

# ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

## 21<sup>Η</sup> ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

### Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Δεύτερη Φάση)



Σάββατο, 21 Απριλίου, 2007

Ώρα: 10.00 – 13.00

#### Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε τα ερωτήματα όλων των θεμάτων.
- 3) Να εκφράζετε τις απαντήσεις σας, όπου χρειάζεται, με ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων.
- 4) Όταν σε ένα θέμα δε δίνονται αριθμητικά δεδομένα, να εκφράζετε τις απαντήσεις σας σε συνάρτηση με τα μεγέθη που δίνονται στο αντίστοιχο θέμα ή ερώτημα.
- 5) Να χρησιμοποιείτε μόνο τις σταθερές που δίνονται σε κάθε ερώτημα.
- 6) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- 7) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

#### ΘΕΜΑ 1 (10 μονάδες)

Το εκκρεμές ενός ρολογιού τοίχου αποτελείται από μικρό σφαιρίδιο που βρίσκεται στο ένα άκρο αβαρούς ράβδου. Το ρολόι δείχνει τον ακριβή χρόνο σε θερμοκρασία 24°C, όταν η περίοδος του εκκρεμούς είναι  $T_0 = 0,512s$ , και το μήκος της ράβδου  $\ell_0$ .

(α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ταλαντώσεων που εκτελεί το εκκρεμές όταν ο ωροδείκτης συμπληρώσει 2 πλήρεις κύκλους. **(μ.3)**

Όταν η θερμοκρασία είναι 40° C η ράβδος επιμηκύνεται κατά 0,03% του μήκους  $\ell_0$ .

(β) Το ρολόι θα πηγαίνει μπροστά ή πίσω; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(μ.2)**

(γ) Να υπολογίσετε το σφάλμα σε δευτερόλεπτα μετά από ένα εικοσιτετράωρο στη θερμοκρασία των 40°C. **(μ.5)**

(Δίνεται:  $\sqrt{1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_0}} \approx 1 + \frac{\Delta\ell}{2\ell_0}$ , για πολύ μικρές τιμές του  $\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$ ).

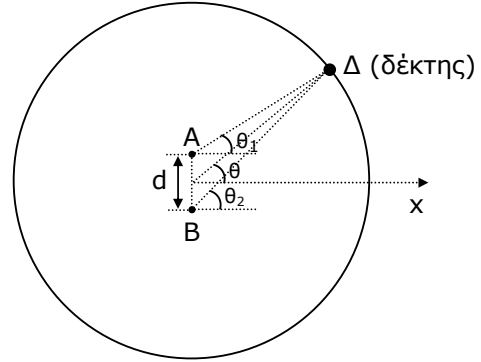
**ΘΕΜΑ 2 (10 μονάδες)**

Δύο σύγχρονες κεραιές εκπομπής ραδιοκυμάτων Α και Β βρίσκονται σε απόσταση  $d$  ή μια από την άλλη. Οι κεραιές εκπέμπουν ραδιοκύματα μήκους κύματος  $\lambda$ . Δέκτης που βρίσκεται πάρα πολύ μακριά από τις κεραιές ( $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$ ) ανιχνεύει τα κύματα όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ζητούνται:

(α) Η διαφορά φάσης με την οποία φθάνουν τα κύματα στο δέκτη σαν συνάρτηση της γωνίας  $\theta$ . **(μ.5)**

(β) Η σχέση που δίνει τις τιμές της γωνιάς  $\theta$  για τις οποίες ο δέκτης ανιχνεύει μέγιστα της έντασης των κυμάτων λόγω συμβολής. **(μ.5)**

**ΘΕΜΑ 3 (20 μονάδες)**

Τέσσερις μεταλλικές ράβδοι μήκους  $\ell = 0,5\text{m}$  η κάθε μια, συνολικής αντίστασης  $R = 2\Omega$ , είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με αρθρώσεις στα άκρα τους. Αν τραβήξουμε το νήμα που είναι δεμένο στην άρθρωση Δ, οι ράβδοι σχηματίζουν ρόμβο του οποίου οι διαγώνιοι μεταβάλλονται. Κλείνουμε τις ράβδους ώστε να σχηματίζουν ευθύγραμμη διάταξη και τις κρεμάζουμε σε στήριγμα από το σημείο Α. Η διάταξη βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής  $B = 2\text{T}$  όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  τραβούμε το νήμα, οπότε η άρθρωση Δ κινείται προς τα κάτω, κάθετα στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές, με σταθερή ταχύτητα μέτρου  $u = 2\text{m/s}$ . Τα φαινόμενα αμοιβαίας επαγωγής και αυτεπαγωγής είναι αμελητέα.

(Δίνεται το εμβαδόν ρόμβου  $S = \frac{\delta_1 \delta_2}{2}$ )

Ζητούνται:

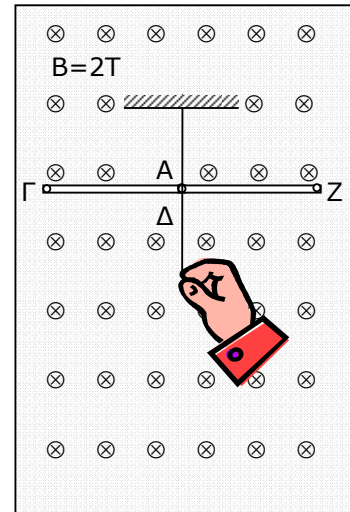
(α) Οι σχέσεις που εκφράζουν τη μεταβολή σε συνάρτηση με το χρόνο,

- του εμβαδού του ρόμβου  $S = f(t)$ , που σχηματίζεται από τις ράβδους και
- του επαγωγικού ρεύματος που τις διαρρέει,  $I_{\text{εν}} = f(t)$ . **(μ.4+5)**

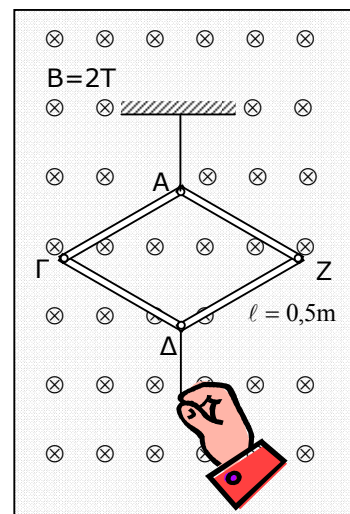
(β) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις  $S = f(t)$  και  $I_{\text{εν}} = f(t)$ . **(μ.3+3)**

(γ) Η χρονική στιγμή  $t_1$  κατά την οποία το επαγωγικό ρεύμα αλλάζει φορά και να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό. **(μ.1)**

(δ) Να σχεδιάσετε σε δύο ξεχωριστά σχήματα τη φορά του επαγωγικού ρεύματος πριν και μετά τη χρονική στιγμή  $t_1$ . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(μ.4)**



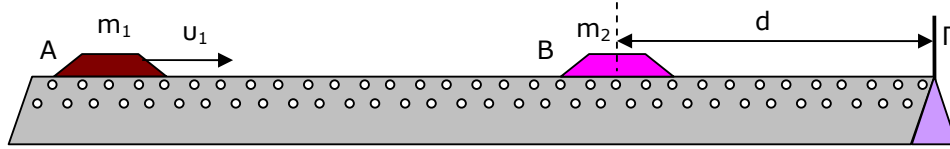
Σχ.1



Σχ.2

**ΘΕΜΑ 4 (20 μονάδες)**

Ένα αμαξάκι A μάζας  $m_1$  κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου  $u_1$  πάνω σε αεροδιάδρομο εργαστηρίου και πλησιάζει δεύτερο αμαξάκι B μάζας  $m_2 < m_1$ . Το δεύτερο αμαξάκι βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε απόσταση  $d$  από το πλησιέστερο άκρο, Γ, του αεροδιαδρόμου, όπως δείχνει το σχήμα.



Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 0$  το αμαξάκι A συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το αμαξάκι B. Μετά την κρούση το αμαξάκι B συγκρούεται ελαστικά με το άκρο Γ του αεροδιάδρομου και επιστρέφει πίσω. Τη χρονική στιγμή  $t_2$  τα δύο αμαξάκια συγκρούονται για δεύτερη φορά σε απόσταση  $x$  από το άκρο Γ. Όλες οι κρούσεις είναι αμελητέας χρονικής διάρκειας.

Ζητούνται:

(α) Η σχέση που εκφράζει την απόσταση  $x$  σε συνάρτηση με τα μεγέθη  $d$ ,  $m_1$  και  $m_2$ . **(μ.12)**

(β) Η σχέση που εκφράζει τη χρονική στιγμή  $t_2$  σε συνάρτηση με τα μεγέθη  $d$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  και  $u_1$ . **(μ.4)**

(γ) Η σχέση μεταξύ των μαζών  $m_1$  και  $m_2$  ώστε:

(i)  $x = d$  και **(μ.2)**

(ii) να μπορούν τα δύο αμαξάκια να συγκρούονται για δεύτερη φορά. **(μ.2)**

**ΘΕΜΑ 5 (20 μονάδες)**

Δύο υλικά σημεία, είναι τοποθετημένα στα άκρα A και B λεπτής ομογενούς ράβδου μήκους  $2\ell$ . Το σύστημα των υλικών σημείων και της ράβδου βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντια επιφάνεια η οποία δεν παρουσιάζει τριβές.

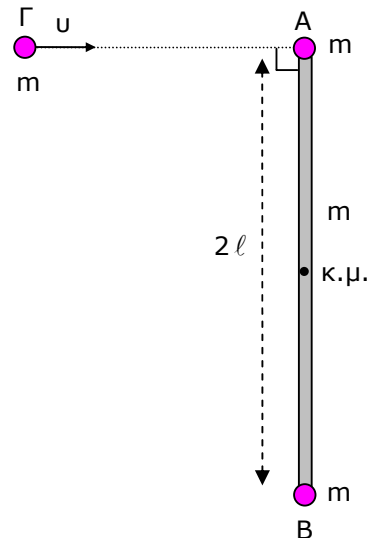
Υλικό σημείο Γ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα  $u$  συγκρούεται ελαστικά με το σύστημα στη θέση A, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα.

Τα υλικά σημεία και η ράβδος έχουν την ίδια μάζα  $m$ .

(Δίνονται:  $I_{p(\kappa.μ.)} = \frac{1}{3}m\ell^2$  και  $I_{p(B)} = \frac{4}{3}m\ell^2$ )

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του υλικού σημείου Γ, αμέσως μετά την κρούση, σε συνάρτηση με την ταχύτητα  $u$ . **(μ.14)**

(β) Αν η κρούση είναι πλαστική και η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το B, να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου σε συνάρτηση με τα μεγέθη  $u$  και  $\ell$ . **(μ.6)**



**ΘΕΜΑ 6 (20 μονάδες)**

Κατακόρυφο αβαρές ελατήριο μπορεί να επιμηκύνεται και να συσπειρώνεται σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Στο ελατήριο κρεμάζουμε σώμα μάζας  $m$  που ισορροπεί σε απόσταση  $d$  από το άκρο του ελατηρίου (σχήμα 2).

Συμπιέζουμε το ελατήριο κατά  $\frac{2d}{3}$

(σχήμα 3). Τη χρονική στιγμή  $t=0$  το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση με περίοδο  $T=\sqrt{3}s$ . Κατά τη διάρκεια της πρώτης ταλάντωσης, όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του, το σώμα εκρήγνυται σε δύο θραύσματα Α και Β με μάζες  $\frac{m}{3}$  και  $\frac{2m}{3}$  αντίστοιχα

(σχήμα 4). Η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι αμελητέα.

Τα θραύσματα αμέσως μετά την έκρηξη κινούνται κατακόρυφα με ταχύτητες ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς. Η έκρηξη έχει αμελητέα χρονική διάρκεια.

Ζητούνται:

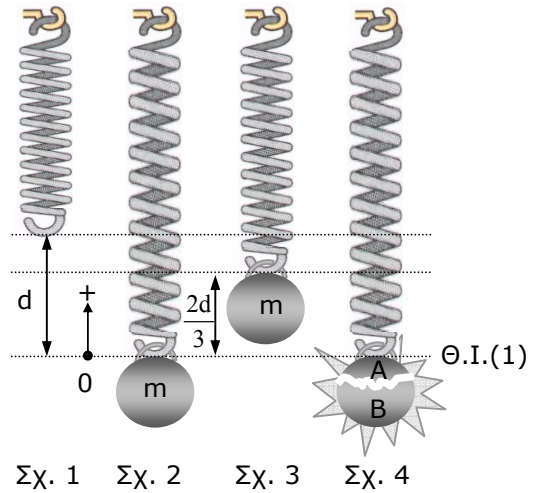
**(α)** Η φορά κίνησης του σώματος τη στιγμή της έκρηξης. **(μ.2)**

**(β)** Το νέο πλάτος ταλάντωσης του θραύσματος Α, σε συνάρτηση με την απόσταση  $d$ . **(μ.8)**

**(γ)** Η χρονική στιγμή κατά την οποία το θραύσμα Α περνά από τη νέα θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά. **(μ.2)**

**(δ)** Η γραφική παράσταση της θέσης του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο,  $y=f(t)$ , από τη χρονική στιγμή  $t=0$  μέχρι τη στιγμή που το θραύσμα Α περνά για δεύτερη φορά από τη νέα θέση ισορροπίας του με φορά προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες. **(μ.5)**

**(ε)** Η ενέργεια που απελευθερώθηκε κατά την έκρηξη σε συνάρτηση με τα μεγέθη  $m$  και  $d$ . **(μ.3)**



# ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

## 21<sup>Η</sup> ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

### Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Επαναληπτικός Διαγωνισμός)



Σάββατο, 21 Απριλίου, 2007

Ώρα: 10.00 – 13.00

#### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

##### ΘΕΜΑ 1 (10 μονάδες)

(α) Όταν ο ωροδείκτης συμπληρώσει 2 πλήρεις κύκλους, συμπληρώνονται 24 ώρες. Μια πλήρης ταλάντωση συμπληρώνεται σε χρόνο μιας περιόδου, δηλαδή σε χρόνο 0,512 s. Επομένως ο αριθμός των ταλαντώσεων  $N$  που εκτελεί το εκκρεμές σε 24 ώρες είναι,

$$N = \frac{24.3600s}{0,512s} = 168750. \quad (3 \text{ μον.})$$

(β) Το μήκος  $\ell$  της ράβδου αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Εφόσον η περίοδος  $T$  του απλού εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \text{ είναι φανερό ότι με την αύξηση του μήκους αυξάνεται η}$$

περίοδος. Αυτό σημαίνει ότι θα χρειάζεται περισσότερος χρόνος για να δείχνει το ρολόι την ακριβή ώρα, δηλαδή για να δείξει ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Επομένως με την αύξηση του μήκους του εκκρεμούς, το ρολόι "θα πηγαίνει πίσω". (2 μον.)

(γ) Έστω  $T$  η περίοδος στη θερμοκρασία των 24°C και  $T'$  η περίοδος στη θερμοκρασία των 40°C. Είναι,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g}} \text{ και } T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 + \Delta\ell}{g}}, \text{ όπου } \Delta\ell \text{ είναι η αύξηση του μήκους του εκκρεμούς.}$$

Έχουμε,

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 + \Delta\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g} + \frac{\Delta\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g}\left(1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_0}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g}}\sqrt{1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_0}}$$

$$\Rightarrow T' = T \sqrt{1 + \frac{\Delta \ell}{\ell_0}}$$

Με δεδομένη την προσέγγιση  $\sqrt{1 + \frac{\Delta \ell}{\ell_0}} \approx 1 + \frac{\Delta \ell}{2\ell_0}$ , η τελευταία σχέση γίνεται

$$T' = T \left(1 + \frac{\Delta \ell}{2\ell_0}\right). \text{ Όμως } \Delta \ell = 0,03\% \ell_0 = \frac{0,03}{100} \ell_0. \text{ Άρα,}$$

$$T' = T \left(1 + \frac{0,03}{200}\right) = \frac{200,03}{200} T = 1,00015 T = 1,00015 \cdot 0,512 = 0,5120768 \text{ s}$$

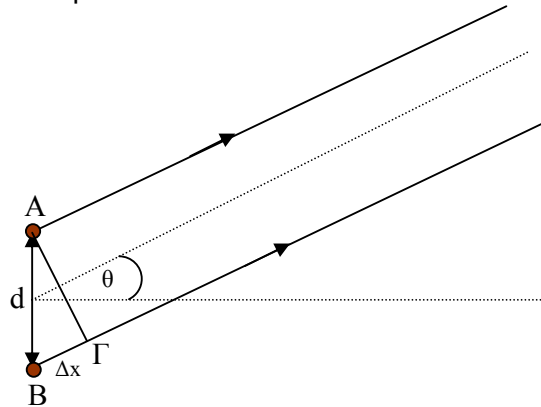
Βρίσκουμε τον χρόνο σε δευτερόλεπτα για 168750 ταλαντώσεις (αριθμός ταλαντώσεων που θα εκτελούσε το εκκρεμές για ακριβή χρόνο 24 ωρών) στη θερμοκρασία των 40°C (όπου η περίοδος είναι τώρα 0,5120768 s). Έχουμε,

$t = 168750 \cdot 0,5120768 = 86412,96 \text{ s}$ . Δηλαδή το εκκρεμές θα χρειαστεί 86412,96 s για να δείξει τον ακριβή χρόνο των 24 ωρών ή 86400 s. Άρα το ρολόι "πηγαίνει πίσω" κατά  $86412,96 - 86400 \text{ s} = 12,96 \text{ s}$ .

**(5 μον.)**

### **ΘΕΜΑ 2 (10 μονάδες)**

**(α)** Με βάση την προσέγγιση έχουμε το εξής διάγραμμα για τη συμβολή των κυμάτων στο δέκτη.



Από το διάγραμμα έχουμε για τη διαφορά δρόμου  $\Delta x$  των κυμάτων που φτάνουν στο δέκτη,

$$\Delta x = d \sin \theta$$

Η διαφορά φάσης των κυμάτων που φτάνουν στο δέκτη δίνεται από τη σχέση,

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x. \text{ Από τις δύο σχέσεις παίρνουμε για τη διαφορά φάσης,}$$

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

**(5 μον.)**

**(β)** Για μέγιστα της έντασης (ενισχυτική συμβολή):  $\Delta\phi = 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Άρα, } 2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \eta \mu \theta \Rightarrow k\lambda = d \eta \mu \theta \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{k\lambda}{d} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{k\lambda}{d}\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

**(5 μον.)**

### ΘΕΜΑ 3 (20 μονάδες)

**(α) (i)** Έστω  $y$  και  $x$  το μήκος των δύο διαγωνίων του ρόμβου. Το μήκος  $y$  δίνεται από τη σχέση  $y = vt$ , Το μήκος  $x$  βρίσκεται από το πυθαγόρειο θεώρημα.

$$x = 2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} \Rightarrow x = 2\sqrt{\ell^2 - \frac{y^2}{4}}.$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\ell^2 - \frac{v^2 t^2}{4}} = \sqrt{4\ell^2 - v^2 t^2}$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου είναι,

$$S = \frac{yx}{2} = \frac{vt\sqrt{4\ell^2 - v^2 t^2}}{2}. \text{ Αντικαθιστούμε,}$$

$$S = \frac{yx}{2} = \frac{2t\sqrt{4.0.5^2 - 2^2 t^2}}{2} \Rightarrow S = t\sqrt{1 - 4t^2}.$$

**(4 μον.)**

**(ii)** η μαγνητική ροή  $\Phi$  που περνά από την επιφάνεια του ρόμβου είναι,

$$\Phi = B \cdot S \cdot \sin\theta = B \cdot t \sqrt{1 - 4t^2} = 2t\sqrt{1 - 4t^2}$$

η επαγωγική τάση είναι,

$$E_{\varepsilon\pi} = -N \frac{d\Phi}{dt}, N = 1. \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d}{dt}(2t\sqrt{1 - 4t^2}).$$

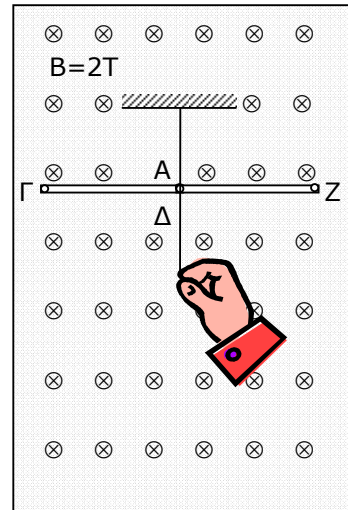
$$E_{\varepsilon\pi} = -(2\sqrt{1 - 4t^2} + 2t \frac{(-8t)}{2\sqrt{1 - 4t^2}})$$

$$E_{\varepsilon\pi} = 2 \frac{(8t^2 - 1)}{\sqrt{1 - 4t^2}}$$

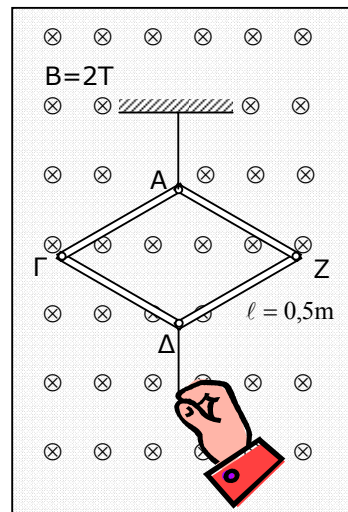
Το επαγωγικό ρεύμα είναι

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R}, R = 2\Omega. \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{8t^2 - 1}{\sqrt{1 - 4t^2}}.$$

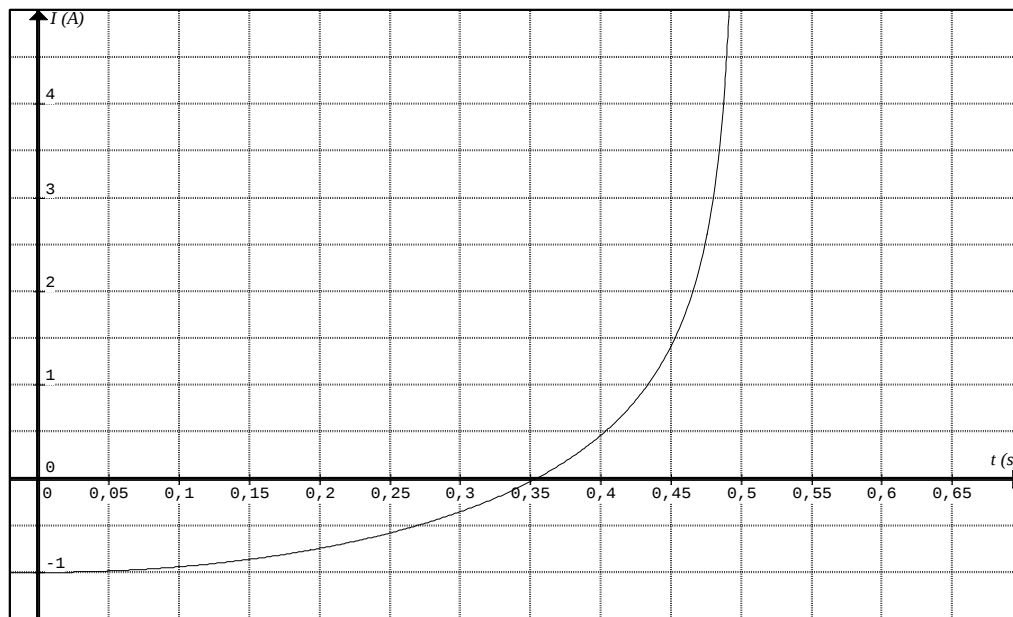
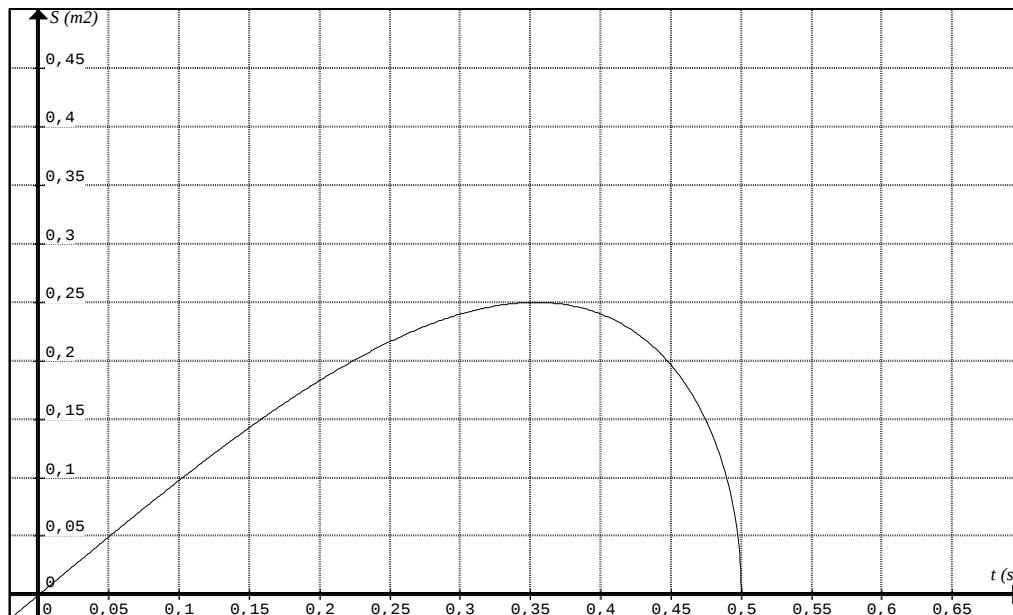
**(5 μον.)**



Σχ.1

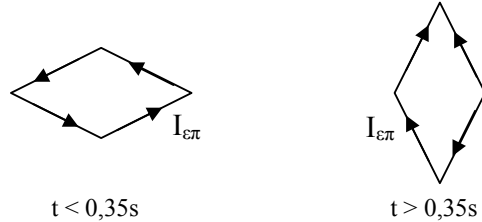


Σχ.2

**(β)****(3 μον.)****(3 μον.)**

(γ) Το ρεύμα αλλάζει φορά τη χρονική στιγμή που η συνάρτηση  $I_{\varepsilon\pi} = f(t)$  αλλάζει πρόσημο. Από τη σχέση  $I_{\varepsilon\pi} = f(t)$ , εξάγεται ότι αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή  $t = \frac{1}{\sqrt{8}} s = 0,35s$ . **(1 μον.)**

(δ)



**(4 μον.)**

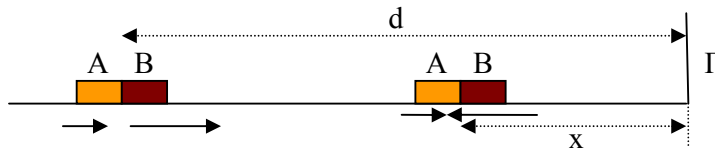
#### ΘΕΜΑ 4 (20 μονάδες)

(α) Έστω  $V_1$  και  $V_2$  οι ταχύτητες των αμαξιών A και B αντίστοιχα μετά την κρούση. Κατά την κρούση διατηρείται η ορμή:  $m_1 u_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2$ . (θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά). Εφόσον η κρούση είναι ελαστική διατηρείται και η κινητική ενέργεια:  $u_1 + V_1 = V_2$ . Από τις δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$m_1 u_1 = m_1 V_1 + m_2 (u_1 + V_1) \Rightarrow (m_1 - m_2) u_1 = V_1 (m_1 + m_2). \text{ Άρα,}$$

$$V_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1, \quad V_2 > 0, \text{ το αμαξάκι B κινείται προς τα δεξιά.}$$

Εφόσον  $m_1 > m_2$ , προκύπτει  $V_1 > 0$ . Το αμαξάκι A κινείται επίσης προς τα δεξιά. Το αμαξάκι B κινούμενο προ τα δεξιά συγκρούεται με το άκρο Γ του αεροδιαδρόμου και επιστρέφει πίσω με την ίδια σε μέτρο ταχύτητα. Στην επιστροφή συγκρούεται με το αμαξάκι A, για δεύτερη φορά.



Έστω  $x$  η απόσταση από το άκρο Γ που συμβαίνει η δεύτερη κρούση, τη χρονική στιγμή  $t_2$ . Μεταξύ των δύο κρούσεων το αμαξάκι A διανύει απόσταση  $d-x$  και το αμαξάκι B διανύει απόσταση  $d+x$ . Άρα

$$t_2 = \frac{d+x}{V_2} = \frac{d-x}{V_1} \Rightarrow \frac{d+x}{\frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2}} = \frac{d-x}{\frac{u_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}}, \Rightarrow (d+x)(m_1 - m_2) = (d-x)2m_1$$

$$\text{Τελικά, } x = \left( \frac{m_1 + m_2}{3m_1 - m_2} \right) d, \text{ (σχέση 1)}$$

**(12 μον.)**

$$(β) \quad t_2 = \frac{d-x}{V_1} = \frac{d - \frac{(m_1+m_2)d}{3m_1-m_2}}{\frac{(m_1-m_2)u_1}{m_1+m_2}} \Rightarrow t_2 = \frac{2d(m_1+m_2)}{(3m_1-m_2)u_1}, \text{ (σχέση 2)}$$

(4 μον.)

(γ) (i) Από τη σχέση 1, με  $x=d$ ,

$$\Rightarrow \frac{m_1+m_2}{3m_1-m_2} = 1 \Rightarrow m_1+m_2 = 3m_1-m_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

(2 μον.)

(ii) Για να μπορούν να συγκρούονται για δεύτερη φορά πρέπει να υπάρχει θετική λύση της σχέσης 2, για την τιμή  $t_2$ . Άρα,  $3m_1-m_2 > 0 \Rightarrow m_1 > \frac{m_2}{3}$

(2 μον.)

**ΘΕΜΑ 5 (20 μονάδες)**

(α) Η ράβδος μετά την κρούση εκτελεί σύνθετη κίνηση. Για το σύστημα ισχύει (i) η αρχή διατήρησης της ορμής, (ii) η αρχή διατήρησης της στροφορμής και (iii) η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας. Έστω,  $V_1$  η ταχύτητα του υλικού σημείου Γ αμέσως μετά την κρούση,  $V_{κμ}$  και  $\omega$  η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα αντίστοιχα του συστήματος ράβδου-υλικών σημείων A και B.

Από τις αρχές διατήρησης έχουμε:

$$(i) \Rightarrow mu = 3mV_{κμ} + mV_1 \Rightarrow u = 3V_{κμ} + V_1, \text{ (Σχέση 1)}$$

$$(ii) \Rightarrow mu\ell = \left(\frac{1}{3}m\ell^2 + 2m\ell^2\right)\omega + mV_1\ell, \text{ (Σχέση 2)}$$

$$(iii) \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\ell^2 + 2m\ell^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}3mV_{κμ}^2$$

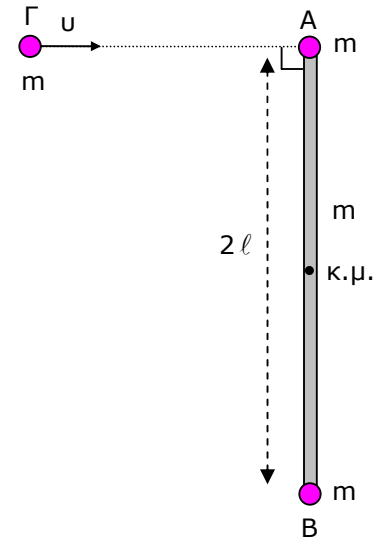
(Σχέση 3).

$$(Σχέση 1) \Rightarrow V_{κμ} = \frac{u-V_1}{3}$$

$$(Σχέση 2) \Rightarrow \omega = \frac{3(u-V_1)}{7\ell}$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις 1 και 2 στην (iii):

$$u^2 = 3\left(\frac{u-V_1}{3}\right)^2 + V_1^2 + \frac{7}{3}\ell^2\left(\frac{u-V_1}{\ell}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)^2$$



$$u^2 - V_1^2 = \frac{(u - V_1)^2}{3} + \frac{3(u - V_1)^2}{7} \Rightarrow u + V_1 = \frac{16}{21}(u - V_1)$$

$\Rightarrow V_1 = -\frac{5}{37}u$ . (Το αρνητικό πρόσημο δείχνει την κατεύθυνση, προς τα αριστερά).

**(14 μον.)**

**(β)** Η ράβδος εκτελεί περιστροφική κίνηση μετά την πλαστική κρούση. Ισχύει μόνο η αρχή διατήρησης της στροφορμής. Ως προς το σημείο Β έχουμε:

$$\Rightarrow mu\ell = \left(\frac{4}{3}m\ell^2 + 2m(2\ell)^2\right)\omega \Rightarrow u = \frac{28}{3}\ell\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3u}{28\ell}.$$

**(6 μον.)**

### ΘΕΜΑ 6 (20 μονάδες)

**(α)** Κατά την έκρηξη ισχύει η διατήρησης της ορμής. Έστω  $u_0$  η ταχύτητα της μάζας  $m$  τη στιγμή της έκρηξης.

Εφόσον η έκρηξη γίνεται στη θέση ισορροπίας Θ.Ι.(1), είναι,  
 $u_0 = \omega y_0$ .

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε,

$$mu_0 = m_A u_A - m_B u_B.$$

(Η θετική φορά είναι προς πάνω).

Δίνεται ότι:  $u_A = u_B = u$ ,  $m_A = \frac{m}{3}$ ,

$$m_B = \frac{2m}{3}. \text{ Άρα,}$$

$mu_0 = \frac{m}{3}u - \frac{2m}{3}u \Rightarrow u_0 = -\frac{u}{3}$ . Επομένως η φορά της ταχύτητας  $u_0$  είναι προς τα κάτω (από το αρνητικό πρόσημο).

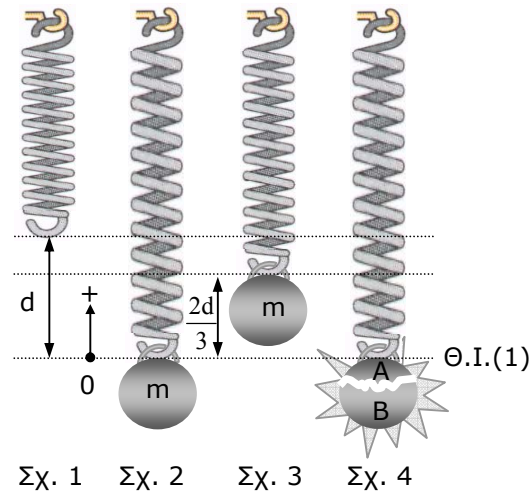
**(2 μον.)**

**(β)** Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή αλλάζει. Η νέα θέση ισορροπίας Θ.Ι.(2) βρίσκεται εκεί που ισορροπεί το θραύσμα Α.

Στη θέση ισορροπίας Θ.Ι.(1) ισχύει, από το νόμο του Hooke,

$$mg = Kd \Rightarrow K = \frac{mg}{d}$$

Στη θέση ισορροπίας Θ.Ι.(2), έχουμε,



$$\frac{mg}{3} = Ke \Rightarrow e = \frac{mg}{3K} = \frac{mg}{3 \frac{mg}{d}} \Rightarrow e = \frac{d}{3}.$$

η απόσταση  $y$  από το σημείο της έκρηξης έως το νέο σημείο ισορροπίας Θ.Ι.(2), είναι ίση με την απόσταση  $d - e$ . Άρα,

$$y = d - e = d - \frac{d}{3} = \frac{2d}{3}$$

(Διαφορετικά, η απόσταση  $y$  είναι η επιμήκυνση που προκαλεί το θραύσμα Β. Άρα, από το νόμο του Hooke,

$$\frac{2m}{3}g = Ky \Rightarrow y = \frac{2mg}{3K}, \Rightarrow y = \frac{2mg}{3 \frac{mg}{d}} \Rightarrow y = \frac{2d}{3})$$

Το νέο πλάτος  $y'_0$  της ταλάντωσης μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$u = \omega' \sqrt{y'^2_0 - y^2}. \quad \text{Όπου,} \quad u = 3u_0, \quad u_0 = \omega y_0, \quad y_0 = \frac{2d}{3}, \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{g}{d}},$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{K}{m_A}} = \sqrt{\frac{3g}{d}} \quad \text{Άρα η σχέση } u = \omega' \sqrt{y'^2_0 - y^2} \text{ γίνεται,}$$

$$3\sqrt{\frac{g}{d}} \frac{2d}{3} = \sqrt{\frac{3g}{d}} \sqrt{y'^2_0 - \left(\frac{2d}{3}\right)^2}$$

$$9 \frac{g}{d} \frac{4d^2}{9} = \frac{3g}{d} \left( y'^2_0 - \frac{4d^2}{9} \right) \Rightarrow 4d = \frac{3}{d} y'^2_0 - \frac{4d}{3}$$

$$4d + \frac{4d}{3} = \frac{3}{d} y'^2_0 \Rightarrow \frac{16d}{3} = \frac{3}{d} y'^2_0 \Rightarrow y'^2_0 = \frac{16d^2}{9}$$

$$\Rightarrow y'_0 = \frac{4d}{3}.$$

(β' τρόπος)

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, (η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική ενέργεια και την δυναμική ελαστική ενέργεια ως προς τη νέα Θ.Ι.(2)). Άρα,

$$\frac{1}{2}Ky^2 + \frac{1}{2}m_A u^2 = \frac{1}{2}Ky'^2_0, \text{ Αντικαθιστούμε, } m_A = \frac{m}{3}, \quad u = 3u_0 = 3\omega y_0 = 3\sqrt{\frac{K}{m}} \frac{2d}{3},$$

$$\Rightarrow K \frac{4d^2}{9} + \frac{m}{3} \cdot 9 \frac{K}{m} \cdot \frac{4d^2}{9} = Ky'^2_0, \Rightarrow y'_0 = \frac{4d}{3}.$$

**(8 μον.)**

**(γ)** Η περίοδος ταλάντωσης του θραύσματος Α είναι:  $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{d}}}$

η περίοδος πριν την έκρηξη είναι:

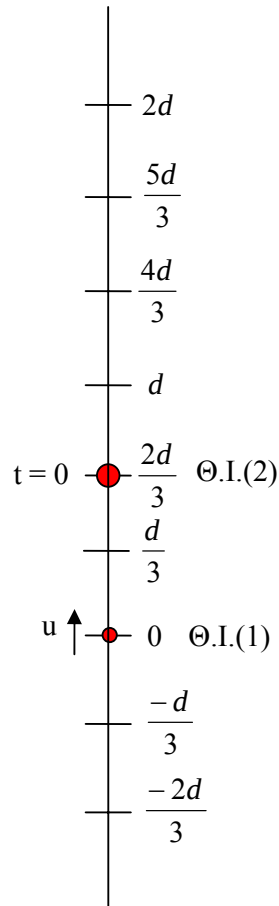
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{d}}}. \text{ Άρα,}$$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{3}} = 1s, \quad (T = \sqrt{3}s).$$

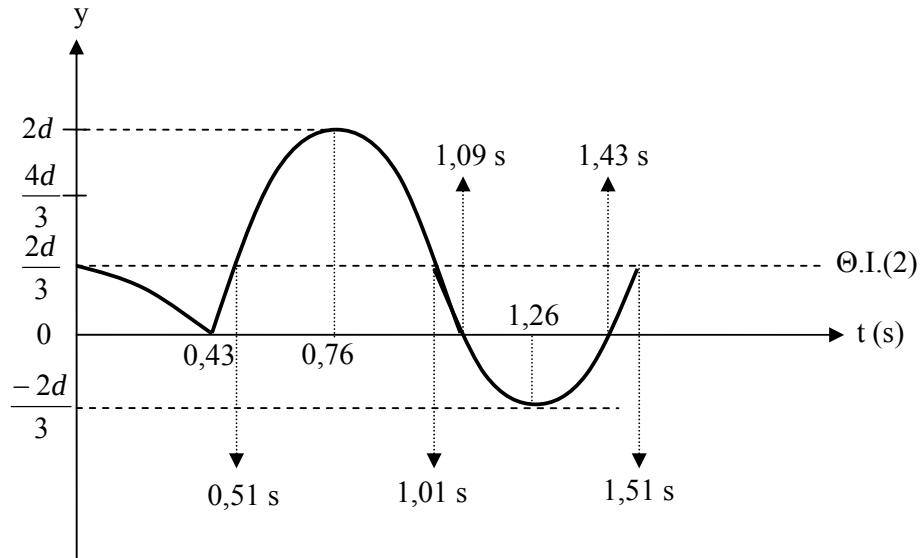
Ο ζητούμενος χρόνος  $t$  είναι ο χρόνος  $t_1$  για να κινηθεί το σώμα  $m$  από την αρχική ακραία θέση,  $\frac{2d}{3}$ , μέχρι τη Θ.Ι.(1) και ο χρόνος  $t_2$  για να κινηθεί το θραύσμα Α,  $m_A$ , από τη Θ.Ι.(1) μέχρι τη Θ.Ι.(2). Ο χρόνος  $t_1$  γίνεται σε  $\frac{1}{4}$  της αρχικής περιόδου. Ο χρόνος  $t_2$  γίνεται σε χρόνο που ικανοποιεί τη σχέση,  $\omega' t_2 = \frac{\pi}{6}$ , εφόσον το θραύσμα θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση,  $y = y_0' \eta \mu(\omega' t)$ , με  $y = \frac{y_0'}{2}$ , όταν  $t = t_2$ . Άρα,

$$t_2 = \frac{T'}{12}. \text{ Τελικά,}$$

$$t = \frac{T}{4} + \frac{T'}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{12} = 0,51s.$$



**(2 μον.)**

**(δ)****(5 μον.)**

$$\textbf{(ε)} \quad \Delta E = \frac{1}{2} \frac{m}{3} u^2 + \frac{1}{2} \frac{2m}{3} u^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 = \frac{1}{2} m (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{2} m (9u_0^2 - u_0^2)$$

$$\Delta E = 4m u_0^2 = 4m \omega^2 y_0^2 = 4m \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\frac{2d}{3}\right)^2, T = \sqrt{3}s, \text{ Άρα}$$

$$\Delta E = \frac{64\pi^2 m d^2}{27}.$$

Σημείωση, εάν αντικαταστήσουμε στη σχέση

$$\Delta E = 4m \omega^2 y_0^2, \quad \omega^2 = \frac{g}{d}, \quad \text{και} \quad y_0 = \frac{2d}{3}, \quad \text{παίρνουμε,}$$

$$\Delta E = \frac{4mg4d^2}{9d} = \frac{16mgd}{9}, \quad \text{που είναι αποδεκτή.}$$

**(3 μον.)**