θέσεις δεσμών:</u> Από την εξίσωση (2) για $A = 0$ έχουμε:

$$ημkx = 0 \text{ ή } kx = nπ \rightarrow \frac{2π}{λ}x = nπ \rightarrow x = n\frac{λ}{2}, \quad n \in Z \qquad (3)$$

<u>Θέσεις κοιλιών:</u> Από την εξίσωση (2) για $A = 2y_0$ προκύπτει

$$|ημkx| = 1 \rightarrow ημkx = \pm 1 \rightarrow kx = (2n+1)\frac{π}{2} \rightarrow \frac{2π}{λ}x = (2n+1)\frac{π}{2} \rightarrow x = (2n+1)\frac{λ}{4}, \quad n \in Z \qquad (4)$$

γ. i) <u>Απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών:</u> Από την (3) έχουμε:

$$Δx = x_{n+1} - x_n = (n+1)\frac{λ}{2} - n\frac{λ}{2} \rightarrow Δx = \frac{λ}{2}$$

ii) <u>Απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών:</u> Από την εξίσωση (4) βρίσκουμε:

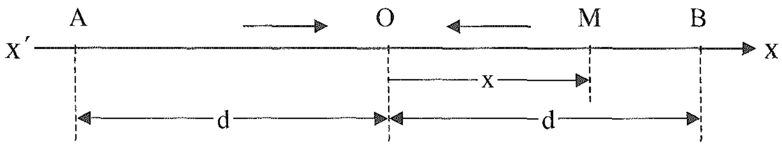
$$Δx = x_{n+1} - x_n = [2(n+1)+1]\frac{λ}{4} - (2n+1)\frac{λ}{4} \rightarrow Δx = \frac{λ}{2}$$

iii) <u>Απόσταση δεσμού από γειτονική του κοιλία.</u> Από τις εξισώσεις (3), (4) προκύπτει:

$$d = \left|n\frac{λ}{2} - (2n+1)\frac{1}{4}\right| = \left|n\frac{λ}{4} - n\frac{λ}{2} - \frac{λ}{4}\right| \rightarrow d = \frac{λ}{4}$$

47.

α. Η εξίσωση δονήσεως του σημείου Ο είναι $y = y_0 ημωt$ εξαιτίας καθενός από τα κύματα. Για το σημείο Μ η συνολική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του, εξαιτίας και των δύο κυμάτων, θα είναι



$$y = y_1 + y_2 = y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) + y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right) \to \ y = 2y_0 συν2\frac{πx}{λ} ημ\frac{2π}{T} t \to$$

$$y = 8συν\frac{πx}{2} ημ10πt \quad (x,\ y \text{ σε cm, t σε s}) \qquad (1)$$

β. Για το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου, μεταξύ των θέσεων Α, Β έχουμε:

$$A = 8\left|συνπ\frac{x}{2}\right| \qquad (2)$$

Στις θέσεις των δεσμών είναι Α = 0. Επομένως από (2) προκύπτει:

$$συν\frac{πx}{2} = 0 \text{ ή } \frac{πx}{2} = (2k+1)\frac{π}{2} \to x = 2k+1 \text{ (cm)} \quad k \in Z$$

Πρέπει όμως $|x| \leq d$. Άρα $-d \leq x \leq d$ ή $-d \leq 2k+1 \leq d \to -10 \leq 2k+1 \leq 10 \to -5{,}5 \leq k \leq 4{,}5$

Οι δυνατές τιμές του k είναι: $-5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$

Σχηματίζονται 10 δεσμοί στις θέσεις που φαίνονται στον πίνακα Ι.

Πίνακας Ι

k	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$x_Δ$ (cm)	–9	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7	9

Στις θέσεις των κοιλιών είναι Α = 8 cm. Από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι:

$$συνπ\frac{x}{2} = \pm 1 \text{ ή } \frac{πx}{2} = kπ \to x = 2k \text{ (cm)} \quad k \in Z$$

Πρέπει όμως $|x| \leq d$ και άρα $-d \leq x \leq d$ ή $-d \leq 2k \leq +d \to -10 \leq 2k \leq +10 \to -5 \leq k \leq 5$

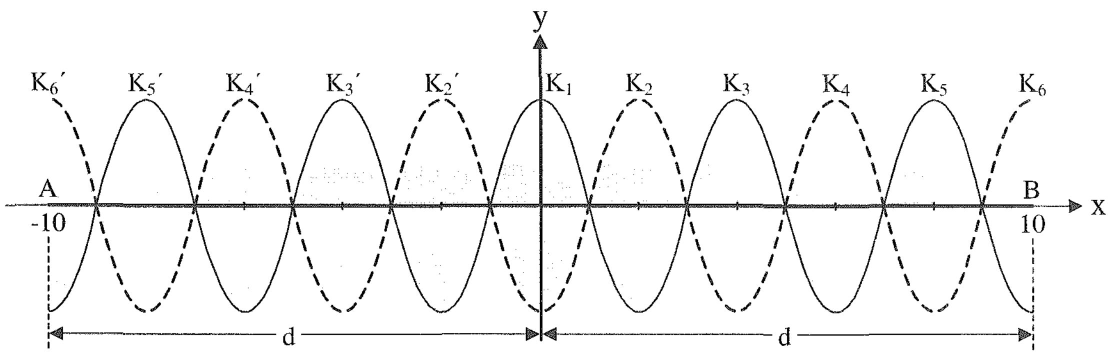
Οι δυνατές τιμές του k είναι: $\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$

Σχηματίζονται 11 κοιλίες στις θέσεις που φαίνονται στον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας ΙΙ

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_K (cm)	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10

Οι θέσεις των δεσμών και των κοιλιών φαίνονται στα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος στο παρακάτω σχήμα.



γ. Η δεύτερη προς τα δεξιά του Ο κοιλία σχηματίζεται στη θέση x = 4 cm. Η εξίσωση της απομάκρυνσης y = f(t) προκύπτει από την (1) για x = 4 cm:

$$y = 8\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{2}\eta\mu 10\pi t \rightarrow y = 8\eta\mu 10\pi t \quad (\text{y σε cm, t σε s})$$

48.

α. Το πλάτος της ταλάντωσης των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο δημιουργείται στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση $y = 8συν\dfrac{πx}{6}ημ10πt$ (1)

είναι $A = 8\left|συν\dfrac{πx}{6}\right|$

Η μέγιστη τιμή του πλάτους A πραγματοποιείται όταν $\left|συν\dfrac{πx}{6}\right| = 1$.

Άρα $A_{max} = 8$ cm.

β. Από την εξίσωση $y = 2y_0συν2π\dfrac{x}{λ}ημ2π\dfrac{t}{T}$ και την (1) συμπεραίνουμε ότι

$y_0 = 4$ cm

$\dfrac{2πx}{λ} = \dfrac{πx}{6} \rightarrow λ = 12$ cm

$\dfrac{2π}{T} = 10π \rightarrow T = 0{,}2$ s

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $υ = \dfrac{λ}{T} \rightarrow υ = 0{,}6\dfrac{m}{s}$.

γ. Από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι:

$$ημα \cdot συνβ = \frac{1}{2}[ημ(α+β) + ημ(α-β)]$$

Η εξίσωση (1) γράφεται

$$y = 4\left[ημ\left(10πt + \frac{πx}{6}\right) + ημ\left(10πt - \frac{x}{6}\right)\right] \rightarrow y = 4ημ2π\left(5t - \frac{x}{12}\right) + 4ημ2π\left(5t + \frac{x}{12}\right)$$

Είναι φανερό ότι οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν με τη συμβολή τους το στάσιμο κύμα είναι:

$$y_1 = 4ημ2π\left(5t - \frac{x}{12}\right)$$

$$y_2 = 4ημ2π\left(5t + \frac{x}{12}\right)$$

(x, y_1, y_2 σε cm, t σε s)

49.

α. Η εξίσωση του κύματος το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄x έχει τη γενική μορφή $y = y_0 ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ} + \frac{φ_0}{2π}\right)$.

Από τη σύγκριση της εξίσωσης αυτής με την εξίσωση $y_1 = 2{,}5ημ2π(20t - \frac{x}{6} + \frac{1}{2})$ έχουμε:

$$\frac{1}{T} = 20 \rightarrow T = \frac{1}{20}s$$

$$\frac{1}{λ} = \frac{1}{6} \rightarrow λ = 6\ cm$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $υ = \frac{λ}{T} \rightarrow υ = 1{,}2\ \frac{m}{s}$.

β. Η συνολική απομάκρυνση ενός σημείου του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδονται τα κύματα είναι

$$y = y_1 + y_2 = 2{,}5ημ2π\left(20t - \frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right) + 2{,}5ημ2π\left(20t + \frac{x}{6}\right) \rightarrow$$

$$y = 5ημ\frac{1}{2}2π\left(40t + \frac{1}{2}\right)συν\frac{1}{2}2π\left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = 5ημ\left(40πt + \frac{π}{2}\right)συν\left(\frac{π}{2} - \frac{πx}{3}\right) \rightarrow$$

$$y = 5ημ\frac{πx}{3}συν40πt \quad (x, y\ σε\ cm,\ t\ σε\ s) \qquad (1)$$

γ. Από τη σχέση (1), για x = 1,5 cm, προκύπτει $y = 5συν40πt$.

Η ταχύτητα ταλάντωσης V του σημείου θα δίνεται από την εξίσωση $V = -200πημ40πt$.

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{9}{8}s$ έχουμε $V = -200π\ ημ40π\frac{9}{8} = -200π\ ημ45π \rightarrow V = 0$

50.

α. Η εξίσωση του τρέχοντος κύματος το οποίο συμβάλλει με το δεδομένο κύμα και δημιουργεί στάσιμο κύμα θα είναι $y_2 = 4\eta\mu\pi\left(t + \frac{x}{10}\right)$ (x, y_2 σε cm, t σε s) (1)

β. Η συνολική απομάκρυνση ενός σημείου του ελαστικού μέσου εξαιτίας των δύο κυμάτων θα είναι

$$y = y_1 + y_2 = 8\eta\mu\pi\left(t - \frac{x}{10}\right) + 8\eta\mu\pi\left(t + \frac{x}{10}\right) \rightarrow y = 8\eta\mu\frac{1}{2}\pi(2t)\,\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}\pi\left(-\frac{2x}{10}\right) \rightarrow$$

$$y = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\eta\mu\pi t \quad \text{(x, y σε cm, t σε s)} \qquad (2)$$

γ. Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου εξαιτίας των δύο κυμάτων είναι $A = 8\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\right|$. Για x = 2,5 cm έχουμε $A = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \rightarrow A = 4\sqrt{2}$ cm.

Συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $y = 4\sqrt{2}\,\eta\mu\pi t$.

Οι εξισώσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση θα είναι

$$V = 4\pi\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\pi t, \quad \left(\text{V σε } \frac{cm}{s}, \text{ t σε s}\right)$$

$$\alpha = -4\pi^2\sqrt{2}\,\eta\mu\pi t, \quad \left(\text{α σε} \frac{cm}{s^2}, \text{ t σε s}\right)$$

51.

α. Από τη σύγκριση των εξισώσεων

$$y = 2y_0 συν2π\frac{x}{λ}ημ2π\frac{t}{T} \text{ και } y = 6συν\frac{πx}{10}ημ10πt, \text{ έχουμε:}$$

$$2y_0 = 6\text{ cm} \rightarrow y_0 = 3\text{ cm}$$

$$\frac{2π}{λ} = \frac{π}{10}\text{ cm}^{-1} \rightarrow λ = 20\text{ cm}$$

$$\frac{2π}{T} = 10π\text{ s}^{-1} \rightarrow T = 0,2\text{ s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι $υ = \frac{λ}{T} \rightarrow υ = 1\,\frac{m}{s}$

β. Είναι $ημα \cdot συνβ = \frac{1}{2}[ημ(α+β) + ημ(α-β)]$.

Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος θα έχουμε

$$6συν\frac{πx}{10}ημ10πt = 3\left[ημ\left(10πt + \frac{πx}{10}\right) + ημ\left(10πt - \frac{πx}{10}\right)\right] = 3ημ2π\left(5t + \frac{x}{20}\right) + 3ημ2π\left(5t - \frac{x}{20}\right)$$

Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων τα οποία με τη συμβολή τους δημιουργούν το στάσιμο κύμα θα είναι

$$y_1 = 3ημ2π\left(5t - \frac{x}{20}\right) \text{ και } y_2 = 3ημ2π\left(5t + \frac{x}{20}\right) \quad (x, y_1, y_2 \text{ σε cm, t σε s})$$

γ. Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου είναι $A = 6\left|συνπ\frac{x}{10}\right|$.

Για $x = \pm 25$ cm είναι $A = 6\left|συν\left(\pm\frac{25π}{10}\right)\right| \rightarrow A = 0$.

Τα σημεία Α, Β του ελαστικού μέσου είναι δεσμοί του στάσιμου σώματος.

δ. Η απόσταση μεταξύ των σημείων Α, Β είναι

$$d = |x_2 - x_1| \rightarrow d = |25\text{ cm} - (-25\text{ cm})| \rightarrow d = 50\text{ cm}$$

Ισχύει $d = n\frac{λ}{2}$ ή $n = \frac{2d}{λ} = \frac{2 \times 50\text{ cm}}{20\text{ cm}} \rightarrow n = 5$ άτρακτοι.

Επομένως σχηματίζονται n = 5 κοιλίες.

ε. i) Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων δε μεταβάλλεται εφόσον το είδος των κυμάτων και το ελαστικό μέσον δε μεταβάλλονται. Επειδή όμως μεταβάλλεται η συχνότητα των κυμάτων θα μεταβάλλεται και το μήκος κύματος.

Τα σημεία Α, Β εξακολουθούν να είναι δεσμοί της κίνησης και επομένως ο αριθμός (n – 1) των κοιλιών στο τμήμα ΑΒ θα συνδέεται με το νέο μήκος κύματος λ' και την απόσταση d με τη σχέση $d = (n-1)\dfrac{\lambda'}{2}$. Άρα $\lambda' = \dfrac{2d}{n-1} = \dfrac{2 \cdot 50\ \text{cm}}{5-1} \to \lambda' = 25$ cm.

Η νέα περίοδος $T' = \dfrac{\lambda'}{\upsilon} \to T' = 0{,}25$ s.

ii) Η εξίσωση του νέου στάσιμου κύματος θα είναι:

$$y = 2y_0 \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda'} \eta\mu \frac{2\pi}{T'} t \to y = 6\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{25} \eta\mu 16\pi t \cdot (x,\ y \text{ σε cm, } t \text{ σε s})$$

52.

α. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T}$.

Έχουμε $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ ή $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ και $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Άρα $\upsilon = \dfrac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{\omega}} \to \upsilon = \dfrac{\omega}{k}$

β. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος, που δημιουργείται από τη συμβολή των κυμάτων που περιγράφουν οι δοσμένες εξισώσεις, είναι:

$$y = y_1 + y_2 = y_0 \eta\mu(\omega t - kx + \varphi_0) + y_0 \eta\mu(\omega t + kx) \to$$

$$y = 2y_0 \left[\eta\mu \frac{1}{2}(2\omega t + \varphi_0)\ \sigma\upsilon\nu \frac{1}{2}(-2kx + \varphi_0) \right] = 2y_0 \eta\mu\left(\omega t + \frac{\varphi_0}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(-kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) \to$$

$$y = 2y_0 \sigma\upsilon\nu\left(-kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) \eta\mu\left(\omega t + \frac{\varphi_0}{2}\right) \to y = 2y_0 \sigma\upsilon\nu\left(kx - \frac{\varphi_0}{2}\right) \eta\mu\left(\omega t + \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

όπου $A = 2y_0 \left| \sigma\upsilon\nu\left(kx - \dfrac{\varphi_0}{2}\right) \right|$ το πλάτος του στάσιμου. (1)

Θέσεις δεσμών: Στα σημεία του ελαστικού μέσου που σχηματίζονται δεσμοί του στάσιμου κύματος ισχύει: Α = 0 ή λόγω της (1): $\sigma\upsilon\nu\left(kx-\frac{\varphi_0}{2}\right)=0$

Συνεπώς:

$$kx-\frac{\varphi_0}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{\varphi_0}{2k}+(2n+1)\frac{\pi}{2k}\xrightarrow{k=\frac{2\pi}{\lambda}}x=\frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda+(2n+1)\frac{\lambda}{4},\quad n\in Z \qquad (1)$$

Αν ήταν $\varphi_0=0$ οι θέσεις των δεσμών θα ήταν:

$$x=(2n+1)\frac{\lambda}{4},\quad n\in Z \qquad (2)$$

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι οι θέσεις των δεσμών μεταβάλλονται. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι

$$d=\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|\frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda+[2(n+1)+1]\frac{\lambda}{4}-\frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda-2(n+1)\frac{\lambda}{4}\right|\rightarrow d=\frac{\lambda}{2}\ \text{ανεξάρτητα από τη}\ \varphi_0.$$

Θέσεις κοιλιών: Στις θέσεις των κοιλιών θα είναι $A=2y_0$ ή

$$\sigma\upsilon\nu\left(kx-\frac{\varphi_0}{2}\right)=\pm1\rightarrow kx-\frac{\varphi_0}{2}=n\pi\rightarrow x=\frac{\varphi_0}{2k}+\frac{n\pi}{k}\xrightarrow{k=\frac{2\pi}{\lambda}}x=\frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda+n\frac{\lambda}{2},\quad n\in Z \qquad (3)$$

Αν ήταν $\varphi_0=0$ οι θέσεις των κοιλιών θα ήταν:

$$x=n\frac{\lambda}{2},\quad n\in Z \qquad (4)$$

Από (3), (4) συμπεραίνουμε ότι οι θέσεις των κοιλιών μεταβάλλονται. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών είναι:

$$d=\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|\frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda+(n+1)\frac{\lambda}{2}-\frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda-n\frac{\lambda}{2}\right|\rightarrow d=\frac{\lambda}{2}\ \text{ανεξάρτητη από τη}\ \varphi_0.$$