ΕΝΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΥΠΡΟΥ

30 Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

(αφιερωμένη στη μνήμη του Ανδρέα Παναγή)

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Β΄ Φάση)

Κυριακή, 20 Μαρτίου 2016

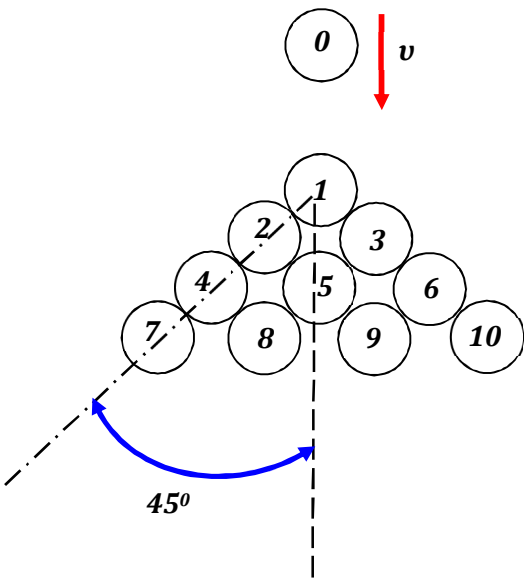
Ώρα: 10:00 - 13:00

Οδηγίες:

1) ***Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες και πέντε (5) θέματα.***
2) ***Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.***
3) ***Κάθε θέμα βαθμολογείται με 20 μονάδες. Σε κάθε θέμα οι μονάδες κάθε ερωτήματος φαίνονται στο τέλος του ερωτήματος.***
4) ***Στο τετράδιο απαντήσεων να αναγράφεται ξεκάθαρα ο αριθμός του θέματος και του ερωτήματος που απαντάτε.***
5) ***Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.***
6) ***Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.***
7) ***Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε ή μαύρου μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).***
8) ***Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.***
9) ***Δίνεται:*** $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$.

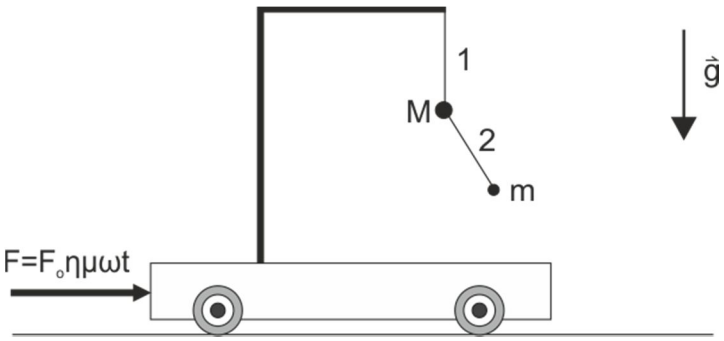
ΘΕΜΑ 1ο

Φανταστείτε ότι έχετε ένα τραπέζι αέρα πάνω στο οποίο μπορούν να κινηθούν 10 δίσκοι. Η ύπαρξη του αέρα βοηθά στον εκμηδενισμό των τριβών και μπορείτε επομένως στα επόμενα να αγνοήσετε τις τριβές. Θεωρήστε ότι οι 10 δίσκοι είναι τοποθετημένοι σε τριγωνική διάταξη όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι αρχικά ακίνητοι (υποθέστε ότι η ύπαρξη του αέρα δεν προκαλεί μετακίνηση των δίσκων). Ένας 11ος δίσκος (ο δίσκος με το νούμερο 0), ρίχνεται με αρχική ταχύτητα *υ*, κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της τριγωνικής διάταξης των υπόλοιπων 10 δίσκων. Θεωρήστε ότι όλοι οι δίσκοι έχουν τις ίδιες διαστάσεις και μάζα. Ακριβώς μετά από όλες τις συγκρούσεις που συνέβησαν, ποιοι δίσκοι βρίσκονται σε κίνηση και ποιες οι ταχύτητές τους;



ΘΕΜΑ 2ο

Α. Σε έναν ορθοστάτη, ο οποίος είναι προσαρμοσμένος σε αμαξάκι κρεμιέται με το νήμα 1 μια μικρή σφαίρα μάζας M, από την οποία κρεμιέται μέσω του νήματος 2 μια δεύτερη μικρή σφαίρα μάζας m. Με την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης το αμαξάκι αναγκάζεται να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μικρού πλάτους σε οριζόντια διεύθυνση με κυκλική συχνότητα ω.

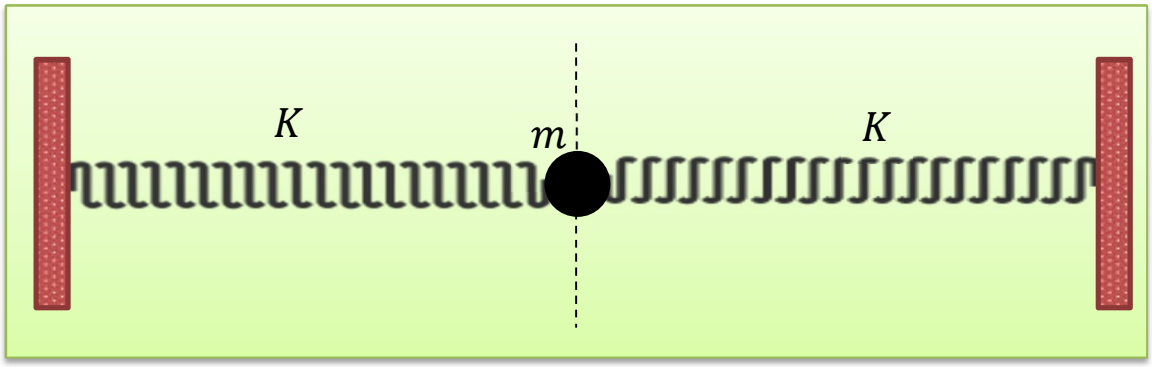


Να δείξετε ότι για να παραμένει το νήμα 1 συνεχώς κατακόρυφο θα πρέπει το μήκος L του νήματος 2 να είναι ίσο με

$$L = \frac{g}{\omega^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

(8 μονάδες)

Β. Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι συνδεδεμένο μέσω δύο πανομοιότυπων ελατηρίων σταθεράς K σε ακλόνητα στηρίγματα. Η σφαίρα βρίσκεται ακίνητη στη θέση ισορροπίας και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η κάτοψη της διάταξης.



(α) Να εξετάσετε κατά πόσο το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, αν το εκτρέψουμε λίγο, παράλληλα με τη διεύθυνση των ελατηρίων.

(6 μονάδες)

(β) Να εξετάσετε κατά πόσο το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, αν το εκτρέψουμε λίγο, κάθετα στη διεύθυνση των ελατηρίων.

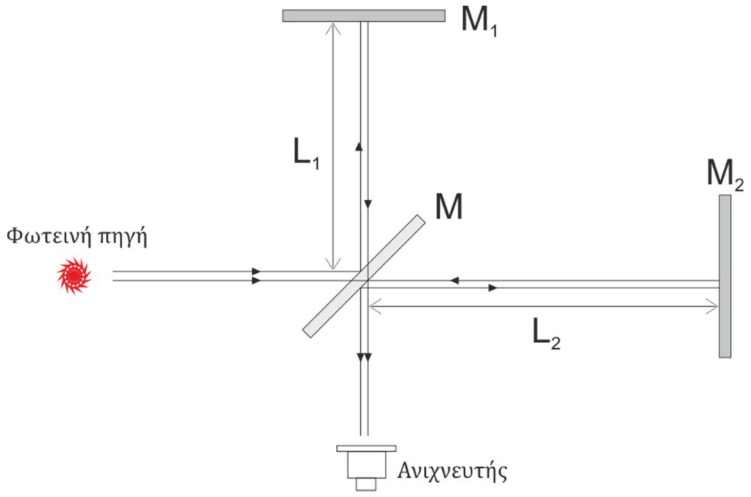
(6 μονάδες)

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση για $\varepsilon \ll 1$

$$(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon \ .$$

ΘΕΜΑ 3ο

Το συμβολόμετρο είναι μια συσκευή, η οποία χρησιμοποιείται για την ακριβή μέτρηση αποστάσεων και με τη βοήθεια της οποίας ανιχνεύθηκαν κύματα βαρυτικής ακτινοβολίας. Στο συμβολόμετρο, μία μονοχρωματική πηγή φωτός εκπέμπει μία φωτεινή δέσμη, η οποία διαιρείται στα δύο από ένα ημιεπαργυρομένο επίπεδο κάτοπτρο M και η μισή δέσμη κινείται προς το κάτοπτρο M_1 διανύοντας απόσταση L_1 ενώ η άλλη μισή κινείται προς το κάτοπτρο M_2 διανύοντας απόσταση L_2. Κατά το διαχωρισμό της δέσμης φωτός η μία δέσμη υφίσταται μεταβολή φάσης π ενώ η άλλη όχι. Οι δύο δέσμες αφού ανακλαστούν στα κάτοπτρα M_1 και M_2 επιστρέφουν και συμβάλλουν. Η εικόνα της συμβολής παρατηρείται από έναν ανιχνευτή, ο οποίος τοποθετείται απέναντι από το κάτοπτρο M_1, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα.



(α) Αν οι αποστάσεις L_1 και L_2 διαφέρουν μεταξύ τους κατά απόσταση d, να εξαγάγετε τις συνθήκες ενισχυτικής και καταστρεπτικής συμβολής των δύο φωτεινών δεσμών, συναρτήσει του μήκους κύματος λ.

(5 μονάδες)

(β) Όταν οι αποστάσεις L_1 και L_2 των βραχιόνων του συμβολόμετρου αρχικά είναι ίσες, ο κεντρικός κροσσός είναι σκοτεινός. Αν ο ένας βραχίονας μετακινηθεί κατά ΔL, μετρούμε 125 φωτεινούς κροσσούς, όταν το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι 632,8nm. Να υπολογίσετε την απόσταση ΔL της μετακίνησης του βραχίονα.

(4 μονάδες)

(γ) Ο δείκτης διάθλασης *n* είναι ένας αδιάστατος αριθμός, ο οποίος δίνει το λόγο της ταχύτητας του φωτός στο κενό *c* προς την ταχύτητα του φωτός σε κάποιο μέσο *υ*.

$$n = \frac{c}{\upsilon}$$

Όταν οι αποστάσεις L_1 και L_2 είναι ίσες και τοποθετήσουμε μπροστά από το κάτοπτρο M_1 ένα λεπτό διαφανές πλακίδιο πάχους D με δείκτη διάθλασης *n*, μεταβάλλεται ο οπτικός δρόμος που ακολουθεί η μια φωτεινή δέσμη κατά απόσταση ΔL. Για την επαναφορά του οπτικού δρόμου αυτής της φωτεινής δέσμης στο αρχικό του μήκος το κάτοπτρο M_1 θα πρέπει να μετακινηθεί προς τον ανιχνευτή κατά απόσταση ΔL.

i. Χωρίς την παρεμβολή του πλακιδίου, ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να διανύσει την απόσταση L_1 (από το κάτοπτρο M στο M_1) είναι $t_1=L_1/c$. Με την παρεμβολή του πλακιδίου το φως διανύει απόσταση L_1-D με ταχύτητα c και απόσταση D με ταχύτητα υ.
Να υπολογίσετε τη μεταβολή Δ*L* του οπτικού δρόμου συναρτήσει των *D* και *n*.

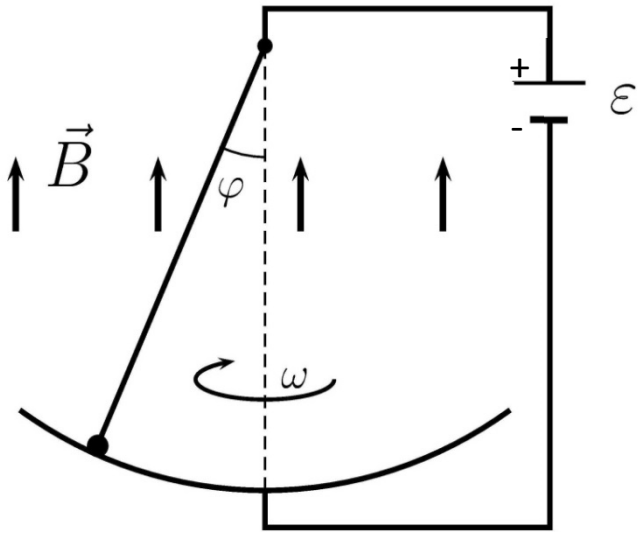
(6 μονάδες)

ii. Αν χρησιμοποιούμε μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 580nm και τοποθετήσουμε μπροστά από το κάτοπτρο M_1 ένα πλακίδιο πάχους D=2,5μm, κατά την μετακίνηση του κατόπτρου M_1 για επαναφορά του οπτικού δρόμου, παρατηρούμε 3 εναλλαγές φωτεινών και σκοτεινών κροσσών. Με βάση την πληροφορία αυτή, να υπολογίσετε το δείκτη διάθλασης του πλακιδίου.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Στο ένα άκρο αβαρούς, αγώγιμης ράβδου είναι προσαρμοσμένο ένα μικρό μεταλλικό σφαιρίδιο, το οποίο εφάπτεται μιας λείας, αγώγιμης σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας $R = 0{,}785\,\mathrm{m}$. Το δεύτερο άκρο της ράβδου είναι προσαρμοσμένο στο κέντρο της σφαίρας με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η ράβδος να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από αυτό χωρίς τριβές και χωρίς το σφαιρίδιο να χάνει επαφή με την επιφάνεια της σφαίρας. Το σύστημα συνδέεται με ηλεκτρική πηγή και τοποθετείται σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B = 0{,}5\,\mathrm{T}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η ράβδος περιστραφεί γύρω από τον κατακόρυφο άξονα με συγκεκριμένη φορά, γωνιακή ταχύτητα $\omega = 5\,\mathrm{rad/s}$ και σχηματίζοντας γωνία φ με την κατακόρυφο, τότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και η γωνία φ θα παραμείνουν σταθερές.



(α) Να εξηγήσετε γιατί η φορά περιστροφής θα πρέπει να είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα για να είναι δυνατή η περιστροφή της ράβδου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

(8 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία φ .

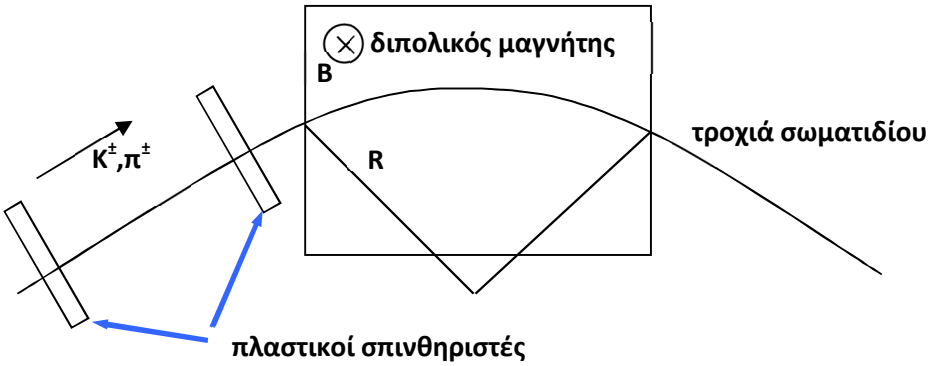
(7 μονάδες)

(γ) Να υπολογίσετε την ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής $\mathcal{E}$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 5ο

Σε πειράματα φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων είναι σημαντικό να αναγνωριστεί ο τύπος των σωματιδίων (p, $\pi^{\pm}$, $K^{\pm}$, μ, e) που εκπέμπονται από το σημείο σκέδασης των δεσμών (σε περίπτωση επιταχυντών) ή από το σημείο διάσπασης ενός σωματιδίου. Αν το σωματίδιο είναι φορτισμένο, η τροχιά του μπορεί να καταγραφεί σε κατάλληλο ανιχνευτή τροχιών, και η ορμή του μπορεί να υπολογισθεί από την μέτρηση της καμπύλωσης της τροχιάς σε ένα μαγνητικό πεδίο. Ένας τρόπος για να αναγνωριστεί ο τύπος του σωματιδίου, είναι να υπολογισθεί η ταχύτητά του (και επομένως να εξαχθεί έμμεσα η μάζα του) μετρώντας τον χρόνο πτήσης του, από το σημείο παραγωγής του στο σημείο όπου υπάρχει ένας ανιχνευτής που μετρά χρονικές διαφορές. Ο ανιχνευτής αυτός ονομάζεται πλαστικός σπινθηριστής και είναι κατασκευασμένος από κατάλληλο πλαστικό υλικό το οποίο διεγείρεται όταν ιονιστεί από κάποιο σωματίδιο. Το υλικό αποδιεγείρεται με την εκπομπή φωτονίων, τα οποία συλλέγονται με κατάλληλες συσκευές (φωτοπολλαπλασιαστές) που μετατρέπουν τα φωτόνια σε ηλεκτρικό σήμα.
Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, θεωρήστε ότι σας δίνεται μια τέτοια ανιχνευτική διάταξη, όπως το παρακάτω σχήμα. Η διάταξη αποτελείται από έναν ανιχνευτή τροχιών μέσα σε μαγνητικό πεδίο ενός διπολικού μαγνήτη επαγωγής 1,5T. Ο ανιχνευτής τροχιών μετρά την ακτίνα, R, καμπύλωσης της τροχιάς ενός φορτισμένου σωματιδίου καθώς αυτό περνά από το μαγνητικό πεδίο. Η ακρίβεια μέτρησης της ακτίνας καμπύλωσης για τον ανιχνευτή του προβλήματος είναι 3mm. Η ανιχνευτική διάταξη περιλαμβάνει επίσης δυο πλαστικούς σπινθηριστές με τους αντίστοιχους φωτοπολλαπλασιαστές τους, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε απόσταση 10m μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι φωτοπολλαπλασιαστές μπορούν να ανιχνεύουν χρονικές διαφορές δυο σημάτων μεγαλύτερες τουλάχιστον των 100ps (1ps=10^{-12}sec).



Το χαρακτηριστικό αυτό ορίζει το κριτήριο της ποιότητας μιας μέτρησης χρόνου. Συνήθως, η τυπική απόκλιση χρησιμοποιείται για να περιγράψουμε την διακριτική ικανότητα. Η διακριτική ικανότητα μιας ανιχνευτικής διάταξης αντιπροσωπεύει εν γένει την αβεβαιότητα στην μέτρηση ενός μεγέθους που δίνει η διάταξη και επομένως την ικανότητα της διάταξης να διαχωρίσει δυο διαφορετικές μετρήσεις μεταξύ τους.

Θεωρήστε ότι θέλετε να χρησιμοποιήσετε το σύστημα αυτό για να διαχωρίσετε φορτισμένα πιόνια (μάζα πιονίου m_{π}=140MeV/c^2) από φορτισμένα καόνια (μάζα καονίου m_K=494 MeV/c^2). Το φορτίο των δυο σωματιδίων έχει απόλυτη τιμή όπως και αυτό του ηλεκτρονίου. Τα σωματίδια έχουν ορμή 1,0 GeV/c και η τροχιά τους μοιάζει με αυτή του σχήματος.

(α) Να υπολογίσετε τη διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή σας για την ορμή των σωματιδίων.

(6 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τη διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή σας για την ταχύτητα των σωματιδίων.

(6 μονάδες)

(γ) Ποια είναι η μέγιστη ορμή που μπορούν να έχουν τα σωματίδια πέρα από την οποία δεν μπορείτε να ξεχωρίσετε με τις μετρήσεις που θα κάνετε ποια σωματίδια είναι πιόνια και ποια καόνια.

(8 μονάδες)

Υπόδειξη 1: Μπορεί να φανεί χρήσιμο να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση $(1+\varepsilon)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ για $\varepsilon \ll 1$, όπως προκύπτει από το διωνυμικό ανάπτυγμα.

Υπόδειξη 2: Δίνεται ότι $1eV = 1{,}6 \times 10^{-19}\mathrm{J}$ και το φορτίο ενός ηλεκτρονίου είναι $Q_e = 1{,}6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$. Η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$. Για μετατροπές μονάδων ισχύουν: 1Mega (M) = 10^6, 1Giga (G) = 10^9, 1Tera (T) = 10^{12}, 1micro (μ) = 10^{-6}, 1nano (n) = 10^{-9}, 1pico (p) = 10^{-12}.

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΕΝΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΥΠΡΟΥ

30^{H} ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

(αφιερωμένη στη μνήμη του Ανδρέα Παναγή)

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Β΄ Φάση)

Κυριακή, 20 Μαρτίου 2016

Ώρα: 10:00 - 13:00

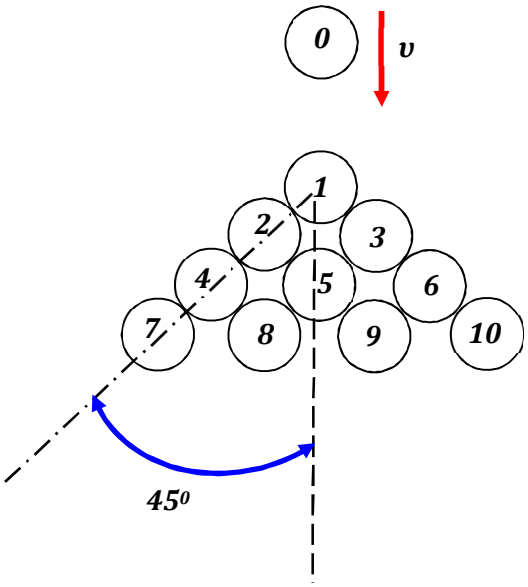
Οδηγίες:

1) ***Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες και πέντε (5) θέματα.***
2) ***Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.***
3) ***Κάθε θέμα βαθμολογείται με 20 μονάδες. Σε κάθε θέμα οι μονάδες κάθε ερωτήματος φαίνονται στο τέλος του ερωτήματος.***
4) ***Στο τετράδιο απαντήσεων να αναγράφεται ξεκάθαρα ο αριθμός του θέματος και του ερωτήματος που απαντάτε.***
5) ***Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.***
6) ***Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.***
7) ***Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε ή μαύρου μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).***
8) ***Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.***
9) ***Δίνεται:*** $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

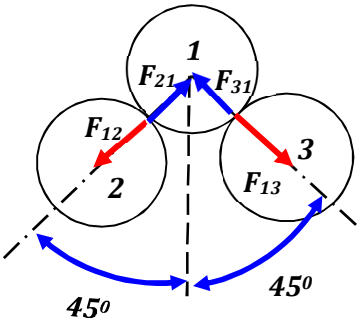
Φανταστείτε ότι έχετε ένα τραπέζι αέρα πάνω στο οποίο μπορούν να κινηθούν 10 δίσκοι. Η ύπαρξη του αέρα βοηθά στον εκμηδενισμό των τριβών και μπορείτε επομένως στα επόμενα να αγνοήσετε τις τριβές. Θεωρήστε ότι οι 10 δίσκοι είναι τοποθετημένοι σε τριγωνική διάταξη όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι αρχικά ακίνητοι (υποθέστε ότι η ύπαρξη του αέρα δεν προκαλεί μετακίνηση των δίσκων). Ένας 11^{ος} δίσκος (ο δίσκος με το νούμερο 0), ρίχνεται με αρχική ταχύτητα $υ$, κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της τριγωνικής διάταξης των υπόλοιπων 10 δίσκων. Θεωρήστε ότι όλοι οι δίσκοι έχουν τις ίδιες διαστάσεις και μάζα. Ακριβώς μετά από όλες τις συγκρούσεις που συνέβησαν, ποιοι δίσκοι βρίσκονται σε κίνηση και ποιες οι ταχύτητές τους;



ΛΥΣΗ:

Από την κρούση του δίσκου 0 και 1 επειδή τα σώματα έχουν την ίδια μάζα και συγκρούονται κεντρικά, ανταλλάσουν ταχύτητες. Έτσι ο δίσκος 0 σταματά και ο δίσκος 1 αποκτά ταχύτητα υ και κινείται στην ίδια διεύθυνση με τον δίσκο 0 κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του συστήματος.

Ο δίσκος 1 έρχεται σε ελαστική κρούση με τους δίσκους 2 και 3. Οι δυνάμεις επαφής που αναπτύσσονται κατά την κρούση των τριων σωμάτων φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Οι δυνάμεις αυτές που είναι δράσης-αντίδρασης αναπτύσσονται στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δίσκων και επομένως θα σχηματίζουν γωνία 45° με την άξονα συμμετρίας του συστήματος.



Από διατήρηση της ορμής κατά μήκος της y-διεύθυνσης (κατά μήκος του άξονα συμμετρίας) θα έχουμε ότι:

$$\vec{p}_{1y} = \vec{p}'_{1y} + \vec{p}_{2y} + \vec{p}_{3y} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_1 = m\vec{\upsilon}'_{1y} + m\vec{\upsilon}_{2y} + m\vec{\upsilon}_{3y} \Rightarrow \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}'_{1y} + \vec{\upsilon}_{2y} + \vec{\upsilon}_{3y} \qquad \textbf{(1)}$$

Με βάση τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση, ο δίσκος 1 μετά την κρούση θα κινείται με ταχύτητα υ'_1 στην διεύθυνση της αρχικής του ταχύτητας (κατά μήκος του άξονα συμμετρίας) ενώ οι δίσκοι 2 και 3 θα κινούνται και οι δύο με ταχύτητες ίδιου μέτρου, $|\vec{\upsilon}_2| = |\vec{\upsilon}_3| = v$ και διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα συμμετρίας. Η (**1**) γράφεται:

$$\upsilon = \upsilon'_1 + \upsilon_2 \sigma\upsilon\nu\left(45^0\right) + \upsilon_3 \sigma\upsilon\nu\left(45^0\right) \Rightarrow \upsilon = \upsilon'_1 + 2v\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \upsilon = \upsilon'_1 + v\sqrt{2} \Rightarrow \upsilon'_1 = \upsilon - v\sqrt{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_1'^2 + 2v^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Αντικαθιστούμε την (2) στην (3) και έχουμε:

$$\upsilon^2 = \upsilon^2 + 2v^2 - 2\upsilon v\sqrt{2} + 2v^2 \Rightarrow 4v^2 = 2\upsilon v\sqrt{2} \Rightarrow v = \upsilon\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textbf{(4)}$$

Οι δίσκοι 2 και 3 επομένως μετά την κρούση κινούνται με ταχύτητες μέτρου $v = \upsilon\sqrt{2}/2$. Αντικατάσταση του τελευταίου αποτελέσματος στην (**2**) δίνει ότι μετά την κρούση ο δίσκος 1 είναι ακίνητος:

$$\upsilon'_1 = \upsilon - \upsilon\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \upsilon'_1 = \upsilon - \upsilon \Rightarrow \upsilon'_1 = 0\,m/s \qquad \textbf{(5)}$$

Από την στιγμή που οι δίσκοι 2 και 3 κινούνται σε 45° γωνία ως προς τον άξονα συμμετρίας, τότε δεν έρχονται σε σύγκρουση με το δίσκο 5 ενώ συγκρούονται κεντρικά με τους δίσκους 4 και 6 που έχουν ίδια μάζα. Στις συγκρούσεις αυτές ανταλλάσουν ταχύτητες, έτσι οι δίσκοι 2 και 3 ακινητοποιούνται και οι δίσκοι 4 και 6 κινούνται σε 45° γωνία ως προς τον άξονα συμμετρίας με ταχύτητα μέτρου $v = \upsilon\sqrt{2}/2$.

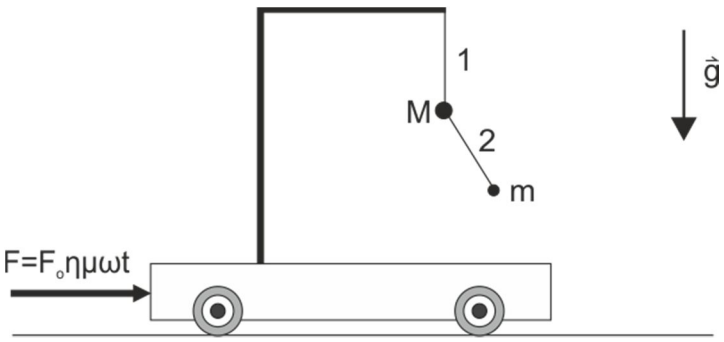
Ο δίσκος 4 συγκρούεται μετωπικά με τον δίσκο 7 και ο δίσκος 6 συγκρούεται μετωπικά με τον δίσκο 10. Όπως και προηγουμένως οι δίσκοι 4 και 6 ακινητοποιούνται και οι 7 και 10 κινούνται με

ταχύτητες ίσου μέτρου ($v = \upsilon\sqrt{2}/2$) και με γωνία 45° ως προς τον άξονα συμμετρίας. Οι δίσκοι 8 και 9 παραμένουν ακίνητοι γιατί βρίσκονται στην εφαπτομενική διεύθυνση κίνησης των δίσκων 4 και 6 και επομένως καμιά δύναμη δεν εφαρμόζεται πάνω τους.

Στο τέλος όλως των συγκρούσεων, μόνο οι δίσκοι 7 και 10 βρίσκονται σε κίνηση, ο καθένας με ταχύτητα μέτρου $v = \upsilon\sqrt{2}/2$ και σε γωνία $\pm 45^0$ ως προς την αρχική διεύθυνση του δίσκου 0.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Σε έναν ορθοστάτη, ο οποίος είναι προσαρμοσμένος σε αμαξάκι κρεμιέται με το νήμα 1 μια μικρή σφαίρα μάζας M, από την οποία κρεμιέται μέσω του νήματος 2 μια δεύτερη μικρή σφαίρα μάζας m. Με την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης το αμαξάκι αναγκάζεται να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μικρού πλάτους σε οριζόντια διεύθυνση με κυκλική συχνότητα ω.

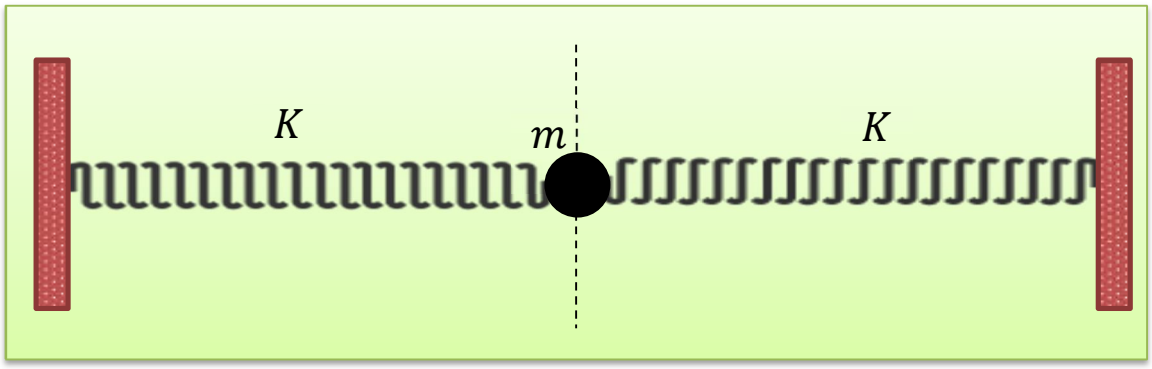


Να δείξετε ότι για να παραμένει το νήμα 1 συνεχώς κατακόρυφο θα πρέπει το μήκος L του νήματος 2 να είναι ίσο με

$$L = \frac{g}{\omega^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

(8 μονάδες)

Β. Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι συνδεδεμένο μέσω δύο πανομοιότυπων ελατηρίων σταθεράς K σε ακλόνητα στηρίγματα. Η σφαίρα βρίσκεται ακίνητη στη θέση ισορροπίας και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η κάτοψη της διάταξης.



(α) Να εξετάσετε κατά πόσο το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, αν το εκτρέψουμε λίγο, παράλληλα με τη διεύθυνση των ελατηρίων.

(6 μονάδες)

(β) Να εξετάσετε κατά πόσο το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, αν το εκτρέψουμε λίγο, κάθετα στη διεύθυνση των ελατηρίων.

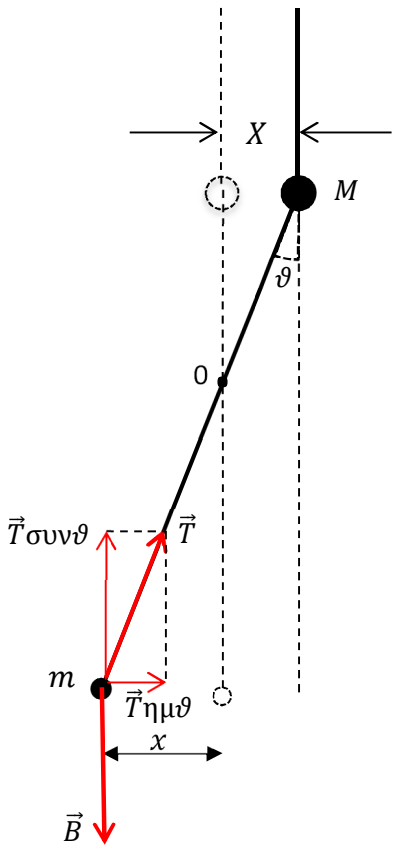
(6 μονάδες)

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση για $\varepsilon \ll 1$

$$(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon \ .$$

ΛΥΣΗ:

Α. Αφού το νήμα 1 παραμένει συνεχώς κατακόρυφο, στο σύστημα των δύο σφαιρών δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στην οριζόντια διεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο μάζας του συστήματος παραμένει ακίνητο. Παίρνοντας ως αρχή των αξόνων το κέντρο μάζας του συστήματος και συμβολίζοντας τις θέσεις των σωμάτων με μάζες M και m με X και x, αντίστοιχα, η θέση του κέντρου μάζας στον οριζόντιο άξονα θα δίνεται από τη σχέση



$$x_{\kappa.\mu.} = \frac{M \cdot X + m \cdot x}{M + m} = 0$$

Άρα

$$M \cdot X + m \cdot x = 0$$

Οι δύο σφαίρες εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω. Τοποθετούμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσής τους. Στην κατακόρυφη διεύθυνση θα έχουμε $T\text{συν}\vartheta = mg$. Για μικρές γωνίες ϑ αυτή η σχέση μας δίνει

$$T \cong mg$$

Στην οριζόντια διεύθυνση ασκείται δύναμη

$$T\text{ημ}\vartheta = T\frac{|x|+|X|}{L} = mg\frac{|x|+\frac{m}{M|x|}}{L} = \frac{mg}{L}|x|\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

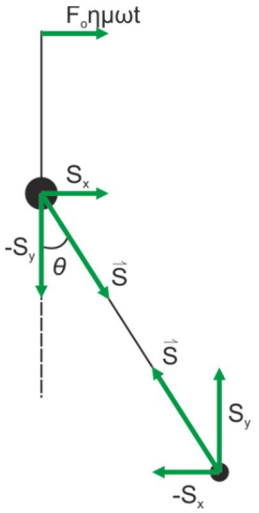
Αυτή η δύναμη είναι δύναμη επαναφοράς για το σώμα μάζας m με μέτρο ίσο με $m\omega^2|x|$. Άρα

$$m\omega^2|x| = \frac{mg}{L}|x|\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

Από εδώ προκύπτει ότι

$$L = \frac{g}{\omega^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

<u>Β΄ Τρόπος</u>



Το σφαιρίδιο μάζας Μ εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση στον άξονα x με συχνότητα ω.
Για μια τυχαία μετατόπιση x_1 του Μ από τη Θ.Ι. η μετατόπιση του m είναι $x_1 + L\eta\mu\theta$.
Για να παραμένει το Μ συνέχεια σε κατακόρυφη θέση πρέπει η συνισταμένη δύναμη στον άξονα x να είναι ίση με την εξωτερική περιοδική δύναμη (το σφαιρίδιο και το αμαξάκι να έχουν την ίδια επιτάχυνση).

Σφαιρίδιο Μ: $Ma_1 = S_x = F_0\eta\mu\omega t \Rightarrow S\eta\mu\theta = F_0\eta\mu\omega t \Rightarrow S = F_0$ και $\theta = \omega t$
$a_1 = F_0\eta\mu\omega t/M$.

Σφαιρίδιο m:

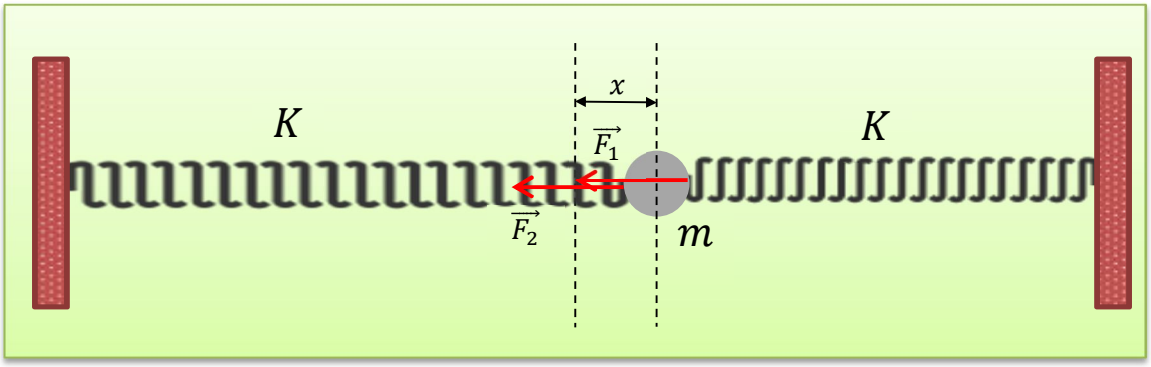
$$-a_2 = -S_x/m = a_1 - \omega^2 L\eta\mu\omega t \Rightarrow S\eta\mu\omega t/m + S\eta\mu\omega t/M = \omega^2 L\eta\mu\omega t$$

Επειδή η γωνία της ταλάντωσης είναι μικρή, ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\theta \approx 1$ οπότε στον άξονα y $S_y = mg \Rightarrow S\sigma\upsilon\nu\theta = mg \Rightarrow S \approx mg$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην πιο πάνω σχέση έχουμε:

$$g + mg/M = \omega^2 L \Rightarrow L = \frac{g}{\omega^2}(1 + m/M)$$

Β. (α) Όταν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του θα ασκούνται σε αυτό δύο δυνάμεις από τα ελατήρια.



Η συνολική δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση θα είναι ίση με

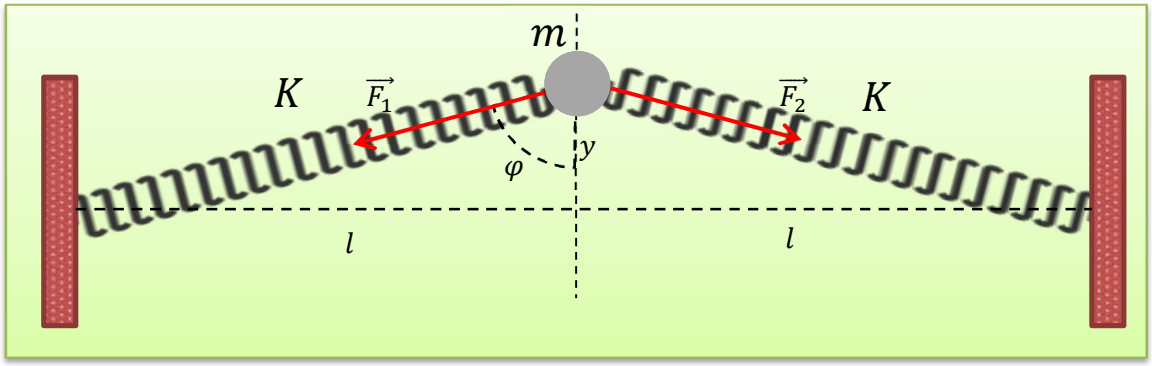
$$\overrightarrow{\Sigma F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2},$$

όπου $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2} = -K \cdot \vec{x}$. Άρα

$$\Sigma F = -2K \cdot x .$$

Από την τελευταία σχέση αποδεικνύεται ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, αφού ασκείται σε αυτό δύναμη επαναφοράς.

Β. (β) Εκτρέπουμε το σώμα κάθετα στην αρχική διεύθυνση των ελατηρίων και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό.



Συμβολίζουμε το αρχικό μήκος κάθε ελατηρίου με l και το νέο τους μήκος, όταν εκτρέπουμε το σώμα, με l'. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι $\overrightarrow{\Sigma F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, όπου $F_1 = F_2 = F = K(l' - l)$.

Αναλύοντας τις δύο δυνάμεις σε άξονες παράλληλα και κάθετα με τη μετατόπιση του σώματος βρίσκουμε ότι

$$\Sigma F = \Sigma F_y = -2F\text{συν}\varphi \Rightarrow \Sigma F = -2K(l' - l)\frac{y}{l'} \Rightarrow \Sigma F = -2Ky\left(1 - \frac{l}{l'}\right)$$

$$\Sigma F = -2Ky\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}}\right) \Rightarrow \Sigma F = -2Ky\left[1 - \left(1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Εφαρμόζοντας την προσέγγιση που περιέχεται στην υπόδειξη , όπου $\varepsilon = (\frac{y}{l})^2$ βρίσκουμε ότι

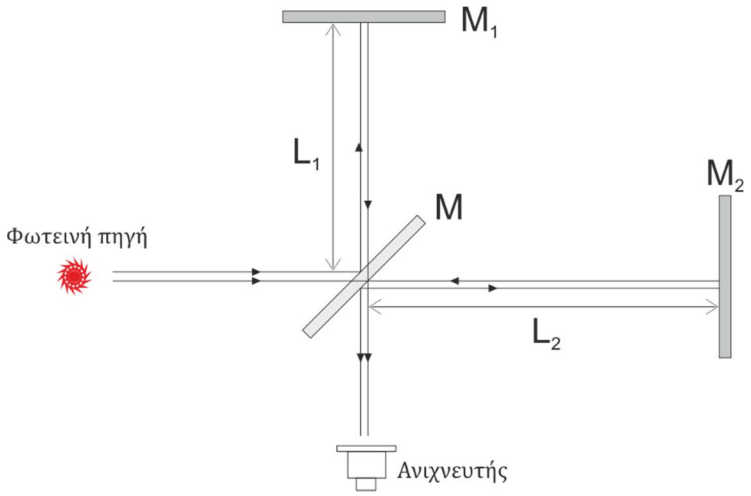
$$\Sigma F = -2Ky \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{y}{l}\right)^2 \Rightarrow \Sigma F = -\frac{K}{l^2}y^3$$

Άρα η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι ανάλογη του y^3 και όχι του y, όπως απαιτείται για να είναι η ταλάντωση απλή αρμονική. Συνεπώς, το σώμα δεν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε αυτή την περίπτωση.

ΘΕΜΑ 3ο

Το συμβολόμετρο είναι μια συσκευή, η οποία χρησιμοποιείται για την ακριβή μέτρηση αποστάσεων και με τη βοήθεια της οποίας ανιχνεύθηκαν κύματα βαρυτικής ακτινοβολίας. Στο συμβολόμετρο, μία μονοχρωματική πηγή φωτός εκπέμπει μία φωτεινή δέσμη, η οποία διαιρείται στα δύο από ένα ημιεπαργυρομένο επίπεδο κάτοπτρο Μ και η μισή δέσμη κινείται προς το

κάτοπτρο M_1 διανύοντας απόσταση L_1 ενώ η άλλη μισή κινείται προς το κάτοπτρο M_2 διανύοντας απόσταση L_2. Κατά το διαχωρισμό της δέσμης φωτός η μία δέσμη υφίσταται μεταβολή φάσης π ενώ η άλλη όχι. Οι δύο δέσμες αφού ανακλαστούν στα κάτοπτρα M_1 και M_2 επιστρέφουν και συμβάλλουν. Η εικόνα της συμβολής παρατηρείται από έναν ανιχνευτή, ο οποίος τοποθετείται απέναντι από το κάτοπτρο M_1, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα.



(α) Αν οι αποστάσεις L_1 και L_2 διαφέρουν μεταξύ τους κατά απόσταση d, να εξαγάγετε τις συνθήκες ενισχυτικής και καταστρεπτικής συμβολής των δύο φωτεινών δεσμών, συναρτήσει του μήκους κύματος λ.

(5 μονάδες)

(β) Όταν οι αποστάσεις L_1 και L_2 των βραχιόνων του συμβολόμετρου αρχικά είναι ίσες, ο κεντρικός κροσσός είναι σκοτεινός. Αν ο ένας βραχίονας μετακινηθεί κατά ΔL, μετρούμε 125 φωτεινούς κροσσούς, όταν το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι 632,8nm. Να υπολογίσετε την απόσταση ΔL της μετακίνησης του βραχίονα.

(4 μονάδες)

(γ) Ο δείκτης διάθλασης *n* είναι ένας αδιάστατος αριθμός, ο οποίος δίνει το λόγο της ταχύτητας του φωτός στο κενό *c* προς την ταχύτητα του φωτός σε κάποιο μέσο *υ*.

$$n = \frac{c}{\upsilon}$$

Όταν οι αποστάσεις L_1 και L_2 είναι ίσες και τοποθετήσουμε μπροστά από το κάτοπτρο M_1 ένα λεπτό διαφανές πλακίδιο πάχους D με δείκτη διάθλασης *n*, μεταβάλλεται ο οπτικός δρόμος που ακολουθεί η μια φωτεινή δέσμη κατά απόσταση ΔL. Για την επαναφορά του οπτικού δρόμου αυτής της φωτεινής δέσμης στο αρχικό του μήκος το κάτοπτρο M_1 θα πρέπει να μετακινηθεί προς τον ανιχνευτή κατά απόσταση ΔL.

i. Χωρίς την παρεμβολή του πλακιδίου, ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να διανύσει την απόσταση L_1 (από το κάτοπτρο M στο M_1) είναι $t_1=L_1/c$. Με την παρεμβολή του πλακιδίου το φως διανύει απόσταση L_1-D με ταχύτητα c και απόσταση D με ταχύτητα υ.
Να υπολογίσετε τη μεταβολή ΔL του οπτικού δρόμου συναρτήσει των *D* και *n*.

(6 μονάδες)

ii. Αν χρησιμοποιούμε μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 580nm και τοποθετήσουμε μπροστά από το κάτοπτρο M_1 ένα πλακίδιο πάχους D=2,5μm, κατά την μετακίνηση του κατόπτρου M_1 για επαναφορά του οπτικού δρόμου, παρατηρούμε 3 εναλλαγές φωτεινών και σκοτεινών κροσσών. Με βάση την πληροφορία αυτή, να υπολογίσετε το δείκτη διάθλασης του πλακιδίου.

(5 μονάδες)

ΛΥΣΗ:

(α) Οι δύο αποστάσεις L_1 και L_2 διαφέρουν κατά απόσταση d.

$$|L_1 - L_2| = d$$

Το μήκος της διαδρομής της δέσμης 1 από το M στο M_1 και πίσω στο M ισούται με $2L_1$ ενώ της διαδρομής της δέσμης 2 από το M στο M2 και πίσω στο M ισούται με $2L_2$

Άρα η συνολική διαφορά δρόμου των δύο δεσμών φωτός είναι

$$|2L_1 - 2L_2| = 2d$$

Επειδή οι δύο φωτεινές δέσμες έχουν διαφορά φάσης π η συνθήκη για ενισχυτική συμβολή είναι

$2d = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\lambda => d = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ *όπου κ=0,1,2,3,…*

και αντίστοιχα οι συνθήκες για καταστρεπτική συμβολή είναι

$2d = \kappa\lambda => d = \kappa\frac{\lambda}{2}$ *όπου κ=0,1,2,3,…*

(β) Αν η διαφορά των δύο αποστάσεων L_1 και L_2 είναι ΔL και παρατηρούνται 125 φωτεινοί κροσσοί κατά τη μετακίνηση του βραχίονα. Δηλαδή κατά τη μετακίνηση του βραχίονα εναλλάσσονται ο σκοτεινός και ο φωτεινός κροσσός 125 φορές μέχρι να καταλήξουμε πάλι σε σκοτεινό κροσσό.

Άρα, κ=125

$\Delta L = (125)\frac{632,8}{2} = \Delta L = 39550nm$ *ή ΔL≈39,6μm*

(γ) i. Χωρίς το πλακίδιο, ο χρόνος που χρειάζεται η δέσμη για να πάει από το M στο M_1 και να επιστρέψει είναι

$$t_1 = \frac{2L_1}{c}$$

Με την παρεμβολή του πλακιδίου, ο χρόνος γίνεται

$$t_2 = \frac{2L_1 - 2D}{c} + \frac{2D}{\upsilon} => \ t_2 = \frac{2L_1 - 2D}{c} + \frac{2nD}{c} => \ t_2 = \frac{2L_1 - 2D\,(n-1)}{c}$$

Άρα, η μεταβολή του <u>οπτικού δρόμου</u> ισούται με

$$\Delta L = 2D(n-1)$$

Ή αντίστοιχα, η παρεμβολή του πλακιδίου ισοδυναμεί με αλλαγή στο μήκος της απόστασης L_1 κατά $D(n-1)$

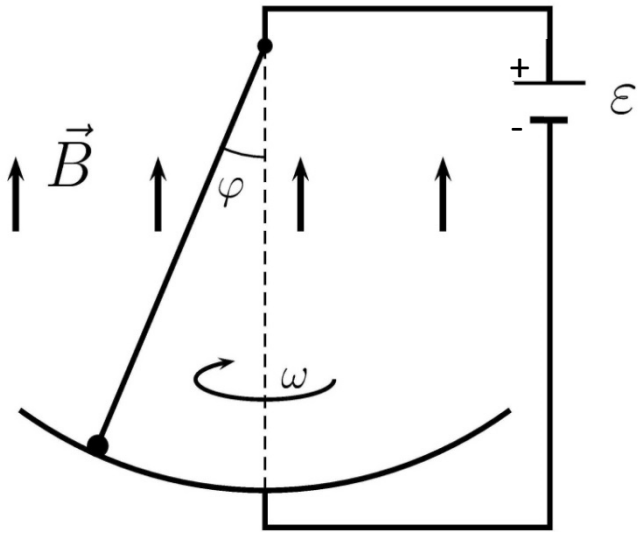
(γ) ii. Αν κατά τη διόρθωση του μήκους της μήκους της διαδρομής παρατηρούνται 3 φωτεινοί κροσσοί τότε κ=3.

$$D(n-1) = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} => 2500(n-1) = \frac{7}{4}580 => n - 1 = \frac{1015}{2500} =>$$

$$n = 1 + 0{,}406 => n = 1{,}406$$

ΘΕΜΑ 4ο

Στο ένα άκρο αβαρούς, αγώγιμης ράβδου είναι προσαρμοσμένο ένα μικρό μεταλλικό σφαιρίδιο, το οποίο εφάπτεται μιας λείας, αγώγιμης σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας $R = 0{,}785\text{m}$. Το δεύτερο άκρο της ράβδου είναι προσαρμοσμένο στο κέντρο της σφαίρας με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η ράβδος να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από αυτό χωρίς τριβές και χωρίς το σφαιρίδιο να χάνει επαφή με την επιφάνεια της σφαίρας. Το σύστημα συνδέεται με ηλεκτρική πηγή και τοποθετείται σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B = 0{,}5\ \text{T}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η ράβδος περιστραφεί γύρω από τον κατακόρυφο άξονα με συγκεκριμένη φορά, γωνιακή ταχύτητα $\omega = 5\ \text{rad/s}$ και σχηματίζοντας γωνία φ με την κατακόρυφο, τότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και η γωνία φ θα παραμείνουν σταθερές.



(α) Να εξηγήσετε γιατί η φορά περιστροφής θα πρέπει να είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα για να είναι δυνατή η περιστροφή της ράβδου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

(8 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία φ .

(7 μονάδες)

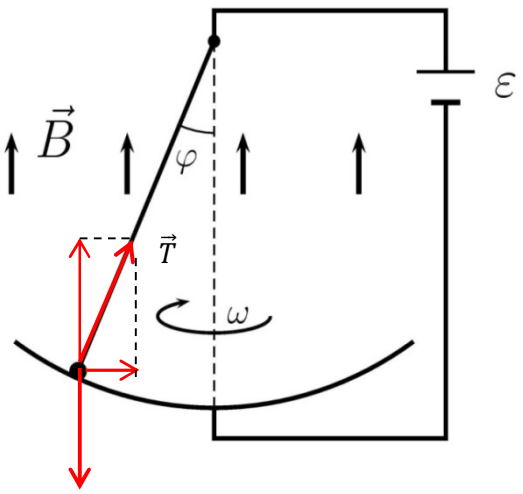
(γ) Να υπολογίσετε την ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής $\mathcal{E}$.

(5 μονάδες)

ΛΥΣΗ:

(α) Αν η ράβδος εκτραπεί από την κατακόρυφο ασκείται σε αυτή δύναμη από το μαγνητικό πεδίο. Η δύναμη αυτή, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, για το στιγμιότυπο που φαίνεται στο σχήμα θα είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα, αν η εκτροπή της ράβδου γίνει προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα. Αυτή η δύναμη θα αναγκάσει τη ράβδο να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ακίνητο σημείο της ράβδου με τη φορά περιστροφής που φαίνεται στο σχήμα. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής θα αυξάνεται όσο η ράβδος διαρρέεται από ρεύμα με αποτέλεσμα να αυξάνεται και η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο. Όμως, ε την κίνηση της ράβδου μέσα στο μαγνητικό πεδίο παράγεται στα άκρα της επαγωγική τάση, η οποία σύμφωνα με τον κανόνα του Λεντς θα έχει αντίθετη πολικότητα από την πηγή. Όσο αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται και η επαγωγική τάση και μειώνεται η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο. Για μια τιμή της γωνιακής ταχύτητας $\omega_{o\rho.}$ η επαγωγική τάση γίνεται ίση με την τάση της πηγής με αποτέλεσμα η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα να μηδενιστεί. Τότε μηδενίζεται και η δύναμη που ασκείται στη ράβδο, με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα να σταματήσει να αυξάνεται και η ράβδος να συνεχίζει να κινείται με τη σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_{o\rho.}$. Δίνοντας, λοιπόν, στη ράβδο αρχική γωνιακή ταχύτητα ίση με $\omega_{o\rho.}$ με φορά περιστροφής όπως φαίνεται στο σχήμα η ράβδος θα κινείται χωρίς να διαρρέεται από ρεύμα και, άρα, χωρίς να ασκείται σε αυτή δύναμη από το μαγνητικό πεδίο.

Αν περιστρέψουμε τη ράβδο προς την αντίθετη κατεύθυνση η επαγωγική τάση που θα παράγεται θα προστίθεται στην τάση της πηγής με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο και, συνεπώς, να αυξάνεται η δύναμη στη ράβδο από το μαγνητικό πεδίο. Η δύναμη αυτή θα έχει την ίδια φορά, όπως και προηγουμένως, δηλαδή θα έχει αντίθετη φορά από τη φορά περιστροφής της ράβδου. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα τη γρήγορη επιβράδυνση και ακινητοποίηση της ράβδου στην κατακόρυφη θέση.



(β) Το σφαιρίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα $R\eta\mu\varphi$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega_{o\rho.}$. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σφαιρίδιο αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη

$$F_{\kappa} = m\omega_{o\rho.}{}^{2}(R\eta\mu\varphi)$$

Στο σφαιρίδιο ασκούνται η δύναμη του βάρους, η κάθετη δύναμη της σφαιρικής επιφάνειας και, μέσω της ράβδου, η αντίδραση από το σημείο στήριξης της ράβδου. Οι δύο τελευταίες δυνάμεις είναι ομόρροπες και δίνουν μια συνολική δύναμη $\vec{T}$ κατά μήκος της ράβδου.

Αναλύοντας την $\vec{T}$ σε δύο συνιστώσες θα έχουμε

$$T\eta\mu\varphi = m(R\eta\mu\varphi)\omega^2 \quad , \qquad T\sigma\upsilon\nu\varphi - mg = 0$$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{g}{\omega^2 R} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}5 \Rightarrow \varphi = 60^{o}$$

(γ) Η επαγωγική τάση, $\mathcal{E}_{\varepsilon\pi.}$, που παράγεται κατά την περιστροφή της ράβδου δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Για μια περιστροφή της ράβδου $\Delta t = T = 2\pi/\omega$ και $\Delta\Phi = B \cdot \Delta S$,

όπου ΔS είναι το εμβαδόν του κύκλου που διαγράφει το ένα άκρο της ράβδου και τον οποίο τέμνουν κάθετα οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

Άρα

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = \frac{B \cdot \Delta S}{T} = \frac{B\pi(R\eta\mu\varphi)^2}{2\pi/\omega} = \frac{BR^2\omega\,\eta\mu^2\varphi}{2}$$

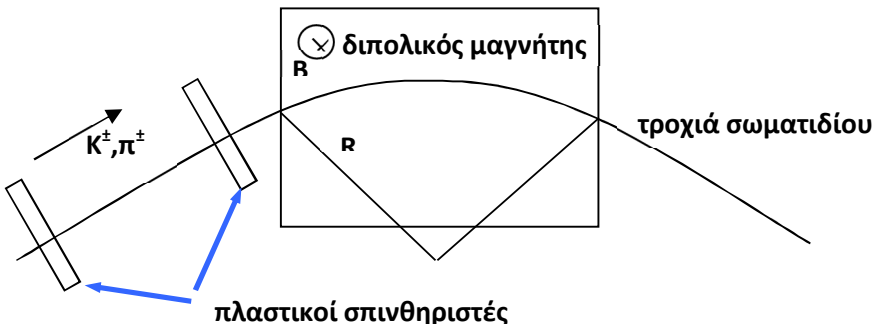
Όταν η ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{o\rho}$. έχουμε $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\varepsilon\pi}$.

Άρα

$$\mathcal{E} == \frac{BR^2\omega_{o\rho.}\,\eta\mu^2\varphi}{2} \cong 0{,}6\text{V}$$

ΘΕΜΑ 5ο

Σε πειράματα φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων είναι σημαντικό να αναγνωριστεί ο τύπος των σωματιδίων (p, $\pi^{\pm}$, $K^{\pm}$, μ, e) που εκπέμπονται από το σημείο σκέδασης των δεσμών (σε περίπτωση επιταχυντών) ή από το σημείο διάσπασης ενός σωματιδίου. Αν το σωματίδιο είναι φορτισμένο, η τροχιά του μπορεί να καταγραφεί σε κατάλληλο ανιχνευτή τροχιών, και η ορμή του μπορεί να υπολογισθεί από την μέτρηση της καμπύλωσης της τροχιάς σε ένα μαγνητικό πεδίο. Ένας τρόπος για να αναγνωριστεί ο τύπος του σωματιδίου, είναι να υπολογισθεί η ταχύτητά του (και επομένως να εξαχθεί έμμεσα η μάζα του) μετρώντας τον χρόνο πτήσης του, από το σημείο παραγωγής του στο σημείο όπου υπάρχει ένας ανιχνευτής που μετρά χρονικές διαφορές. Ο ανιχνευτής αυτός ονομάζεται πλαστικός σπινθηριστής και είναι κατασκευασμένος από κατάλληλο πλαστικό υλικό το οποίο διεγείρεται όταν ιονιστεί από κάποιο σωματίδιο. Το υλικό αποδιεγείρεται με την εκπομπή φωτονίων, τα οποία συλλέγονται με κατάλληλες συσκευές (φωτοπολλαπλασιαστές) που μετατρέπουν τα φωτόνια σε ηλεκτρικό σήμα.
Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, θεωρήστε ότι σας δίνεται μια τέτοια ανιχνευτική διάταξη, όπως το παρακάτω σχήμα. Η διάταξη αποτελείται από έναν ανιχνευτή τροχιών μέσα σε μαγνητικό πεδίο ενός διπολικού μαγνήτη επαγωγής 1,5T. Ο ανιχνευτής τροχιών μετρά την ακτίνα, R, καμπύλωσης της τροχιάς ενός φορτισμένου σωματιδίου καθώς αυτό περνά από το μαγνητικό πεδίο. Η ακρίβεια μέτρησης της ακτίνας καμπύλωσης για τον ανιχνευτή του προβλήματος είναι 3mm. Η ανιχνευτική διάταξη περιλαμβάνει επίσης δυο πλαστικούς σπινθηριστές με τους αντίστοιχους φωτοπολλαπλασιαστές τους, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε απόσταση 10m μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι φωτοπολλαπλασιαστές μπορούν να ανιχνεύουν χρονικές διαφορές δυο



σημάτων μεγαλύτερες τουλάχιστον των 100ps (1ps=10^{-12}sec).

Το χαρακτηριστικό αυτό ορίζει το κριτήριο της ποιότητας μιας μέτρησης χρόνου. Συνήθως, η τυπική απόκλιση χρησιμοποιείται για να περιγράψουμε την διακριτική ικανότητα. Η διακριτική ικανότητα μιας ανιχνευτικής διάταξης αντιπροσωπεύει εν γένει την αβεβαιότητα στην μέτρηση ενός μεγέθους που δίνει η διάταξη και επομένως την ικανότητα της διάταξης να διαχωρίσει δυο διαφορετικές μετρήσεις μεταξύ τους.

Θεωρήστε ότι θέλετε να χρησιμοποιήσετε το σύστημα αυτό για να διαχωρίσετε φορτισμένα πιόνια (μάζα πιονίου m_π=140MeV/c^2) από φορτισμένα καόνια (μάζα καονίου m_K=494 MeV/c^2). Το φορτίο των δυο σωματιδίων έχει απόλυτη τιμή όπως και αυτό του ηλεκτρονίου. Τα σωματίδια έχουν ορμή 1,0 GeV/c και η τροχιά τους μοιάζει με αυτή του σχήματος.

(α) Να υπολογίσετε τη διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή σας για την ορμή των σωματιδίων.

(6 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τη διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή σας για την ταχύτητα των σωματιδίων.

(6 μονάδες)

(γ) Ποια είναι η μέγιστη ορμή που μπορούν να έχουν τα σωματίδια πέρα από την οποία δεν μπορείτε να ξεχωρίσετε με τις μετρήσεις που θα κάνετε ποια σωματίδια είναι πιόνια και ποια καόνια.

(8 μονάδες)

Υπόδειξη 1: Μπορεί να φανεί χρήσιμο να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση $(1+\varepsilon)^{1/2} \cong 1+\frac{1}{2}\varepsilon$ για $\varepsilon \ll 1$, όπως προκύπτει από το διωνυμικό ανάπτυγμα.

Υπόδειξη 2: Δίνεται ότι $1eV = 1{,}6\times10^{-19}$J και το φορτίο ενός ηλεκτρονίου είναι $Q_e = 1{,}6\times10^{-19}$C . Η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 3\times10^8$ m/s . Για μετατροπές μονάδων ισχύουν: 1Mega (M) = 10^6, 1Giga (G) = 10^9, 1Tera (T) = 10^{12}, 1micro (μ) = 10^{-6}, 1nano (n) = 10^{-9}, 1pico (p) = 10^{-12}.

ΛΥΣΗ:

Η τροχιά του φορτισμένου σωματιδίου καμπυλώνεται εξαιτίας της δύναμης Lorentz που εξασκείται στο σωματίδιο λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου. Η δύναμη Lorentz είναι:

$$\vec{F} = (Qe)\vec{\upsilon}\times\vec{B} \Rightarrow F = (Qe)\upsilon B\eta\mu\theta \qquad (1)$$

όπου θ η γωνία μεταξύ του διανύσματος της ταχύτητας υ και του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής B, και Qe το φορτίο του σωματιδίου εκφρασμένο σαν πολλαπλάσιο του φορτίου, e, του ηλεκτρονίου.

Σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο κάθετο στην διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου, η γωνία θ είναι 90° (όπως στην περίπτωση του προβλήματος) και επομένως η ταχύτητα παραμένει αμετάβλητη σε μέτρο και το φορτίο εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας R. Μετρώντας την ακτίνα αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε την ορμή του σωματιδίου.

Για θ=90° θα έχουμε από την (**1**) ότι: $F = Qe\upsilon B$ (**2**)

και η δύναμη F είναι κάθετη στα διανύσματα της ταχύτητας και της μαγνητικής επαγωγής. Η ακτίνα R μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

Από τον 2° νόμο του Νεύτωνα: $$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad (3)$$

Τα σωματίδια κινούνται όμως με ταχύτητες που είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός και θα πρέπει να εισάξουμε διορθώσεις. Αν η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου είναι m_0, η ορμή του είναι: $$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{\upsilon} = \gamma m_0 c \vec{\beta} \quad (4)$$

όπου *γ* είναι ο παράγοντας Lorentz: $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (5) \text{ και } \beta = \frac{\upsilon}{c} \quad (6)$$

Από τις εξισώσεις (**3**), (**4**) και (**5**), θα έχουμε ότι: $$\vec{F} = \gamma m_0 \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} \quad (7)$$

Αλλά το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά και η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$a_{\kappa\varepsilon\nu.} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{F}{\gamma m_0} \quad (8)$$

Αντικαθιστούμε την (**2**) στην (**8**) δίνει: $$\frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(Qe)\upsilon B}{\gamma m_0} \Rightarrow \upsilon = \frac{(Qe)BR}{\gamma m_0} \quad (9)$$

Από την (**9**) και την (**4**) έχουμε ότι: $$p = (Qe)BR \quad (10)$$

Οι μονάδες μέτρησης στην προηγούμενη σχέση είναι *p* σε *kg m/s*, *e* σε Coulomb και *B* σε *Tesla.*

Πολλαπλασιάζουμε τη (**10**) με την ταχύτητα του φωτός, $\left(c = 3\times10^8\, m/s\right)$ οπότε έχουμε:

$$pc = (Qe)cBR \quad (11)$$

Αλλά *Ορμή x Ταχύτητα = Ενέργεια* και επομένως οι μονάδες μέτρησης της (**11**) είναι σε *Joule* (*J*). 1*J* είναι η ενέργεια που αποκτά το φορτίο ενός Coulomb σε δυναμικό 1*V*. Στην σωματιδιακή φυσική, η μονάδα μέτρησης της ενέργειας είναι το *eV* και πολλαπλάσιά του, το οποίο αντιστοιχεί στην ενέργεια που αποκτά φορτίο ενός ηλεκτρονίου, *e,* ($1e = 1,6\times10^{-19}C$), σε δυναμικό *1V.*

Επομένως: $$1eV = 1,6\times10^{-19}J \Rightarrow 1J = \frac{1}{1,6\times10^{-19}}eV \quad (12)$$

Από την (**12**) η (**11**) γίνεται: $pce = (Qe)cBR$ (μονάδες *eV*) $\Rightarrow pc = QcBR$ (μονάδες *eV*) (**13**)

Αφού $c = 3\times10^8\, m/s$ η (**13**) σε μονάδες *GeV γίνεται:* $pc = 0,3QBR$ (μονάδες G*eV*) (**14**)

Από την (**14**) βλέπουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τόσο την κλασική όσο και την σχετικιστική προσέγγιση (εξίσωση 4) για να εκφράσουμε την καμπύλωση της τροχιάς του σωματιδίου.

(**α**) Από την εξίσωση (**14**) βλέπουμε ότι η μέτρηση της ορμής του σωματιδίου εξαρτάται από την μέτρηση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς δεδομένου ότι το φορτίο του σωματιδίου είναι γνωστό όπως και η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Επομένως η αβεβαιότητα της μέτρησης της ορμής, *δp*,

(το σφάλμα δηλαδή στην ορμή) θα εξαρτάται από την αβεβαιότητα, *δR*, στην μέτρηση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς. Επομένως:

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta R}{R} \qquad (15)$$

Από το πρόβλημα έχουμε ότι η ακρίβεια της μέτρησης της ακτίνας καμπύλωσης είναι *δR=3mm* ενώ η ορμή των σωματιδίων είναι 1 *GeV/c*. Από την (**14**) θα έχουμε: $R = \frac{p}{0,3B}$ και αντικατάσταση στην (**15**) δίνει:

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta R}{p} 0,3B \Rightarrow \frac{\delta p}{p} = \frac{0,003[m]}{1,0[GeV]} \times 0,3 \times 1,5[T] \Rightarrow \frac{\delta p}{p} = 0,00135 \Rightarrow \frac{\delta p}{p} = 0,135\%$$

(**β**) Ένα σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα *υ*, διασχίζει μια απόσταση *L* σε χρόνο *t*. Επομένως η αβεβαιότητα, *δυ*, στην μέτρηση της ταχύτητας ενός σωματιδίου για συγκεκριμένη απόσταση *L*, εξαρτάται από την αβεβαιότητα, *δt*, στη μέτρηση του χρόνου που απαιτείται για να καλυφθεί η απόσταση αυτή. Ωστόσο χρειάζεται να υπολογίσουμε την ικανότητα του συστήματός μας να διαχωρίζει διαφορετικές ταχύτητες μεταξύ τους. Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε την σχέση:

$$\frac{\delta \upsilon}{\upsilon} = \frac{\delta t}{\Delta t} \qquad (16)$$

όπου *δt* η διακριτική ικανότητα των φωτοπολλαπλασιαστών και *Δt*, η διαφορά χρόνου που χρειάζονται δύο σωματίδια για να καλύψουν την ίδια απόσταση. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η αβεβαιότητα στην μέτρηση του χρόνου, *δt*, είναι 100*ps*, η χρονική ικανότητα του συστήματος των δύο φωτοπολλαπλασιαστών. Χρειάζεται επομένως να υπολογίσουμε την ποσότητα *Δt*.

Για δύο σωματίδια μάζας m_1 και m_2, όπως στο παρόν πρόβλημα, ο χρόνος πτήσης t_i του κάθε σωματιδίου δίνεται από την σχέση:

$$t_i = \frac{L}{\upsilon_i} = \frac{L}{c\frac{\upsilon_i}{c}} = \frac{L}{c\beta_i} \qquad (17)$$

Αλλά για σωματίδιο μάζας m_i και ορμής p_i, η ενέργειά του είναι: $E_i^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$ (**18**)

Και αντικατάσταση της (**4**) δίνει:

$$E_i^2 = m_{0i}^2 c^4 + m_{0i}^2 c^4 \gamma^2 \beta^2 = m_{0i}^2 c^4 \left(1 + \gamma^2 \beta^2\right) = m_{0i}^2 c^4 \left(1 + \gamma^2 \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right) \Rightarrow E_i^2 = \gamma^2 m_{0i}^2 c^4 \qquad (19)$$

Από την (**4**) και την (**19**) θα έχουμε ότι: $\frac{pc}{E} = \frac{m_{0i} c^2 \gamma \beta}{m_{0i} c^2 \gamma} \Rightarrow \beta = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{\sqrt{m_{0i}^2 c^4 + p^2 c^2}}$ (**20**)

Αντικαθιστούμε στην (**17**) την (**20**) και έχουμε: $t_i = \frac{L}{c} \frac{\sqrt{m_{0i}^2 c^4 + p_i^2 c^2}}{p_i c} \Rightarrow t_i = \frac{L}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{m_{0i} c}{p_i}\right)^2}$ (**21**)

Θεωρώντας ότι $\left(m_{0i} c / p_i\right)^2 = \varepsilon_i \ll 1$ και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $\left(1 + \varepsilon_i\right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_i$

η (**21**) δίνει: $t_i \simeq \frac{L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_i\right) \Rightarrow t_i \simeq \frac{L}{c}\left(1 + \frac{m_{0i}^2 c^2}{2 p_i^2}\right)$ (**22**)

Χρησιμοποιώντας την τελευταία εξίσωση μπορούμε να βρούμε την διαφορά χρόνου ώστε δύο σωματίδια με μάζες m_1 και m_2 και αντίστοιχες ορμές p_1 και p_2 να καλύψουν την ίδια απόσταση L

$$t_1 - t_2 = \frac{L}{c}\left(1 + \frac{m_{01}^2 c^2}{2p_1^2} - 1 - \frac{m_{02}^2 c^2}{2p_2^2}\right) \Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{L}{2c}\left(\frac{m_{01}^2 c^2}{p_1^2} - \frac{m_{02}^2 c^2}{p_2^2}\right) \qquad (\mathbf{23})$$

Για σωματίδια της ίδιας ορμής και διαφορετικής μάζας, η (**23**) δίνει:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{2cp^2}\left(m_{01}^2 c^2 - m_{01}^2 c^2\right) \qquad (\mathbf{24})$$

Αντικατάσταση για τα δεδομένα του προβλήματος δίνει:

$$\Delta t = \frac{10[m]}{2\times 3\times 10^8 [m/s] 1^2 \left[GeV^2/c^2\right]}\left(0,494^2 - 0,140^2\right)\left[GeV^2/c^2\right]$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{6}\times 10^{-7}\times 0,224 = 0,0374\times 10^{-7} = 3,74\times 10^{-9}[s] \Rightarrow \Delta t = 3,74ns$$

Αντικατάσταση στην (**16**) δίνει: $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{0,1ns}{3,74ns} = 0,0267 \Rightarrow \frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = 2,67\%$

(**γ**) Σωματίδια διαφορετικής μάζας, τα οποία καλύπτουν την απόσταση L με χρονική διαφορά τουλάχιστον τόση ώστε να διαχωρίζονται από τους φωτοπολλαπλασιαστές, η ανώτερη τιμή της ορμής που μπορεί να έχουν, δίνεται από την εξίσωση (**24**)

$$\Delta t = \delta t \Rightarrow p^2 \le \frac{L}{2c\delta t}\left(m_{02}^2 c^2 - m_{02}^2 c^2\right) \Rightarrow p \le \sqrt{\frac{L}{2c\delta t}\left(m_{02}^2 c^2 - m_{02}^2 c^2\right)}$$

Αριθμητική αντικατάσταση δίνει:

$$p \le \sqrt{\frac{10}{2\times 3\times 10^8 \times 100\times 10^{-12}}\left(0,494^2 - 0,140^2\right)}$$

$$\Rightarrow p \le \sqrt{\frac{10^3}{6}0,224\left[GeV^2/c^2\right]} \Rightarrow p \le 6,11GeV/c$$

Αν τα σωματίδια έχουν ορμή μεγαλύτερη από 6,11 *GeV/c* τότε το σύστημα που αναφέρει η άσκηση δεν θα μπορέσει να τα διαχωρίσει.

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ