ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

Μαθηματικά

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Μέρος Α'

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού

Α΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού, Α΄ Τεύχος

Συγγραφή:	Αθανασίου Ανδρέας
	Αντωνιάδης Μάριος
	Γιασουμής Νικόλας
	Έλληνα Αγγέλα
	Λοϊζιάς Σωτήρης
	Ματθαίου Κυριάκος
	Μαυροκορδάτου Μερόπη
	Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
	Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
	Τιμοθέου Σάββας
	Φιλίππου Ανδρέας
Συντονιστής:	Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
Εποπτεία:	Καλλεπίτη Ευτυχία, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
	Φιλίππου Ανδρέας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
	Γιασουμής Νικόλας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
	Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Γλωσσική επιμέλεια:	Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
Σχεδιασμός εξωφύλλου:	Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2013
Β΄ έκδοση 2014
Γ΄ έκδοση 2016

Εκτύπωση: Cassoulides Masrerprinters

ISBN: 978-9963-54-027-3

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Α΄ Λυκείου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει …», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης

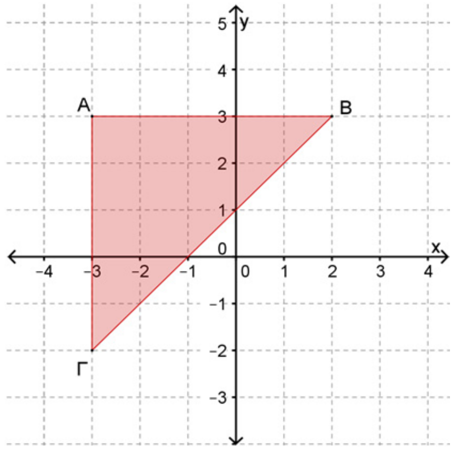
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

Περιεχομενα

Επανάληψη

Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$ και να δώσετε τις απαντήσεις σας στην πιο απλή μορφή.



2. Να τοποθετήσετε σε αριθμητική γραμμή τους πιο κάτω αριθμούς:

$$\sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{5} \qquad \sqrt[3]{8} \qquad \sqrt[3]{29} \qquad \sqrt{29}$$

3. Η οργανωτική επιτροπή μιας συναυλίας θέλει να τοποθετήσει 900 καθίσματα σε ένα κλειστό γήπεδο. Τα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε τετράγωνη διάταξη. Πόσα καθίσματα θα τοποθετήσουν σε κάθε σειρά;

4. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κυκλικού χαλιού που έχει διάμετρο $10\ m$.

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

   (α) $2x - 6 = 4x - 2$

   (β) $3(x - 4) = 2x - 5$

   (γ) $5(x + 3) = 5x + 3$

   (δ) $\frac{a-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{a}{3} + \frac{1}{6}$

6. Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις, έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αδύνατες.

   (α) $(\lambda - 3)x = 7$

   (β) $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x$

7. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις, έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αόριστες.

   (α) $(\alpha + 3)x = 0$

   (β) $\alpha x = 6x$

8. Να εξετάσετε για ποιες πραγματικές τιμές του x ορίζεται η καθεμιά από τις παραστάσεις:

   $A = \sqrt{3x - 2}$

   $B = \sqrt{20 - 5x}$

9. Δίνονται οι ανισώσεις $3x - 4 \geq x - 2$ και $2x + 3 < 13$.
   (α) Να βρείτε τις λύσεις της κάθε ανίσωσης.
   (β) Να παραστήσετε τη κοινή λύση των δύο ανισώσεων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
   (γ) Ποια είναι η μικρότερη τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις;
   (δ) Να βρείτε 4 άλλες λύσεις που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις.
   (ε) Να βρείτε τη μεγαλύτερη ακέραια τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις.

10. Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πιο κάτω ευθειών και να τις παραστήσετε γραφικά:

(α) $y = x + 2$	(β) $y = 2x$
(γ) $y = 3x - 2$	(δ) $y + 3x = 1$
(ε) $y = 2$	(στ) $x = 3$

11. Η ευθεία $y = \alpha x$ περνά από το σημείο $A(-1, 3)$.
    (α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.
    (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες δύο σημείων που ανήκουν στην ευθεία $y = \alpha x$.

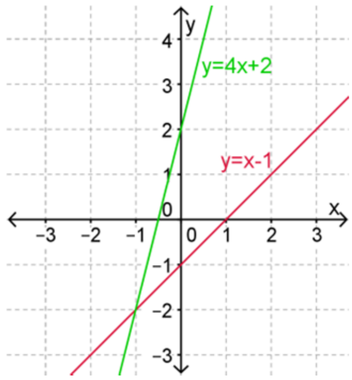
12. Η γραφική παράσταση της ευθείας $y = -2x + \beta$ περνά από το σημείο $A(-2, 6)$. Να υπολογίσετε την τιμή του β.

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία:
    (α) $(0,1)$ και $(2,4)$
    (β) $(0,4)$ και $(-1,4)$

14. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:
    (α) $y = 3 + x$
    $x + 2y = 6$

    (β) $y - 2x = 0$
    $2x + y = 3$

15. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών $\varepsilon_1 : y = x - 1$ και $\varepsilon_2 : y = 4x + 2$.
Να λύσετε γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$



16. Να βρείτε τα αναπτύγματα:
(α) $(x+2)^2$
(β) $(2x-3\psi)^2$
(γ) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2$
(δ) $(x-3)(x+3)$
(ε) $(x+4)^3$
(στ) $(2x-1)(2x+1)$

17. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+1)^2 - (\alpha+1)(\alpha-1) = 2(\alpha+1)$

18. Αν $a + \beta = -\frac{1}{3}$ και $a\beta = -\frac{7}{3}$, να αποδείξετε ότι:
(α) $a^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$
(β) $(3a+1)^2 + (3\beta+1)^2 + 10(a+\beta) = \frac{119}{3}$
(γ) $a^3 + \beta^3 = -\frac{64}{27}$

19. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:
(α) $2x^3 - 2x$
(β) $y^2 - x^2 - 10y + 25$
(γ) $a^3x^3 - \beta^3x^3 + a^3 - \beta^3$
(δ) $(x-2y)^2 - (x+3y)^2$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(α) $3x^2 - 15x = 0$
(β) $x^2 + x = 6$
(γ) $(\alpha-2)(2\alpha+8) = -10$
(δ) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}$

(β) $\frac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2-4(\alpha+1)}{\alpha^3+\alpha^2}$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}=0$

(β) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+2}{x+3}$

(γ) $\frac{2x-19}{x^2+x-6}-\frac{x}{2-x}=\frac{5}{x+3}$

23. Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που τα τετράγωνά τους έχουν άθροισμα 145.

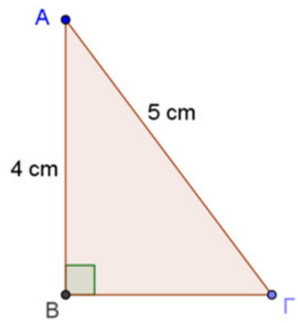
24. Να δείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του.

25. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές $(AB=A\Gamma)$. Στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία E, Z έτσι ώστε $BE=\Gamma Z$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

26. Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να βρείτε:

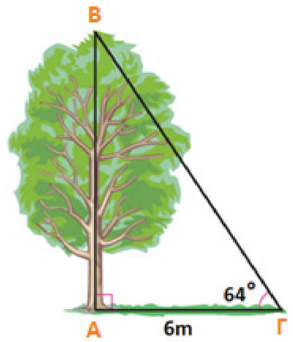
(α) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{A}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$

(β) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{\Gamma}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$

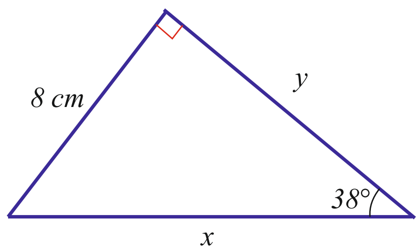


27. Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\theta$ και την $\varepsilon\varphi\theta$ οξείας γωνίας $\hat{\theta}$ ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta=\frac{3}{5}$.

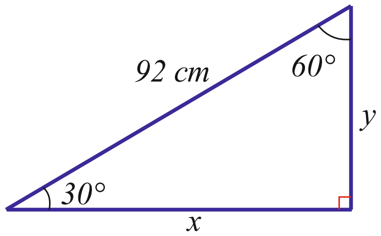
28. Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος του δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση $6\,m$ από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέγεθος της γωνίας προς την κορυφή του δέντρου ήταν $64°$. Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου. (Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί να υπολογιστούν κατά προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων).



29. Να υπολογίσετε τους άγνωστους x και y στις πιο κάτω περιπτώσεις:
(α)



(β)



Ενότητα

1

Πραγματικοί Αριθμοί

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να υπολογίζουμε τη νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού.
- Να υπολογίζουμε τη ρίζα ενός πολυωνύμου της μορφής $P(x) = x^{\nu} - \alpha$ και τη λύση της εξίσωσης της μορφής $x^{\nu} - \alpha = 0$.
- Τις ιδιότητες των ριζών μη αρνητικού πραγματικού αριθμού.
- Να αναγνωρίζουμε και να υπολογίζουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
- Να αποδεικνύουμε και να χρησιμοποιούμε τις βασικές ιδιότητες διάταξης των πραγματικών αριθμών.

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Έχουμε μάθει …

- Να ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού

  a

  $\sqrt{a} = \beta \iff \beta^2 = a$, όπου $a > 0, \beta > 0.$

- Να ορίζουμε την κυβική ρίζα ενός θετικού αριθμού a

  $\sqrt[3]{a} = \beta \iff \beta^3 = a$, όπου $a > 0, \beta > 0.$

- Τις ιδιότητες των δυνάμεων.

  Αν $a > 0, \beta > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{Z}^*$ τότε:

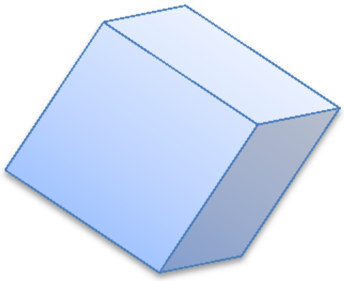
  $a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu}, \frac{a^\mu}{a^\nu} = a^{\mu-\nu}, (a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu}$

  $a^\nu \cdot \beta^\nu = (a \cdot \beta)^\nu, \frac{a^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu$

Διερεύνηση (1)

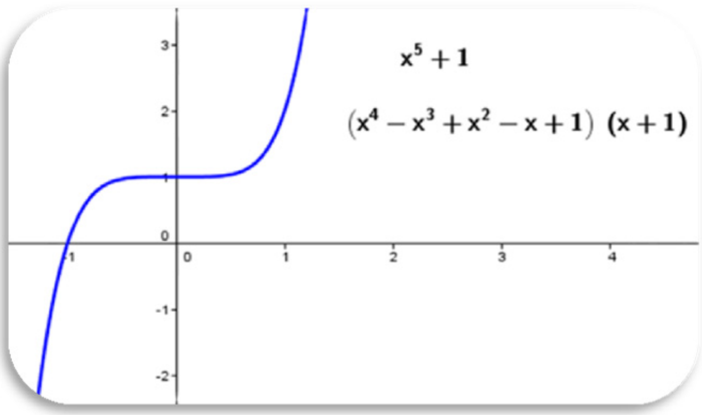
- Γιατί οι αριθμοί $16, 64, 100$ ανήκουν στο σύνολο των τετράγωνων αριθμών; Ποια σχέση έχουν με το σχήμα του τετραγώνου;
  Να υπολογίσετε την πλευρά ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν είναι $10{,}24\ cm^2$.

- Γιατί οι αριθμοί $8, 27, 1000$ ανήκουν στο σύνολο των τέλειων κύβων; Ποια σχέση έχουν με τον κύβο;
  Να υπολογίσετε την πλευρά ενός κύβου του οποίου ο όγκος είναι $1728\ cm^3$.



Διερεύνηση (2)

- Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn02_RizesPolyonymou.ggb»*.



✓ Να δώσετε κατάλληλες τιμές στα "ν" και "a", για να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις της μορφής $f(x) = x^\nu + a$, που αναπαριστούν τα αντίστοιχα πολυώνυμα $P(x)$ και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, σύμφωνα με το παράδειγμα.

Πολυώνυμο $x^\nu + a$	**Πολυώνυμο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**	**Εξίσωση**	ν	**Λύση εξίσωσης**
$P(x) = x^2 - 1$	$P(x) = (x-1)(x+1)$	$x^2 = 1$	2	$x = 1$, $x = -1$
$P(x) = x^2 + 1$	$P(x) = x^2 + 1$	$x^2 = -1$	2	Δεν έχει πραγματικές λύσεις
$P(x) = x^3 + 1$	$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$			
$P(x) = x^3 - 1$	$P(x) = (x-1)(x^2 + x - 1)$			
$P(x) = x^4 - 1$	$P(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$			
$P(x) = x^4 + 1$	$P(x) = x^4 + 1$			
$P(x) = x^5 - 1$	$P(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$			
$P(x) = x^5 + 1$	$P(x) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$			

✓ Τι παρατηρείτε;

- Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, χωρίς να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

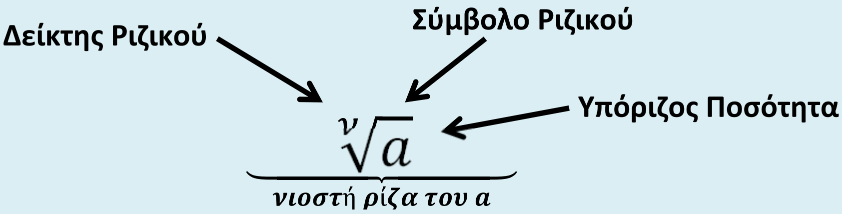
Πολυώνυμο $x^\nu + a$	**Πολυώνυμο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**	**Εξίσωση**	ν	**Λύση εξίσωσης**
$P(x) = x^4 - 16$	$P(x) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$	$x^4 = 16$		
	$P(x) = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$			
	$P(x) = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$			
	$P(x) = (x-3)(x+3)(x^2+9)$			
$P(x) = x^4 + 81$	$P(x) = x^4 + 81$			
$P(x) = x^6 + 1$	$P(x) = x^6 + 1$			

✓ Τι παρατηρείτε;

Μαθαίνω

- Η **νιοστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$**,** όπου ν θετικός ακέραιος, είναι ο μη αρνητικός αριθμός β ο οποίος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη ν, δίνει τον αριθμό α.

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta^{\nu} = \alpha \quad (\alpha \geq 0 \text{ και } \beta \geq 0,\ \nu \in \mathbb{N})$$



➢ Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι:

$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$

$\sqrt[\nu]{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$

$\sqrt[\nu]{1} = 1$

- **Ρίζα πολυωνύμου** $\Pi(x)$ είναι κάθε αριθμός ρ, τέτοιος ώστε η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$ να είναι ίση με 0, δηλαδή $\Pi(\rho) = 0$.
- Διερεύνηση της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$ (ν θετικός ακέραιος)

$\boldsymbol{\alpha > 0}$	*Αν* $\boldsymbol{\nu = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{N}}$ ***(περιττός), τότε*** $\boldsymbol{x^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}}$
	Αν $\nu = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{N}$ *(άρτιος), τότε* $x^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $x = -\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\boldsymbol{\alpha < 0}$	*Αν* $\nu = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{N}$ *(περιττός), τότε* $x^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert} = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$
	Αν $\nu = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{N}$ *(άρτιος), τότε η εξίσωση* $x^{\nu} = \alpha$ *είναι αδύνατη.*
$\boldsymbol{\alpha = 0}$	$x^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow x = 0$

- Για να εξετάσουμε κατά πόσο ένα πολυώνυμο της μορφής $\Pi(x) = x^{\nu} - \alpha$ έχει ρίζες, εξετάζουμε κατά πόσο η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$ έχει λύσεις με βάση τον πιο πάνω πίνακα.

Σημείωση: Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$.

Παράδειγμα: $\sqrt[4]{81} = 3$ (το 3 είναι η θετική λύση της εξίσωσης $x^4 = 81$)

- **Ιδιότητες ριζών θετικού πραγματικού αριθμού**

  (α) $\left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu} = a$, για κάθε $a \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος

  (β) $\sqrt[\nu]{a \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, για κάθε $a, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος

  (γ) $\frac{\sqrt[\nu]{a}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{a}{\beta}}$, για κάθε $a \geq 0$ και $\beta > 0$ και ν θετικός ακέραιος

  (δ) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$, για κάθε $a \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι

  (ε) $\sqrt[\nu\rho]{a^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$, για $a \geq 0$ και μ, ν, ρ θετικοί ακέραιοι.

- **Ρητοποίηση του παρονομαστή.** Πολλές φορές, κυρίως για λόγους ευκολίας, σε πράξεις μεταξύ κλασμάτων, χρειάζεται να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή. Η διαδικασία αυτή γίνεται χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ριζών ή κατάλληλες ταυτότητες.

  Παραδείγματα:

  (α) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

  Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με την $\sqrt[3]{2^2}$ έτσι ώστε ο παρονομαστής να γίνει $\sqrt[3]{2^3}$. Γενικότερα εάν ο παρονομαστής είναι της μορφής $\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}, \kappa < \nu$ πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με την παράσταση $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\kappa}}$.

  (β) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τη **συζυγή παράσταση** του παρονομαστή $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, έτσι ώστε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ να μετατρέψουμε τον παρονομαστή σε ρητό.

- **Συζυγή παράσταση** ονομάζουμε την κατάλληλη παράσταση της μορφής $\kappa\sqrt{\alpha} \pm \lambda\sqrt{\beta}$ που συμπληρώνει την παραπάνω ταυτότητα και οδηγεί σε διαφορά τετραγώνων.

Απόδειξη Ιδιοτήτων

(α) $\left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu} = a$, για κάθε $a \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος.

Απόδειξη:

Θέτουμε $\sqrt[\nu]{a} = x$. Από τον ορισμό $\sqrt[\nu]{a} = x \Leftrightarrow x^{\nu} = a$,προκύπτει $\left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu} = x^{\nu} = a$.

(β) $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος.

Απόδειξη:

Η παράσταση $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$ είναι θετική $(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} \geq 0)$, γιατί $\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$ και $\sqrt[\nu]{\beta} \geq 0$.

Ισχύει ότι: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \alpha \cdot \beta$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

(γ) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, για κάθε $\alpha \geq 0, \beta > 0$ και ν θετικός ακέραιος.

Απόδειξη:

Η παράσταση $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ είναι θετική $\left(\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} \geq 0\right)$, γιατί $\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$ και $\sqrt[\nu]{\beta} > 0$.

Ισχύει ότι: $\left(\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^\nu = \dfrac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι: $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Παράδειγμα: $\sqrt[3]{\dfrac{24}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{3}$

(δ) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$, για κάθε $\alpha \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι.

Απόδειξη:

Η παράσταση $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}$ είναι θετική $(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} \geq 0)$, γιατί $\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$.

Ισχύει ότι: $\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^\mu\right]^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$

Παράδειγμα: $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

(ε) $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ για $\alpha \geq 0$ και μ, ν, ρ θετικοί ακέραιοι.

Απόδειξη:

$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}\right)^{\nu\rho} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\right)^{\nu\rho} \Leftrightarrow \alpha^{\mu\rho} = \left[\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\right)^\nu\right]^\rho \Leftrightarrow \alpha^{\mu\rho} = (\alpha^\mu)^\rho \Leftrightarrow$
$\alpha^{\mu\rho} = \alpha^{\mu\rho}$ ή

Με βάση την ιδιότητα (δ) έχουμε: $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^\mu)^\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Παράδειγμα: $\sqrt[10]{3^5} = \sqrt{3}$

Σημειώσεις:

(α) Μπορούμε να αποδείξουμε τις ιδιότητες (β), (γ), (δ) και (ε), χρησιμοποιώντας την ιδιότητα την οποία έχουμε ήδη αποδείξει.

Για παράδειγμα, $\sqrt[\nu]{a \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, για κάθε $a, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος. Υψώνουμε και τα δύο μέλη της ισότητας στην ν-οστή δύναμη και θα έχουμε:

$$\left(\sqrt[\nu]{a\,\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} \Rightarrow a\beta = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu} \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} \Rightarrow a\beta = a\beta$$

(β) Από την ιδιότητα $\sqrt[\nu]{a \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, για κάθε $a, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος, προκύπτει ότι:

- ✓ $\sqrt[\nu]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_\kappa} = \sqrt[\nu]{a_1} \cdot \sqrt[\nu]{a_2} \cdots \sqrt[\nu]{a_\kappa}$, για κάθε $a_1, a_2, \dots, a_\kappa \geq 0$

- ✓ $\sqrt[\nu]{a^\kappa} = \sqrt[\nu]{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\kappa-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}} = \underbrace{\sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{a} \cdots \sqrt[\nu]{a}}_{\kappa-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\kappa}$, για κάθε θετικό ακέραιο κ

- ✓ $\sqrt[\nu]{a^\nu} = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu} = a$

- ✓ $\sqrt[\nu]{a^\nu \beta} = \sqrt[\nu]{a^\nu} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = a \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

- ***Παρατήρηση:*** *Την παραπάνω ιδιότητα μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε ριζικά σε απλούστερη μορφή. Τη διαδικασία αυτή την ονομάζουμε εξαγωγή από το ριζικό.*

  Παράδειγμα:

  $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Παραδείγματα

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

   (α) $\sqrt{2^{2014}}$ (β) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[3]{2}$ (γ) $\frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}}$ (δ) $\sqrt[5]{32^3}$

   Λύση:

   (α) $\sqrt{2^{2014}} = \sqrt{(2^{1007})^2} = 2^{1007}$

   (β) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2 \cdot 8 \cdot 4} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

   (γ) $\frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{80}{10}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

   (δ) $\sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{(2^5)^3} = \sqrt[5]{(2^3)^5} = 2^3 = 8$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

   (α) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{x},\ x \geq 0$ (β) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{4}}$ (γ) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ (δ) $\sqrt[6]{4x^4} \cdot \sqrt[6]{16x^2},\ x \geq 0$

Λύση:

(α) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{5x}$

(β) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\frac{8}{4}}=\sqrt[4]{2}$

(γ) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

(δ) $\sqrt[6]{4x^4}\cdot\ \sqrt[6]{16x^2}=\ \sqrt[6]{64x^6}=2x$

3. Να γράψετε τα ριζικά σε πιο απλή μορφή

(α) $\sqrt{20}$ (β) $\sqrt[4]{2^5}$ (γ) $\sqrt[3]{5^5\cdot 2^7}$

(δ) $\sqrt[5]{\alpha^{12}\cdot\beta^7\cdot\gamma^3},\alpha,\beta,\gamma>0$ (ε) $\sqrt[4]{405}$

Λύση:

(α) $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

(β) $\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$

(γ) $\sqrt[3]{5^5\cdot 2^7}=\sqrt[3]{5^3\cdot 5^2\cdot 2^6\cdot 2}=\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{5^2\cdot 2}=5\cdot 2^2\cdot\sqrt[3]{50}=20\sqrt[3]{50}$

(δ) $\sqrt[5]{\alpha^{12}\cdot\beta^7\cdot\gamma^3}=\sqrt[5]{\alpha^{10}\cdot\beta^5\cdot\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^3}=\sqrt[5]{(\alpha^2)^5}\cdot\sqrt[5]{\beta^5}\cdot\sqrt[5]{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^3}=$

$=\alpha^2\cdot\beta\cdot\sqrt[5]{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^3}$

(ε) $\sqrt[4]{405}=\sqrt[4]{3^4\cdot 5}=3\cdot\sqrt[4]{5}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{50}-\sqrt{2}$ (β) $\left(5-\sqrt{x}\right)^2,x\geq 0$

(γ) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-4\sqrt{5}\right)$

Λύση:

(α) $\sqrt{50}-\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(β) $\left(5-\sqrt{x}\right)^2=5^2-2\cdot 5\cdot\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2=25-10\sqrt{x}+x=25+x-10\sqrt{x}$

(γ) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-4\sqrt{5}\right)=3-4\sqrt{15}+2\sqrt{15}-8\cdot 5=-37-2\sqrt{15}$

5. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

(α) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (β) $\frac{3}{1-\sqrt{2}}$ (γ) $\frac{2}{4+\sqrt{3}}+\frac{2}{4-\sqrt{3}}$

Λύση:

(α) $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(β) $\frac{3}{1-\sqrt{2}}=\frac{3}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{3\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{3\left(1+\sqrt{2}\right)}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\left(1+\sqrt{2}\right)}{1-2}=-3\left(1+\sqrt{2}\right)$

(γ) $\frac{2}{4+\sqrt{3}}+\frac{2}{4-\sqrt{3}}=\frac{2\left(4-\sqrt{3}\right)+2\left(4+\sqrt{3}\right)}{\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)}=\frac{8-2\sqrt{3}+8+2\sqrt{3}}{4^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{16}{16-3}=\frac{16}{13}$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^3 = 8$ (β) $x^3 = -8$ (γ) $(2-x)^4 = 81$

Λύση:

(α) $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = 2$ ($a > 0$ και ν περιττός, τότε $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$)

(β) $x^3 = -8 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{8} \Rightarrow x = -2$

($a < 0$ και ν περιττός, τότε $x^\nu = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|a|} = -\sqrt[\nu]{-a}$)

(γ) $(2-x)^4 = 81 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2-x = \sqrt[4]{81} \\ \text{ή} \\ 2-x = -\sqrt[4]{81} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2-x = 3 \\ \text{ή} \\ 2-x = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x = -1 \\ \text{ή} \\ x = 5 \end{array}$

($a > 0$ και ν άρτιος, τότε $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$ ή $x = -\sqrt[\nu]{a}$)

7. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x+1} = 4$

Λύση:

Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt{x+1} = 4$, πρέπει $x + 1 \geq 0$, δηλαδή $x \geq -1$.

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δεύτερη δύναμη:

$\sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x + 1 = 16 \Rightarrow x = 15$ ($x > -1$, δεκτή)

8. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x^4 - 7} = 3$

Λύση:

Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt{x^4 - 7} = 3$, πρέπει $x^4 - 7 \geq 0$.

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δεύτερη δύναμη:

$\sqrt{x^4 - 7} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x^4 - 7}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow x^4 - 7 = 9 \Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ ($x^2 + 4 \neq 0$)

Για $x = \pm 2$, τότε $x^4 - 7 = 9 \geq 0$. Άρα και οι δύο τιμές του x είναι δεκτές.

Δραστηριότητες

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\sqrt[5]{32}$ (β) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{3}$ (γ) $\frac{\sqrt{48}\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

(δ) $\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[4]{a^3}, \alpha\geq 0$ (ε) $\sqrt[8]{x^4}, x\geq 0$ (στ) $\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[6]{x^2}, x\geq 0$

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\mathbf{3}}}}=\sqrt[9]{\mathbf{3}}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$x\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2x^6}$, για κάθε πραγματικό αριθμό x	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\sqrt[\nu]{x}:\sqrt[\nu]{y}=\sqrt[\nu]{\frac{x}{y}}, (x,y>0,\nu$ φυσικός$)$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\sqrt[\nu]{x}+\sqrt[\nu]{y}=\sqrt[\nu]{x+y}, (x,y\geq 0,\nu$ φυσικός$)$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Για κάθε x πραγματικό αριθμό ισχύει: $\sqrt{x^2}=x$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	$\frac{\sqrt{x^2}}{(\sqrt{x})^2}=1$, για κάθε $x\neq 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Αν $x>0$, τότε ισχύει $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(η)	$\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x}$, για κάθε πραγματικό αριθμό x	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{54}$ (β) $\sqrt{8a^3},\ a\geq 0$ (γ) $\sqrt[4]{x^5},\ x\geq 0$

(δ) $\sqrt[3]{16a^4}, a\geq 0$ (ε) $\sqrt[3]{\sqrt{x^7}},\ x\geq 0$ (στ) $\left(\sqrt{\sqrt[5]{x^2}}\right)^6, x\geq 0$

4. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}$ ισούται με:

Α. $\sqrt[12]{6}$ Β. $\sqrt[7]{6}$ Γ. $\sqrt[12]{2^3\cdot 3^4}$ Δ. $\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}$

(β) Ο αριθμός $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ ισούται με:

Α. $\sqrt[6]{3}$ Β. $\sqrt[4]{3}$ Γ. $\sqrt[9]{3}$ Δ. $\sqrt[12]{3}$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$ (β) $\left(2\sqrt{75}+3\sqrt{48}-9\sqrt{3}+3\right):\sqrt{27}$

(γ) $\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$ (δ) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}-\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

6. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

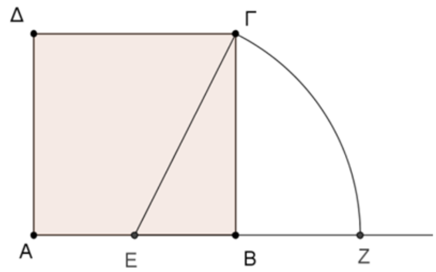
(α) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ (β) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (γ) $\frac{1}{3+\sqrt{3}}$ (δ) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (ε) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}, a \geq 0$ και $a \neq 1$

7. Να υπολογίσετε το x^3, αν $x-3\sqrt[3]{7}=4\sqrt[3]{7}$.

8. Αν $x=1+\sqrt{2}$ και $y=1+\sqrt{3}$, να δείξετε ότι οι παραστάσεις $A=3x^2-6x+3$ και $B=2y^2-4y+2$ είναι ίσες.

9. Αν $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ να δείξετε ότι $\varphi^2=\varphi+1$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $1\,cm$. Με κέντρο το $Ε$ (μέσο της $ΑΒ$) και ακτίνα $ΕΓ$ γράφουμε τόξο που τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο $Ζ$. Να βρείτε το μήκος του $ΑΖ$.



11. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\frac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^6}}=3$

12. Να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ είναι ρητός, αν ο αριθμός a είναι θετικός ρητός.

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\sqrt{10-x}=4$ (β) $\sqrt[4]{2x-8}=2$ (γ) $\sqrt{25-x^2}-3=0$

(δ) $\sqrt{x-2}=-3$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^4-625=0$ (β) $x^5+32=0$ (γ) $x^5-81x=0$

(δ) $(x-2)^4-216(x-2)=0$ (ε) $\frac{1}{6}x^3+36=0$

Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Διερεύνηση

- Έχουμε μάθει ότι:
  - αν δύο δυνάμεις με την ίδια βάση είναι ίσες, τότε και οι εκθέτες τους είναι ίσοι, δηλαδή, $a^{\mu} = a^{\nu} \Leftrightarrow \mu = \nu$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ και $a \neq \pm 1$.
  - $\left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu} = a$, για κάθε $a \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος

  Με βάση τα πιο πάνω:
  - αν $6^x = 6^4$, τότε $x = 4$
  - αν $\left(\sqrt[x]{4}\right)^7 = 4$, τότε $x = 7$

✓ Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες, όπως τα λυμένα παραδείγματα. Τι παρατηρείτε;

	Διαδικασία υπολογισμού του x		
$\sqrt{7} = 7^x$	$\left(\sqrt{7}\right)^2 = (7^x)^2 \Leftrightarrow 7 = 7^{2x} \Leftrightarrow 2x = 1$	$x = \dfrac{1}{2}$	$\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{3} = 3^x$		$x =$........	$\sqrt{3} = 3^{\square}$
$\sqrt[4]{3} = 3^x$		$x =$........	$\sqrt[4]{3} = 3^{\square}$
$\sqrt[4]{3^5} = 3^x$		$x =$........	$\sqrt[4]{3^5} = 3^{\square}$
$\sqrt[\nu]{a^{\mu}} = a^x$		$x =$........	$\sqrt[\nu]{a^{\mu}} = a^{\square}$

		$a^x = \sqrt[\kappa]{a}$
$(7^x)^2 = 7$ $x = \dfrac{1}{2}$	$\left(\sqrt[\kappa]{7}\right)^2 = 7$ $\kappa = 2$	$7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$
$(7^x)^3 = 7^2$ $x = \dfrac{2}{3}$	$\left(\sqrt[\kappa]{7^2}\right)^3 = 7^2$ $\kappa = 3$	$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2}$
$(3^x)^2 = 3$ $x =$........	$\left(\sqrt[\kappa]{3}\right)^2 = 3$ $\kappa =$........	
$(3^x)^4 = 3$ $x =$........	$\left(\sqrt[\kappa]{3}\right)^4 = 3$ $\kappa =$........	
$(3^x)^4 = 3^5$ $x =$........	$\left(\sqrt[\kappa]{3^5}\right)^4 = 3$ $\kappa =$........	
$(a^x)^{\nu} = \alpha^{\mu}$ $x =$........	$\left(\sqrt[\kappa]{a^{\mu}}\right)^{\nu} = a^{\mu}$ $\kappa =$........	

Μαθαίνω

- Μια παράσταση της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος ($\nu > 1$), ονομάζεται **δύναμη με ρητό εκθέτη**.
  Ορίζουμε ότι:
  $$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

- Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε: $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

- Επίσης, για κάθε φυσικό ν και $a \geq 0$ ισχύει: $a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$

- Αποδεικνύεται ότι όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη, δηλαδή για μ, κ ακεραίους και λ, ν θετικούς ακεραίους ισχύει:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot a^{\frac{\kappa}{\lambda}} = a^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\kappa}{\lambda}}$$
$$a^{\frac{\mu}{\nu}} \div a^{\frac{\kappa}{\lambda}} = a^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\kappa}{\lambda}}$$
$$\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = a^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\kappa}{\lambda}}$$
$$a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} = (a \cdot \beta)^{\frac{\mu}{\nu}}$$
$$\frac{a^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}, \beta \neq 0$$

Απόδειξη: $\boldsymbol{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} \cdot \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda} \cdot \alpha^{\kappa\nu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda+\kappa\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda+\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda}{\nu\lambda}+\frac{\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda}{\nu\lambda}} \cdot \alpha^{\frac{\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}}$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες.

Ειδικότερα, όταν $a > 0$, ορίζουμε:

$$a^{-\frac{\mu}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}$$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $4^{\frac{1}{2}}$ (β) $8^{-\frac{2}{3}}$ (γ) $16^{\frac{3}{4}}$

Λύση:

(α) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ *ή*

$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

(β) $8^{-\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

(γ) $16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $64^{-\frac{3}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

(β) $2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2}$

Λύση:

(α) $64^{-\frac{3}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = (2^6)^{-\frac{3}{4}} \cdot (2^3)^{-\frac{1}{6}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{9}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^1$

$= 2^{-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}+1} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

(β) $2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{4}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$

3. Να λύσετε την εξίσωση: $x^{\frac{2}{3}} = 9,\ x \geq 0$

Λύση:

Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στην $\frac{3}{2}$, ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1:

$x^{\frac{2}{3}} = 9 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = (3^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 27$

4. Να γράψετε τη ρίζα $\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, σε μορφή δύναμης με ρητό εκθέτη.

Λύση:

Είναι γνωστό ότι η δύναμη με ρητό εκθέτη ορίζεται όταν η βάση είναι μη αρνητικός αριθμός. Έτσι λοιπόν, όταν ο α είναι πραγματικός αριθμός, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$\sqrt[3]{\alpha^2} = \alpha^{\frac{2}{3}}$$

Αν $\alpha < 0$, τότε $-\alpha > 0$ και $\alpha = -|\alpha|$, έχουμε:

$$\sqrt[3]{\alpha^2} = \sqrt[3]{(-|\alpha|)^2} = \sqrt[3]{|\alpha|^2} = |\alpha|^{\frac{2}{3}}$$

Επομένως, είναι:

$$\sqrt[3]{\alpha^2} = \begin{cases} \alpha^{\frac{2}{3}} & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ |\alpha|^{\frac{2}{3}} & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε με ακρίβεια τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α)	$32^{\frac{1}{5}}$	(β)	$256^{\frac{3}{4}}$	(γ)	$8^{\frac{5}{3}}$
(δ)	$625^{\frac{1}{4}}$	(ε)	$1024^{\frac{2}{5}}$	(στ)	$\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3}$
(ζ)	$\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}}$	(η)	$1^{\frac{1}{20}}$	(θ)	$8^{\frac{10}{6}}$

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	$5^{\frac{1}{\nu}} \cdot 3^{\frac{1}{\nu}} = 15^{\frac{2}{\nu}}$, για κάθε φυσικό αριθμό ν.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{2}}$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\left(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)\left(9^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right) = 1$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Η εξίσωση $x^3 = -27$ είναι αδύνατη.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η εξίσωση $x^3 = \alpha^6$ έχει ρίζες τις $\pm\alpha^2$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η εξίσωση $x^3 = \alpha^3$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$\sqrt[3]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{3}}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να εκτελέσετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\dfrac{4^{\frac{1}{4}}}{8^{\frac{1}{6}}}$ (β) $25^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^{-\frac{1}{6}}\right)^{-3}$ (γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

(δ) $\dfrac{3^{-\frac{3}{4}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}}}{3^{-\frac{1}{12}}}$ (ε) $(64x^3 : 27x^{-3})^{-\frac{2}{3}}, x > 0$ (στ) $(81x^{-4} : 16y^4)^{-\frac{3}{4}}, x, y > 0$

(ζ) $\left(2a^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(2a^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right), a, \beta \geq 0$ (η) $\left(a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}\right)^2, a \geq 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{\frac{3}{2}} = 81, x \geq 0$

(β) $x^{\frac{3}{4}} + 5 = 69, x \geq 0$

(γ) $x^{\frac{4}{3}} + 3 = 4, x \geq 0$

(δ) $(3x + 1)^{\frac{5}{2}} = 32, x \geq -\frac{1}{3}$

(ε) $(3x + 1)^{\frac{2}{5}} = 4, x \geq -\frac{1}{3}$

(στ) $(5x - 1)^{\frac{4}{3}} = 256, x \geq \frac{1}{5}$

5. Η απόσταση s (σε m) που διανύει ένα αυτοκίνητο το οποίο επιταχύνει δίνεται από τη σχέση $s(t) = 10t^{\frac{3}{2}}$, όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Να υπολογίσετε τον χρόνο που κινήθηκε το αυτοκίνητο, αν η απόσταση που διάνυσε είναι $640m$.

6. Να αποδείξετε ότι: $\left(2a^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4a + \beta + 4\sqrt{a\beta}, a, \beta \geq 0$

Ιδιότητες Διάταξης Πραγματικών Αριθμών

Έχουμε μάθει …

- Να ορίζουμε και να επιλύουμε ανισώσεις α’ βαθμού.

- Για την επίλυση μιας ανίσωσης γίνεται χρήση ιδιοτήτων των ανισοτήτων όπως:

✓ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
(Μπορούμε να προσθέσουμε και στα 2 μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό).

✓ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$
(Μπορούμε να αφαιρέσουμε από τα 2 μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό).

✓ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ ή $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma > 0$
(Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα 2 μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας).

✓ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ ή $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma < 0$
(Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα 2 μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, αρκεί να αλλάξουμε τη φορά της ανισότητας).

Διερεύνηση

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«AlykEn02_Anisotita1.ggb»*. Οι δρομείς "α" και "β" όπου, $1 \leq \alpha \leq 6\,, 2 \leq \beta \leq 5$ μεταβάλλουν τις διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.

✓ Να δώσετε διάφορες τιμές στα α και β, για να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

α	β	$\Pi = 2(\alpha + \beta)$	$E = \alpha \cdot \beta$

✓ Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή:
(α) της περιμέτρου του ορθογώνιου παραλληλογράμμου
(β) του εμβαδού του ορθογώνιου παραλληλογράμμου

✓ Τι παρατηρείτε;

✓ Αν $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $1 \leq x \leq 6\,, 2 \leq y \leq 5$, να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των $x - y$ και $\frac{x}{y}$.

✓ Τι παρατηρείτε;

Μαθαίνω

- **Ιδιότητα 1:**
Αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ***(Μεταβατική Ιδιότητα)***.

- **Ιδιότητα 2:**
Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
(Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες, όταν έχουν την ίδια φορά.)
Παρατήρηση: *(Δεν μπορούμε να αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.)*

- **Ιδιότητα 3:**
Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.
(Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισώσεις, όταν έχουν την ίδια φορά και είναι όλοι οι αριθμοί θετικοί.)
Παρατήρηση: *(Δεν μπορούμε να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.)*

- **Ιδιότητα 4:**
$a^2 \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό a.

- **Ιδιότητα 5:**
Αν a, β είναι ομόσημοι, τότε: $a \leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{\beta}$
Παρατήρηση: *Αντιστρέφοντας δύο ομόσημους αριθμούς, αλλάζει η φορά της ανισότητας.*
- **Ιδιότητα 6:**
Αν $a, \beta > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, τότε: $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu > \beta^\nu$

- **Ιδιότητα 7:**
Αν $a, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος, τότε ισχύει η ισοδυναμία:
$$a < \beta \;\Leftrightarrow\; \sqrt[\nu]{a} < \sqrt[\nu]{\beta}$$

- **Ιδιότητα 8:**
Αν $a > 1$, $\mu < \nu$ (μ, ν θετικοί ακέραιοι) $\Rightarrow \sqrt[\mu]{a} > \sqrt[\nu]{a}$

- **Ιδιότητα 9:**
Αν $0 < a < 1$, $\mu < \nu$ (μ, ν θετικοί ακέραιοι) $\Rightarrow \sqrt[\mu]{a} < \sqrt[\nu]{\alpha}$

Απόδειξη Ιδιοτήτων

Ιδιότητα 1: Αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:
Αν $x > y$, τότε $x - y > 0$ και αν $y > z$, τότε $y - z > 0$.
Άρα, ως άθροισμα θετικών έχουμε ότι:

$$x - y + y - z > 0 \Rightarrow x - z > 0 \Rightarrow x > z$$

Παράδειγμα: *Αν $A > 6$ και $6 > B$, τότε $A > B$.*

Ιδιότητα 2: Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $a + \gamma > \beta + \delta$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:
Αν $a > \beta$, τότε $a - \beta > 0$ και αν $\gamma > \delta$, τότε $\gamma - \delta > 0$.
Άρα, ως άθροισμα θετικών έχουμε ότι :

$$a - \beta + \gamma - \delta > 0 \Rightarrow a + \gamma > \beta + \delta$$

Παράδειγμα:

- ✓ *Από τις ανισώσεις $2 > 1$ και $1 > -2$ ισχύει: $2 + 1 > 1 + (-2)$*
- ✓ *Από τις ανισώσεις $2 > 1$ και $1 > -2$ δεν ισχύει: $2 - 1 > 1 - (-2)$*

Ιδιότητα 3: Αν $a > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $a\gamma > \beta\delta$.
Απόδειξη:
Αν $a > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\beta \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$ *(γιατί $\beta, \gamma > 0$)*.
Άρα:

$$a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \text{ (Μεταβατική ιδιότητα)}$$

Παράδειγμα:

- ✓ *Από τις ανισώσεις $3 > 2$ και $1 > \frac{1}{5}$, ισχύει: $3 \cdot 1 > 2 \cdot \frac{1}{5}$*
- ✓ *Από τις ανισώσεις $3 > 2$ και $1 > \frac{1}{5}$, δεν ισχύει: $\frac{3}{1} > \frac{2}{\frac{1}{5}}$*

Ιδιότητα 4: $a^2 \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό a.
Απόδειξη:
Αν $a \geq 0$, τότε $a \cdot a \geq a \cdot 0 = 0$. Άρα, $a^2 \geq 0$
Αν $a < 0 \Rightarrow -a > 0$. Άρα:

$$(-a) \cdot (-a) > 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$$

Παράδειγμα: $(2x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ιδιότητα 5: Αν a , β είναι ομόσημοι, τότε: $a \leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{\beta}$

Απόδειξη:
Αφού a , β είναι ομόσημοι, τότε ισχύει $a\beta > 0$. Άρα:

$$a \le \beta \Leftrightarrow \frac{a}{a\beta} \le \frac{\beta}{a\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} \le \frac{1}{a}$$

(Στο Ευθύ διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με τον θετικό αριθμό αβ , ενώ στο Αντίστροφο πολλαπλασιάζουμε με τον αβ)

Παράδειγμα:

- ✓ $5 < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$
- ✓ $-1 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 > -2$

Ιδιότητα 6: Αν $a, \beta > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, τότε: $a > \beta \Leftrightarrow a^{\nu} > \beta^{\nu}$

Απόδειξη:

Ευθύ: αν $a > \beta \Rightarrow a^{\nu} > \beta^{\nu}$ (με χρήση της ιδιότητας 3).

Αντίστροφο: Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Αν ισχύει $a^{\nu} > \beta^{\nu}$ *τότε διακρ*ίνουμε τις ακόλουθες **3 περιπτώσεις**:

$$a < \beta \text{ ή } "\alpha = \beta" \text{ ή } a > \beta$$

- Υποθέτουμε ό,τι $a < \beta$,τότε σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη θα έπρεπε να ισχύει $a^{\nu} < \beta^{\nu}$ (άτοπο)
- Αν υποθέσουμε ότι $a = \beta$,τότε θα έπρεπε να ισχύει $a^{\nu} = \beta^{\nu}$ (άτοπο).

Άρα τελικά θα ισχύει ό,τι $a > \beta$.

Σημείωση: *Για την παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής (απαγωγή σε άτοπο). Στη μέθοδο αυτή όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση υποθέτουμε ότι ισχύει η αντίθετή της. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας γνωστές ιδιότητες καταλήγουμε σε μια πρόταση η οποία δεν ισχύει (άτοπο). Επομένως θα ισχύει η πρόταση που θέλαμε να αποδείξουμε. Πρόκειται για μια έμμεση απόδειξη.*

Παράδειγμα: $5 < 6 \Leftrightarrow 5^{100} < 6^{100}$

Ιδιότητα 7: Αν $a, \beta \ge 0$ και ν θετικός ακέραιος, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$a < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} < \sqrt[\nu]{\beta}$$

Απόδειξη: $\sqrt[\nu]{a} < \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Παράδειγμα: $\mathbf{8 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{27}}$ *γιατί 2<3*

Ιδιότητα 8: Αν $a > 1$, $\mu < \nu$ (μ, ν θετικοί ακέραιοι) $\Rightarrow \sqrt[\mu]{a} > \sqrt[\nu]{a}$

Απόδειξη:

$$\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \frac{\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu}}}{\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\mu}}} = \sqrt[\mu\nu]{\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu-\mu}} > 1 \text{ γιατί } \nu - \mu > 0 \;και\; \alpha > 1 \Rightarrow \alpha^{\nu-\mu} > 1$$

Παράδειγμα: $\mathbf{\sqrt{16} > \sqrt[4]{16}}$

Ιδιότητα 9: Αν $0 < \alpha < 1, \mu < \nu$ (μ, ν θετικοί ακέραιοι) $\Rightarrow \sqrt[\mu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\alpha}$

Απόδειξη: $\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \frac{\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu}}{\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\mu}} = \sqrt[\mu\nu]{\frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu-\mu}} < 1$ γιατί $\nu - \mu > 0 \; και \; \alpha < 1 \Rightarrow \alpha^{\nu-\mu} < 1$

Παράδειγμα: $\sqrt{\frac{1}{16}} < \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

Παραδείγματα

1. Αν $x_1 < x_2$, να συγκρίνετε τις παραστάσεις:
   (α) $3x_1 + 5 , 3x_2 + 5$
   (β) $\frac{-2x_2+3}{7}, \frac{-2x_1+3}{7}$

   Λύση:

   Για να συγκρίνουμε τις πιο πάνω παραστάσεις, παίρνουμε τη δεδομένη σχέση $x_1 < x_2$ και εφαρμόζουμε ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων.

(α) Αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3 \cdot x_1 < 3 \cdot x_2$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma, \gamma > 0)$

$\Leftrightarrow 3 \cdot x_1 + 5 < 3 \cdot x_2 + 5$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma)$

(β) Αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2 \cdot x_1 > -2 \cdot x_2$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma, \gamma < 0)$

$\Leftrightarrow -2 \cdot x_1 + 3 > -2 \cdot x_2 + 3$ $\quad (\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma)$

$\Leftrightarrow \frac{-2x_1+3}{7} > \frac{-2x_2+3}{7}$ $\quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}, \gamma > 0)$

2. Αν $3 < x < 4$ και $-5 < y < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

   (α) $x + y$ (β) $x - y$

   (γ) $x \cdot y$ (δ) $\frac{x}{y}$

   Λύση:

   (α) $\begin{cases} 3 < x < 4 \\ -5 < y < -3 \end{cases} \Rightarrow 3 + (-5) < x + y < 4 + (-3) \Rightarrow -2 < x + y < 1.$

   Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο ανισότητες.

   (β) $\begin{cases} 3 < x < 4 \\ -5 < y < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 3 < -y < 5 \end{cases} \Rightarrow 3 + 3 < x + (-y) < 4 + 5 \Rightarrow 6 < x - y < 9$

Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο ανισότητες, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη με (-1) και ακολούθως προσθέτουμε τις δύο ανισότητες κατά μέλη.

(γ) $\begin{cases} 3 < x < 4 \\ -5 < y < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 3 < -y < 5 \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 3 < x \cdot (-y) < 4 \cdot 5 \Rightarrow$

$9 < x \cdot (-y) < 20 \Rightarrow 9 < -xy < 20 \Rightarrow -20 < xy < -9$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη ανισότητα με (-1) και ακολούθως πολλαπλασιάζουμε τις δύο ανισότητες κατά μέλη.

(Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε δύο ανισότητες κατά μέλη, μόνο όταν όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί και οι δύο ανισότητες έχουν την ίδια φορά.)

Παρατήρηση:

Αν το κάθε μέρος της ανισότητας $\alpha < x < \beta$ πολλαπλασιαστεί με -1, τότε η ανισότητα μετατρέπεται σε $-\beta < -x < -\alpha$.

(δ) $\begin{cases} 3 < x < 4 \\ -5 < y < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 3 < -y < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ \frac{1}{5} < -\frac{1}{y} < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{5} < x \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) < 4 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\frac{3}{5} < -\frac{x}{y} < \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < -\frac{3}{5}.$

Επειδή δεν μπορούμε να διαιρούμε τις δύο ανισότητες κατά μέλη, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη ανισότητα με (-1) και αντιστρέφουμε τους όρους της. Ακολούθως πολλαπλασιάζουμε τις δύο ανισότητες κατά μέλη και πολλαπλασιάζουμε ξανά με -1.

3. Αν $0 < \alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $\alpha < \sqrt{\alpha\beta} < \beta$.

Λύση: $\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha^2}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha^2}} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} > 1$, (γιατί $\frac{\beta}{\alpha} > 1$), άρα $\sqrt{\alpha\beta} > \alpha$. (1)

$\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\beta^2}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\beta^2}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} < 1$, (γιατί $\frac{\alpha}{\beta} < 1$), άρα $\sqrt{\alpha\beta} < \beta$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\alpha < \sqrt{\alpha\beta} < \beta$.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	Αν $\alpha > 3$ και $\beta > 2$ τότε $\alpha\beta > 6$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $\kappa > 5$ και $\lambda > -2$ τότε $\kappa + \lambda > 1$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $\alpha > -3$ τότε $\alpha^2 > 9$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 3$ τότε $\alpha > 3\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν $\alpha - \beta > 0$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ τότε $\alpha^2 - \beta^2 > 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Αν $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 < \beta^2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Αν $\alpha^2 > \alpha\beta$, τότε $\alpha > \beta$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(η)	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(θ)	$x > y \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{x} < \sqrt[\nu]{y}$ $(x, y \geq 0, \nu$ φυσικός$)$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ι)	Αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε:

Α. $-\alpha\beta > 0$ **Β.** $\alpha - \beta > 0$ **Γ.** $\alpha\beta < 0$ **Δ.** $\frac{\alpha}{\beta} > 0$

(β) Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \leq -1$ και $y \geq 8$, τότε:

Α. $xy \leq 8$ **Β.** $xy \geq -8$ **Γ.** $x + y \geq 7$ **Δ.** $x - y \leq -9$

(γ) Αν $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ και $y \in \mathbb{R}$ με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

Α. $xy < 0$ **Β.** $\frac{1}{x} \geq 4$ **Γ.** $x + y \leq -1$ **Δ.** $x - y \leq 9$

(δ) Αν $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ και $y \in \mathbb{R}$ με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

Α. $x^2 \leq 9$ **Β.** $y^2 \leq 9$ **Γ.** $x - y \leq 6$ **Δ.** $\frac{1}{x} > 0$

3. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<,=,>$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) $24^{\frac{3}{5}} \ldots \ldots\ 15^{\frac{3}{5}}$ (β) $17^{-\frac{3}{5}} \ldots \ldots\ 15^{-\frac{3}{5}}$ (γ) $0{,}7^{\frac{5}{7}} \ldots \ldots\ 0{,}4^{\frac{5}{7}}$

(δ) $0{,}3^{-\frac{3}{5}} \ldots \ldots\ 0{,}5^{-\frac{3}{5}}$ (ε) $-\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} \ldots \ldots -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}$

4. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$ τότε:

Α. $\alpha < \beta < \gamma$ **Β**. $\alpha < \gamma < \beta$ **Γ**. $\gamma < \alpha < \beta$ **Δ**. $\beta < \gamma < \alpha$ **Ε**. $\beta < \alpha < \gamma$

5. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς, αν ισχύει ότι α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$:
(α) $A = 10\alpha - 3, B = 10\beta - 3$
(β) $\Gamma = 4 - 3\alpha,\ \Delta = 4 - 3\beta$
(γ) $E = 2\alpha^2 + 3\ , Z = 2\beta^2 + 3$
(δ) $H = \frac{5}{\alpha} - 1\ , \Theta = \frac{5}{\beta} - 1$
(ε) $K = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ , \Lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

6. Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 < \alpha$

7. Αν x, y είναι θετικοί ακέραιοι και $x < y$, να διατάξετε τους αριθμούς $1, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

8. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:
(α) $3 < x + y < 8$ (β) $4 < 2x + y < 11$ (γ) $-4 < x - y < 1$

9. Αν $x > 2$ και $y > 3$, να αποδείξετε ότι:
(α) $xy > 6$ (β) $(x-2)(y-3) > 0$

10. Αν $x > 3$ και $y < 2$, να αποδείξετε ότι $(x-3)(y-2) < 0$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $xy + 6 < 2x + 3y$

11. Αν $1 < x < 2$ και $-2 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις $2x + 3y\ , xy\ , \frac{x}{y}$ και $-\frac{2x}{3y}$.

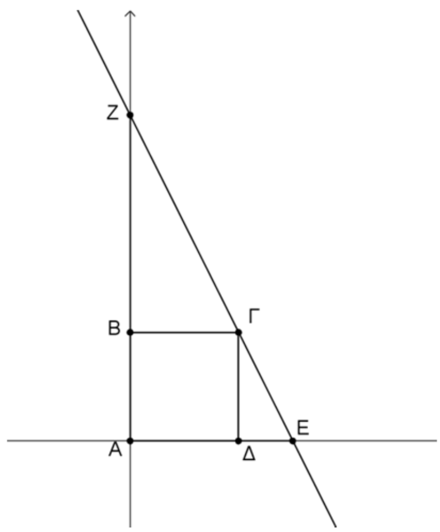
12. Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει $32\ m$ μήκος και $20\ m$ πλάτος. Αν το λάθος στις μετρήσεις δεν ξεπερνά τα $10\ cm$ για κάθε διάσταση, να υπολογίσετε:
    (α) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η περίμετρος του οικοπέδου
    (β) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται το εμβαδόν του οικοπέδου

13. Να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα, για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:
    (α) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει $\alpha - \gamma < \beta - \delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
    (β) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, με $\alpha\ , \gamma \neq 0$.

14. Αν $x < y < \omega$, να αποδείξετε ότι $(x-y)(y-\omega)(\omega-x) > 0$.

15. Να δείξετε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. Στη συνέχεια, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$.

16. Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά 5 μ. Πάνω στις ημιευθείες $ΑΒ$ και $ΑΔ$ παίρνουμε σημεία τέτοια ώστε $ΔΕ = 3\ μ.$ και $ΒΖ = 10\ μ.$, αντίστοιχα. Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $Ζ, Γ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά, υπολογίζοντας και συγκρίνοντας τα μήκη των πλευρών $ΖΓ, ΓΕ$ και $ΖΕ$.



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να κάνετε τις πράξεις και να δώσετε την απάντησή σας στη μορφή $\alpha+\beta\sqrt{3}$, όπου $\alpha,\beta\ \in\mathbb{R}$:

   (α) $(8+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ (β) $\frac{26}{4+\sqrt{3}}$

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt{200}-2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+4\sqrt{50}$.

3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

   (α) $\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ (β) $5+\sqrt{3}, 3+\sqrt{5}$ (γ) $\sqrt{10+2\sqrt{15}}, \sqrt{5}+\sqrt{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

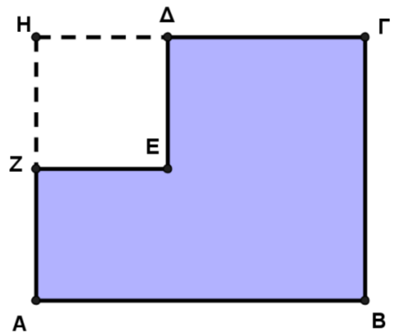
   (α) $\sqrt{x-2}=5$ (β) $\sqrt{x-5}=-2$ (γ) $\sqrt[3]{5-x}=3$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

   (α) $\frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (β) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ (γ) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}}, x>0$

6. Αν $3<x<8$, να βρείτε τις πιθανές τιμές του $\frac{1}{x}$ και του $-\frac{36}{x+1}$.

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το ορθογώνιο $ΑΒΓΗ$ με διαστάσεις $ΑΒ=x$ και $ΒΓ=2y$, από το οποίο έχουμε αφαιρέσει το τετράγωνο $ΔΕΖΗ$ με πλευρά y.



   (α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του σκιασμένου εμβαδού $ΑΒΓΔΕΖ$ δίνεται από τη σχέση $Π=2x+4y$.

   (β) Αν ισχύει ότι $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του γραμμοσκιασμένου σχήματος.

8. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $A=\left(\sqrt{2}\right)^6, B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6, \Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$.

(α) Να δείξετε ότι $A+B+\Gamma=23$.

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

9. Δίνονται οι αριθμοί $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$.

(α) Να δείξετε ότι $A-B=4$

(β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$

10. Αν $a_1=3+2\sqrt{2}$ και $a_2=3-2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $a_1>a_2$ (β) $a_1a_2=1$ (γ) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=6$

11. Να διατάξετε τους αριθμούς α, β, γ από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, αν ισχύει $2016\alpha=2017\beta=2018\gamma, \alpha, \beta, \gamma>0$.

12. Αν $\alpha>\beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $3\alpha-4\gamma$ και $3\beta-4\gamma$.

13. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{6+\sqrt{11}}, \sqrt{6-\sqrt{11}}$.

Αν $\kappa=\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$, τότε:

(α) να αποδείξετε ότι $\kappa^2=2$

(β) να υπολογίσετε τα $\left(\kappa+\sqrt{2}\right)^{2008}, \left(\kappa-\sqrt{2}\right)^{2008}$

14. Αν $\alpha, \beta>0$ και $\alpha\neq\beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\alpha+\beta+\sqrt{\alpha\beta}$.

15. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι παραστάσεις, να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z όταν: $\sqrt{2x+4y+5z}+\sqrt{y-3}+\sqrt{z-2}=0$

<u>Λύση Προβλήματος</u>

ΛΕΙΧΗΝΕΣ

Ένα από τα επακόλουθα της υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων, αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά που ονομάζονται λειχήνες.

Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται σε σχήμα περίπου κυκλικό.

Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η διάμετρος (δ) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της.

$$\delta = 7{,}0\sqrt{t-12}, t \geq 12$$

όπου (δ) η διάμετρος της λειχήνας σε mm και t ο αριθμός των ετών που έχουν περάσει μετά το λιώσιμο των πάγων.

Ερώτηση 1: ΛΕΙΧΗΝΕΣ

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, να υπολογίσετε τη διάμετρο που θα έχει μια λειχήνα, 16 έτη μετά το λιώσιμο των πάγων. Να γράψετε την απάντησή σας στον χώρο που ακολουθεί.

………

Ερώτηση 2: ΛΕΙΧΗΝΕΣ

Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο μιας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος και είδε ότι ήταν $35\ mm$.

Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος;

Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

………

Ερώτηση 3: ΛΕΙΧΗΝΕΣ

Σε πόσα χρόνια από σήμερα, μια λειχήνα που τώρα έχει διάμετρο $35\ mm$ θα έχει διπλασιάσει τη διάμετρό της; Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

………

PISA 2000

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν $-3 < x < 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = 4\sqrt{(x-2)^2} - 3\sqrt{(x+3)^3} + \sqrt{x^2+4x+4}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x+10} = 2 - x$ (β) $\sqrt{3x} - x + 6 = 0$ (γ) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2} = 0$

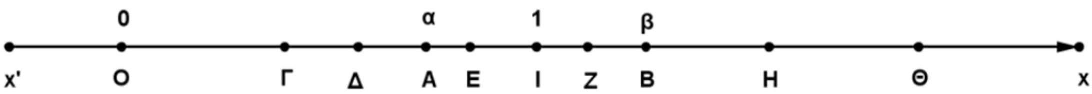
(δ) $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt{x+1}$

3. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρανομαστή.

$$A = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{\sqrt{2}}}} \quad , \quad B = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{\sqrt{2}}}}}$$

4. Να αποδείξετε ότι αριθμός $2 - \sqrt{2}$ είναι η κυβική ρίζα του αριθμού $20 - 14\sqrt{2}$.

5. Στον πιο κάτω άξονα τα σημεία O, I, A και B παριστάνουν τους αριθμούς $0, 1$ α και β αντίστοιχα, όπου $0 < \alpha < 1$ και $\beta > 1$. Τα σημεία Γ, Δ, E, Z, H και Θ παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \alpha^2, \beta^2, \alpha^3$ και β^3, όχι όμως με τη σειρά που αναγράφονται. Να αντιστοιχίσετε τα σημεία Γ, Δ, E, Z, H και Θμε τους αριθμούς που παριστάνουν.



Γ	Δ	E	Z	H	Θ

6. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{1}{6}} = 0$ (β) $x^{\frac{4}{5}} - 9x^{\frac{2}{5}} = 0$ (γ) $x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{6}} = 0$

8. Αν $\alpha > 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$

9. Αν α, β, x θετικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+x}{\beta+x}$

10. Αν $1 < x < y$, να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις αριθμητικές τιμές των πιο κάτω παραστάσεων: $\sqrt{\frac{x}{y}}, \sqrt{\frac{y}{x}}, \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{y}-1}, \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}-1}, \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}$

11. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} > 0, x, y > 0$

12. Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu+1}} = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}$

Με τη βοήθεια του πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9$$

13. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι $AB = \sqrt{\alpha}$ και $A\Gamma = \sqrt{\beta}$.

(α) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου.

(β) Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας, να αποδείξετε ότι:
$\sqrt{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

(γ) Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
Πότε ισχύει η ισότητα;

14. Αν $0 < \alpha < \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

(α) $A = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}, B = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$.

(β) $\Gamma = \frac{\alpha^3}{\beta^3}, \Delta = 1$

(γ) $E = \frac{1}{\alpha+1}, Z = \frac{1}{\beta+2}$

Ενότητα

2

Τριγωνομετρία

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε τη γωνία σε κανονική θέση.
- Να ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας σε κανονική θέση.
- Να ορίζουμε το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων και γωνιών.
- Να ορίζουμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας στον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Να ορίζουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και να εξετάζουμε κατά πόσο μια συνάρτηση είναι περιοδική.
- Τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$.

Τριγωνομετρία

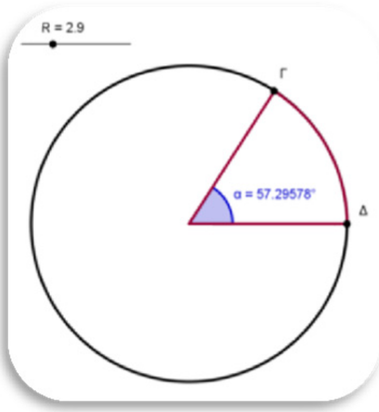
Έχουμε μάθει …

- Να ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας.
- Να χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στη λύση ασκήσεων και πραγματικών προβλημάτων.
- Να επιλύουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Το Ακτίνιο ως Μονάδα Μέτρησης Γωνιών
Γωνία σε Κανονική Θέση
Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας σε Κανονική Θέση

Διερεύνηση (1)

- Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn05_Rad.ggb»*.



✓ Να επιλέξετε τον δρομέα με την ένδειξη «R», για να αλλάξετε την ακτίνα του κύκλου.

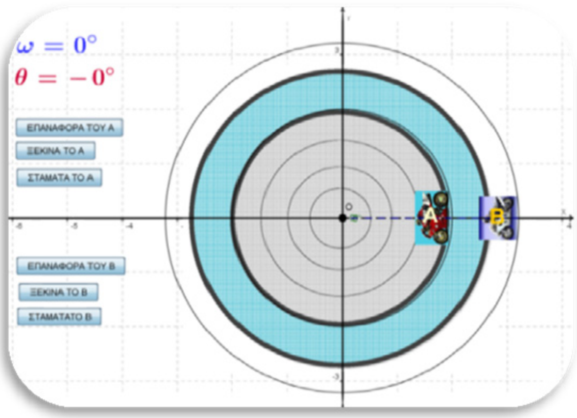
✓ Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $ΓΔ$ για διάφορες τιμές της ακτίνας «R» και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

a°	R	$\gamma = 2\pi R \cdot \dfrac{a^{\circ}}{360^{\circ}}$
$57,29578^{\circ}$	2,3	2,3

✓ Τι παρατηρείτε για το μήκος του τόξου;

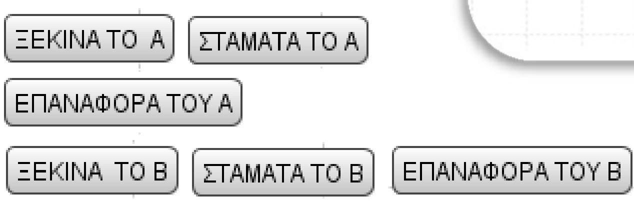
Διερεύνηση (2)

- Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn05_Motorcycles.ggb»*.



✓ Οι μοτοσικλετιστές A και B βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία στον θετικό ημιάξονα OX και κινούνται κυκλικά γύρω από την αρχή των αξόνων O.

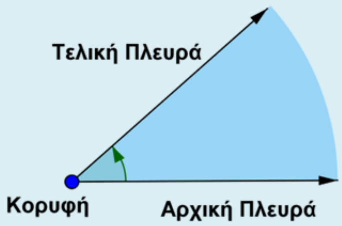
✓ Τα κουμπιά ξεκινούν και σταματούν την κίνηση των μοτοσικλετιστών.



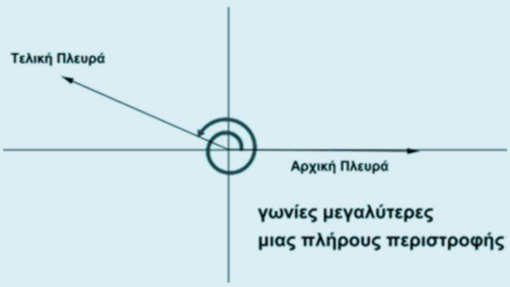
✓ Να επιλέξετε τα πιο πάνω κουμπιά διαδοχικά και να περιγράψετε τη θέση του κάθε μοτοσυκλετιστή και τον τρόπο που κινείται.

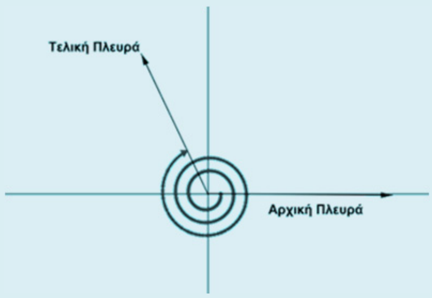
Μαθαίνω

- Οι γωνίες στο επίπεδο δημιουργούνται από την περιστροφή μίας ημιευθείας γύρω από την αρχή της. Η αρχική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **αρχική πλευρά** της γωνίας και η τελική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **τελική πλευρά**.



- **Θετική γωνία** θεωρείται η γωνία που δημιουργείται με στροφή της αρχικής της πλευράς αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού
- **Αρνητική γωνία** θεωρείται η γωνία που δημιουργείται με στροφή της αρχικής της πλευράς σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.
- Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, μία γωνία λέγεται ότι είναι τοποθετημένη σε **κανονική θέση**, αν η κορυφή της βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η αρχική πλευρά της συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων (ημιάξονας Ox).
- **Προσανατολισμένη γωνία** ονομάζεται κάθε θετική, ή αρνητική γωνία, η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση.



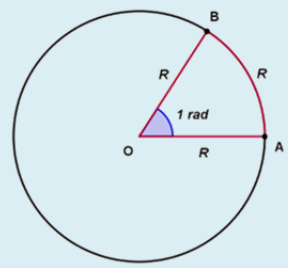


- Το ακτίνιο είναι μονάδα μέτρησης τόξου.
- Τόξο μέτρου **ενός ακτινίου** ($\mathbf{1}\,\boldsymbol{rad}$) λέγεται ένα τόξο AB ενός κύκλου με ακτίνα R που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα R του κύκλου.
- Γωνία **ενός ακτινίου** ($\mathbf{1}\,\boldsymbol{rad}$) είναι η επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου.

- Από τον ορισμό του ακτινίου προκύπτει η σχέση μοίρας και ακτινίου ως μονάδων μέτρησης τόξων ή γωνιών:

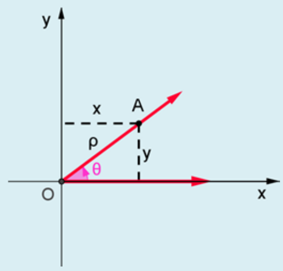
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180°}$$

όπου μ είναι το μέτρο σε μοίρες και α το μέτρο σε ακτίνια (rad) ενός τόξου ή μιας γωνίας ω.



- Η γωνία θ είναι σε κανονική θέση και το σημείο $A(x, y)$, το οποίο διαφέρει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, βρίσκεται στην τελική πλευρά της γωνίας.

  Η απόσταση του σημείου $A(x, y)$ από την αρχή των αξόνων είναι ίση με ρ, όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho > 0$.



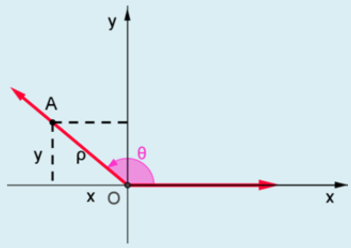
  Αν η γωνία θ είναι οξεία, τότε οι **τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\boldsymbol{\theta}$** είναι:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} \qquad \varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}$$

Γενικεύοντας τα πιο πάνω, ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας θ.

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} \qquad \varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \rho > 0$



Παρατηρούμε ότι: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

- **Συνεφαπτομένη** της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\sigma\varphi\theta}$, δηλαδή:

$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{y}$$

Παρατήρηση:
Με βάση τα πιο πάνω, έχουμε ότι: $\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$

- **Τέμνουσα** της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\tau\varepsilon\mu\theta}$, δηλαδή:

$$\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

- **Συντέμνουσα** της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{1}{\eta\mu\theta}$, $\eta\mu\theta \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\sigma\tau\varepsilon\mu\theta}$, δηλαδή:

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta}$$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το μήκος τόξου σε κύκλο ακτίνας $R = 5m$ που έχει επίκεντρη γωνία $3rad.$

   Λύση:
   Γωνία $1rad$ βαίνει σε τόξο μήκους $R = 5m.$ Άρα, γωνία 3 rad βαίνει σε τόξο μήκους $3R = 15m$

2. Να εκφράσετε τη γωνία $60°$ σε ακτίνια.

   Λύση:
   Θέτουμε στον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180°}$, όπου $\mu = 60°$ και έχουμε $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{60°}{180°} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$.
   Άρα,$60° = \frac{\pi}{3}\ rad.$

3. Να εκφράσετε τη γωνία 2 rad σε μοίρες.

   Λύση:
   Θέτουμε $\alpha = 2$ στον τύπο $\frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ και έχουμε $\mu = \frac{180°\cdot 2}{\pi} = 114{,}6°$.
   Άρα, $2\ rad = 114{,}6°$.

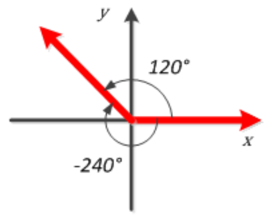
4. Να εκφράσετε τη γωνία $\frac{12\pi}{5}\ rad$ σε μοίρες.
   Λύση:
   Είναι $\pi\ rad = 180°$. Άρα, $\frac{12\pi}{5}\ rad = \frac{12\cdot 180}{5} = 432°$

5. Να αποδείξετε ότι το μήκος τόξου μέτρου $\alpha\ rad$ σε κύκλο ακτίνας R είναι $S = R\alpha$.

   Λύση: Γνωρίζουμε ότι το μήκος του τόξου είναι $\gamma = \frac{2\pi R\mu}{360°}$ όπου μ το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας σε μοίρες.

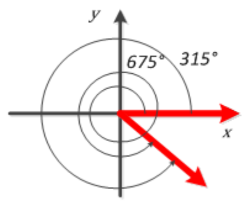
   Γνωρίζουμε ότι $\frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Rightarrow \mu = \frac{\alpha\cdot 180°}{\pi}$. Άρα,$\gamma = \frac{2\pi R\mu}{360°} = \frac{2\pi R\frac{\alpha\cdot 180°}{\pi}}{360°} = R\alpha.$

6. Να γράψετε δύο ζεύγη γωνιών οι οποίες είναι στην κανονική τους θέση και να αντιστοιχούν στην ίδια τελική πλευρά αιτιολογώντας την απάντησή σας.



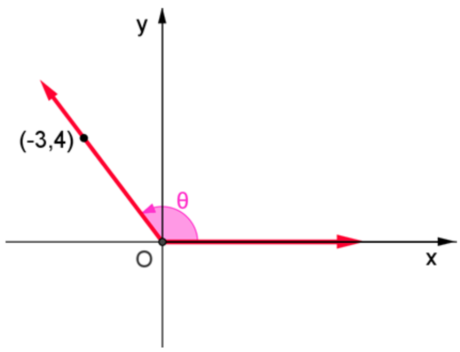
Λύση:

Η γωνία $120°$ έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $-240°$, αφού $-240° = -360° + 120°$.



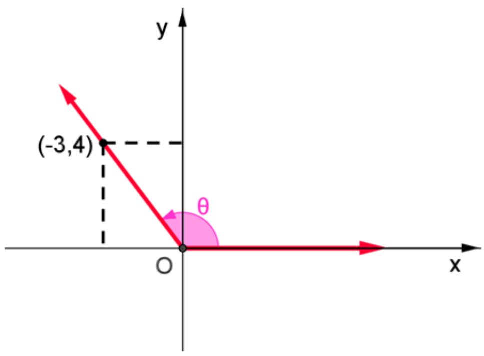
Η γωνία $315°$ έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $675°$, αφού $675° = 360° + 315°$.

7. Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.



Λύση:

Έχουμε το σημείο $(-3, 4)$ με συντεταγμένες $x = -3$ και $y = 4$.



Για να υπολογίσουμε το $\eta\mu\theta$ και το $\sigma\upsilon\nu\theta$, υπολογίζουμε την απόσταση ρ του σημείου από την αρχή των αξόνων:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{4}{5} \qquad \sigma\tau\epsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \qquad \tau\epsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} \qquad \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\epsilon\varphi\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

Δραστηριότητες

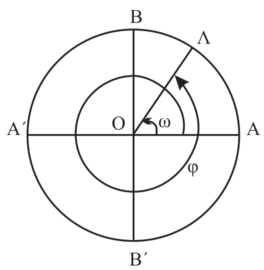
1. Να κατασκευάσετε τις πιο κάτω γωνίες σε κανονική θέση.
   (α) $100°$ (β) $-\frac{\pi}{4}\ rad$ (γ) $450°$ (δ) $-210°$

2. Να γράψετε δύο γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά με τις πιο κάτω γωνίες:
   (α) $135°$ (β) $-20°$ (γ) $\frac{7\pi}{6}\ rad$

3. Να εκφράσετε τις γωνίες $30°$, $45°, 90°, 120°$ σε ακτίνια.

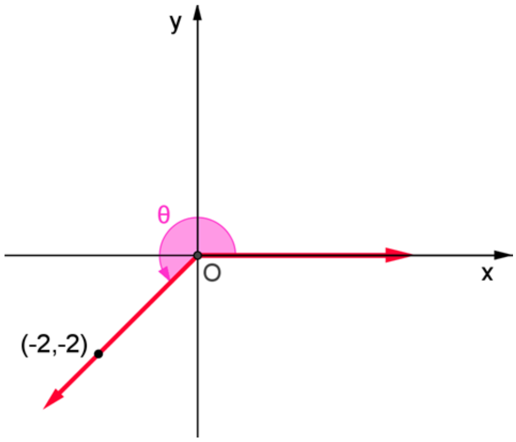
4. Να εκφράσετε τις γωνίες $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, 5\pi$ σε μοίρες.

5. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται οι γωνίες ω και φ.



   (α) Αν $A\hat{O}\Lambda = \omega$, να υπολογίσετε τη γωνία φ.
   (β) Η γωνία $720° + \omega$ είναι σε κανονική θέση. Να τοποθετήσετε την αρχική και την τελική της πλευρά.
   (γ) Η γωνία $-360° + \omega$ είναι σε κανονική θέση. Να τοποθετήσετε την αρχική και την τελική της πλευρά.

6. Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

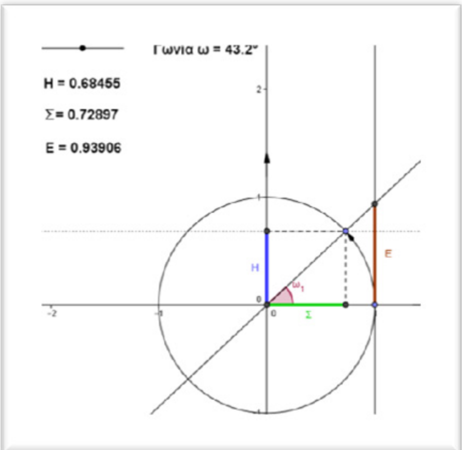


.

Τριγωνομετρικός Κύκλος

Διερεύνηση

- Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn05_TrigKyklos.ggb»*.



✓ Δίνεται κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία ακεραία μονάδα.

✓ Να επιλέξετε τον δρομέα "ω", για να δώσετε διάφορες τιμές στη γωνία ω.

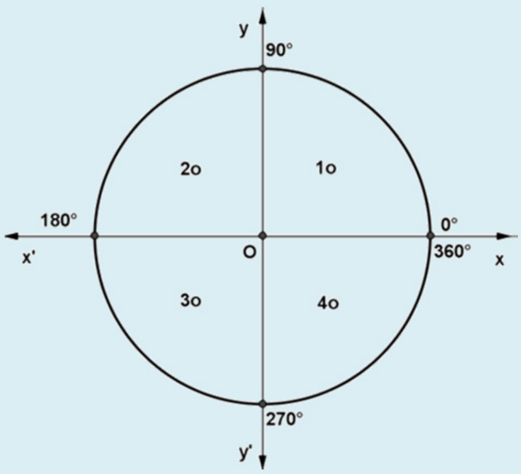
✓ Να παρατηρήσετε τις τιμές των «H, Σ, E» και να τις συνδέσετε με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi\omega$.

Μαθαίνω

- **Τριγωνομετρικός κύκλος** ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία μονάδα.

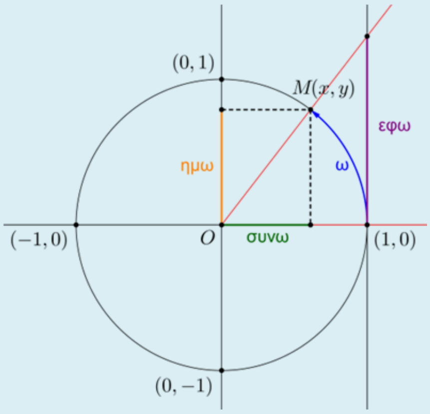
- Οι άξονες xx', yy' χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα τεταρτημόρια, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

Σημείωση: Τα σημεία τα οποία βρίσκονται στους άξονες δεν ανήκουν σε κάποιο τεταρτημόριο.



- Αν η τελική πλευρά μιας προσανατολισμένης γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$ $(OM = \rho = 1)$, τότε ισχύει:

  $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega = x =}$ **τετμημένη του σημείου** $\boldsymbol{M}$
  $\boldsymbol{\eta\mu\omega = y =}$ **τεταγμένη του σημείου** $\boldsymbol{M}$



- Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι: $\boldsymbol{-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1}$ και $\boldsymbol{-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1}$

  Ο άξονας των τετμημένων ονομάζεται και **άξονας των συνημιτόνων**, ενώ ο άξονας των τεταγμένων ονομάζεται και **άξονας των ημιτόνων**.

  Στο ορθογώνιο τρίγωνο OBM έχουμε:
  $$\eta\mu\omega = \frac{BM}{OM} = \frac{y_M}{\rho} = \frac{y_M}{1} = y$$
  $$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{OB}{OM} = \frac{x_M}{\rho} = \frac{x_M}{1} = x$$

- Αν η προέκταση της τελικής πλευράς μιας γωνίας ω η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τέμνει και την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $(1, 0)$, στο σημείο A, τότε ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ A}{\tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ A} = \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_A}{1} = y_A = \tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ A$$

- Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $(1, 0)$ ονομάζεται και **άξονας των εφαπτομένων**.

- Για να βρούμε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi\omega$, μελετούμε το πρόσημο των συντεταγμένων του σημείου τομής $M(x, y)$ της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο.

- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο **1ο τεταρτημόριο** του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x > 0$ και $y > 0$.
  Συνεπώς,
  $$\boldsymbol{\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \quad \varepsilon\varphi\omega > 0}$$

- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο **2ο τεταρτημόριο** του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x < 0$ και $y > 0$.
  Συνεπώς,
  $$\boldsymbol{\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \quad \varepsilon\varphi\omega < 0}$$

- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο **3^o τεταρτημόριο** του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x < 0$ και $y < 0$.
  Συνεπώς,

$$\boldsymbol{\eta\mu\omega < 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \quad \varepsilon\varphi\omega > 0}$$

- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο **4^o τεταρτημόριο** του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x > 0$ και $y < 0$.
  Συνεπώς,

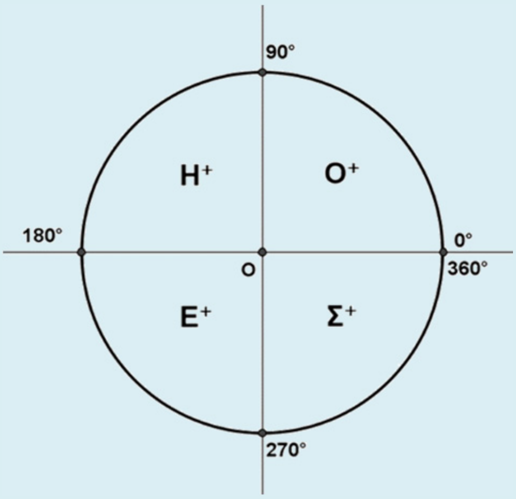
$$\boldsymbol{\eta\mu\omega < 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \quad \varepsilon\varphi\omega < 0}$$

	1ο τεταρτημόριο	2ο τεταρτημόριο	3ο τεταρτημόριο	4ο τεταρτημόριο
$\boldsymbol{\eta\mu\omega}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega}$	$+$	$-$	$+$	$-$

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\boldsymbol{\sigma\tau\varepsilon\mu\omega}$, $\boldsymbol{\tau\varepsilon\mu\omega}$ και $\boldsymbol{\sigma\varphi\omega}$ έχουν το ίδιο πρόσημο με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi\omega$, αντίστοιχα.

- Με βάση τα πιο πάνω η εύρεση του προσήμου των τριγωνομετρικών αριθμών συνοψίζεται στον πιο κάτω μνημονικό κανόνα όπου:

  - Στο 1^o τεταρτημόριο όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί.
  - Στο 2^o τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το ημίτονο και η συντέμνουσα.
  - Στο 3^o τεταρτημόριο θετική είναι μόνο η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη.
  - Στο 4^o τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το συνημίτονο και η τέμνουσα.



Παραδείγματα

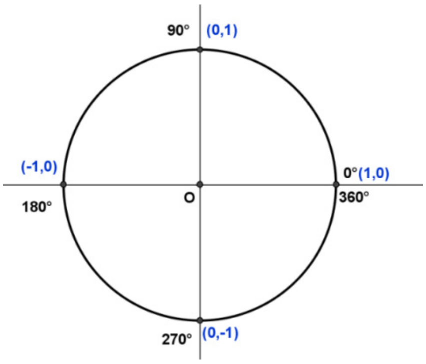
1. Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$.

Λύση:

Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $0°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(1,0)$.

Άρα, $\eta\mu 0° = 0$ (τεταγμένη του $(1,0)$)

$\sigma\upsilon\nu 0° = 1$ (τετμημένη του $(1,0)$)



Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $90°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(0,1)$.

Άρα, $\eta\mu 90° = 1$ (τεταγμένη του $(0,1)$)

$\sigma\upsilon\nu 90° = 0$ (τετμημένη του $(0,1)$)

Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $180°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(-1,0)$.

Άρα, $\eta\mu 180° = 0$ (τεταγμένη του $(-1,0)$)

$\sigma\upsilon\nu 180° = -1$ (τετμημένη του $(-1,0)$)

Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $270°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(0,-1)$.

Άρα, $\eta\mu 270° = -1$ (τεταγμένη του $(0,-1)$)

$\sigma\upsilon\nu 270° = 0$ (τετμημένη του $(0,-1)$)

Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $360°$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(1,0)$.

Άρα, $\eta\mu 360° = 0$ (τεταγμένη του $(1,0)$)

$\sigma\upsilon\nu 360° = 1$ (τετμημένη του $(1,0)$)

	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\eta\mu$	0	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu$	1	0	-1	0	1

2. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας με μέτρο $117°$.

Λύση:

Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο $117°$ είναι στο $2^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο.

Άρα: $\eta\mu 117° > 0$

$\sigma\upsilon\nu 117° < 0$

$\varepsilon\varphi 117° < 0$

$\tau\varepsilon\mu 117° < 0$

$\sigma\tau\varepsilon\mu 117° > 0$

$\sigma\varphi 117° < 0$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω σχέσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	Αν $ημθ$ και $συνθ$ είναι αρνητικοί αριθμοί, τότε και η $εφθ$ είναι αρνητικός αριθμός.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Δεν υπάρχει γωνία $θ$ για την οποία να ισχύει $συνθ < 0$ και $τεμθ > 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $θ \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, τότε το $συνθ > 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $εφθ > 0$ και $στεμθ < 0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας $θ$ είναι στο $4^{ο}$ τεταρτημόριο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η τελική πλευρά της γωνίας $-200°$ σε κανονική θέση είναι στο $2^{ο}$ τεταρτημόριο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Ο τριγωνομετρικός αριθμός $εφ(-210°)$ είναι θετικός.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Το ημίτονο μιας γωνίας $θ$ **δεν μπορεί** να είναι ίσο με:

   (α) $\frac{1}{2}$ (β) $-\frac{3}{2}$ (γ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (δ) $-\frac{1}{2}$ (ε) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών με μέτρο $236°, -52°, \frac{3\pi}{7}, -\frac{4\pi}{3}$.

4. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας $θ$, αν:

   (α) $ημθ > 0$ και $συνθ < 0$

   (β) $εφθ < 0$ και $συνθ < 0$

   (γ) $τεμθ > 0$ και $ημθ < 0$

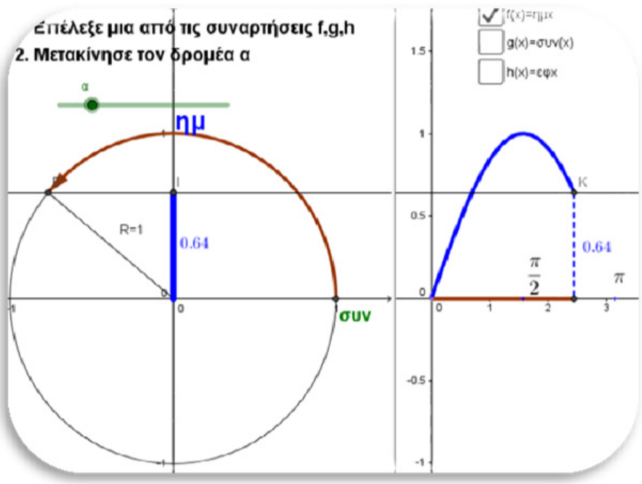
5. Αν ισχύει $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $2σφx - 3συνx > 0$.

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Σχέσεις Μεταξύ των Τριγωνομετρικών Αριθμών Γωνιών που έχουν Άθροισμα ή Διαφορά $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$

Διερεύνηση

- Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«AlykEn05_TrigonometrikiSynartisi.ggb»*.



Δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος στο αριστερό μέρος της οθόνης.

- Να επιλέξετε το "$ημx$" στο δεξιό μέρος της οθόνης.
- Να επιλέξετε τον δρομέα "$α$" και να δώσετε διάφορες τιμές για τη γωνία x. Στη συνέχεια να επιλέξετε το "*Εμφάνιση Γραφικής Παράστασης*".
- Να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση που εμφανίζεται.
- Να επαναλάβετε τη διαδικασία επιλέγοντας το "$συνx$" και το "$εφx$" στο δεξιό μέρος της οθόνης και να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση που εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση.
- Να δώσετε μια συγκεκριμένη τιμή στη γωνία x, έτσι ώστε $0° < x < 90°$ και να καταγράψετε τις τιμές των $ημx, συνx, εφx$ που εμφανίζονται στο αριστερό μέρος της οθόνης. Στη συνέχεια να καταγράψετε τις τιμές των $ημx, συνx, εφx$ για γωνίες που έχουν άθροισμα ή διαφορά $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$ με τη γωνία x. Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση;

Μαθαίνω

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, $A \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ (T ο μικρότερος θετικός αριθμός) τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

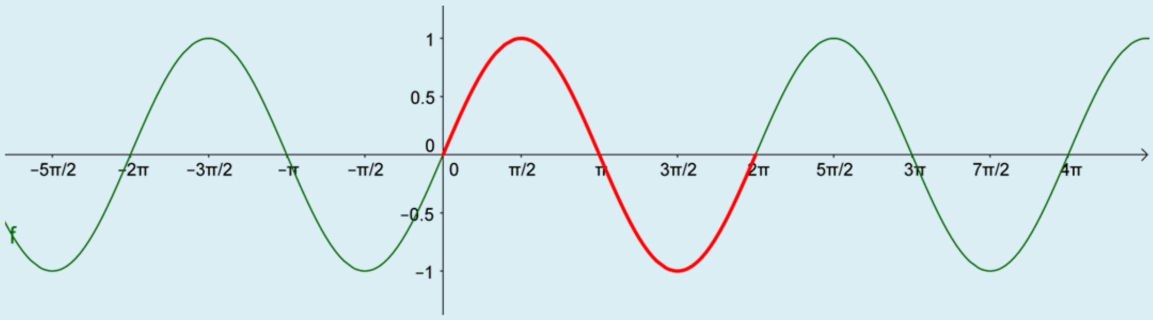
i. $(x+T) \in A, (x-T) \in A$ και
ii. $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

- Όπως έχει οριστεί το $\eta\mu x$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, το τόξο x μετριέται σε ακτίνια (rad). Για κάθε τιμή του τόξου x αντιστοιχεί μια μόνο τιμή του $\eta\mu x$. Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \eta\mu x}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $[-1, 1]$ $(-1 \leq \eta\mu x \leq 1)$.

➢ Τα τόξα x και $2\kappa\pi + x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουν το ίδιο τέλος. Επομένως,$\eta\mu x = \eta\mu(2\kappa\pi + x)$. Έτσι οι τιμές του $\eta\mu x$ επαναλαμβάνονται σε διαστήματα πλάτους 2π.
Δηλαδή η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π, όπου 2π είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $f(x) = f(x+2\pi), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

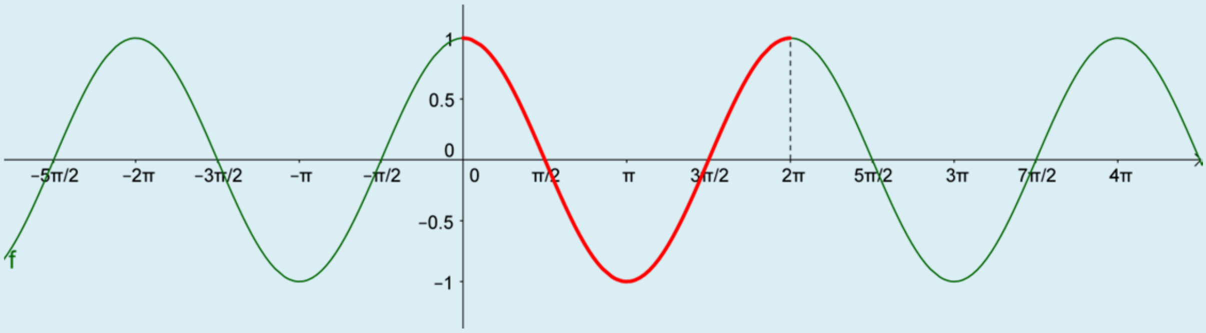
➢ Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ δίνεται από το πιο κάτω σχήμα:



- Όπως έχει οριστεί το $\sigma\upsilon\nu x$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, το τόξο x μετριέται σε ακτίνια (rad). Για κάθε τιμή του τόξου x αντιστοιχεί μια μόνο τιμή του $\sigma\upsilon\nu x$. Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \sigma\upsilon\nu x}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $[-1, 1]$ $(-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1)$.

➢ Τα τόξα x και $2\kappa\pi + x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουν το ίδιο τέλος.
Επομένως $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + x)$. Έτσι οι τιμές του $\sigma\upsilon\nu x$ επαναλαμβάνονται σε διαστήματα πλάτους 2π. Δηλαδή η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π, όπου 2π είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $f(x) = f(x+2\pi), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

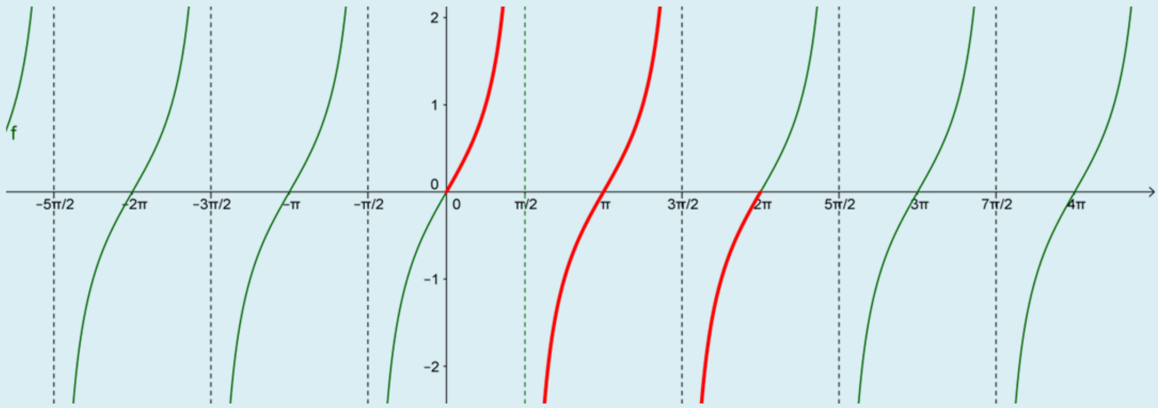
➢ Η γραφική παράσταση της $f(x) = συνx$, $x \in \mathbb{R}$ δίνεται από το πιο κάτω σχήμα:



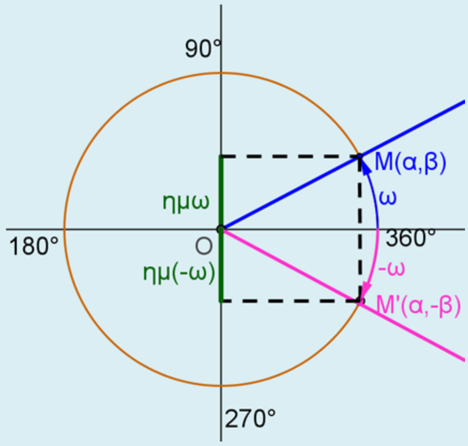
- Από τον ορισμό της εφαπτομένης γίνεται φανερό ότι σε κάθε τόξο x με $x \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$, αντιστοιχεί ακριβώς ένας αριθμός y ως εφαπτομένη. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = εφx$, $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.
  Το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = εφx$ είναι το $\mathbb{R}$.

➢ Επειδή η $εφx = εφ(x + κπ)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ με $x \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$, τότε η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι περιοδική με περίοδο $π$.

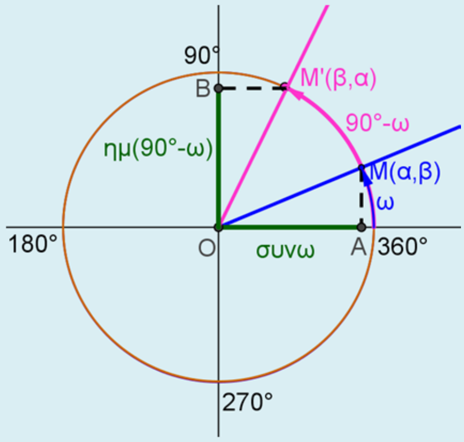
➢ Η γραφική παράσταση της $f(x) = εφx$, $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$ δίνεται από το πιο κάτω σχήμα:



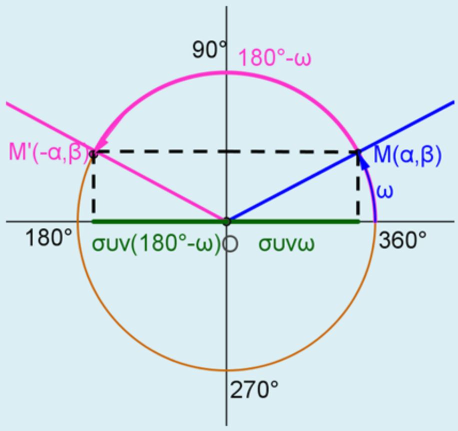
- **Γωνίες με άθροισμα $0°$** (αντίθετες):
  Οι τελικές πλευρές δύο αντίθετων γωνιών τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία M και M' συμμετρικά ως προς τον άξονα των συνημιτόνων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι:
  $\boldsymbol{ημ(-ω)} = -β = \boldsymbol{-ημω}$
  $\boldsymbol{συν(-ω)} = α = \boldsymbol{συνω}$
  $\boldsymbol{εφ(-ω)} = \frac{ημ(-ω)}{συν(-ω)} = \frac{-ημω}{συνω} = \boldsymbol{-εφω}$



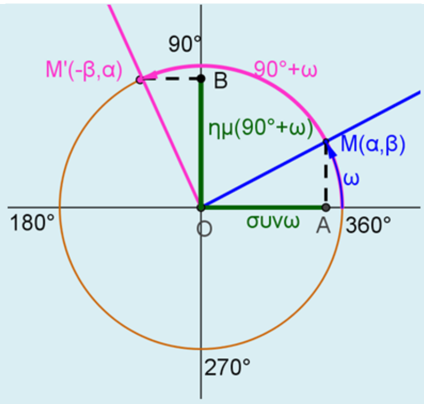
- **Γωνίες με άθροισμα $90°$**:
  Οι γωνίες είναι της μορφής $ω$ και $90° - ω$. Από τα ίσα τρίγωνα OAM και OBM' έχουμε $M(α, β)$ και $M'(β, α)$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι:
  $\boldsymbol{ημ(90° - ω)} = α = \boldsymbol{συνω}$
  $\boldsymbol{συν(90° - ω)} = β = \boldsymbol{ημω}$
  $\boldsymbol{εφ(90° - ω)} = \frac{ημ(90°-ω)}{συν(90°-ω)} = \frac{συνω}{ημω} = \boldsymbol{σφω}$



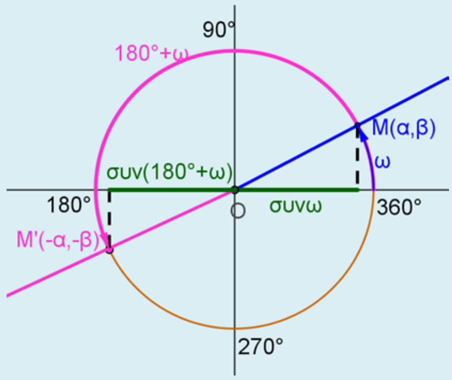
- **Γωνίες με άθροισμα $180°$**:
  Οι γωνίες είναι της μορφής $ω$ και $180° - ω$. Οι τελικές πλευρές των δύο γωνιών τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία $M(α, β)$ και $M'(-α, β)$. Τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των ημιτόνων. Από το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι:
  $\boldsymbol{ημ(180° - ω)} = β = \boldsymbol{ημω}$
  $\boldsymbol{συν(180° - ω)} = -α = \boldsymbol{-συνω}$
  $\boldsymbol{εφ(180° - ω)} = \frac{ημ(180°-ω)}{συν(180°-ω)} = \frac{ημω}{-συνω} = \boldsymbol{-εφω}$



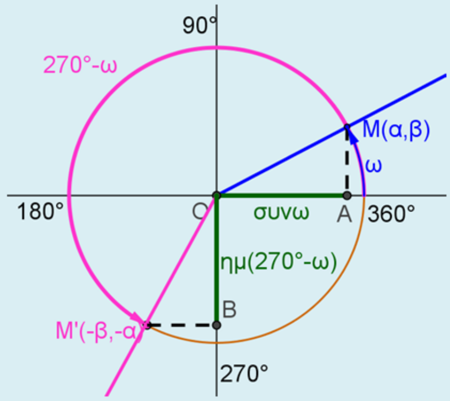
- **Γωνίες με διαφορά $\mathbf{90°}$**:
Οι γωνίες είναι της μορφής ω και $90° + \omega$. Από τα ίσα τρίγωνα OAM και OBM' έχουμε $M(\alpha, \beta)$ και $M'(-\beta, \alpha)$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι:
$\boldsymbol{\eta\mu(90° + \omega) = \alpha = \sigma\upsilon\nu\omega}$
$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(90° + \omega) = -\beta = -\eta\mu\omega}$
$\boldsymbol{\varepsilon\varphi(90° + \omega)} = \frac{\eta\mu(90°+\omega)}{\sigma\upsilon\nu(90°+\omega)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{-\eta\mu\omega} = \boldsymbol{-\sigma\varphi\omega}$



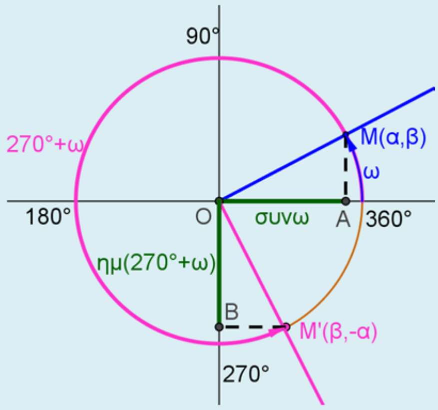
- **Γωνίες με διαφορά $\mathbf{180°}$**:
Οι γωνίες είναι της μορφής ω και $180° + \omega$. Οι τελικές πλευρές των δύο γωνιών τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(-\alpha, -\beta)$. Τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο του κύκλου. Από το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι:
$\boldsymbol{\eta\mu(180° + \omega) = -\beta = -\eta\mu\omega}$
$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(180° + \omega) = -\alpha = -\sigma\upsilon\nu\omega}$
$\boldsymbol{\varepsilon\varphi(180° + \omega)} = \frac{\eta\mu(180°+\omega)}{\sigma\upsilon\nu(180°+\omega)} = \frac{-\eta\mu\omega}{-\sigma\upsilon\nu\omega} = \boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega}$



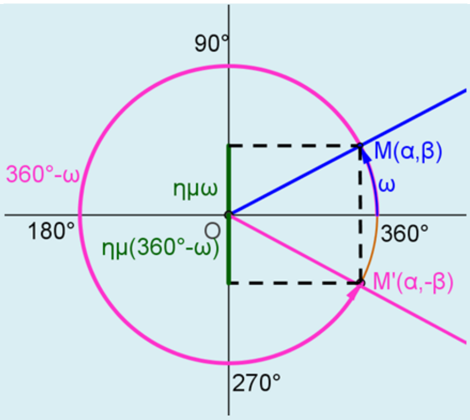
- **Γωνίες με άθροισμα $\mathbf{270°}$**:
Οι γωνίες είναι της μορφής ω και $270° - \omega$. Από τα ίσα τρίγωνα OAM και OBM' έχουμε $M(\alpha, \beta)$ και $M'(-\beta, -\alpha)$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι:
$\boldsymbol{\eta\mu(270° - \omega) = -\alpha = -\sigma\upsilon\nu\omega}$
$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(270° - \omega) = -\beta = -\eta\mu\omega}$
$\boldsymbol{\varepsilon\varphi(270° - \omega)} = \frac{\eta\mu(270°-\omega)}{\sigma\upsilon\nu(270°-\omega)} = \frac{-\sigma\upsilon\nu\omega}{-\eta\mu\omega} = \boldsymbol{\sigma\varphi\omega}$



- **Γωνίες με διαφορά $\mathbf{270°}$**:
Οι γωνίες είναι της μορφής ω και $270° + \omega$. Από τα ίσα τρίγωνα OAM και OBM' έχουμε $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\beta, -\alpha)$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι:
$\boldsymbol{\eta\mu(270° + \omega) = -\alpha = -\sigma\upsilon\nu\omega}$
$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(270° + \omega) = \beta = \eta\mu\omega}$
$\boldsymbol{\varepsilon\varphi(270° + \omega)} = \frac{\eta\mu(270°+\omega)}{\sigma\upsilon\nu(270°+\omega)} = \frac{-\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \boldsymbol{-\sigma\varphi\omega}$



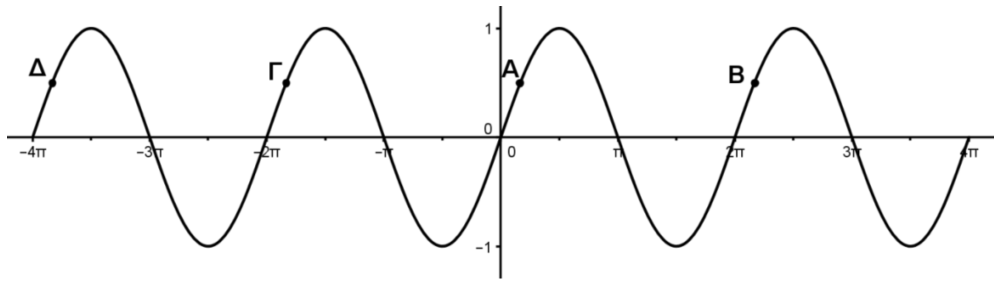
- **Γωνίες με άθροισμα $360°$**:
  Οι γωνίες είναι της μορφής ω και $360° - \omega$. Οι τελικές πλευρές των γωνιών τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ συμμετρικά ως προς τον άξονα των συνημιτόνων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι:
  $\boldsymbol{\eta\mu(360° - \omega)} = -\beta = \boldsymbol{-\eta\mu\omega}$
  $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(360° - \omega)} = \alpha = \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega}$
  $\boldsymbol{\varepsilon\varphi(360° - \omega)} = \frac{\eta\mu(360° - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(360° - \omega)} = \frac{-\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \boldsymbol{-\varepsilon\varphi\omega}$



Σημείωση:
Με τους πιο πάνω τύπους μπορούμε να εκφράσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας με τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας. Η διαδικασία αυτή λέγεται αναγωγή στο α' τεταρτημόριο.

Παραδείγματα

1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \eta\mu x$, $-4\pi \leq x \leq 4\pi$. Το σημείο A έχει συντεταγμένες $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$. Να γράψετε την τετμημένη των σημείων B, Γ και Δ, αν γνωρίζουμε ότι η τεταγμένη τους είναι ίση με $\frac{1}{2}$.



Λύση:
Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ είναι περιοδική και ισχύει ότι $f(x) = f(x + 2\pi), \forall\, x \epsilon \mathbb{R}$.
Τα σημεία A, B, Γ, Δ έχουν την ίδια τεταγμένη. Άρα, βρίσκονται στην τομή της ευθείας $y = \frac{1}{2}$ και της συνάρτησης $y = \eta\mu x$.
Το σημείο B βρίσκεται 2π μονάδες δεξιά του σημείου A. Άρα, η τετμημένη του είναι ίση με $2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$.
Το σημείο Γ βρίσκεται 2π μονάδες αριστερά του σημείου A. Άρα, η τετμημένη του είναι ίση με $-2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-11\pi}{6}$.
Το σημείο Δ βρίσκεται 4π μονάδες αριστερά του σημείου A. Άρα, η τετμημένη του είναι ίση με -$4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-23\pi}{6}$.

2. Να γίνει αναγωγή των πιο κάτω τριγωνομετρικών αριθμών στο α΄ τεταρτημόριο:

(α) $\eta\mu 187°$ (β) $\sigma\upsilon\nu 294°$ (γ) $\varepsilon\varphi 123°$ (δ) $\tau\varepsilon\mu(-120°)$

Λύση:

(α) $\eta\mu 187° = \eta\mu(180° + 7°) = -\eta\mu 7°$

Η γωνία 187° έχει την τελική πλευρά της στο 3^{o} τεταρτημόριο. Άρα, το $\eta\mu 187°$ είναι αρνητικό και γνωρίζουμε ότι $\eta\mu(180° + \omega) = -\eta\mu\omega$.

(β) **Α' τρόπος:**

$\sigma\upsilon\nu 294° = \sigma\upsilon\nu(270° + 24°) = \eta\mu 24°$

Η γωνία 294° έχει την τελική πλευρά της στο 4^{o} τεταρτημόριο. Άρα, το $\sigma\upsilon\nu 294°$ είναι θετικό και γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(270° + \omega) = \eta\mu\omega$.

Β' τρόπος:

$\sigma\upsilon\nu 294° = \sigma\upsilon\nu(360° - 66°) = \sigma\upsilon\nu 66°$

Η γωνία 294° έχει την τελική πλευρά της στο 4^{o} τεταρτημόριο. Άρα, το $\sigma\upsilon\nu 294°$ είναι θετικό και γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(360° + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$.

(γ) **Α' τρόπος:**

$\varepsilon\varphi 123° = \varepsilon\varphi(180° - 57°) = -\varepsilon\varphi 57°$

Η γωνία 123° έχει την τελική πλευρά της στο 2^{o} τεταρτημόριο. Άρα, η $\varepsilon\varphi 123°$ είναι αρνητική και γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi(180° - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$.

Β' τρόπος:

$\varepsilon\varphi 123° = \varepsilon\varphi(90° + 33°) = -\sigma\varphi 33°$

Η γωνία 123° έχει την τελική πλευρά της στο 2^{o} τεταρτημόριο. Άρα, η $\varepsilon\varphi 123°$ είναι αρνητική και γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi(90° + \omega) = -\sigma\varphi\omega$.

(δ) **Α' τρόπος:**

$\tau\varepsilon\mu(-120°) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(-120°)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 120°} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(90°+30°)} = \frac{1}{-\eta\mu 30°} = -\sigma\tau\varepsilon\mu 30°$

Γνωρίζουμε ότι $\tau\varepsilon\mu(-\omega) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(-\omega)}$

Η γωνία 120° έχει την τελική πλευρά της στο 2^{o} τεταρτημόριο. Άρα, το $\sigma\upsilon\nu 120°$ είναι αρνητικό και γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(90° + \omega) = -\eta\mu\omega$.

Β' τρόπος:

$\tau\varepsilon\mu(-120°) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(-120°)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 120°} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(180°-60°)} = \frac{1}{-\sigma\upsilon\nu 60°} = -\tau\varepsilon\mu 60°$

Γνωρίζουμε ότι $\tau\varepsilon\mu(-\omega) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(-\omega)}$

Η γωνία 120° έχει την τελική πλευρά της στο 2^{o} τεταρτημόριο. Άρα, το $\sigma\upsilon\nu 120°$ είναι αρνητικό και γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(180° - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$.

Δραστηριότητες

1. Αν για τη γωνία x ισχύει $0° \leq x \leq 180°$, να συμπληρώσετε τις πιο κάτω προτάσεις:
   (α) Αν $\eta\mu x = \eta\mu 60°$, τότε $x =$……………..
   (β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 20°$, τότε $x =$……………..
   (γ) Αν $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi 30°$, τότε $x =$……………

2. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης A τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη B.

A		B	
		1.	$\eta\mu 40°$
α.	$\eta\mu 140°$	2.	$\sigma\upsilon\nu 40°$
		3.	$\varepsilon\varphi 40°$
β.	$\sigma\upsilon\nu 140°$	4.	$-\eta\mu 40°$
		5.	$-\sigma\upsilon\nu 40°$
γ.	$\varepsilon\varphi 140°$	6.	$-\varepsilon\varphi 40°$

α.	β.	γ.

3. Να γράψετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς ως τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας:
   (α) $\eta\mu 375°$ (β) $\sigma\upsilon\nu(-288°)$ (γ) $\varepsilon\varphi(-80°)$ (δ) $\sigma\tau\varepsilon\mu 220°$

4. Να εξετάσετε την ορθότητα των πιο κάτω ισοτήτων, δικαιολογώντας την απάντησή σας με κατάλληλες πράξεις.
   (α) $\eta\mu\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\omega$ (β) $\tau\varepsilon\mu\frac{4\pi}{3} = \tau\varepsilon\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
   (γ) $\sigma\upsilon\nu(\theta - \pi) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)$ (δ) $\sigma\tau\varepsilon\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = -\tau\varepsilon\mu\omega$

5. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) Αν $\eta\mu\theta = 0{,}76$, τότε $\eta\mu(-\theta) = -0{,}76$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Αν $\sigma\upsilon\nu(360° - \theta) = 0{,}28$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = -0{,}28$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Αν $\varepsilon\varphi\theta = 1{,}3$, τότε $\varepsilon\varphi(\pi + \theta) = 1{,}3$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Αν $f(x) = \varepsilon\varphi x$, τότε $f(x + 2\pi) = f(x)$, $x\epsilon\mathbb{R}$ με $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) Αν $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$, τότε $\sigma\upsilon\nu(x + 3\pi) = \alpha$, όπου $x\epsilon\mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ) Αν τα σημεία $A(\frac{3\pi}{8}, \alpha)$ και $B(-\frac{13\pi}{8}, \beta)$ είναι σημεία της γραφικής παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, τότε $\alpha = \beta$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ) Αν $f(x) = \varepsilon\varphi x$, τότε $f(x + 2\pi) = f(x)$, $x\epsilon\mathbb{R}$ με $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(η) Αν $\sigma\tau\varepsilon\mu\theta > 0$, τότε $\sigma\tau\varepsilon\mu(180° + \theta) > 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
$A = \eta\mu(180° + \alpha) - \sigma\upsilon\nu(90° + \alpha) + \sigma\upsilon\nu(360° - \alpha) + \varepsilon\varphi(270° - \alpha)$
$B = \sigma\varphi(\alpha - 2\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\pi) - 2\eta\mu(\alpha - \pi)$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x\epsilon[-4\pi, 4\pi]$ με $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$. Τα σημεία A, B, Γ, Δ και E έχουν την ίδια τεταγμένη και η τετμημένη του σημείου A είναι $x = \frac{2\pi}{7}$. Η τετμημένη των σημείων B και Γ είναι θετική και η τετμημένη των σημείων Δ και E είναι αρνητική. Να βρείτε τις πιθανές τιμές των τετμημένων των σημείων B, Γ, Δ και E.

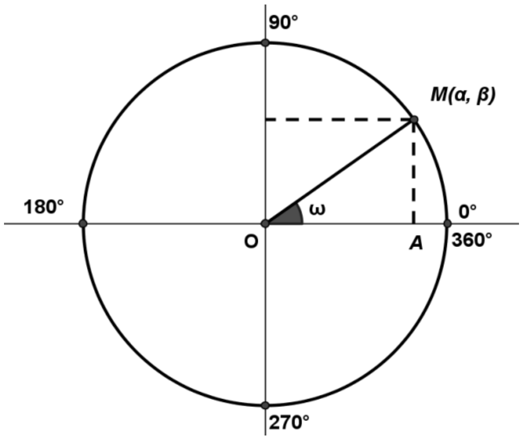
8. Αν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου, να δείξετε ότι:
(α) $\sigma\upsilon\nu(A + B) = -\sigma\upsilon\nu B$
(β) $\varepsilon\varphi(2A + 2B) = -\varepsilon\varphi 2\Gamma$
(γ) $\eta\mu\frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Διερεύνηση

- Στο σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος. Η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον κύκλο στο σημείο $M(\alpha, \beta)$.

(α) Να εκφράσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$, συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M.



(β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$.

(γ) Να ελέγξετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε στο (β) είναι δυνατόν να γενικευθεί και στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η γωνία ω ανήκει στο $2^{ο}$, $3^{ο}$ και $4^{ο}$ τεταρτημόριο.

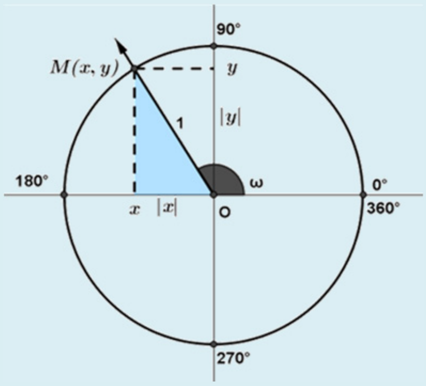
Μαθαίνω

- Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω προκύπτουν ορισμένες σχέσεις που τους συνδέουν και είναι γνωστές ως τριγωνομετρικές ταυτότητες (βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες). Οι σχέσεις αυτές ισχύουν για οποιαδήποτε τιμή της γωνίας ω.

$$\boldsymbol{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$$

Απόδειξη:

Η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$.



$x = \sigma\upsilon\nu\omega$

$y = \eta\mu\omega$

$OM = 1$ και $(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0}$$

Απόδειξη:

Η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\boldsymbol{\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \eta\mu\omega \neq 0}$$

Απόδειξη:

$$\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\boldsymbol{\tau\varepsilon\mu^2\omega = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$$

Απόδειξη:

$$1 + \varepsilon\varphi^2\omega = 1 + \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \tau\varepsilon\mu^2\omega$$

$$\boldsymbol{\sigma\tau\varepsilon\mu^2\omega = 1 + \sigma\varphi^2\omega}$$

Απόδειξη:

$$1 + \sigma\varphi^2\omega = 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega} = \sigma\tau\varepsilon\mu^2\omega$$

Παραδείγματα

1. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{5}{13}$ και $0° < \theta < 90°$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

Λύση:

$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta$

$\Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$

$\Rightarrow \eta\mu\theta = \pm\frac{12}{13}$

Η τελική πλευρά της γωνίας θ ανήκει στο 1^{o} τεταρτημόριο $(0° < \theta < 90°)$. Άρα, το $\eta\mu\theta > 0 \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{12}{13}$.

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$

$\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

2. Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και $90° < \theta < 180°$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

Λύση:

$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta} \Rightarrow \sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm\frac{4}{5}$

Η τελική πλευρά της γωνίας θ ανήκει στο 2^{o} τεταρτημόριο $(90° < \theta < 180°)$. Άρα, το $\sigma\upsilon\nu\theta < 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$.

$\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

$\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

3. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$

Λύση:

$\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

$= \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$

4. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu(180°+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(180°-\alpha)} - \frac{\sigma\upsilon\nu(180°-\alpha)}{\eta\mu(180°-\alpha)} = \frac{1}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}$

Λύση:

$$\frac{\eta\mu(180°+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(180°-\alpha)} - \frac{\sigma\upsilon\nu(180°-\alpha)}{\eta\mu(180°-\alpha)} = \frac{-\eta\mu\alpha}{-\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$$
$$= \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$$
$$= \frac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}$$
$$= \frac{1}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ στις πιο κάτω περιπτώσεις:
   (α) $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{5}{13}$, $0° < \varphi < 90°$
   (β) $\sigma\tau\varepsilon\mu\varphi = -\frac{37}{12}$, $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$
   (γ) $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{15}{8}$, $180° < \varphi < 270°$

2. Αν $\sigma\varphi\omega = \frac{x}{5}$ και $0° < \omega < 90°$, να εκφράσετε συναρτήσει του x τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$ και $\tau\varepsilon\mu\omega$.

3. Αν $\varepsilon\varphi\theta = \frac{4}{3}$ και $180° < \theta < 270°$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = \frac{4\sigma\varphi\theta - 5\eta\mu\theta}{3\tau\varepsilon\mu\theta}$

4. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha < 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 10\sigma\upsilon\nu(180° + \alpha) + 3\varepsilon\varphi(180° - \alpha)$.

5. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $\eta\mu x\ \sigma\varphi x = \sigma\upsilon\nu x$

(β) $\varepsilon\varphi x(\sigma\varphi x + \varepsilon\varphi x) = \tau\varepsilon\mu^2 x$

(γ) $\sigma\varphi x(\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x) = \sigma\tau\varepsilon\mu x + 1$

(δ) $\eta\mu\omega(\sigma\tau\varepsilon\mu\omega - \eta\mu\omega) = \sigma\upsilon\nu^2\omega$

(ε) $\varepsilon\varphi^2\theta\ \sigma\tau\varepsilon\mu^2\theta - \varepsilon\varphi^2\theta = 1$

(στ) $\frac{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x$

(ζ) $\frac{(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi)^2}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \tau\varepsilon\mu\varphi + 2\eta\mu\varphi$

(η) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x} + \eta\mu x = \sigma\tau\varepsilon\mu x$

(θ) $\frac{(1+\varepsilon\varphi x)^2}{\tau\varepsilon\mu x} = \tau\varepsilon\mu x + 2\eta\mu x$

(ι) $\tau\varepsilon\mu\alpha - \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{\tau\varepsilon\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha$

6. Αν $\eta\mu 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ και $\eta\mu 75° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ να υπολογίσετε:
(α) το $\sigma\upsilon\nu 15°$
(β) την $\varepsilon\varphi 15°$

7. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{\varepsilon\varphi(180° - \theta)\sigma\upsilon\nu(180° - \theta)\varepsilon\varphi(90° - \theta)}{\eta\mu(90° + \theta)\sigma\varphi(90° - \theta)\varepsilon\varphi(\theta - 270°)}$$

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu(3\pi + x)\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sigma\varphi(\pi - x)}{\eta\mu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

8. Αν $3\eta\mu^2 x + 6\sigma\upsilon\nu^2 x = 5$, να δείξετε ότι: $\varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{2}$

9. Να εκφράσετε την $\varepsilon\varphi x$ $(0° < x < 90°)$.συναρτήσει του $\eta\mu x$

10. Αν $x = 3\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = 3\eta\mu\omega$, να δείξετε ότι: $x^2 + y^2 = 9$

11. Να υπολογίσετε τη γωνία θ, αν $0° < \theta < 180°$ και $\frac{\eta\mu(180°-\theta)\varepsilon\varphi(90°-\theta)\eta\mu(-\theta)}{\varepsilon\varphi(180°-\theta)\sigma\upsilon\nu(180°+\theta)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
   (α) $(1+\ \eta\mu x)\left[1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=\sigma\upsilon\nu^2 x$
   (β) $(\tau\varepsilon\mu x+1)[\tau\varepsilon\mu(-x)-1]=\varepsilon\varphi^2 x$

13. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες:
   (α) $\eta\mu x=0$ και $\sigma\upsilon\nu x=0$
   (β) $\eta\mu x=1$ και $\sigma\upsilon\nu x=1$
   (γ) $\eta\mu x=\frac{1}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{3}$
   (δ) $\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. Αν $x=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y=\beta\eta\mu\theta$, να δείξετε ότι: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

15. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $\eta\mu(\pi-x)+\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\eta\mu(x-\pi)-\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$
   (β) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\eta\mu(\pi-\alpha)-\eta\mu(-\alpha)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=0$
   (γ) $\frac{\eta\mu(\pi+\alpha)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\eta\mu(2\pi-\alpha)}=\sigma\upsilon\nu\alpha$
   (δ) $\eta\mu\omega+\sigma\tau\varepsilon\mu(90°-\omega)+\eta\mu(180°+\omega)+\sigma\tau\varepsilon\mu(270°-\omega)=0$

16. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(5\pi+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(7\pi-\omega)\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\varphi(5\pi+\omega)\cdot\eta\mu(7\pi-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)}=\eta\mu^2\omega-1$$

17. Με τον δέκτη ενός ραδιοφώνου επιλέγεις έναν ραδιοφωνικό σταθμό ρυθμίζοντας τη συχνότητα. Ένας δέκτης περιέχει ένα πηνίο L και έναν πυκνωτή C, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο κατά τον χρόνο t δίδεται από τον τύπο $L(t)=k\eta\mu^2(2\pi Ft)$ και η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή κατά τον χρόνο t δίδεται από τον τύπο $C(t)=k\sigma\upsilon\nu^2(2\pi Ft)$, όπου F είναι η συχνότητα του ραδιοφωνικού σταθμού και k είναι σταθερός αριθμός. Η συνολική ενέργεια E στο κύκλωμα δίνεται από τον τύπο $E(t)=L(t)+C(t)$. Να αποδείξετε ότι η ενέργεια E είναι σταθερή.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=$$

Α. $-2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ **Β.** $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ **Γ.** 0 **Δ.** $\eta\mu\alpha$ **Ε.** $-\sigma\upsilon\nu\alpha$

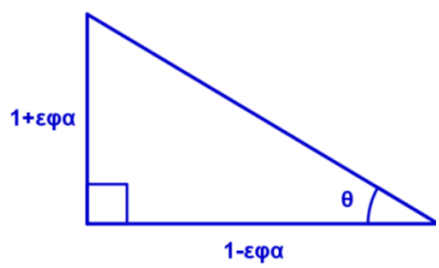
2. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\tau\varepsilon\mu x}{\tau\varepsilon\mu x}=\frac{\tau\varepsilon\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

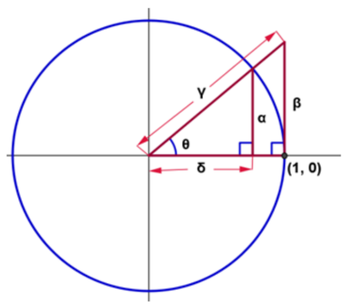
(β) $\frac{\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}=\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}$

(γ) $\frac{\varepsilon\varphi(180^\circ+\omega)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu(180^\circ+\omega)\cdot\sigma\varphi(180^\circ-\omega)}{\sigma\upsilon\nu(360^\circ-\omega)\cdot\tau\varepsilon\mu(90^\circ-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)}=-\tau\varepsilon\mu^2\omega$

3. Στο σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $1+\varepsilon\varphi\alpha$ και $1-\varepsilon\varphi\alpha$, με $0^\circ<\alpha<90^\circ$. Να εκφράσετε το $\eta\mu\theta$ και το $\sigma\upsilon\nu\theta$ συναρτήσει τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας α και να δώσετε την απάντησή σας στην πιο απλή μορφή.



4. Να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων α,β,γ και δ, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, συναρτήσει τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ.



5. Αν $0^\circ<\theta<90^\circ$ και $\frac{\eta\mu(180^\circ-\theta)\cdot\sigma\varphi(360^\circ-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^\circ+\theta)}{\varepsilon\varphi(-\theta)\cdot\eta\mu(270^\circ-\theta)}=\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τη γωνία θ.

6. Να δείξετε ότι:

(α) $\eta\mu 3\pi=\eta\mu\pi$

(β) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{29\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

(γ) $\varepsilon\varphi(-\pi-3)=-\varepsilon\varphi(\pi+3)$

(δ) $\sigma\tau\varepsilon\mu(630^\circ-\omega)=-\tau\varepsilon\mu\omega$

7. Αν $ημx + συνx = α$:

(α) να δείξετε ότι: $ημx \cdot συνx = \frac{α^2-1}{2}$

(β) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να υπολογίσετε συναρτήσει του $α$ τις παραστάσεις:

(i) $\frac{1}{ημx} + \frac{1}{συνx}$

(ii) $εφx + σφx$

(iii) $ημ^3x + συν^3x$

8. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση.

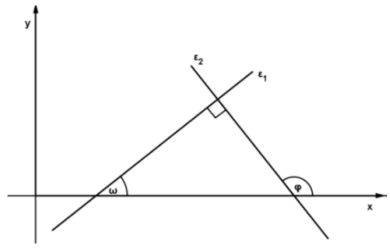
Αν $ημx = α$ και $0° < x < 90°$, τότε:

Α. $συνx = 1 - α$ **Β.** $συνx = 1 - α^2$

Γ. $συνx = \sqrt{1 - α^2}$ **Δ.** $συνx = -\sqrt{1 - α^2}$

9. Αν $\frac{ημ(180°-θ) \cdot συν(270°+θ)}{συν(90°+θ) \cdot σφ(90°+θ)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $0 < θ < 90°$, να δείξετε ότι $θ = 45°$.

10. Στο σχήμα δίνονται δύο κάθετες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. Να γράψετε μια σχέση μεταξύ των γωνιών $ω$ και $φ$ και να αποδείξετε ότι το γινόμενο των κλίσεων των δύο ευθειών είναι ίσο με -1 $(λ_1 \cdot λ_2 = -1)$.



11. Αν $εφα = 3εφβ$, να αποδείξετε ότι: $\frac{εφα+εφβ}{1-εφα \cdot εφβ} = \frac{4ημβ \cdot συνβ}{1-4ημ^2β}$

12. Αν $\frac{3π}{2} < x < 2π$, να δείξετε ότι: $ημx \cdot συν^2x + 2ημx \cdot συνx + ημx + εφx < 0$

13. Αν $5π < x < \frac{11π}{2}$, να δείξετε ότι: $εφx - ημx > συνx - σφx$

14. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$0, \frac{ημx+1}{ημx-1}, \frac{1-συνx}{1+συνx}, \quad 0 < x < \frac{π}{2}$.

15. Να αποδείξετε ότι:

(α) $εφ1° \cdot εφ2° \cdot εφ3° \cdots εφ87° \cdot εφ88° \cdot εφ89° = 1$

(β) $(ημ1° - συν1°) + (ημ2° - συν2°) + \cdots + (ημ89° - συν89°) = 0$

16. Να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του x:

$$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

17. Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$.

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, όταν $-6\pi < x < 2\pi$.

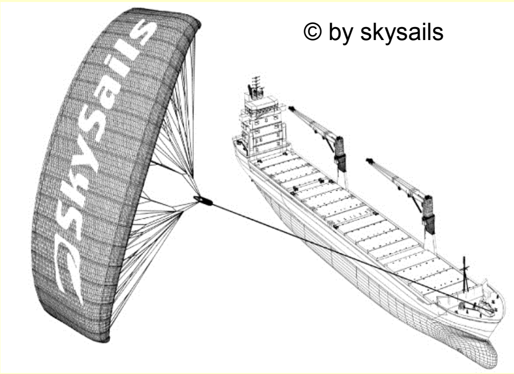
19. Δίνεται $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{8}{17}$ και $\eta\mu\theta > 0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{34\eta\mu\theta + 17\sigma\upsilon\nu\theta}{8\varepsilon\varphi\theta - 15\sigma\tau\varepsilon\mu\theta}$$

Λύση Προβλήματος

ΠΑΝΙΑ

Ενενήντα πέντε τοις εκατό του παγκόσμιου εμπορίου, διακινείται θαλάσσια, από περίπου $50\,000$ πετρελαιοφόρα, φορτηγά πλοία και πλοία μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων. Τα περισσότερα από αυτά τα πλοία χρησιμοποιούν πετρέλαιο για την κίνησή τους. Οι μηχανικοί σχεδιάζουν να αναπτύξουν μηχανισμούς αεροδυναμικής υποστήριξης των πλοίων. Η εισήγησή τους εστιάζεται στη χρήση πανιών στα πλοία, ώστε να αξιοποιείται η δύναμη του ανέμου. Αυτό θα οδηγήσει σε μείωση της κατανάλωσης αργού πετρελαίου και της επίδρασης των καυσίμων στο περιβάλλον.



Ερώτηση 1:

Ένα πλεονέκτημα της χρήσης πανιών ναυσιπλοΐας είναι ότι το πανί υπερίπταται σε ύψος $150\ m$. Σε αυτό το ύψος, η ταχύτητα του ανέμου είναι κατά προσέγγιση 25% μεγαλύτερη από την ταχύτητα στο κατάστρωμα του πλοίου.

Με ποια, κατά προσέγγιση, ταχύτητα πνέει ο άνεμος στο πανί, όταν η ταχύτητα του ανέμου στο κατάστρωμα ενός πλοίου μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων είναι $24\ km/h$;

Α. $6\ km/h$

Β. $18\ km/h$

Γ. $25\ km/h$

Δ. $30\ km/h$

Ε. $49\ km/h$

Ερώτηση 2:

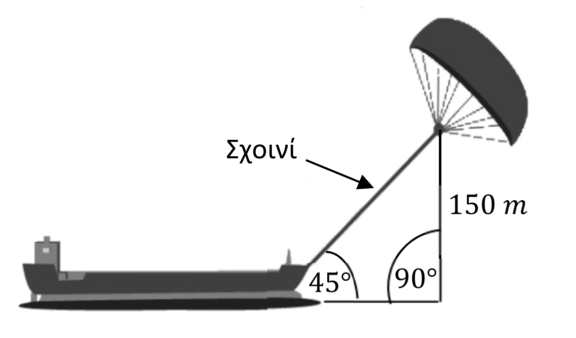
Πόσο περίπου πρέπει να είναι το μήκος του σχοινιού του πανιού, για να ρυμουλκεί το πλοίο υπό γωνία $45°$ και να βρίσκεται κατακόρυφα σε ύψος $150\ m$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα;

Α $173\ m$

Β $212\ m$

Γ $285\ m$

Δ $300\ m$



Σημείωση: Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.
© by skysails

Ερώτηση 3:

Λόγω του υψηλού κόστους του αργού πετρελαίου, το οποίο κοστίζει 0,42 ζετς το λίτρο, οι ιδιοκτήτες του πλοίου *Νέο Κύμα* σκέφτονται να εξοπλίσουν το πλοίο τους με πανιά ναυσιπλοΐας.

Υπολογίζεται ότι ένα τέτοιο πανί, μπορεί να περιορίσει την κατανάλωση αργού πετρελαίου συνολικά γύρω στο 20%.

Όνομα: *Νέο Κύμα*

Είδος: Μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων

Μήκος: 117 μέτρα

Πλάτος: 18 μέτρα

Χωρητικότητα: 12 000 τόνοι

Μέγιστη ταχύτητα: 19 κόμβοι

Ετήσια κατανάλωση πετρελαίου χωρίς τη χρήση πανιού: περίπου 3 500 000 λίτρα

Το κόστος εξοπλισμού του πλοίου *Νέο Κύμα* με ένα πανί είναι 2 500 000 ζετς.

Μετά από πόσα χρόνια η εξοικονόμηση από την κατανάλωση αργού πετρελαίου θα καλύψει το κόστος του πανιού; Να υποστηρίξεις την απάντησή σου με τους απαραίτητους υπολογισμούς.

Αριθμός ετών:...

PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

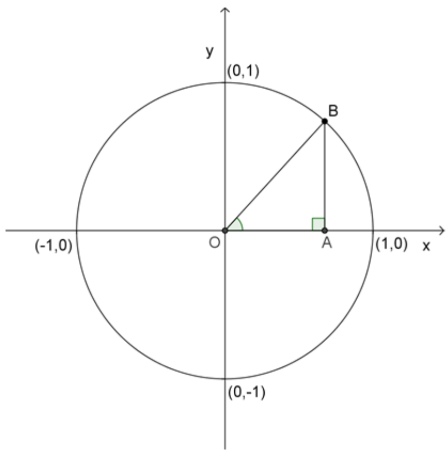
1. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:
   $A = 3συνx + \sqrt{3}$
   $B = -3ημx + π$

2. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $ημ^4x + συν^4x = 1 - 2ημ^2x \cdot συν^2x$
   (β) $ημ^6x + συν^6x = 1 - 3ημ^2x \cdot συν^2x$
   (γ) η παράσταση $2(ημ^6x + συν^6x) - 3(ημ^4x + συν^4x)$ είναι ανεξάρτητη του x, δηλαδή είναι σταθερή.

3. Να αποδείξετε ότι:

$$0 < \frac{εφ(π + x)}{εφx + σφ(π + x)} < 1$$

4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $45° < A\hat{O}B < 60°$. Αν $OA = x$, να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του x.



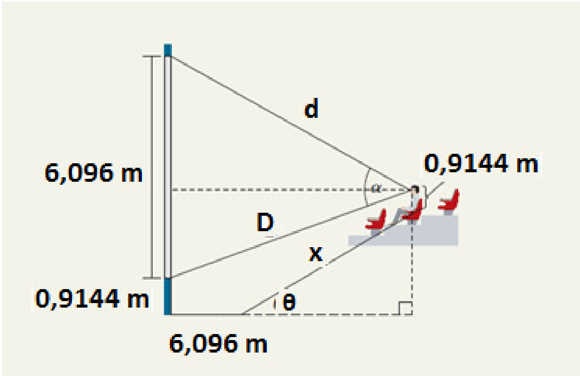
5. Αν $-\frac{π}{2} < x < \frac{π}{2}$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\frac{1+ημx}{1-ημx}} - \sqrt{\frac{1-ημx}{1+ημx}} = 2εφx$

6. Αν $0 \leq x < \frac{π}{2}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{1+συνx}+\sqrt{1-συνx}}{\sqrt{1+συνx}-\sqrt{1-συνx}} = \frac{1+ημx}{συνx} = \frac{συνx}{1-ημx}$

7. Να υπολογίσετε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 3 - 2συν(\frac{π}{3} - 2x)$ παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

8. Το ύψος των υδάτων (y) σε μια θαλάσσια περιοχή που εμφανίζεται το φαινόμενο της παλίρροιας δίνεται σε συνάρτηση του χρόνου (t) από τον τύπο $y = 3 \cdot ημ(\frac{\pi}{6}t)$, όπου y σε μέτρα και t σε ώρες. Να υπολογίσετε την διαφορά ανάμεσα στο ψηλότερο και χαμηλότερο ύψος των υδάτων κατά τη διάρκεια ενός 24 ώρου.

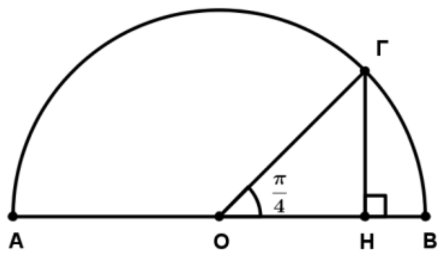
9. Η βέλτιστη οπτική γωνία σε ένα θέατρο εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως το ύψος της οθόνης, η κλίση της αίθουσας, η θέση του καθίσματος, το ύψος του ματιού ενός καθήμενου θεατή. Για να επιλέξει ένας θεατής την «καλύτερη θέση», χρειάζεται να μετρήσουμε την απόσταση του ματιού από την κορυφή της σκηνής.



(α) Για το συγκεκριμένο θέατρο που φαίνεται στην εικόνα, η οποία δεν είναι υπό κλίμακα, να αποδείξετε ότι η απόσταση του ματιού από την κορυφή της σκηνής υπολογίζεται από τον τύπο $d^2 = (6{,}096 + xσυνθ)^2 + (6{,}096 - xημθ)^2$, όπου x είναι η διαγώνια απόσταση της θέσης ενός θεατή από το οριζόντιο δάπεδο.

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση d, αν $\theta = 18°$ και ο θεατής κάθεται στην 8η σειρά και η υψομετρική διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών σειρών είναι $0{,}9144\ m$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με $OA = OB = OΓ = 1\ m$ και $B\hat{O}Γ = \frac{\pi}{4}$.



(α) Να υπολογίσετε το μήκος των OH και AH

(β) Να δείξετε ότι $συν\left(B\hat{A}Γ\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2(AΓ)}$.

(γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AΓB$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι: $συν\left(B\hat{A}Γ\right) = \frac{AΓ}{2}$.

(δ) Να αποδείξετε ότι:

(i) $B\hat{A}Γ = \frac{\pi}{8}$

(ii) $συν\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Ενότητα

3

Κύκλος

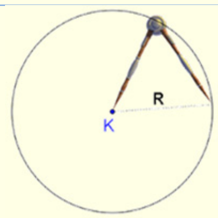
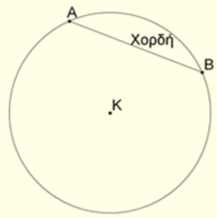
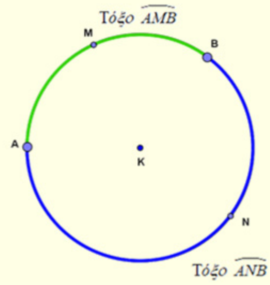
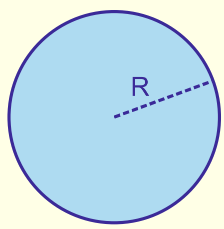
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να βρίσκουμε τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων, όταν γνωρίζουμε τις ακτίνες τους και το μήκος της διακέντρου.

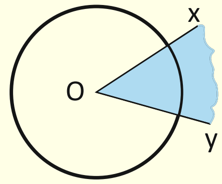
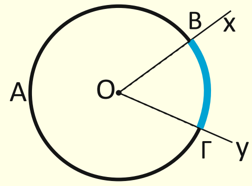
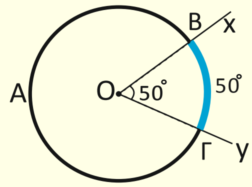
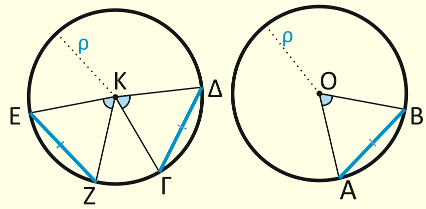
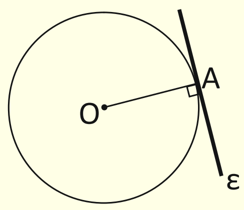
- Να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε τις σχέσεις εγγεγραμμένων και επίκεντρων γωνιών.

- Να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης.

Έχουμε Μάθει

Κύκλος	▪ **Κύκλος** ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερή απόσταση R (ακτίνα) από ένα σταθερό σημείο K (κέντρο) του επιπέδου. Γράφουμε για συντομία κύκλος (K, R). Δύο κύκλοι με ίση ακτίνα είναι ίσοι.	
Χορδή	▪ **Χορδή κύκλου** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στον κύκλο. *Π.χ Το ΑΒ είναι χορδή του κύκλου.*	
Διάμετρος	▪ **Διάμετρος κύκλου** είναι η χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου. Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη. *Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσο κάθε διαμέτρου.* *Η διάμετρος κύκλου είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου και έχει μήκος διπλάσιο από την ακτίνα* (R), *δηλαδή* $\Gamma\Delta = 2R$. *Π.χ. Η χορδή ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου.*	
Τόξο	▪ Δύο σημεία του κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη, που το καθένα ονομάζεται **τόξο του κύκλου.** *Π.χ Στον κύκλο* (K, R) *τα σημεία* A *και* B *του κύκλου των χωρίζουν σε δύο τόξα που συμβολίζονται* $\overset{\frown}{AMB}$ *και* $\overset{\frown}{ANB}$ *, όπου* M *και* N *είναι ενδιάμεσα σημεία των αντίστοιχων τόξων.* ➢ *Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη που ονομάζονται ημικύκλια.*	
Κυκλικός Δίσκος	▪ **Κυκλικός δίσκος** είναι ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει. Κάθε σημείο του κυκλικού δίσκου απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα του κύκλου.	

Έχουμε Μάθει

Επίκεντρη γωνία	**Επίκεντρη** γωνία ονομάζεται κάθε γωνία που έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου. Π.χ. Η $x\hat{O}y$ είναι επίκεντρη γωνία	
Αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης	Το τόξο του κύκλου που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας επίκεντρης γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης** γωνίας και συμβολίζεται ως Π.χ Το τόξο $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου, συμβολίζεται ως $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$, είναι το αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{\Gamma}$. .	
Μέτρο Τόξου	Το **μέτρο της** επίκεντρης γωνίας ορίζεται το μέτρο του αντίστοιχου **τόξου**. Το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες**, ή ακτίνια.** Π.χ. το τόξο $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$ $=x\hat{O}y = 50^o$	
Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου	Στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους) -σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα και αντίστροφα. Π.χ. $E\hat{K}Z = \Gamma\hat{K}\Delta = A\hat{O}B \Leftrightarrow \widehat{EZ}=\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{AB}$ - σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές και αντίστροφα. Π.χ. $\widehat{EZ}=\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{AB} \Leftrightarrow EZ = \Gamma\Delta = AB$	
Εφαπτομένη	**Εφαπτομένη** του κύκλου ονομάζεται η ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο. Το κοινό σημείο ονομάζεται σημείο επαφής. Η εφαπτομένη (ε) είναι κάθετη στην ακτίνα OA.	

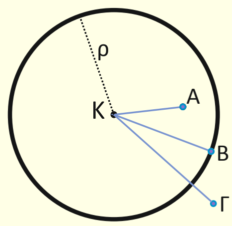
Θέσεις σημείου ως προς κύκλο

Θέσεις σημείου ως προς κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ρ.

(α) $(KA) < \rho$ ⇔ Το σημείο A βρίσκεται μέσα στον κύκλο.

(β) $(KB) = \rho$ ⇔ Το σημείο B ανήκει στον κύκλο.

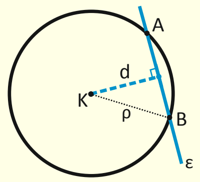
(γ) $(K\Gamma) > \rho$ ⇔ Το σημείο Γ βρίσκεται εκτός κύκλου.



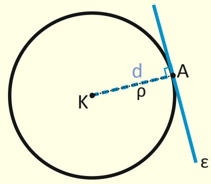
Θέσεις ευθείας ως προς κύκλο

Ευθεία (ε) που βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο K κύκλου ακτίνας ρ:

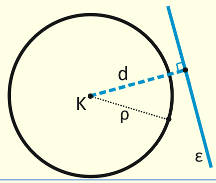
(α) $d < \rho$ ⇔ Η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.



(β) $d = \rho$ ⇔ Η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου.
Έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.

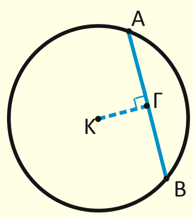


(γ) $d > \rho$ ⇔ Η ευθεία (ε) είναι ξένη με τον κύκλο.
Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



Απόστημα χορδής

Το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από το κέντρο κύκλου και είναι κάθετο προς τη χορδή λέγεται απόστημα της χορδής αυτής
Π.χ. Το ευθύγραμμο τμήμα $K\Gamma$ όπου $K\Gamma \perp AB$ ονομάζεται απόστημα της χορδής AB.



Θέση Δύο Κύκλων

Εξερεύνηση

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται **το μεσαιωνικό αστρονομικό ρολόι** που βρίσκεται στην Πράγα της Τσεχίας. Το σημερινό ρολόι είναι ένα πιστό αντίγραφο του αρχικού, το οποίο καταστράφηκε στον B' Παγκόσμιο Πόλεμο.

Να περιγράψετε τη θέση δύο οποιονδήποτε κύκλων, όπως αυτοί εμφανίζονται στο μεσαιωνικό αστρονομικό ρολόι.

Διερεύνηση

- Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn03_Thesis2Kyklon.ggb»*.

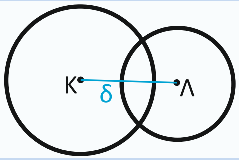
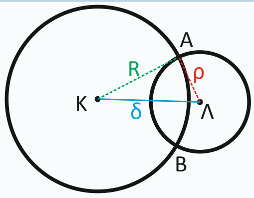
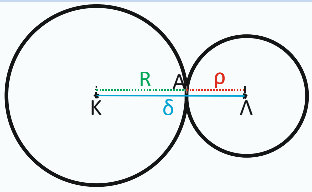
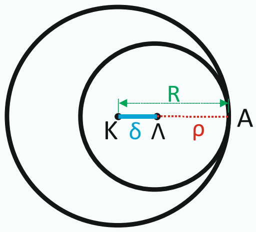
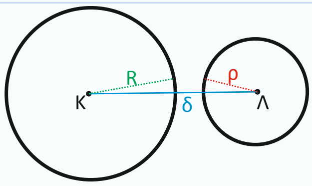
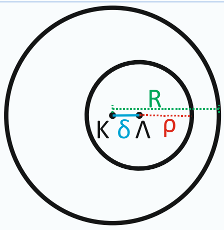
- Να μετακινήσετε τον δρομέα «d» για να μεταβάλετε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων έτσι ώστε οι κύκλοι:
  (α) να έχουν δύο κοινά σημεία

  (β) να έχουν ένα κοινό σημείο

  (γ) να μην έχουν σημεία τομής

- Ποια είναι η σχέση που συνδέει την απόσταση των δύο κέντρων με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο ακτίνων;

Μαθαίνω

Διάκεντρος δύο κύκλων ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων.	$\delta = K\Lambda$	
Θέση δύο κύκλων $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{R})$ και $(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\rho})$ με $\boldsymbol{R} \geq \boldsymbol{\rho}$		
Θέση	**Συνθήκη**	**Σχήμα**
Αν δύο κύκλοι έχουν μόνο δύο κοινά σημεία $(A\ και\ B)$, τότε οι κύκλοι **<u>τέμνονται.</u>**	$R - \rho < \delta < R + \rho$	
Αν δύο κύκλοι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε **<u>εφάπτονται εξωτερικά</u>**.	$R + \rho = \delta$	
Αν δύο κύκλοι, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με τη διαφορά των ακτίνων τους, τότε **<u>εφάπτονται εσωτερικά</u>**. *Παρατήρηση: Αν $R = \rho$ και $\delta = 0$, τότε οι κύκλοι ταυτίζονται.*	$R - \rho = \delta$	
Αν δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε είναι **<u>ξένοι εξωτερικά</u>**. Ο ένας κύκλος βρίσκεται έξω από τον άλλο.	$R + \rho < \delta$	
Αν δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι μικρότερο από τη διαφορά των ακτίνων τους, τότε είναι **<u>ξένοι εσωτερικά</u>**. Ο ένας κύκλος βρίσκεται μέσα στον άλλο.	$R - \rho > \delta$	

Θεώρημα:
Αν δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$ τέμνονται,

ισχύει ότι $\mathrm{R} - \rho < \delta < \mathrm{R} + \rho$, όπου $\delta = K\Lambda$.

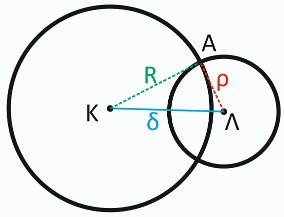
Απόδειξη:

Οι δύο κύκλοι τέμνονται με το A να είναι ένα από τα σημεία τομής τους. Σε αυτή την περίπτωση σχηματίζεται το τρίγωνο $AK\Lambda$.

$$R > \rho \Rightarrow R - \rho > 0$$

Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $AK\Lambda$:

$$\mathrm{R} - \rho < \delta < \mathrm{R} + \rho$$



Παραδείγματα

1. Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (α) Κύκλοι $(K, 4\ cm)$ και $(\Lambda, 6\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 7\ cm$

   (β) Κύκλοι $(K, 4\ cm)$ και $(\Lambda, 6\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 10\ cm$

   Λύση:

   (α) <u>Α΄ τρόπος</u>

   $R > \rho$ *άρα* $R = 6cm$ *και* $\rho = 4cm$

   $R + \rho = 6 + 4 = 10cm$, $R - \rho = 2cm, \delta = 7cm$

   $\mathrm{R} - \rho < \delta < \mathrm{R} + \rho$ άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

   <u>*Β΄ τρόπος*</u>

   $R + \rho = 6 + 4 = 10cm$, $|R - \rho| = 2cm, \delta = 7cm$

   $|R - \rho| < \delta < \mathrm{R} + \rho$ άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία

   (β) $R + \rho = 10cm = \delta$ άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (α) Κύκλοι $(K, 3\ cm)$ και $(\Lambda, 5\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 8\ cm$

   (β) Κύκλοι $(K, 3\ cm)$ και $(\Lambda, 5\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 10\ cm$

   (γ) Κύκλοι $(K, 3\ cm)$ και $(\Lambda, 5\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 1\ cm$

   (δ) Κύκλοι $(M, 5\ cm)$ και $(N, 8\ cm)$ με απόσταση $MN = 3\ cm$.

2. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου των κύκλων $(K, 4cm)$ και $(\Lambda, 5cm)$, ώστε:
   (α) οι κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά
   (β) οι κύκλοι να εφάπτονται εσωτερικά

3. Δίνονται οι κύκλοι $(\Lambda, 10\ km)$ και $(M, 18\ km)$. Αν οι δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, να βρείτε το διάστημα στο οποίο ανήκουν οι τιμές του μήκους $M\Lambda$.

4. Να κατασκευάσετε τους κύκλους σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων.
   (α) Κύκλοι $(K, 3\ cm)$ και $(\Lambda, 4\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 7\ cm$
   (β) Κύκλοι $(K, 3\ cm)$ και $(\Lambda, 4\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 8\ cm$
   (γ) Κύκλοι $(K, 3\ cm)$ και $(\Lambda, 4\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 6\ cm$

5. Δίνονται οι κύκλοι $(K, 7\ cm)$ και (Λ, x) και η διάκεντρος $K\Lambda = 12\ cm$. Να υπολογίσετε την τιμή ή τις τιμές του x, έτσι ώστε οι κύκλοι:
   (α) να εφάπτονται εξωτερικά
   (β) να τέμνονται
   (γ) να είναι ο ένας κύκλος μέσα στον άλλο

6. Να αποδείξετε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων τους.

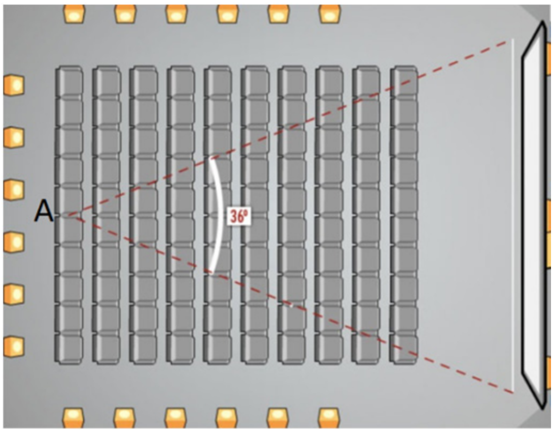
7. Να δείξετε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με τη διαφορά των ακτίνων τους.

8. Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ και εφάπτονται εξωτερικά. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους στα σημεία A και B, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $KAB\Lambda$ είναι:
   (α) τραπέζιο, όταν οι κύκλοι είναι άνισοι
   (β) ορθογώνιο, όταν οι κύκλοι είναι ίσοι

9. Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι η μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.

Εγγεγραμμένες Γωνίες
Εξερεύνηση

- Στο σχήμα φαίνεται η κάτοψη μιας αίθουσας κινηματογράφου. Ένας φωτογράφος τοποθέτησε μια φωτογραφική μηχανή (A), που έχει άνοιγμα φακού 36°, στο μέσο της τελευταίας σειράς έτσι ώστε να βλέπει όλη την οθόνη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη συνέχεια θα τοποθετήσει ακόμα μια φωτογραφική μηχανή (B) με φακό ανοίγματος 72°.



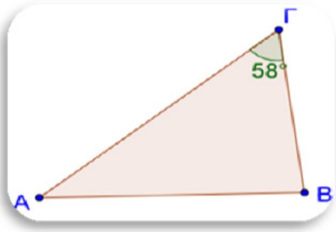
(α) Σε ποιες άλλες θέσεις θα μπορούσε να τοποθετήσει τη φωτογραφική μηχανή (A) ώστε να καλύπτει ολόκληρη την οθόνη;

(β) Σε ποια θέση πρέπει να τοποθετήσει τη φωτογραφική μηχανή (B) ώστε να καλύπτει ολόκληρη την οθόνη;

Διερεύνηση (1)

Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn03_DGeoorthi.ggb».*

- ✓ Να μετακινήσετε την κορυφή Γ σε διάφορες θέσεις.
- ✓ Πότε νομίζετε ότι η γωνία Γ γίνεται ορθή;



Διερεύνηση (2)

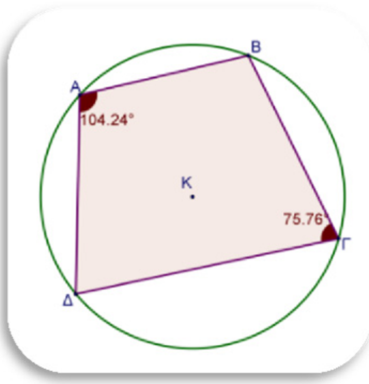
Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn03_DGeoEggegrammeniEpikentri.ggb».*

- ✓ Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης.
- ✓ Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn03_DGeoEggegrameniIdioToxo.ggb»* και να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

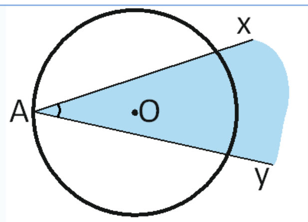
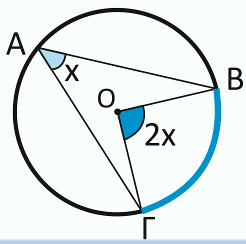
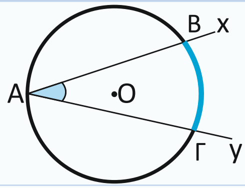
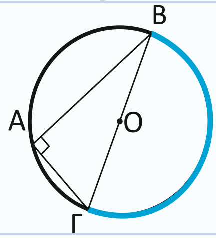
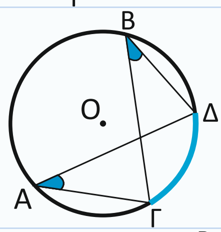
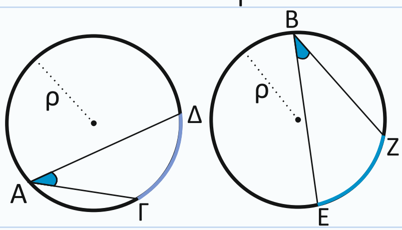
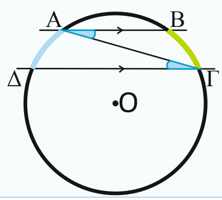
Διερεύνηση (3)

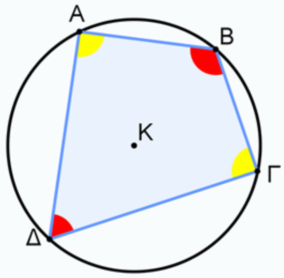
Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn03_tetrapleyro.ggb».*

- ✓ Να μετακινήσετε την κορυφή A του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ σε διάφορες θέσεις στον κύκλο.
- ✓ Να συγκρίνετε τις απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ



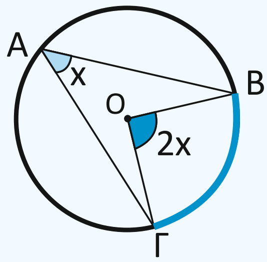
Μαθαίνω

Εγγεγραμμένη Γωνία είναι η γωνία που έχει κορυφή ένα σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου. Σε κάθε τόξο αντιστοιχούν άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες. *Π.χ Η γωνία* $x\hat{A}y$ *είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο.*	
Θεώρημα	**Σχήμα**
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας. *Π.χ.* $B\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2}\, B\hat{O}\Gamma$	
Πορίσματα	**Σχήμα**
Το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου. *Π.χ.* $B\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2}\overset{\frown}{B\Gamma}$	
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. *Π.χ.* $\hat{A} = 90^o$	
Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους. *Π.χ.* $\Gamma\hat{B}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$	
Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα ίσων κύκλων ή του ίδιου κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους και αντίστροφα. *Π.χ.* $\Gamma\hat{A}\Delta = E\hat{B}Z \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{EZ}$	
Τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών είναι ίσα. *Π.χ.* $AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{A\Delta}$	

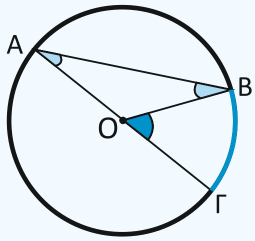
Θεώρημα	Σχήμα
Κάθε κυρτό τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. (Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου). π.χ. Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές $\hat{A}+\hat{Γ}=180^o, \hat{B}+\hat{Δ}=180^o$	

Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

Θεώρημα:
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.



Απόδειξη:
Θα αποδείξουμε ότι $B\hat{O}Γ = 2B\hat{A}Γ$.
Περίπτωση Α: Το κέντρο Ο ανήκει σε μια πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας.

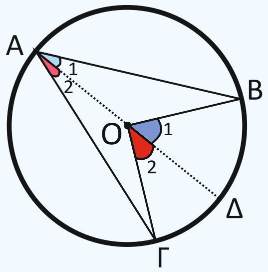


Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές, γιατί $AO = OB = R$. Άρα $\hat{A} = \hat{B}$
Η $\hat{O}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου AOB. Άρα,

$$\hat{O} = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow \hat{O} = \hat{A} + \hat{A} \Rightarrow$$
$$\hat{O} = 2\hat{A} \Rightarrow B\hat{O}Γ = 2B\hat{A}Γ$$

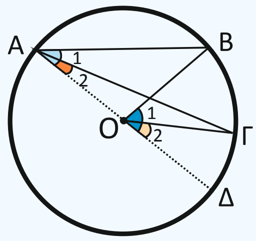
Περίπτωση Β: Το κέντρο O βρίσκεται εντός της εγγεγραμμένης γωνίας.
Κατασκευάζουμε τη διάμετρο $AΔ$ και προκύπτει ότι $B\hat{A}Γ = \widehat{A_1} + \widehat{A_2}$ και $B\hat{O}Γ = \widehat{O_1} + \widehat{O_2}$.
Εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση Α και αποδεικνύουμε ότι $\widehat{O_1} = 2\widehat{A_1}$ και $\widehat{O_2} = 2\widehat{A_2}$. Δηλαδή :

$$B\hat{O}Γ = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} \Rightarrow B\hat{O}Γ = 2\widehat{A_1} + 2\widehat{A_2} \Rightarrow$$
$$B\hat{O}Γ = 2(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}) \Rightarrow B\hat{O}Γ = 2B\hat{A}Γ$$



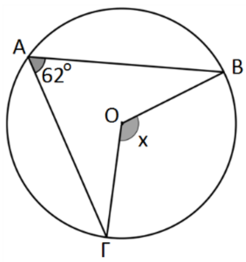
Περίπτωση Γ: Το κέντρο O βρίσκεται εκτός της εγγεγραμμένης γωνίας.
Κατασκευάζουμε τη διάμετρο $AΔ$ και προκύπτει ότι $B\hat{A}Γ = \widehat{A_1} - \widehat{A_2}$ και $B\hat{O}Γ = \widehat{O_1} - \widehat{O_2}$.
Εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση Α και αποδεικνύουμε ότι $\widehat{O_1} = 2\widehat{A_1}$ και $\widehat{O_2} = 2\widehat{A_2}$. Δηλαδή

$$B\hat{O}Γ = \widehat{O_1} - \widehat{O_2} \Rightarrow B\hat{O}Γ = 2\widehat{A_1} - 2\widehat{A_2} \Rightarrow$$
$$B\hat{O}Γ = 2(\widehat{A_1} - \widehat{A_2}) \Rightarrow B\hat{O}Γ = 2B\hat{A}Γ$$



Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία x.



Λύση:

Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

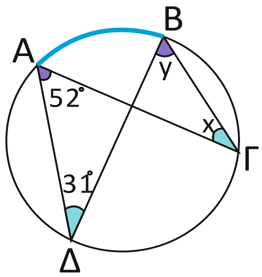
Η επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ βαίνει επίσης στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

Άρα, $B\hat{A}\Gamma = B\hat{O}\Gamma$ (θεώρημα εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας).

$\Rightarrow 62^{\circ} = \dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow x = 124^{\circ}$

2. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες x και y.



Λύση:

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ είναι ίσες, (βαίνουν στο ίδιο τόξο AB).

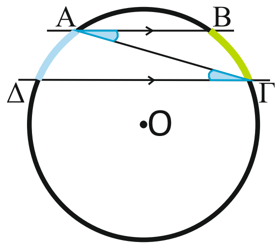
Άρα, $\hat{x} = 31^{\circ}$.

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι ίσες, (βαίνουν στο ίδιο τόξο $\Gamma\Delta$).

Άρα, $\hat{y} = 52^{\circ}$.

3. Να αποδείξετε ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών είναι ίσα. (Πόρισμα)

Απόδειξη:



Δεδομένο $AB \parallel \Gamma\Delta$ (παράλληλες χορδές)

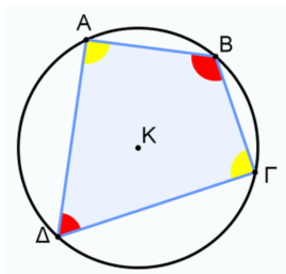
$AB \parallel \Delta\Gamma \Rightarrow \hat{A} = \hat{\Gamma}$ (εντός εναλλάξ γωνίες ίσες)

$\hat{\Gamma} = \hat{A} \Rightarrow \widehat{A\Delta} = \widehat{B\Gamma}$ (σε ίσες εγγεγραμμένες γωνίες στον ίδιο κύκλο αντιστοιχούν ίσα τόξα)

Άρα, μεταξύ παράλληλων χορδών περιέχονται ίσα τόξα.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε κυρτό τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές. (Πόρισμα)

Απόδειξη:



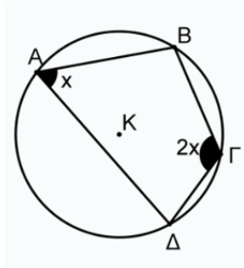
Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο ΒΓΔ.

Άρα $\hat{A} = \frac{\widehat{B\Gamma\Delta}}{2}$ (το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου).

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = \frac{\widehat{BA\Delta}}{2}$.

Άρα, $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \frac{\widehat{B\Gamma\Delta}}{2} + \frac{\widehat{BA\Delta}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$.

5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή του x.



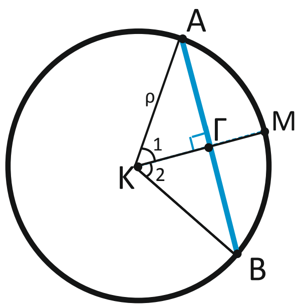
Λύση:

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές (απέναντι γωνίες εγγεγραμμένου τετραπλεύρου).

Άρα, $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow x + 2x = 180° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$.

6. Να αποδείξετε ότι η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του (απόστημα) διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της

Απόδειξη:



Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (K, ρ), μια χορδή του AB και την κάθετη $K\Gamma$ της AB, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M.

Το $K\Gamma$ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου KAB, αφού $KA = KB = \rho$.

Άρα, $K\Gamma$ είναι και διάμεσος και διχοτόμος.

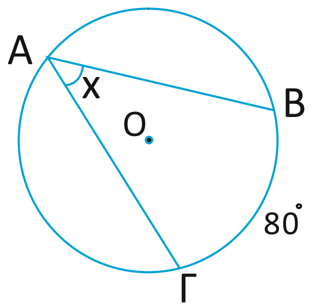
Η $K\Gamma$ είναι διάμεσος της AB άρα διχοτομεί τη χορδή AB.

Η $K\Gamma$ είναι διχοτόμος της $A\widehat{K}\Gamma$ δηλαδή $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$, έτσι τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα $\widehat{AM} = \widehat{BM}$, άρα $K\Gamma$ διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$.

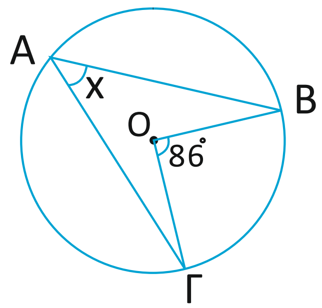
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών x και y σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

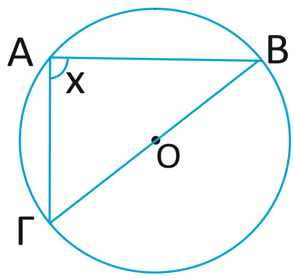
(α)



(β)

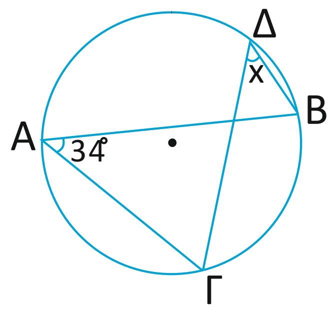


(γ)

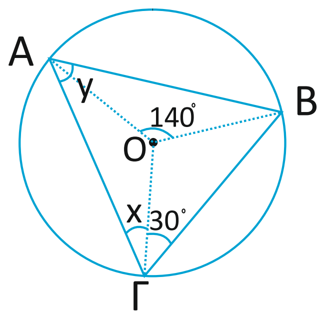


ΒΓ Διάμετρος

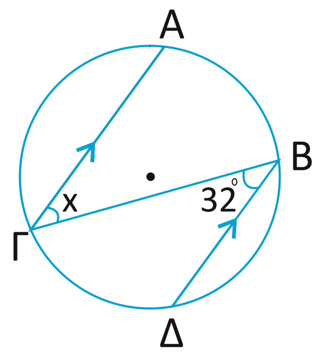
(δ)



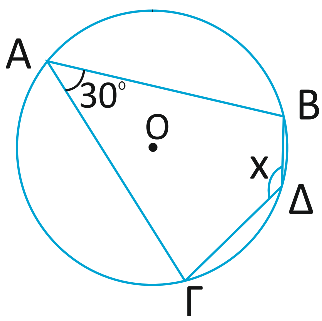
(ε)



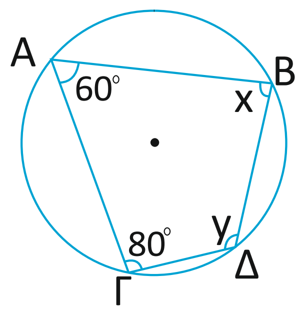
(ζ)



(η)



(θ)

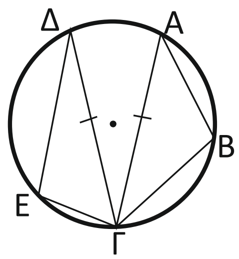


2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   Σε κύκλο (K, R),
   (α) Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες.
   (β) Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που είναι ίσες βαίνουν σίγουρα στο ίδιο τόξο.
   (γ) Αν μία εγγεγραμμένη γωνία είναι ορθή, τότε βαίνει σε ημικύκλιο.
   (δ) Σε κύκλους $(K, 4)$ και $(\Lambda, 8)$ αν οι επίκεντρες γωνίες τους $A\widehat{K}B$ και $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$ είναι αντίστοιχα ίσες, τότε και οι επίκεντρες βαίνουν σε ίσα τόξα.

3. Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma = 4)$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ). Αν η πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου να υπολογίσετε την ακτίνα κύκλου.

4. Στον διπλανό κύκλο δίνεται $A\Gamma = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $\Gamma\hat{E}\Delta$ είναι ίσες.



5. Δίνεται κύκλος $(K, 5cm)$ και η χορδή του AB. Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε τμήμα $B\Gamma = 5cm$. Η προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος ΓK προς το K τέμνει τον κύκλο, στο E. Να δείξετε ότι $E\hat{K}A = 3 \cdot B\hat{K}\Gamma$.

6. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας του τριγώνου στο A τέμνει τον κύκλο στο σημείο E. Να δείξετε ότι $B\Gamma \perp E\Delta$.

7. Δίνεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^{\circ}$ και $B_{\varepsilon\xi} = 80^{\circ}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες B, Γ και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

8. Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Λ, R). Φέρουμε κύκλο (K, ρ) ο οποίος διέρχεται από τις κορυφές B και Γ και τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του περιγεγγραμμένου κύκλου στην κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$.

Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης

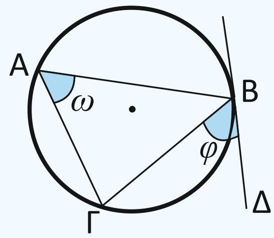
Διερεύνηση

- ✓ Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn03_DGeoXordiEfaptomeni.ggb»* ή να κατασκευάσετε σε χαρτί έναν κύκλο (K, R).
- ✓ Να εγγράψετε στον κύκλο τρίγωνο $ΑΒΓ(Α, Β, Γ$ σημεία του κύκλου).
- ✓ Να φέρετε την εφαπτομένη $ΒΔ$ του κύκλου στο σημείο $Β$.
- ✓ Να μετρήσετε τις γωνίες $Γ\hat{Β}Δ$ και $Γ\hat{Α}Β$.
- ✓ Ποια είναι η σχέση μεταξύ των γωνιών $ΓΒΔ$ και $ΓΑΒ$.
- ✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου σε διάφορες θέσεις.
- ✓ Να αλλάξετε το μέγεθος του κύκλου.

Μαθαίνω

Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης

Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που αντιστοιχεί στο τόξο, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας.
Π.χ. $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$



Πόρισμα:
Τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα.

Απόδειξη:
Θα αποδείξουμε ότι $Β\hat{Α}Γ = Δ\hat{Β}Γ$.
Φέρουμε τις ακτίνες $ΚΒ$ και $ΚΓ$.
$Κ\hat{Γ}Β = Κ\hat{Β}Γ = x$ (Το τρίγωνο $ΚΒΓ$ είναι ισοσκελές).
$Γ\hat{Κ}Β = 2\omega$. (Η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης)
$x + x + 2ω = 180^o$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΚΓ) ⇒

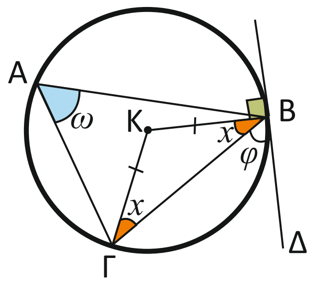
$$2x + 2ω = 180^o \Rightarrow$$

$$x + ω = 90^o \Rightarrow ω = 90^o - x \qquad (1)$$

$Κ\hat{Β}Δ = 90^o$ (Η ακτίνα είναι κάθετη με την εφαπτομένη)

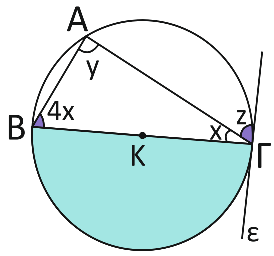
$$x + \varphi = 90^o \Rightarrow \varphi = 90^o - x \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi} \Rightarrow Β\hat{Α}Γ = Δ\hat{Β}Γ$



Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{A}$ βαίνει σε ημικύκλιο και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών x, y, z.



Λύση:

$\hat{y} = 90^\circ$ (Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει σε ημικύκλιο)

$4x + x + 90^\circ = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$)

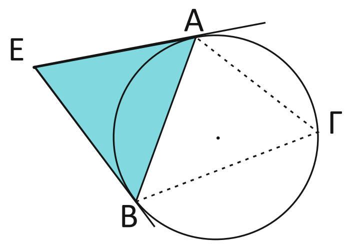
$5x = 90^\circ$

$x = 18^\circ$

$\hat{z} = \hat{B} = 4x$ (Γωνία από χορδή και εφαπτομένη)

$\Rightarrow \hat{z} = 72^\circ$

2. Από σημείο E εκτός του κύκλου (K, ρ) φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα EA και ΕΒ προς τον κύκλο. Να αποδείξετε ότι $EA = EB$.



Λύση:

EA και EB είναι εφαπτόμενα τμήματα.

ΓA και ΓB είναι χορδές κύκλου.

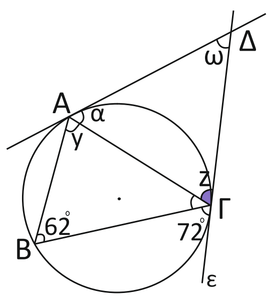
Από το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης προκύπτει ότι

$$\left.\begin{matrix} E\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B \\ E\hat{B}A = A\hat{\Gamma}B \end{matrix}\right\} \Rightarrow E\hat{A}B = E\hat{B}A$$

Άρα, το τρίγωνο EAB είναι ισοσκελές με $EA = EB$.

Παρατήρηση: Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο έξω από τον κύκλο είναι ίσα μεταξύ τους.

3. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ είναι εφαπτόμενα τμήματα στα A και Γ, αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}, \hat{y}, \hat{z}$.



Λύση:

Η γωνία $\hat{Z}$ σχηματίζεται από το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$ και τη χορδή $A\Gamma$ και η γωνία B βαίνει στο τόξο $A\Gamma$. Άρα, από το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{Z} = 62^\circ$.

Από το ίδιο θεώρημα προκύπτει ότι $\hat{y} = 72^\circ$.

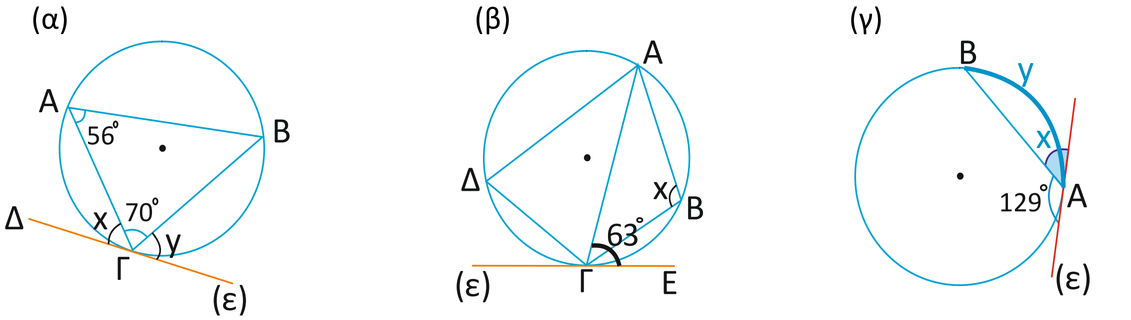
Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο έξω από τον κύκλο είναι ίσα, δηλαδή $A\Delta = \Delta\Gamma$. Άρα, το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{\alpha} = \hat{Z} = 62^\circ$.

$\hat{\omega} + \hat{\alpha} + \hat{z} = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου $A\Delta\Gamma$)

$\Rightarrow \hat{\omega} = 180^\circ - 62^\circ - 62^\circ \Rightarrow \hat{\omega} = 56^\circ$

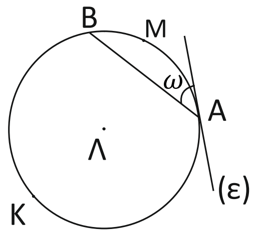
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την τιμή του x και του y για καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, αν (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου.



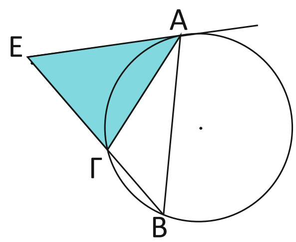
2. Δίνεται κύκλος $(K, 4cm)$ η χορδή του AB. Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη BE, έτσι ώστε η γωνία $E\hat{B}A = 70^{\circ}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\widehat{K}B$.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Λ, ρ), η χορδή AB, M σημείο του κύκλου και (ε) εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Αν δίνεται ότι $A\widehat{K}B$=5 $A\widehat{M}B$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ω.



4. Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο $AB = 7cm$ και σημείο Γ στην περιφέρεια του κύκλου, τέτοιο ώστε η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 30^{\circ}$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την προέκταση της AB στο Δ. Να δείξετε ότι το $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

5. Από σημείο E εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη EA, όπου A είναι το σημείο επαφής, και την τέμνουσα $E\Gamma B$. Αν γνωρίζουμε ότι $AB = EA$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.



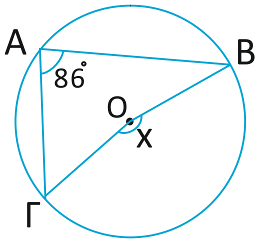
6. Από σημείο A που βρίσκεται εκτός του κύκλου (K, P) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$. Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 58^{\circ}$, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $B\Gamma$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $B\widehat{K}\Gamma$.

7. Δίνεται κύκλος (O, R), η διάμετρος του AB και το τυχαίο σημείο του Γ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B, στα σημεία Δ και E, αντίστοιχα.
(α) Να δείξετε ότι η γωνία $EO\Delta$ είναι ορθή.
(β) Πού βρίσκεται το κέντρο του κύκλου που περνά από τα σημεία E, O, Δ;

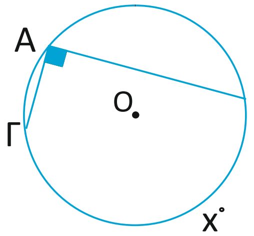
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τις τιμές του x και y σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις

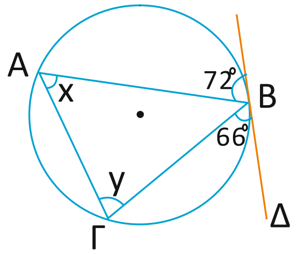
(α)



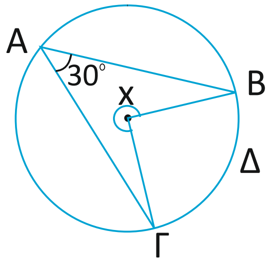
(β)



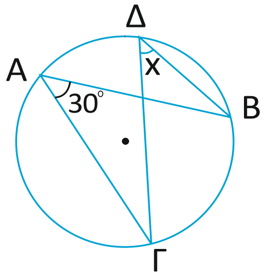
(γ)



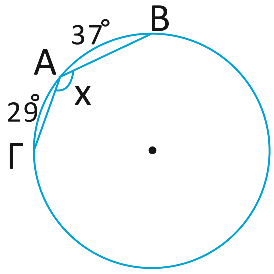
(δ)



(ε)

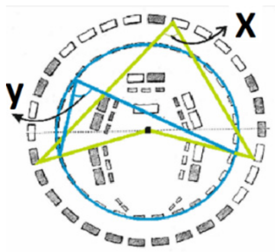


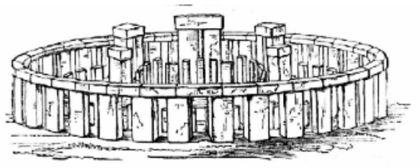
(στ)



2. Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\widehat{AB} = 120^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 30^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 80^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

3. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται η κάτοψη του αγγλικού μνημείου Stonehedge που είναι φτιαγμένο από βράχους. Τμήματα του μνημείου δημιουργούν δύο ομόκεντρους κύκλους. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες x και y είναι ίσες .



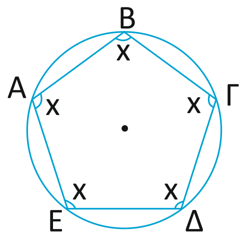


4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ εγγεγραμμένο σε κύκλο.

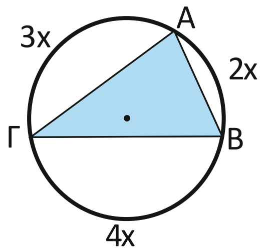
(α) Να συγκρίνετε τα τόξα $\widehat{AB\Delta}$ και $\widehat{EB\Gamma}$.

(β) Να δείξετε ότι $\widehat{AE} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

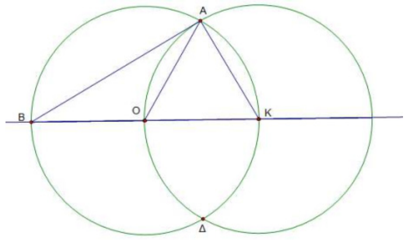
(γ) Να υπολογίσετε την τιμή του x.



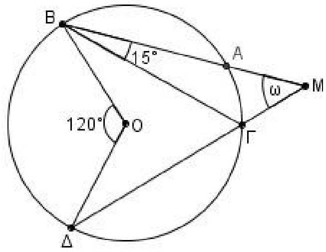
5. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



6. Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ.
   (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.
   (β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK.



7. Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Delta$ είναι 120^o και η γωνία ΓBA είναι 15^o. Να υπολογίσετε τις γωνίες $B\Gamma\Delta$ και $BM\Delta$.



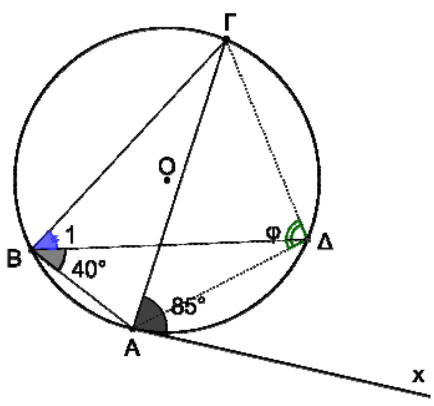
8. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o$) στο οποίο η $B\Gamma$ είναι η εφαπτομένη κύκλου με διάμετρο την $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι: $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$

9. Σε κύκλο με κέντρο K δίνεται εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η Γx εφαπτομένη του στο Γ. Να δείξετε ότι η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η $B\Gamma$ με την εφαπτομένη Γx.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και $A\hat{B}\Gamma = 30°$, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$, όπου Δ τυχαίο σημείο της $B\Gamma$. Η προέκταση του $A\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο E. Να δείξετε ότι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{E}B$.

11. Δίνεται κύκλος (K, R) και σημείο B εκτός αυτού. Με κέντρο το σημείο M, το μέσο του KB, και ακτίνα MB φέρουμε ημικύκλιο με διάμετρο KB. Αν A είναι το σημείο τομής του κύκλου (K, R) με το ημικύκλιο, να υπολογίσετε τη γωνία KAB. Να εξηγήσετε γιατί η ευθεία που περνά από τα σημεία A και B είναι εφαπτομένη του κύκλου.

12. Στο πιο κάτω σχήμα, η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) στο σημείο του A. Αν δίνεται ότι $\Gamma\hat{A}x = 85°$ και $\Delta\hat{B}A = 40°$:
   (α) να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45°$
   (β) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\varphi}$



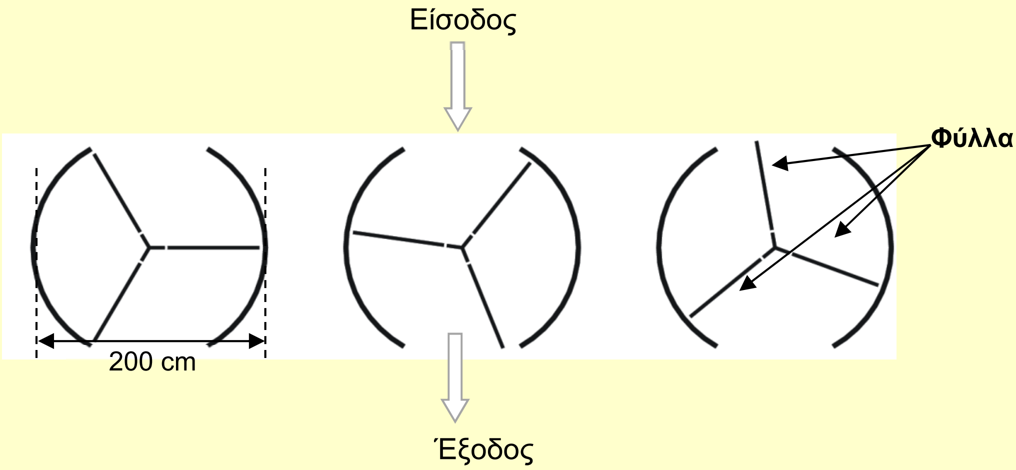
13. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο$(ΑΒ < ΑΓ)$ και η διχοτόμος $ΑΔ$ της γωνίας $Β\hat{Α}Γ$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $Α$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο $Ε$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΕΑΔ$ είναι ισοσκελές.

14. Δίνεται κύκλος $(Κ, R)$ και τυχαία χορδή του $ΑΒ$. Να αποδείξετε τα πιο κάτω θεωρήματα:
    (α) Η ευθεία που περνά από το κέντρο $Κ$ ενός κύκλου και είναι κάθετη προς τη χορδή $ΑΒ$, τότε περνά από το μέσο $Ν$ της χορδής και από το μέσο $Μ$ του τόξου $ΑΒ$.
    (β) Η ευθεία που περνά από το κέντρο $Κ$ ενός κύκλου και από το μέσο $Ν$ μιας χορδής $ΑΒ$, τότε είναι κάθετη στη χορδή και περνά από το μέσο $Μ$ του τόξου $ΑΒ$.
    (γ) Η ευθεία που περνά από το κέντρο $Κ$ ενός κύκλου και από το μέσο $Μ$ ενός τόξου $ΑΒ$, τότε είναι μεσοκάθετη της χορδής $ΑΒ$.
    (δ) Η ευθεία που περνά από το μέσο χορδής $ΑΒ$ και το μέσο του αντίστοιχου τόξου $ΑΒ$, τότε περνά από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη με τη χορδή $ΑΒ$.

<u>Λύση Προβλήματος</u>

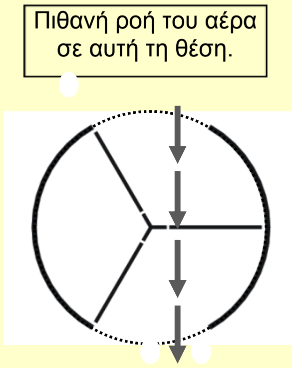
ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΠΟΡΤΑ

Μια περιστρεφόμενη πόρτα περιλαμβάνει τρία φύλλα που περιστρέφονται σε έναν κυκλικό χώρο. Η εσωτερική διάμετρος αυτού του χώρου είναι 2 μέτρα (200 εκατοστόμετρα). Τα τρία φύλλα της πόρτας χωρίζουν τον χώρο σε τρεις ίσους τομείς. Οι πιο κάτω τρεις κατόψεις δείχνουν τα φύλλα της πόρτας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.



Ερώτηση 1: Ποιο είναι το άνοιγμα της γωνίας, σε μοίρες, που σχηματίζεται από δύο φύλλα της πόρτας;

Ερώτηση 2: Τα δύο **ανοίγματα** της πόρτας (τα διακεκομμένα τόξα στο διάγραμμα) έχουν το ίδιο μέγεθος. Στην περίπτωση που αυτά τα ανοίγματα είναι πολύ μεγάλα, τα περιστρεφόμενα φύλλα δεν μπορούν να σφραγίσουν τον χώρο και έτσι μπορεί να υπάρξει ελεύθερη ροή αέρα μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, προκαλώντας ανεπιθύμητη απώλεια ή συσσώρευση θερμότητας. Αυτό φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.
Ποιο είναι το μέγιστο μήκος του τόξου, σε εκατοστόμετρα (cm), που μπορεί να έχει κάθε άνοιγμα της πόρτας, ώστε να μην μπορεί να υπάρξει ελεύθερη ροή αέρα μεταξύ της εισόδου και της εξόδου



Ερώτηση 3: Η πόρτα κάνει 4 περιστροφές σε ένα λεπτό. Υπάρχει χώρος για δύο άτομα σε καθένα από τους τρεις τομείς. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ατόμων που μπορούν να εισέλθουν από την πόρτα στο κτήριο σε 30 λεπτά;

PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. (α) Να κατασκευάσετε ένα τραπέζιο με τις 4 κορυφές του να είναι σημεία κύκλου.

   (β) Τι είδους τραπέζιο έχετε κατασκευάσει;

2. Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB και εφαπτομένη Bx. Από ένα σημείο E του κύκλου φέρουμε τέμνουσα AE η οποία όταν προεκταθεί, τέμνει τη Bx στο σημείο Γ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο E τέμνει τη Bx στο σημείο Δ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές.

3. Σε κύκλο (O, R) δίνεται χορδή AB και ακτίνα $O\Gamma$ του κύκλου παράλληλη με την AB. Να δείξετε ότι $(A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2 = 4R^2$.

4. Δύο ίσοι κύκλοι τέμνονται στα A και B. Από το A φέρουμε ευθεία που τέμνει τους δύο κύκλους στα σημεία Γ και Δ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

5. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου και AE η διάμετρος του κύκλου, να δείξετε ότι $B\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma$.

6. Σε κύκλο φέρουμε χορδή $A\Gamma$ και την εφαπτομένη του κύκλου $A\Delta$. Η διχοτόμος της γωνίας $\Delta A\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο E. Να δείξετε ότι το $AE\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

7. Να αποδείξετε ότι η γωνία που δημιουργείται από δύο τέμνουσες ενός κύκλου οι οποίες τέμνονται έξω από τον κύκλο, έχει μέτρο ίσο με τη διαφορά των δύο εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχει η γωνία.

8. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά α. Με διάμετρο AB γράφουμε ημικύκλιο μέσα στο τετράγωνο και με κέντρο A και ακτίνα α γράφουμε τόξο μέσα στο τετράγωνο. Από το A φέρουμε ημιευθεία που τέμνει το τόξο στο σημείο Z και το ημικύκλιο στο σημείο E. Αν $ZH \perp B\Gamma$, με H σημείο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.

9. Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία που σχηματίζεται από δύο τέμνουσες του κύκλου, όταν αυτές τέμνονται εντός του κύκλου, είναι ίση με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχονται από τη γωνία και την κατακορυφήν της γωνία (Θεώρημα).

Ενότητα

4

Ορίζουσες – Ευθεία

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε ορίζουσες 2×2.
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε ορίζουσες 3×3:
  - είτε με τη μέθοδο ανάπτυξης μίας γραμμής ή μίας στήλης
  - είτε χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Sarrus
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε τη γωνία δύο ευθειών.
- Να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε τη συνθήκη για να συντρέχουν τρεις ευθείες.
- Να ορίζουμε τη δέσμη ευθειών και να την εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων.
- Να υπολογίζουμε την απόσταση σημείου από ευθεία και το εμβαδόν τριγώνου.

Ορίζουσες

Διερεύνηση

Σε μια αριθμομηχανή εισάγονται 4 αριθμοί μέσω ενός πίνακα. Πιο κάτω παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της αριθμομηχανής σε τρεις περιπτώσεις.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 8 \\ \hline\end{array} \Rightarrow 1$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 5 & 8 \\ \hline\end{array} \Rightarrow 14$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0$$

Ποια θα είναι η τιμή εξόδου της αριθμομηχανής στην πιο κάτω περίπτωση;

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline\end{array} \Rightarrow$$

Ορίζουσες (2×2)

Μαθαίνω

- Κάθε διάταξη αριθμών σε ίσο αριθμό γραμμών και στηλών ονομάζεται **τετραγωνικός πίνακας** και συμβολίζεται συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

  Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ αποτελείται από δύο γραμμές και δύο στήλες και ονομάζεται **τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{2 \times 2}$**. Τα α, β, γ και δ ονομάζονται **στοιχεία του πίνακα**.

Παράδειγμα: Η διάταξη $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ με 2 γραμμές και 2 στήλες είναι ένας τετραγωνικός πίνακας 2×2, ενώ η διάταξη $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ με 3 γραμμές και 3 στήλες είναι ένας τετραγωνικός πίνακας 3×3.

- **Ορίζουσα** ενός τετραγωνικού πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ονομάζουμε τον αριθμό $\boldsymbol{\alpha\delta - \beta\gamma}$ και τη συμβολίζουμε με $\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\delta} \end{vmatrix}$ ή $|\boldsymbol{A}|$ ή $\boldsymbol{det(A)}$.

Δηλαδή, αν $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, τότε $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$.

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 5 \cdot 7 = -8$$

Παράδειγμα 2: Αν $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ ένας τετραγωνικός πίνακας 2×2, τότε η ορίζουσα του πίνακα M είναι: $det(M) = (-2) \cdot 12 - (-1) \cdot 10 = -24 + 10 = -14$
(Αντί $det(M)$, μπορούμε να γράψουμε επίσης $|M|$ ή $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$.)

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

   (α) $\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} 3+\sqrt{5} & -2 \\ 4 & 3-\sqrt{5} \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} a-3 & -9 \\ -1 & a+3 \end{vmatrix}$

   Λύση:

   (α) $\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = -3 \cdot 11 - (-9) \cdot 4 = -33 + 36 = 3$

   (β) $\begin{vmatrix} 3+\sqrt{5} & -2 \\ 4 & 3-\sqrt{5} \end{vmatrix} = \left(3+\sqrt{5}\right) \cdot \left(3-\sqrt{5}\right) - (-2) \cdot 4 = 9 - 5 + 8 = 12$

   (γ) $\begin{vmatrix} a-3 & 9 \\ -1 & a+3 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot (a+3) - 9 \cdot (-1) = a^2 - 9 + 9 = a^2$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} x-2 & x \\ 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

Λύση:

$\begin{vmatrix} x-2 & x \\ 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

(δ) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda \\ \lambda & \lambda+2 \end{vmatrix}$ (ε) $\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{vmatrix}$ (στ) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & 4\alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(α)	Υπάρχει τουλάχιστον ένας πίνακας 2×2 με ορίζουσα ίση με μηδέν.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $A = \begin{pmatrix} \kappa+\lambda & \kappa \\ \kappa & \kappa-\lambda \end{pmatrix}$, τότε $\lvert A \rvert = 2\kappa^2 - \lambda^2$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\delta & -\gamma \\ -\beta & -\alpha \end{vmatrix}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 10$, να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} \alpha & 8\beta \\ \gamma & 8\delta \end{vmatrix}$

Τι παρατηρείτε;

4. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

Ορίζουσες (3×3)

Μαθαίνω

- Αν $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας 3×3, τότε η ορίζουσα του συμβολίζεται με $\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{\eta} & \boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{\iota} \end{vmatrix}$ ή με $|\boldsymbol{A}|$ ή με $\boldsymbol{det(A)}$.

✓ Ο υπολογισμός μιας ορίζουσας 3×3 μπορεί να γίνει με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας **οποιασδήποτε γραμμής ή οποιασδήποτε στήλης της**.

✓ Στον υπολογισμό μιας ορίζουσας 3×3 λαμβάνουμε υπόψη τον κανόνα προσήμου για κάθε στοιχείο, όπως δείχνει το σχήμα: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Δηλαδή, το ανάπτυγμα της ορίζουσας του A είναι:

$$|A| = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \beta \cdot \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix}$$

✓ Ο υπολογισμός της πιο πάνω ορίζουσας 3×3 λέγεται **υπολογισμός με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής**.

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής ή της 2ης στήλης.

➢ Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-52) - 3(-34) + 5 \cdot 29 = \mathbf{143}$$

➢ Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-34) + 1 \cdot (-31) - 9 \cdot (-8) = \mathbf{143}$$

- Η ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ μπορεί να υπολογιστεί και με τον **κανόνα του Sarrus:**

  «Γράφουμε ξανά τις 2 πρώτες στήλες στα δεξιά και σχηματίζουμε όλα τα γινόμενα ανά τρεις αριθμούς, όπως δείχνουν τα βέλη με τα αντίστοιχα πρόσημα»

$$\begin{array}{ccc|cc} \overset{+}{\alpha} & \overset{+}{\beta} & \overset{+}{\gamma} & \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \underset{-}{\eta} & \underset{-}{\theta} & \underset{-}{\iota} & \eta & \theta \end{array} = \alpha\varepsilon\iota + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \gamma\varepsilon\eta - \alpha\zeta\theta - \beta\delta\iota.$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{matrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \cdot 7 + 5 \cdot 4 \cdot 9 - 5 \cdot 1 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \cdot 9 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = \mathbf{143}$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$:

   (α) αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής

   (β) αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της 3ης στήλης

   (γ) με τον κανόνα του Sarrus

   Λύση:

   (α) $\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 11 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$
   $10 \cdot 11 - 3 \cdot 22 + 5 \cdot 9 = 110 - 66 + 45 = \mathbf{89}$

   (β) $\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 11 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$
   $5 \cdot 9 - 11 \cdot (-4) = 45 + 44 = \mathbf{89}$

   (γ) $\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 3 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{matrix} =$
   $10 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 11 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot 4 \cdot (-2) - 10 \cdot 11 \cdot (-1)$
   $-3 \cdot (-1) \cdot 0 = \mathbf{89}$

2. Να αποδείξετε την πιο κάτω ισότητα:

   $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - \beta & \beta & \gamma \\ \delta - \varepsilon & \varepsilon & \zeta \\ \eta - \theta & \theta & \iota \end{vmatrix}$$

   Λύση:

   Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης έχουμε: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \alpha\varepsilon\iota - \alpha\zeta\theta - \delta\beta\iota + \delta\gamma\theta + \eta\beta\zeta - \eta\gamma\varepsilon$

   Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha - \beta & \beta & \gamma \\ \delta - \varepsilon & \varepsilon & \zeta \\ \eta - \theta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης

   έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ \delta-\varepsilon & \varepsilon & \zeta \\ \eta-\theta & \theta & \iota \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\varepsilon\iota-\zeta\theta)-(\delta-\varepsilon)(\beta\iota-\gamma\theta)+(\eta-\theta)(\beta\zeta-\gamma\varepsilon) =$$

$$\alpha\varepsilon\iota+\beta\zeta\eta+\gamma\delta\theta-\gamma\varepsilon\eta-\alpha\zeta\theta-\beta\delta\iota = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$$

Δραστηριότητες

1. (α) Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ένας πίνακας 3×3, να υπολογίσετε:
   i. την $|A|$, αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης
   ii. την $|A|$, αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης

   (β) Αν $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ένας πίνακας 3×3, να υπολογίσετε την $|B|$, αφού πρώτα επιλέξετε «κατάλληλη» γραμμή ή στήλη για να την αναπτύξετε.

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(α)	Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, τότε η ορίζουσα του είναι $|A| = 14$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, τότε η ορίζουσα του είναι $|A| = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \varepsilon & \zeta \\ 0 & 0 & \iota \end{vmatrix} = \alpha\varepsilon\iota$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} -19 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (δ) $\begin{vmatrix} 3 & 2^{100} & 3^{200} \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

4. Να αποδείξετε ότι: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$ είναι αδύνατη $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ευθεία

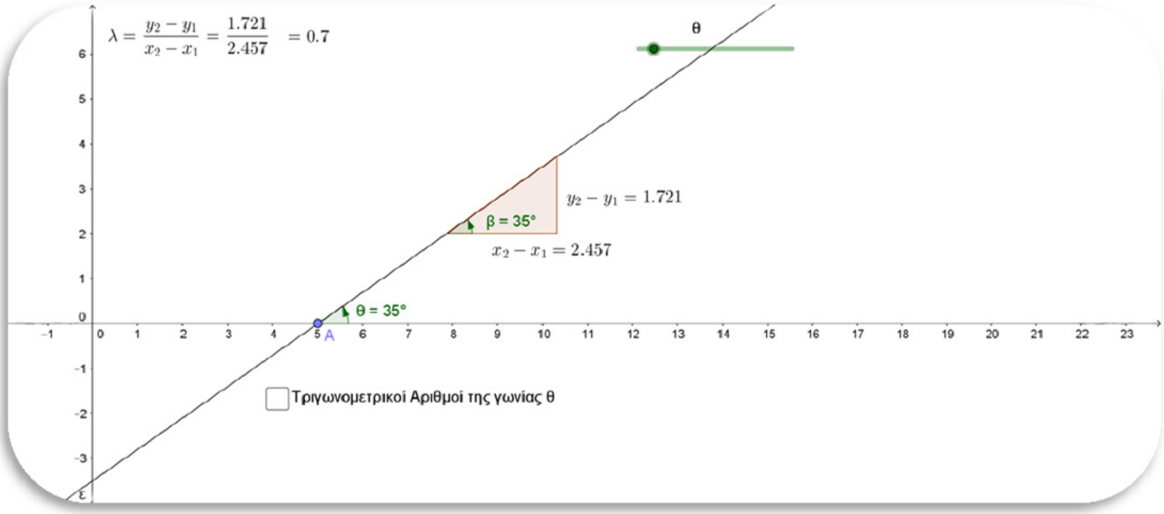
Έχουμε μάθει …

- Να ορίζουμε την κλίση ευθείας.
- Να αναπαριστούμε γραφικά την ευθεία, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο της ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.
- Να ορίζουμε θετική και αρνητική φορά γωνίας, η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση.
- Να ορίζουμε:
  - τη γωνία ω που σχηματίζει μία ευθεία με τον άξονα των τετμημένων ως τη θετική κυρτή γωνία με αρχική πλευρά τον άξονα των τετμημένων και
  - την κλίση της ευθείας ε ως $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega$, $0° \leq \omega < 180°,\ \omega \neq 90°$.
- Να υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων A, B και τις συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB.
- Να εξετάζουμε τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών και να αποφασίζουμε πότε είναι κάθετες μεταξύ τους.
- Να επιλύουμε συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους αλγεβρικά και γραφικά.

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας
Διερεύνηση

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_Lyk_Entheto3_KlisiEftheias.ggb»*.

Δίνεται μια ευθεία ε η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο A.



✓ Να επιλέξετε το δρομέα θ και να του δώσετε διάφορες τιμές.
Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:

(α) Ποια είναι η αρχική και ποια είναι η τελική πλευρά της γωνίας θ;

(β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η γωνία θ;

(γ) Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις γωνίες θ και β;

(δ) Ποια είναι η τιμή της κλίσης λ_ε της ευθείας ε, όταν:
  i. $\theta = 0°$
  ii. $\theta = 45°$
  iii. $\theta = 90°$
  iv. $\theta = 135°$

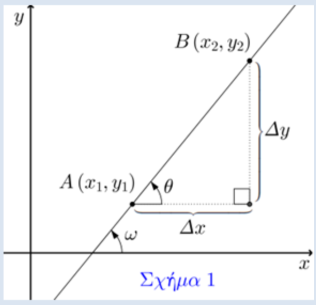
(ε) Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας θ σχετίζεται η κλίση λ_ε της ευθείας ε και με ποιο τρόπο;

(στ) Να μετακινήσετε το σημείο A σε διάφορες θέσεις και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία.

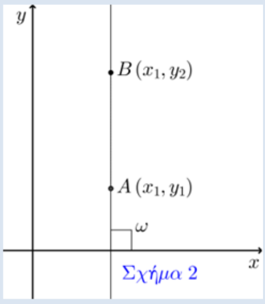
Μαθαίνω

- Η **κλίση** ή **ο συντελεστής διεύθυνσης λ** της ευθείας AB, όπου $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, είναι:
  - $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$

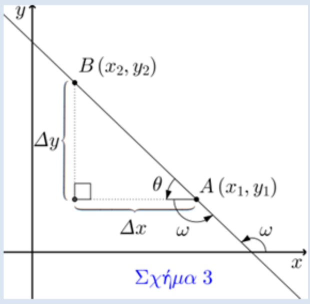
  Σημείωση: Η κλίση της ευθείας δεν ορίζεται όταν $x_1 = x_2$.
  - $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$, όταν $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ με $\omega \neq 90^\circ$



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

- ✓ Αν $0^\circ \leq \omega < 90^\circ$ (Σχήμα 1), τότε $\theta = \omega$ και $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda_{AB}$.
- ✓ Αν $\omega = 90^\circ$ (Σχήμα 2), τότε $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$ και η $\varepsilon\varphi\omega$ και η κλίση λ_{AB} δεν ορίζονται.
- ✓ Αν $90^\circ < \omega < 180^\circ$ (Σχήμα 3), τότε:

$$\theta = 180^\circ - \omega \Leftrightarrow \omega = 180^\circ - \theta \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(180^\circ - \theta) = -\varepsilon\varphi\theta = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda_{AB}$$

- Η ευθεία AB με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση:

  (α) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$, ή $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$, όπου λ είναι η κλίση της ευθείας AB

  (β) $x = x_1$, αν $x_1 = x_2$ (η ευθεία θα είναι κατακόρυφη, δηλαδή παράλληλη προς τον άξονα των τεταγμένων)

Απόδειξη

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της ευθείας AB, διαφορετικό από τα $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

(α) Αν $x_1 \neq x_2$, οι κλίσεις των AM και AB ορίζονται και είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως, έχουμε:

$$\lambda_{AM} = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

Παρατήρηση

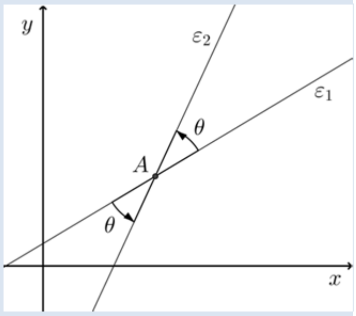
Αν $y_1 = y_2, x_1 \neq x_2$, τότε οι κλίσεις των AM και AB ορίζονται και είναι ίσες με μηδέν. Επομένως, έχουμε:

$$\lambda_{AM} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = 0 \Leftrightarrow y = y_1$$

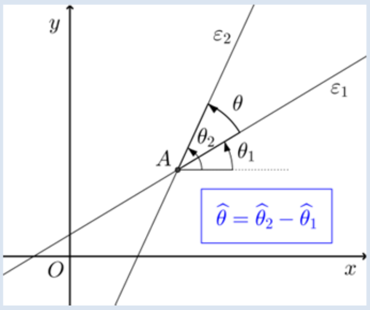
(β) Αν $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$, τότε η κλίση της AB δεν ορίζεται. Επομένως, δεν ορίζεται η κλίση της AM $\left(\lambda_{AM} = \frac{y - y_1}{x - x_1}\right)$, δηλαδή:

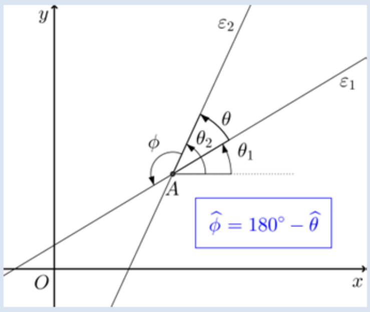
$$x - x_1 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$$

- Δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο A. Η θετική κυρτή γωνία με αρχική πλευρά την ευθεία ε_1 και τελική πλευρά την ευθεία ε_2 ονομάζεται **γωνία** των δύο ευθειών και συμβολίζεται με $\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
  Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 συμπίπτουν, ορίζουμε $\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0°$.
  Άρα,
$$0° \leq \gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < 180°$$



- Παρατηρούμε ότι αν $\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \theta$, τότε $\gamma\omega\nu(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 180° - \theta$.



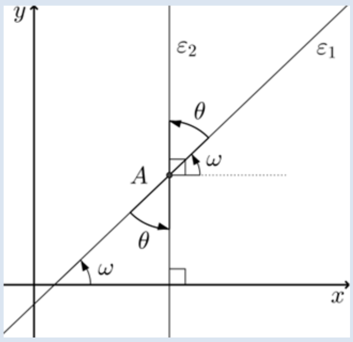


- Αν θ $(\theta \neq 90^{\circ})$ είναι η γωνία δύο μη παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ($\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$), όπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δεν είναι παράλληλες με τον άξονα των τεταγμένων, οι οποίες έχουν κλίσεις $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε ισχύει:
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}$$

Παρατηρήσεις:

➢ Αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 + 1 = 0$ τότε οι ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

➢ Αν η μία από τις δύο ευθείες (π.χ. η ε_2) είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων (λ_2 δεν ορίζεται), τότε για τη γωνία θ των δύο ευθειών ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{\lambda_1}, \lambda_1 \neq 0$



Απόδειξη:

Έχουμε: $\theta + \omega = 90° \Rightarrow \theta = 90° - \omega$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(90° - \omega) \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{1}{\lambda_1}$$

Παραδείγματα

1. Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$, $B(2,-5)$ και $\Gamma(2,4)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AB και $B\Gamma$.

Λύση:

1^{ος} Τρόπος

Η ευθεία AB έχει εξίσωση $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, με $A(-2,3)$ και $B(2,-5)$. Άρα:

$$\frac{y-3}{x-(-2)}=\frac{-5-3}{2-(-2)} \Leftrightarrow \frac{y-3}{x+2}=-2 \Leftrightarrow y-3=-2(x+2) \Leftrightarrow y=-2x-1$$

Η ευθεία $B\Gamma$ έχει εξίσωση $x=2$, γιατί τα σημεία B και Γ έχουν την ίδια τετμημένη.

2^{ος} Τρόπος

Η κλίση της AB είναι $\lambda=\frac{-5-3}{2-(-2)}=-\frac{8}{4}=-2$.

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $y-y_1=\lambda(x-x_1)$.

$y-3=-2(x+2) \Leftrightarrow y-3=-2x-4 \Leftrightarrow y=-2x-1$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:

(α) διέρχεται από το σημείο $A(2,-1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$

(β) διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ και σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία 120°

Λύση:

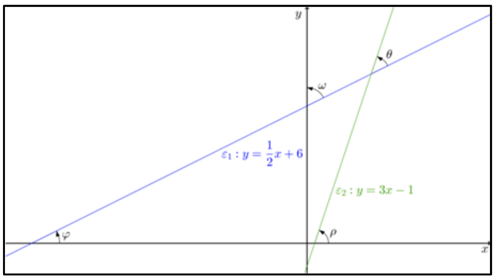
(α) Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $y-y_1=\lambda(x-x_1)$.Η κλίση είναι $\lambda=-2$ και το σημείο από το οποίο διέρχεται είναι το $A(0,3)$. Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$y-(-1)=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+3$

(β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας είναι $\lambda=\varepsilon\varphi 120^\circ=-\sqrt{3}$. Επομένως, η εξίσωσή της είναι:

$y-3=-\sqrt{3}(x-0) \Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x+3$

3. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\frac{1}{2}x+6$ και $\varepsilon_2: y=3x-1$.



(α) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία (θ) των δύο ευθειών.

(β) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες (ω και φ) που σχηματίζει η ευθεία ε_1 με τους δύο άξονες.

(γ) Αν $\varepsilon_3: y=-2x+1$, να υπολογίσετε την γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_3 και ε_2 $(\gamma\omega\nu(\varepsilon_3,\varepsilon_2))$.

Λύση:

(α) **1^{ος} Τρόπος**

Αν θ είναι η οξεία γωνία των δύο ευθειών, τότε ισχύει $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$, όπου $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Επομένως, έχουμε $\varepsilon\varphi\theta = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 \Longrightarrow \theta = 45°$.

2^{ος} Τρόπος

Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_1 με τον άξονα των τετμημένων, έχουμε: $\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = 26{,}6°$ (σε 1 δεκαδικό ψηφίο)

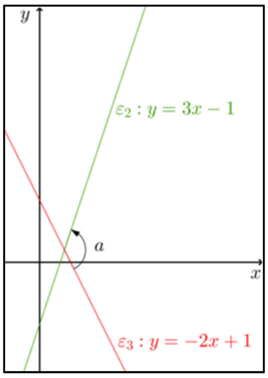
Αν ρ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_2 με τον άξονα των τετμημένων, έχουμε: $\varepsilon\varphi\rho = \lambda_2 = 3 \Leftrightarrow \rho = 71{,}6°$ (σε 1 δεκαδικό ψηφίο)

Συνεπώς, έχουμε: $\theta = \rho - \varphi = 71{,}6° - 26{,}6° = 45°$

(β) Αν ω είναι η οξεία γωνία μεταξύ της ε_1 και του άξονα των τεταγμένων, μπορούμε να την υπολογίσουμε από τον τύπο $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\lambda_1}$, γιατί δεν ορίζεται η κλίση της ευθείας $x = 0$. Επομένως, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Longrightarrow$

$\omega = 63{,}4°$ (σε 1 δεκαδικό ψηφίο). Για την οξεία γωνία μεταξύ της ε_1 και του άξονα των τετμημένων, έχουμε:

$\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi = 26{,}6°$ (σε 1 δεκαδικό ψηφίο)



(γ) Έστω α είναι η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_3 και ε_2 ($\gamma\omega\nu(\varepsilon_3, \varepsilon_2)$). Είναι:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{1 + \lambda_2\lambda_3} = \frac{3-(-2)}{1+3(-2)} = \frac{5}{-5} = -1$$

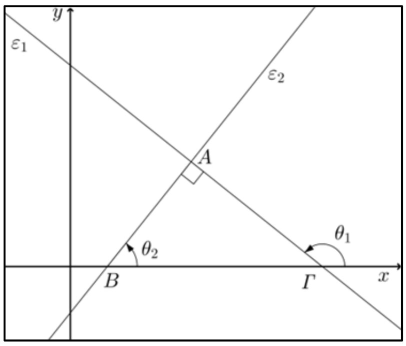
Αφού $0° \leq \gamma\omega\nu(\varepsilon_3, \varepsilon_2) < 180°$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 135°$.

4. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες αν και μόνο αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Λύση:

Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους και σχηματίζουν προσανατολισμένες γωνίες με τον άξονα των τετμημένων θ_1 και θ_2, αντίστοιχα.

Ισχύει: $\theta_1 = 90° + \theta_2$, αφού η θ_1 είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $AB\Gamma$.



Επομένως,

$$\theta_1 = 90^\circ + \theta_2 \overset{\substack{\theta_1,\theta_2 \\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\varepsilon}\varsigma}}{\Longleftrightarrow} \varepsilon\varphi\theta_1 = \varepsilon\varphi(90^\circ + \theta_2) = -\sigma\varphi\theta_2 = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_2}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Αντίστροφα, αν ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, τότε:

$$\varepsilon\varphi\theta_1 \cdot \varepsilon\varphi\theta_2 = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta_1 = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta_2} = -\sigma\varphi\theta_2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta_1 = \varepsilon\varphi(90^\circ + \theta_2)$$

Επιπλέον, αφού $0^\circ < \theta_1 < 180^\circ, 0^\circ < \theta_2 < 180^\circ$, τότε $\theta_1 = 90^\circ + \theta_2$. Επομένως, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

5. Να υπολογίσετε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): (2\mu + 1)x - 3\mu y - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): 3\mu x + (\mu + 2)y + 1 = 0$ να είναι κάθετες.

Λύση:

Οι κλίσεις των ε_1 και ε_2 είναι $\lambda_1 = \frac{2\mu+1}{3\mu}, \mu \neq 0$ και $\lambda_2 = -\frac{3\mu}{\mu+2}$, $\mu \neq -2$ αντίστοιχα.

- ✓ Για $\mu \neq 0$ και $\mu \neq -2$, οι ευθείες είναι κάθετες, όταν ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Επομένως:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{2\mu + 1}{3\mu}\right) \cdot \left(-\frac{3\mu}{\mu + 2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{2\mu + 1}{\mu + 2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

- ✓ Αν $\mu = 0$, οι ευθείες έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: x - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: 2y + 1 = 0$. Επομένως, οι δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

- ✓ Αν $\mu = -2$, οι ευθείες έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: -3x + 6y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: -6x + 1 = 0$. Επομένως, οι δύο ευθείες δεν είναι κάθετες μεταξύ τους.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:
   (α) διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(1,0)$
   (β) διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-2,3)$ και $\Delta(-2,6)$
   (γ) διέρχεται από τα σημεία $E(-4,3)$ και $Z(5,3)$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,2)$ και σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με τον άξονα των τετμημένων.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,5)$ και:
   (α) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$
   (β) σχηματίζει γωνία $135°$ με τον άξονα των τετμημένων
   (γ) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 5x - 2$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:
   (α) διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x + 3y = 1$
   (β) διέρχεται από το σημείο $B(1,0)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $3x - 5y = 10$

5. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες:
   (α) $\varepsilon_1: y = 3x + 1$ και $\varepsilon_2: y = -2x + 1$
   (β) $\varepsilon_1: y = 3x + 1$ και $\varepsilon_2: y = 3$
   (γ) $\varepsilon_1: y = 3x + 1$ και $\varepsilon_2: x = -2$
   (δ) $\varepsilon_1: y = -3x + 1$ και $\varepsilon_2: 2x - y = 6$

6. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(2,7)$ και $\Gamma(2,3)$.
   (α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AB, $A\Gamma$ και $B\Gamma$.
   (β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η καθεμία από τις πιο πάνω ευθείες με τον άξονα των τετμημένων.

7. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1,2)$, $B(4,5)$ και $\Gamma(6,-1)$.

8. Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 4x - 1$ και $(\varepsilon_2): 8y + 2x - 1 = 0$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x + 3y - 2 = 0$.

10. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες:
$(\varepsilon_1): (\kappa+1)x - \kappa y - 4 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2\kappa x + (\kappa+4)y + 1 = 0$ να είναι κάθετες.

11. Να υπολογίσετε την τιμή του α, ώστε η ευθεία $\alpha x - 3y = 10$ να είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x - 1$.

12. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = -2x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \frac{1}{2}x - 4$.
    (α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται κάθετα.
    (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).

13. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1,4)$ και δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = -x + 2$.
    (α) Να υπολογίσετε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.
    (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ.

14. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB, όταν $A(0,9)$ και $B(2,-3)$.

15. Να βρείτε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου H του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν $A(0,3), B(1,0)$ και $\Gamma(2,-2)$.

16. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(2,1)$ και εξισώσεις δύο διαγωνίων του $\delta_1: y = 5x + 3$ και $\delta_2: x - 5y + 3 = 0$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του ορθογωνίου.

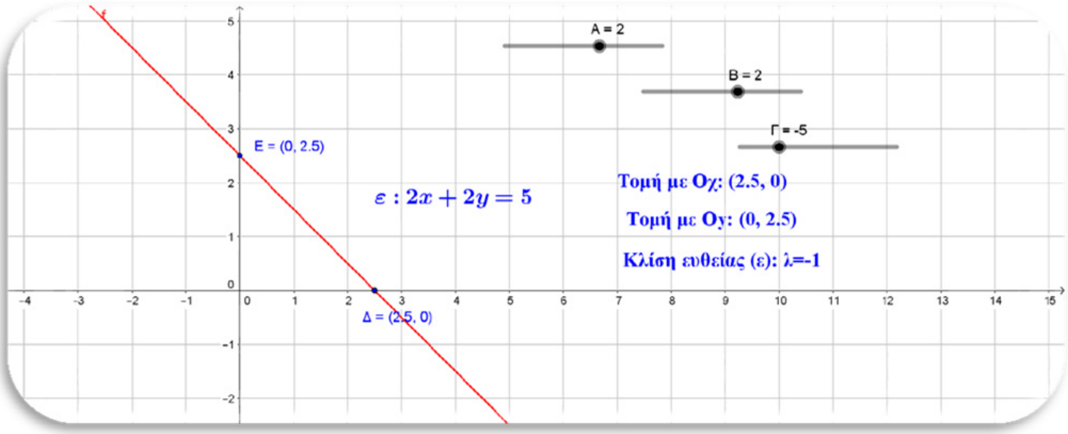
17. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon_1): y = 2x - 1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι:
    (α) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τετμημένων
    (β) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τεταγμένων

18. Δίνεται το σημείο $A(1,4)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 2x + 4y = 3$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του A ως προς την ευθεία (ε).

19. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ παριστάνει την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(5,4)$.

Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας - Δέσμη Ευθειών
Διερεύνηση 1

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_Lyk_Entheto3_GenikiMorfiEutheias.ggb».*



Δίνεται η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$.

(α) Να μεταβάλλετε τους δρομείς A, B, Γ και να παρατηρείτε τις ευθείες που σχηματίζονται.

(β) Να θέσετε τον δρομέα $A = 0$ και να μεταβάλλετε τους δρομείς B και Γ. Τι παρατηρείτε για τη θέση της ευθείας, την κλίση της και τις τομές της με τους δύο άξονες;

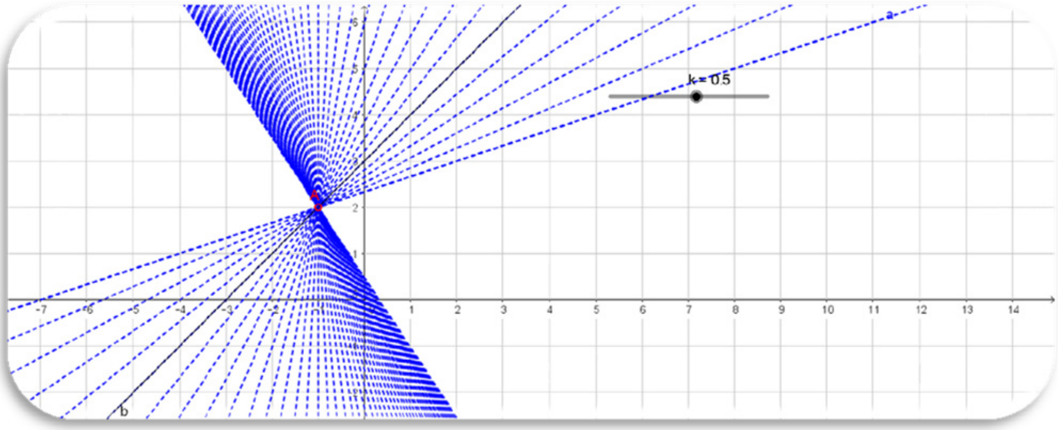
(γ) Ποια τιμή είναι αναγκαία ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη προς τον άξονα των τεταγμένων;

(δ) Για ποιες τιμές των A και B η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, δεν παριστάνει ευθεία;

Διερεύνηση 2

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_Lyk_Entheto3_Desmi.ggb»*.

Δίνεται η παραμετρική εξίσωση ευθείας $(k-1)x+(k+1)y-k-3=0, k \in \mathbb{R}$.



(α) Να επιλέξετε το δρομέα k και να του δώσετε διάφορες τιμές.

(β) Τι παρατηρείτε;

(γ) Να μετασχηματίσετε την εξίσωση της ευθείας στη μορφή $\varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2 = 0$, με ε_1 και ε_2 να είναι αλγεβρικές παραστάσεις συναρτήσει των x και y.

(δ) Ποια σχέση παρουσιάζουν οι ευθείες που έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1 = 0$ και $\varepsilon_2 = 0$ με τη γενική εξίσωση $(k-1)x+(k+1)y-k-3=0, \ k \in \mathbb{R}$;

(ε) Υπάρχει ευθεία από τις πιο πάνω ευθείες που να διέρχεται από το σημείο $B(-2{,}5)$; Ποια είναι η εξίσωσή της;

Μαθαίνω

- Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$:
  - ✓ παριστάνει ευθεία, όταν $A\neq 0$ ή $B\neq 0$
  - ✓ έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $\lambda=-\frac{A}{B}, B\neq 0$
- **Δέσμη ευθειών** ονομάζεται η οικογένεια των ευθειών που έχει την μορφή:

$$\varepsilon_k: A_1x+B_1y+\Gamma_1+k(A_2x+B_2y+\Gamma_2)=0, k\in\mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις:

- ✓ Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $\varepsilon_2: A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ τέμνονται στο σημείο P, τότε έχουμε **δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο $\boldsymbol{P}$**.
- ✓ Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $\varepsilon_2: A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ είναι παράλληλες, τότε έχουμε **δέσμη παράλληλων ευθειών**.
- Αν οι ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $\varepsilon_2: A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ και $\varepsilon_3: A_3x+B_3y+\Gamma_3=0$ έχουν κοινό σημείο **(συντρέχουν),** τότε ισχύει:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}=0$$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε την κλίση της ευθείας $6x+2y+1=0$.

   Λύση:
   Η πιο πάνω εξίσωση είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, με $A\neq 0$ και $B\neq 0$, άρα παριστάνει ευθεία. Επειδή $A=6$ και $B=2$, η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι $\lambda=-\frac{6}{2}=-3$.

2. Δίνεται η δέσμη ευθειών $x+4y-7+k(x-y+3)=0$.

   (α) Να βρείτε το κέντρο της δέσμης.
   (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της πιο πάνω δέσμης που περνά από το σημείο $A(1,2)$.

Λύση:

(α) Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών $x+4y-7=0$ και $x-y+3=0$, βρίσκουμε ότι το σημείο τομής τους είναι το $P(-1,2)$. Άρα, το κέντρο της πιο πάνω δέσμης ευθειών είναι το $P(-1,2)$.

(β) Οι συντεταγμένες του σημείου $A(1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της δέσμης. Έχουμε:

$$1+4\cdot 2-7+k(1-2+3)=0 \Leftrightarrow 2+2k=0 \Leftrightarrow k=-1$$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας της πιο πάνω δέσμης που περνά από το σημείο $A(1,2)$ είναι η:

$$x+4y-7-(x-y+3)=0 \Leftrightarrow 5y-10=0 \Leftrightarrow y=-2$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: 2x + 3y + 4 = 0$, $\varepsilon_2: 3x - 4y + 1 = 0$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x - 1$.

Λύση:

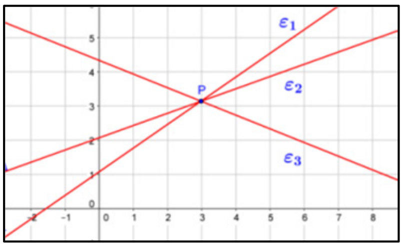
Αφού η ευθεία διέρχεται από το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, τότε ανήκει στη δέσμη ευθειών $2x + 3y + 4 + k(3x - 4y + 1) = 0$.

Η ευθεία γράφεται και ως $(2 + 3k)x + (3 - 4k)y + 4 + k = 0$. Αφού είναι παράλληλη με την $y = x - 1$, τότε:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow -\frac{2 + 3k}{3 - 4k} = 1 \Leftrightarrow 3 - 4k = -2 - 3k \Leftrightarrow k = 5,$$

και επομένως η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι: $17x - 17y + 9 = 0$

4. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = -2x + 6$ και $(\varepsilon_2): 3x - 4y + 12 = 0$.



(α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις τους.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες των συντεταγμένων.

(γ) Να υπολογίσετε το α, ώστε το σημείο A με συντεταγμένες $(\alpha, -2)$ να ανήκει στην ευθεία (ε_2).

Λύση:

(α) Η ευθεία (ε_1) είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Επομένως, έχει κλίση $\lambda = -2$. Η ευθεία (ε_2) είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$. Επομένως, έχει κλίση $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

(β) Ο άξονας των τετμημένων και ο άξονας των τεταγμένων έχουν εξισώσεις $x = 0$ και $y = 0$, αντίστοιχα.

Για το σημείο τομής της ευθείας (ε_2) με τον άξονα των τετμημένων, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της (ε_2) το $y = 0$ και έχουμε:

$$3 \cdot x - 4 \cdot 0 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x = -12 \Leftrightarrow x = -4$$

Έτσι, η τομή της (ε_2) με τον άξονα των τετμημένων είναι το σημείο με συντεταγμένες $(-4{,}0)$.

Για το σημείο τομής της ευθείας (ε_2) με τον άξονα των τεταγμένων, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της (ε_2) το $x = 0$ και έχουμε:

$$3 \cdot 0 - 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow 4y = 12 \Leftrightarrow y = 3$$

Έτσι, η τομή της (ε_2) με τον άξονα των τετμημένων είναι το σημείο με συντεταγμένες $(0, 3)$.

(γ) Το σημείο $A(\alpha, -2)$ ανήκει στην ευθεία (ε_2). Επομένως, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Έχουμε:

$$3 \cdot \alpha - 4 \cdot (-2) + 12 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + 8 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = -20 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{20}{3}$$

5. Να εξηγήσετε τι παριστάνουν οι εξισώσεις:

(α) $x + y + 4 + k(x - y - 8) = 0,\ k \in \mathbb{R}$

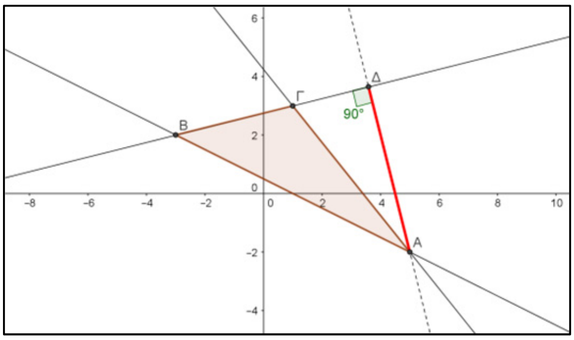
(β) $x + y + 4 + \mu(x + y - 8) = 0,\ \mu \in \mathbb{R}$

Λύση:

(α) Οι κλίσεις των ευθειών $\varepsilon_1: x + y + 4 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y - 8 = 0$ είναι -1 και 1, αντίστοιχα. Άρα, οι ευθείες τέμνονται και λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους βρίσκουμε ότι το σημείο τομής τους είναι το $P(2, -6)$.
Συνεπώς, η εξίσωση $x + y + 4 + k(x - y - 8) = 0,\ k \in \mathbb{R}$ παριστάνει δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο $P(2, -6)$.

(β) Οι κλίσεις των ευθειών $\varepsilon_1: x + y + 4 = 0$ και $\varepsilon_2: x + y - 8 = 0$ είναι 1. Άρα, οι ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους.
Συνεπώς, η εξίσωση $x + y + 4 + k(x + y - 8) = 0,\ k \in \mathbb{R}$ παριστάνει δέσμη παράλληλων ευθειών.

6. Οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:
$AB: x + 2y - 1 = 0$, $\quad A\Gamma: 5x + 4y - 17 = 0$ και $B\Gamma: x - 4y + 11 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $A\Delta$.



Λύση:

1^ος^ τρόπος

Οι συντεταγμένες του σημείου A υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των πλευρών AB και $A\Gamma$, που είναι το $A(5, -2)$. Αφού $A\Delta \perp B\Gamma$, τότε ισχύει:

$$\lambda_{A\Delta} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} \cdot \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} = -4$$

Για να βρούμε την εξίσωση του ύψους $A\Delta$, χρησιμοποιούμε την εξίσωση $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$. Έχουμε:

$$y + 2 = -4 \cdot (x - 5) \Leftrightarrow y + 2 = -4x + 20 \Leftrightarrow 4x + y = 18$$

2ος τρόπος

Το ύψος $ΑΔ$ περνά από το σημείο τομής των ευθειών AB και $ΑΓ$. Επομένως, ανήκει στη δέσμης των ευθειών με κέντρο το A και έτσι έχει εξίσωση:

$$x + 2y - 1 + k(5x + 4y - 17) = 0 \Leftrightarrow (1 + 5k)x + (2 + 4k)y - 1 - 17k = 0, k \in \mathbb{R}$$

Αφού $ΑΔ \perp ΒΓ$, τότε ισχύει:

$$\lambda_{ΑΔ} \cdot \lambda_{ΒΓ} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1 + 5k}{2 + 4k} \cdot \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow 8 + 16k = 1 + 5k \Leftrightarrow k = -\frac{7}{11}$$

και έτσι η εξίσωση $ΑΔ$ είναι:

$$-\frac{24}{11}x - \frac{6}{11}y + \frac{108}{11} = 0 \Leftrightarrow 4x + y = 18$$

7. Δίνεται η εξίσωση: $(1 + 2\lambda)x + (-2 + 3\lambda)y - 3 - 18\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$
   (α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
   (β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες, που σχηματίζονται $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από ένα σταθερό σημείο. Να υπολογίσετε το σημείο αυτό.
   (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται και από το σημείο $A(4,1)$.

Λύση:

(α) Η εξίσωση $(1 + 2\lambda)x + (-2 + 3\lambda)y + 5 - 18\lambda = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή της παραμέτρου λ, γιατί δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να ισχύει $A = 1 + 2\lambda = 0$ και $B = -2 + 3\lambda = 0$ συγχρόνως. Δεν ισχύει κάτι τέτοιο, αφού $\lambda = -\frac{1}{2}$ και $\lambda = \frac{2}{3}$.

(β) Η εξίσωση $(1 + 2\lambda)x + (-2 + 3\lambda)y + 5 - 18\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ γράφεται ισοδύναμα ως $x - 2y + 5 + \lambda(2x + 3y - 18) = 0$ και παριστάνει δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο τομής των ευθειών $x - 2y + 5 = 0$ και $2x + 3y - 18 = 0$.

Το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών $x - 2y + 5 = 0$ και $2x + 3y - 18 = 0$ έχει λύση $x = 3, y = 4$, άρα το κοινό σημείο των δύο ευθειών είναι το $P(3,4)$.

(γ) Από τη δέσμη ευθειών $(1 + 2\lambda)x + (-2 + 3\lambda)y + 5 - 18\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ζητούμε εκείνη την ευθεία που διέρχεται από το $A(4,1)$. Επομένως, ισχύει:

$(1 + 2\lambda) \cdot 4 + (-2 + 3\lambda) \cdot 1 + 5 - 18\lambda = 0 \Leftrightarrow -7\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι η $3x + y - 13 = 0$.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την κλίση των πιο κάτω ευθειών:
   (α) $x - 3y + 2 = 0$
   (β) $y = 8 - x$
   (γ) $y = 4$
   (δ) $x = -1$

2. Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $y = -x + 2$ και (ε_2): $5x - 3y + 7 = 0$.
   (α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις τους.
   (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας (ε_1) με τους άξονες των συντεταγμένων.

3. Η ευθεία με εξίσωση $2x - ay + 8 = 0$ έχει κλίση $\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε την τιμή του a.

4. Οι εξισώσεις $2x - y + 3 = 0$ και $x - 2y + 3 = 0$ είναι οι εξισώσεις των πλευρών AB και $B\Gamma$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, αντίστοιχα. Αν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $E(2,4)$:
   (α) να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
   (β) να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

5. Οι ευθείες με εξισώσεις ε_1: $3x - 4y + 1 = 0$ και ε_2: $2x - y - 1 = 0$ αποτελούν δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου. Αν το σημείο $(6, 6)$ είναι μία από τις κορυφές του παραλληλογράμμου, να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του.

6. Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $\Gamma(-6,3)$ και η εξίσωση μίας διαγωνίου του είναι $y = 7x - 5$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής του A.

7. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1: $5x - 7y = -1$, ε_2: $x + 2y - 10 = 0$ και ε_3: $x + y = 7$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών ε_1: $y = 2x - 7$ και ε_2: $y = 4x - 13$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε_3: $y = -3x + 1$.

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από την τομή των ευθειών $x + 2y - 5 = 0$ και $x - y + 5 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x + 4y + 7 = 0$.

10. Να εξηγήσετε τι παριστάνει η εξίσωση $(2x + y - 7) + \lambda(4x + 2y + 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται το σημείο τομής των ευθειών $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, όπου $A(5, -6)$ και $B(-1, -4)$.

12. Οι πλευρές ενός τριγώνου ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x - y + 1 = 0, \varepsilon_2: x - 2y + 4 = 0$ και $\varepsilon_3: 9x - 3y + 1 = 0$. Να δείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου είναι το σημείο $H(-1,4)$.

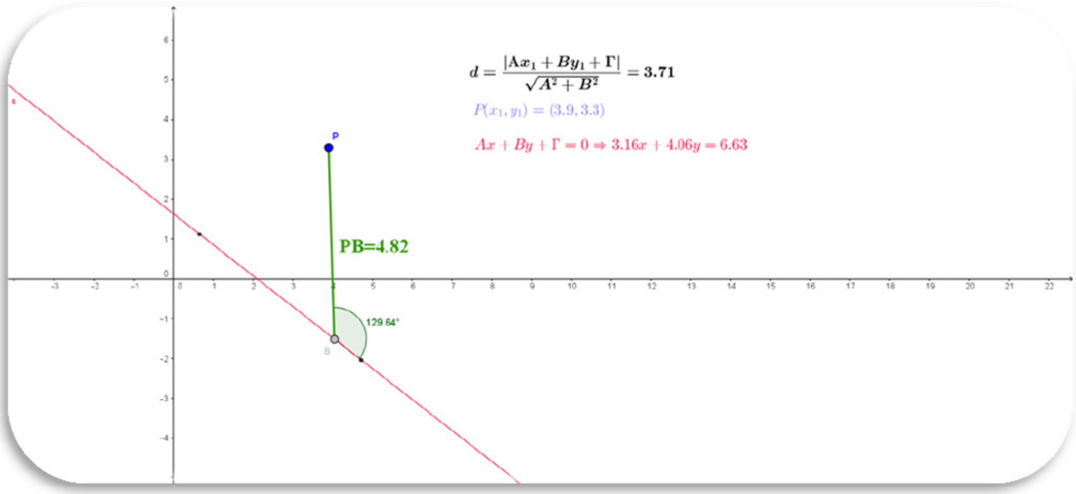
13. Δίνεται η εξίσωση (ε): $(\mu^2 - 1)x + (\mu + 1)y + 2\mu = 0$.
   (α) Να εξετάσετε κατά πόσο η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ.
   (β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε $(\varepsilon) \parallel x'x$.
   (γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε $(\varepsilon) \parallel y'y$.
   (δ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε ευθεία (ε) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

14. Δίνονται τα σημεία $A(-1,1)$,$B(4,-1)$ και $\Gamma(6,4)$.
   (α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $AB\Gamma$ είναι ορθή.
   (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$.
   (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Απόσταση Σημείου από Ευθεία - Εμβαδόν Τριγώνου

Διερεύνηση 1

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_Lyk_Entheto3_ApostasiSimeiou.ggb»*.



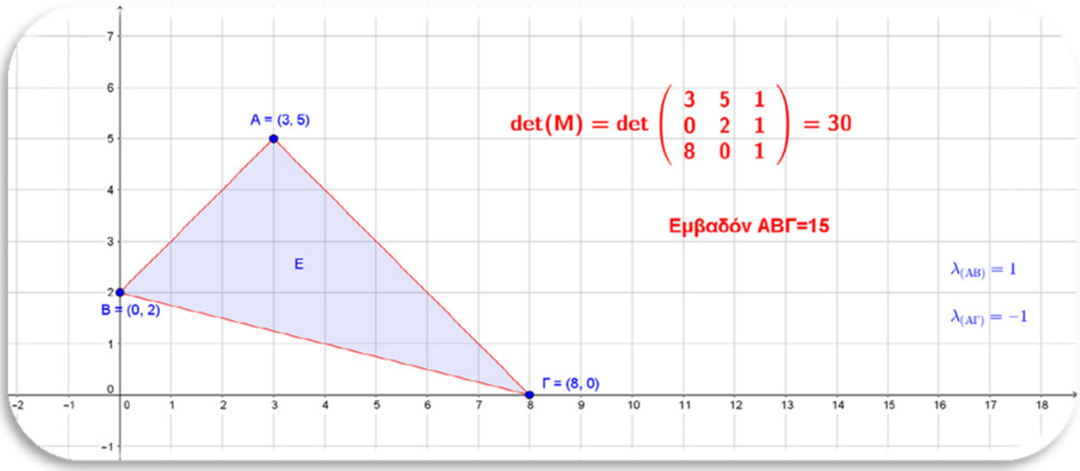
- Να μετακινήσετε το σημείο B σε διάφορες θέσεις και να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:
  (α) Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων P και B;
  (β) Ποια είναι η σχέση της ελάχιστης απόστασης (PB) και της τιμής του d;
  (γ) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται ανάμεσα στο ευθύγραμμο τμήμα PB και στην ευθεία ε στην περίπτωση αυτή;

- Να μετακινήσετε το σημείο P σε διάφορες θέσεις και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία σε κάθε περίπτωση.

- Να μετακινήσετε την ευθεία ε σε διάφορες θέσεις και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία σε κάθε περίπτωση.

Διερεύνηση 2

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_Lyk_Entheto3_EmbadonTrigwnou.ggb»*.



- Να μετακινήσετε την κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ σε διάφορες θέσεις και να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα σε κάθε περίπτωση:

(α) Ποια είναι η σχέση των στοιχείων του πίνακα M με τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $AB\Gamma$;

(β) Ποια είναι η σχέση που συνδέει την τιμή της ορίζουσας του πίνακα M με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$;

(γ) Τι παρατηρείτε όταν το A τοποθετηθεί πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία B και Γ; Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις κλίσεις των AB και $A\Gamma$;

- Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ σε διάφορες θέσεις και να γράψετε τα συμπεράσματά σας.

Μαθαίνω

- Η **απόσταση** $d(P,\varepsilon)$ του σημείου $P(x_1,y_1)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d(P,\varepsilon)=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ειδικότερα, αν $\varepsilon_1: x=\alpha$, τότε $d(P,\varepsilon_1)=|x_1-\alpha|$, ενώ αν $\varepsilon_2: y=\beta$, τότε $d(P,\varepsilon_2)=|y_1-\beta|$.

- Το **εμβαδόν ενός τριγώνου** $AB\Gamma$ με $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E_{AB\Gamma}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|$$

Παρατήρηση: Αν $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ με $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$, έχουμε $E_{AB\Gamma}=0$. Δηλαδή τα σημεία A, B και Γ δεν σχηματίζουν τρίγωνο, άρα είναι συνευθειακά.

- Τα σημεία $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ είναι **συνευθειακά**, αν και μόνο αν

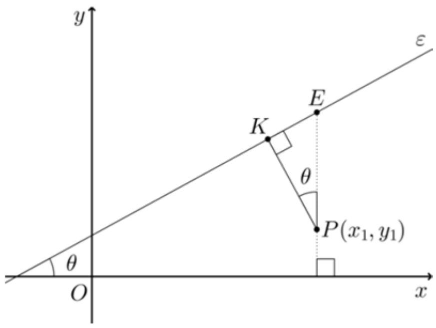
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

Αποδείξεις

- Η **απόσταση** $d(P,\varepsilon)$ του σημείου $P(x_1,y_1)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d(P,\varepsilon)=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Απόδειξη: Από το σημείο $P(x_1,y_1)$ φέρουμε κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ στο σημείο K και κάθετη στον άξονα των τετμημένων που τέμνει την ευθεία στο σημείο E. Από το ορθογώνιο τρίγωνο PKE έχουμε $d(P,\varepsilon)=(PE)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$.



Για το $\sigma\upsilon\nu\theta$ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\tau\varepsilon\mu\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}} = \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Για τις συντεταγμένες του σημείου E, το οποίο είναι το κοινό σημείο των ευθειών $x = x_1$ και $Ax + By + \Gamma = 0$, έχουμε $Ax_1 + By + \Gamma = 0$ και τελικά $y = \frac{-Ax_1-\Gamma}{B}$. Επομένως, οι συντεταγμένες του E είναι $E(x_0, \frac{-Ax_1-\Gamma}{B})$. Για το μήκος του (PE), ισχύει:

$$(PE) = |y_E - y_P| = \left|\frac{-Ax_1-\Gamma}{B} - y_1\right| = \left|\frac{-Ax_1-\Gamma-B\,y_1}{B}\right| = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{|B|}$$

Τελικά, έχουμε:

$$d(P,\varepsilon) = (PE)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{|B|}\cdot\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

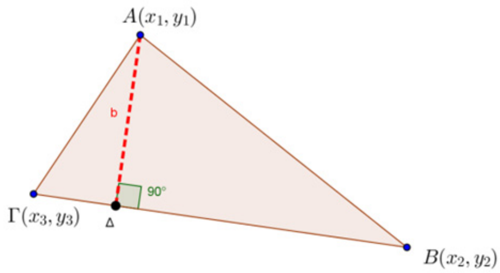
Παρατηρήσεις:

- Στο πιο πάνω σχήμα, η ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων οξεία γωνία θ. Παρόμοια απόδειξη έχουμε στην περίπτωση που η ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων αμβλεία γωνία θ.
- Αν το σημείο $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$, τότε η απόστασή του από την ευθεία θα είναι μηδέν. Αυτό ισχύει, αφού $Ax_1 + By_1 + \Gamma = 0$ και έτσι

$$d(P,\varepsilon) = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Το **εμβαδόν ενός τριγώνου** $AB\Gamma$ με $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$



Απόδειξη: Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2), \Gamma(x_3,y_3)$ και φέρουμε το ύψος $A\Delta$.

Έχουμε: $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}(B\Gamma)(A\Delta)$,

με $(B\Gamma) = \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$.

Η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ είναι:

$y - y_2 = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x - x_2), x_2 \neq x_3 \Leftrightarrow$

$(y_3-y_2)x - (x_3-x_2)y + (y_2x_3 - y_3x_2) = 0$

Για το μήκος του $ΑΔ$ έχουμε:

$$ΑΔ = d(A, ΒΓ) = \frac{|(y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (y_2x_3 - y_3x_2)|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

και

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}(ΒΓ)(ΑΔ) = \frac{1}{2} \cdot (ΒΓ)\frac{|(y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (y_2x_3 - y_3x_2)|}{(ΒΓ)}$$

Επομένως, $E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \cdot |(y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (y_2x_3 - y_3x_2)|$

Παρατηρούμε ότι: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (y_2x_3 - y_3x_2)$

(ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής)

Τελικά, είναι: $E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$

Παραδείγματα

1. Αν $A(1,2), B(5,3), Γ(3,7)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. **Λύση:** Είναι

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \ τ.μ.$$

2. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(2,11)$ από την ευθεία:
   (α) $ε_1 : 6x + 8y - 25 = 0$
   (β) $ε_2 : y = -2$
   Λύση:
   (α) Η απόσταση του σημείου $A(2,11)$ από την ευθεία $ε_1 : 6x + 8y - 25 = 0$ είναι:
   $$d(A, ε_1) = \frac{|6 \cdot 2 + 8 \cdot 11 - 25|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{75}{10} = 7{,}5 \text{ μονάδες}$$
   (β) Η απόσταση του σημείου $A(2,11)$ από την ευθεία $ε_2 : y = -2$ είναι:
   $$d(A, ε_2) = |11 - (-2)| = 13 \text{ μονάδες}$$
   ή
   $$d(A, ε_2) = \frac{|0 \cdot 2 + 1 \cdot 11 + 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{13}{1} = 13 \text{ μονάδες}$$

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ με $A(-5,-2), B(-3,3)$ και $Γ(9,0)$.

Λύση:

Για το τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $A(-5,-2), B(-3,3)$ και $Γ(9,0)$ υπολογίζουμε:

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|-15-24-27| = 33\ τ.μ.$$

4. Δίνονται τα σημεία $A(0,5), B(1,2), Γ(5,6)$ και $Δ(α,-8)$. Να υπολογίσετε:

(α) το μήκος του ύψους $ΑΗ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$

(β) το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$

(γ) την τιμή του $α$, ώστε τα σημεία $Β, Γ$ και $Δ$ να είναι συνευθειακά

Λύση:

(α) Η ευθεία $ΒΓ$ έχει εξίσωση:

$$y-2 = \frac{6-2}{5-1}(x-1) \Leftrightarrow y-2 = x-1 \Leftrightarrow x-y+1=0$$

Το ύψος $ΑΗ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι η απόσταση του σημείου $A(0,5)$ από την ευθεία $x-y+1=0$. Επομένως:

$$(AH) = d(A, ΒΓ) = \frac{|1\cdot 0 - 1\cdot 5 + 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ μονάδες}$$

1ος τρόπος

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}\cdot(ΒΓ)\cdot(ΑΗ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(5-1)^2+(6-2)^2}\cdot 2\sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}\cdot 2\sqrt{2} = 8\ τ.μ.$$

2ος τρόπος

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}\cdot \left| \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\cdot|-5\cdot(-4)+1\cdot(-4)| = 8\ τ.μ.$$

(β) **1ος τρόπος**

Η ευθεία $ΒΓ$ έχει εξίσωση $x-y+1=0$. Για να είναι τα σημεία $Β, Γ$ και $Δ$ συνευθειακά, πρέπει οι συντεταγμένες του σημείο $Δ$ να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $ΒΓ$. Επομένως,

$$α+8+1=0 \Rightarrow α=-9$$

2ος τρόπος

Αν τα σημεία B, Γ και Δ είναι συνευθειακά, τότε ισχύει $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ \alpha & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Επομένως,

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ \alpha & -8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$14 - 2(5 - \alpha) - 40 - 6\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

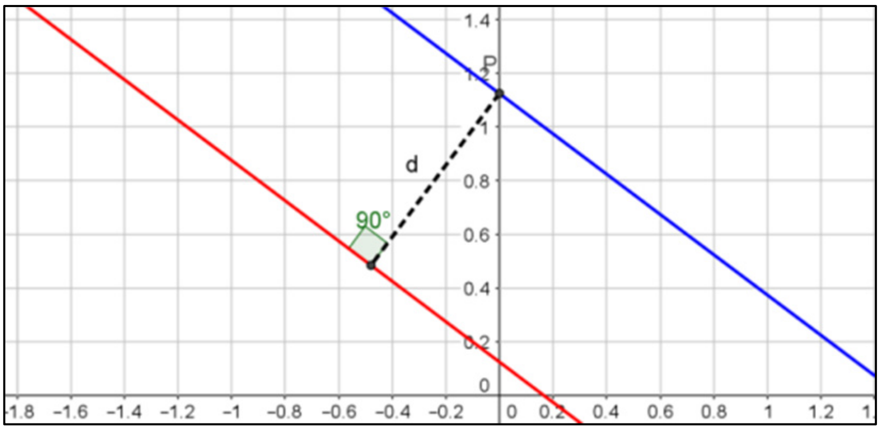
$$14 - 10 + 2\alpha - 40 - 6\alpha = 0 \Leftrightarrow -4\alpha = 36 \Leftrightarrow \alpha = -9$$

3ος τρόπος

Αν τα σημεία B, Γ και Δ είναι συνευθειακά, τότε ισχύει $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{\Gamma\Delta}$. Ισοδύναμα, έχουμε:

$$\frac{6-2}{5-1} = \frac{-8-6}{\alpha - 5} \Leftrightarrow 1 = \frac{-14}{\alpha - 5} \Leftrightarrow \alpha - 5 = -14 \Leftrightarrow \alpha = -9$$

5. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: 6x + 8y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 6x + 8y - 9 = 0$.



Λύση:

Οι ευθείες είναι παράλληλες και έτσι έχει νόημα να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ τους. Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ε_2), έστω το $P(0, \frac{9}{8})$, και στη συνέχεια υπολογίζουμε την $d(P, \varepsilon_1)$.

$$d(P, \varepsilon_1) = \frac{\left|6 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{9}{8} - 1\right|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \text{ μονάδες}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(-3,2)$ από την ευθεία:
   (α) $\varepsilon_1: 4x + 3y - 21 = 0$
   (β) $\varepsilon_2: x = 6$
   (γ) $\varepsilon_3: y = -2$

2. Να υπολογίσετε το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, αν:
   (α) $A(2,3), B(3,10)$ και $\Gamma(7,5)$
   (β) $A(2,3), B(3,10)$ και $\Gamma(8,0)$
   (γ) $A(2,3), B(3,10)$ και $\Gamma(3,-2)$

3. Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(2,6)$ και $\Gamma(4,0)$. Να υπολογίσετε:
   (α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
   (β) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

4. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1,5), B(3,2)$ και $\Gamma(6,-1)$ ορίζουν τρίγωνο. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε:
   (α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
   (β) το μήκος του ύψους $A\Delta$
   (γ) το μήκος της διαμέσου AM

5. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(2,5), B(6,3)$ και $\Gamma(-2,-3)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

6. Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των ευθειών $\varepsilon_1: -6x + 8y = 29$ και $\varepsilon_2: 3x - 4y - 8 = 0$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: x - 3y + 1 = 0$, $\varepsilon_2: 2x + 5y - 9 = 0$ και η απόσταση της αρχής των αξόνων O από την ευθεία αυτή είναι 2 μονάδες.

8. Δύο πλευρές ενός τετραγώνου ανήκουν στις ευθείες $5x - 12y - 13 = 0$ και $5x - 12y - 78 = 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, το οποίο έχει κορυφές τα σημεία $A(0,2), B(2,4), \Gamma(8,1)$ και $\Delta(4,-1)$.

10. Δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\kappa^2)$, $B(\lambda,\lambda^2)$ και $\Gamma(\mu,\mu^2)$, όπου κ,λ και μ τρεις πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι τα A, B και Γ είναι κορυφές τριγώνου και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} -10 & 16 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 100 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (δ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

2. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} \sqrt{10}-2 & 2 \\ 3 & \sqrt{10}+2 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+x & \beta+x \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 100 & 99 & 98 \\ -99 & -98 & -97 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

3. Να αποδείξετε ότι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta+6 & 2 \\ \beta & \alpha+6 & 2 \\ 6 & \alpha+\beta & 2 \end{vmatrix} = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (β) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}$

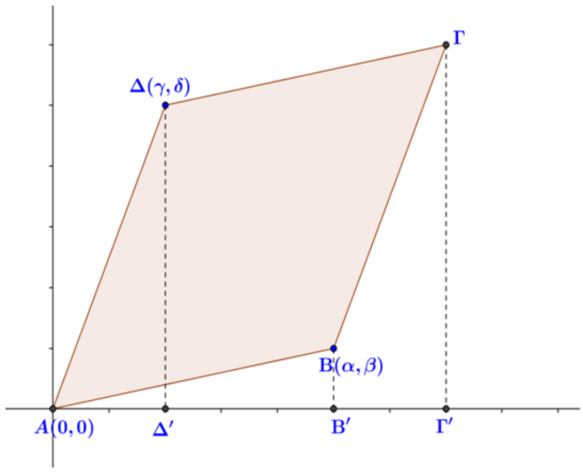
5. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha-\beta \\ \beta & \alpha-\beta \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & x & x \end{vmatrix}$

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ είναι:

$$E = \left| \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right|$$



8. Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης:
   (α) της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(0,4)$ και $B(3,-1)$
   (β) της ευθείας που σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα των τετμημένων

9. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), η οποία σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία θ ίση με:
   (α) 60° (β) 150° (γ) 0° (δ) 90°

10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και:
    (α) έχει συντελεστή διεύθυνσης -3
    (β) είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων
    (γ) είναι παράλληλη με των άξονα των τεταγμένων

11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,6)$ και $B(2,3)$.

12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(-2,5)$.

13. Να γράψετε μία εξίσωση ευθείας που να είναι παράλληλη και μία εξίσωση ευθείας που να είναι κάθετη προς τις ευθείες με εξίσωση:
    (α) $y = -3x + 5$
    (β) $2x + 4y - 3 = 0$

14. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες $\varepsilon_1 \colon y = 2x + 5$ και $\varepsilon_2 \colon y = 3x + 5$.

15. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία $2x + 3y = 12$ με τον άξονα των τεταγμένων.

16. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 \colon 2x + y = 11$, $\varepsilon_2 \colon x + 2y = 13$ και $\varepsilon_3 \colon 5x - 3y = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

17. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1 \colon x + (\lambda + 1)y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 \colon 2x + 4y - 5 = 0$ να τέμνονται. Για ποια τιμή του λ οι ευθείες τέμνονται κάθετα;

18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x-2 & y-7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(2,7)$ και έχει κλίση 5.

19. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κοινό σημείο των ευθειών $3x - 5y - 11 = 0$ και $4x + 3y - 5 = 0$ και:
    (α) είναι παράλληλη προς την ευθεία $2x - 3y + 1 = 0$
    (β) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x + 4y - 5 = 0$
    (γ) διέρχεται και από το σημείο $A(-4,1)$

20. Δίνονται τα σημεία $A(8,3)$ και $B(6,-1)$.
    (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ που βρίσκεται επάνω στον άξονα των τετμημένων, έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου$AB\Gamma$ να είναι ίσο με 7 τ.μ..
    (β) Να υπολογίσετε το ύψος $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

21. Να υπολογίσετε την απόσταση:
    (α) του σημείου $A(-1,2)$ από την ευθεία ε: $-4x + 3y + 20 = 0$
    (β) του σημείου $A(-1,2)$ από την ευθεία ε: $y = 5$
    (γ) του σημείου $A(-1,2)$ από την ευθεία ε: $x = 5$
    (δ) μεταξύ των ευθειών ε_1: $-4x + 3y + 20 = 0$ και ε_2: $4x - 3y + 20 = 0$

22. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ενός οποιουδήποτε σημείου της ευθείας ε: $7x + 4y - 16 = 0$ από τις ευθείες ε_1: $3x - 4y - 4 = 0$ και ε_2: $5x - 12y - 4 = 0$ είναι ίσες. Τι συμπεραίνετε για τη σχέση της ευθείας ε ως προς τις ευθείες ε_1 και ε_2;

23. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-1,0), B(1,4), \Gamma(-3,2)$ και $\Delta(-5,-2)$ είναι κορυφές ρόμβου και στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του.

24. Δίνονται τα σημεία $K(\kappa, 0)$ και $\Lambda(0, \lambda), \kappa, \lambda \neq 0$.
    (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $K\Lambda$.
    (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(\kappa, \lambda)$ και είναι κάθετη στην $K\Lambda$.
    (γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $N(\kappa + \lambda, \kappa + \lambda)$.

25. Να δείξετε ότι η εξίσωση ε_λ: $(\lambda - 1)x + (\lambda - 3)y + 10 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή της παραμέτρου λ και ότι όλες οι ευθείες ε_λ διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο διαφορετικών τετραγωνικών πινάκων 2×2, οι οποίοι να έχουν ίσες ορίζουσες.

2. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta$ (β) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma^2 \\ 0 & \alpha & \beta^2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3$

(α) $\begin{vmatrix} \alpha & 3\alpha & 1 \\ \beta & 3\beta & 2 \\ \gamma & 3\gamma & 3 \end{vmatrix} = 0\,, \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$ (β) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

3. Να αποδείξετε τις ιδιότητες:

(α) $\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} \alpha+\lambda\delta & \beta+\lambda\varepsilon & \gamma+\lambda\zeta \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ x & -1 & 1 \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ (β) $\begin{vmatrix} 3^5 & 0 & 3^5 \\ 3^5 & 3^5 - x & 3^5 \\ 3^5 & 0 & 3^5 - x \end{vmatrix} = 0$

5. Να γράψετε υπό μορφή ορίζουσας 3×3 τις αλγεβρικές παραστάσεις:
(α) $4\beta\kappa + 2\gamma\lambda + 3\alpha\mu - 2\beta\mu - 3\gamma\kappa - 4\alpha\lambda$.
(β) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$

Υπόδειξη: Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ στη μορφή $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + \beta \cdot \beta \cdot \beta + \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει 45° με τον άξονα των τετμημένων και απέχει από το σημείο $A(2,5)$ απόσταση ίση με $3\sqrt{2}$.

7. Δίνεται οι ευθείες με εξισώσεις: $\varepsilon_\lambda: (3-\lambda)x + (2\lambda - 3)y + 4\lambda - 9 = 0$ και $\varepsilon_1: 2x + y = 1$. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:
(α) $\varepsilon_\lambda \parallel Ox$ (β) $\varepsilon_\lambda \parallel Oy$ (γ) $\varepsilon_\lambda \parallel \varepsilon_1$ (δ) $\varepsilon_\lambda \perp \varepsilon_1$

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x - 3y - 9 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες των συντεταγμένων τρίγωνο με εμβαδόν 3 τετραγωνικές μονάδες.

9. Δίνεται τετράγωνο $EZH\Theta$. Οι συντεταγμένες των κορυφών του E και H είναι $(3,4)$ και $(7,5)$, αντίστοιχα. Να βρείτε:
   (α) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του
   (β) την εξίσωση της διαγωνίου του $Z\Theta$
   (γ) τις συντεταγμένες των κορυφών του Z και Θ

10. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες: $\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ \kappa x + (\kappa - 1)y - 2 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases}$

    να συντρέχουν.

11. Να δείξετε ότι το σημείο $M(2\lambda - 1, \lambda + 4)$ ανήκει σε ευθεία $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

12. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των ευθειών $\varepsilon_1: 3x + 4y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 5x - 12y + 10 = 0$.

13. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$. Να αποδείξετε ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$.

14. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$ τέμνονται στο σημείο $A(x_0, y_0)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + \Gamma_2) = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. Η εξίσωση της ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.
    (α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.
    (β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,2), \Lambda(-1,5)$ και $M(1,3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτινών που διέρχονται από τα πλοία K, Λ, M.
    (γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το M.

Ενότητα

5

Στατιστική

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες της Μέσης Τιμής και να τις χρησιμοποιούμε σε προβλήματα.
- Να υπολογίζουμε τον σταθμισμένο Μέσο Όρο.
- Να υπολογίζουμε και να ερμηνεύουμε Μέτρα Διασποράς.

Έχουμε μάθει …

- Να ορίζουμε τη μεταβλητή και να τη διακρίνουμε σε ποιοτική ή ποσοτική.
- Να παρουσιάζουμε και να παριστούμε με κατάλληλα διαγράμματα, στατιστικά δεδομένα.
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε τα τρία βασικά μέτρα θέσης:
  - ✓ Μέση τιμή
  - ✓ Διάμεσος
  - ✓ Επικρατούσα τιμή.

Μέτρα Θέσης και Διασποράς

Διερεύνηση (1)

Οι βαθμοί του Αντρέα σε 4 διαγωνίσματα στα Μαθηματικά ήταν 15,18,18,17. Για τα ίδια διαγωνίσματα, ο Βασίλης είχε πάρει 2 μονάδες περισσότερες **σε κάθε** διαγώνισμα από τον Αντρέα, ο Γιάννης είχε πάρει 4 μονάδες λιγότερες από τον Αντρέα σε κάθε διαγώνισμα, ενώ ο Δημήτρης είχε πάρει σε κάθε διαγώνισμα μία μονάδα περισσότερη από το μισό των βαθμών του Αντρέα.

(α) Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών του κάθε παιδιού.

(β) Να επεξηγήσετε πως εργαστήκατε και να αναφέρετε πώς συνδέονται οι μέσοι όροι της βαθμολογίας των παιδιών.

Διερεύνηση (2)

Ένας καθηγητής θέλει να συγκρίνει τα δύο τμήματά του A' και B' στα οποία διδάσκει Μαθηματικά. Όταν υπολόγισε τα δύο βασικά μέτρα θέσης (μέσο όρο και διάμεσο), δεν ήταν σε θέση να διακρίνει ποιο τμήμα ήταν καλύτερο. Στη συνέχεια, όμως, μπόρεσε παρατηρώντας τους βαθμούς των δύο τμημάτων να πάρει κάποια απόφαση ως προς τα τμήματά του.

Τμήμα A'	**13**	**13**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**18**
Τμήμα B'	**10**	**13**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**16**	**18**	**20**

(α) Μπορεί, κατά τη γνώμη σας, η μέση τιμή από μόνη της να δώσει σαφή εικόνα για την κατανομή των βαθμών;

(β) Ποια παρατήρηση πιθανόν να έκανε ο καθηγητής, για να μπορέσει να πάρει απόφαση ως προς την εικόνα των τμημάτων του;

Μαθαίνω

- Αν $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ είναι ν −παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$, τότε η μέση τιμή $\bar{y}$ των παρατηρήσεων $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ μιας μεταβλητής Y, για τις οποίες ισχύει $y_i = ax_i + \beta, i = 1,2,\dots,\nu,$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\boldsymbol{\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta}$.

- Αν στις παρατηρήσεις $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ δίνεται διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους **συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)** $w_1, w_2, \dots, w_\nu$, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο μέσο (weighted average)** που δίνεται από τον τύπο:
$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \dots + w_\nu}$$

  Παρατήρηση
  Ο απλός μέσος όρος είναι ειδική περίπτωση του σταθμισμένου μέσου με ίσα βάρη $w_1 = w_2 = w_3 \dots = w_\nu = 1$.

- **Μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας** είναι τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής, γύρω από τα κεντρικά μέτρα θέσης.

- Το πιο απλό μέτρο διασποράς είναι το **εύρος των παρατηρήσεων (Range)**. Ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης (x_{min}) από την μέγιστη παρατήρηση (x_{max}). Συμβολίζεται με R και υπολογίζεται πολύ απλά ως:
  "εύρος" $\boldsymbol{= R = x_{max} - x_{min}}$

- **Η διακύμανση ή διασπορά** ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με s^2 και ισχύει:
$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

- Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς λέγεται **τυπική απόκλιση (standard deviation)** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{s}$. Η Τυπική Απόκλιση *πλεονεκτεί* έναντι της διασποράς, γιατί εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης με την οποία εκφράζονται και οι παρατηρήσεις. Η τυπική απόκλιση δίνεται από τον τύπο:
$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{s^2}$$

- Το μέτρο που μας βοηθάει στη σύγκριση ομάδων παρατηρήσεων (με ίδιες ή διαφορετικές μονάδες μέτρησης) που ενδεχομένως να έχουν σημαντικά διαφορετικές τιμές, λέγεται **συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας** (CV) και ισχύει:

$$\boldsymbol{CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}}.$$

- Ο συντελεστής μεταβλητότητας **είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης** και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό.
  Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι **μικρότερος από 10%,** λέγεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν **ομοιογένεια.**
  Ένα δείγμα A έχει **μεγαλύτερη ομοιογένεια** από ένα δείγμα B αν $CV_A < CV_B$

Παραδείγματα

1. Αν $x_1, x_2, , \ldots, x_\nu$ είναι ν τιμές μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$, να **αποδείξετε** ότι η μέση τιμή $\bar{y}$ των παρατηρήσεων $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ μιας μεταβλητής Y, για τις οποίες ισχύει $y_i = a x_i + \beta, i = 1,2, \ldots, \nu$, και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\boldsymbol{\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta}$.

   Λύση:
   $\bar{y} = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_\nu}{\nu} = \frac{(\alpha x_1+\beta)+(\alpha x_2+\beta)+\ldots+(\alpha x_\nu+\beta)}{\nu} =$
   $= \frac{\alpha(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+(\beta+\beta+\ldots+\beta)}{\nu}$
   $= \alpha \cdot \frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} + \frac{\nu\beta}{\nu} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta.$
   Επομένως $\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta$.

2. Αν ο μέσος όρος του μηνιαίου μισθού των υπαλλήλων ενός εργοστασίου πέρυσι ήταν €850 και φέτος σε κάθε υπάλληλο γίνει αύξηση €50,να βρείτε τον νέο μέσο όρο των μισθών.

   Λύση: Ο νέος μέσος όρος των μισθών θα είναι $€850 + €50 = €900$.

3. Στον πιο κάτω πίνακα υπάρχουν οι παρατηρήσεις των μεταβλητών X, Y και Z.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Z	507	607	707	807	907	1007	1107	1207	1307

(α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής X.
(β) Να εκφράσετε τις παρατηρήσεις των μεταβλητών Y και Z συναρτήσει των παρατηρήσεων της μεταβλητής X.
(γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής Y και των παρατηρήσεων της μεταβλητής Z.

Λύση:
(α) $\bar{x} = \frac{1+2+3+\ldots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5.$

(β) $Y = 10X$ και $Z = 100X + 407$.

(γ) $\bar{y} = 10 \cdot \bar{x} = 10 \cdot 5 = 50,\ \bar{z} = 100 \cdot \bar{x} + 407 = 100 \cdot 5 + 407 = 907.$

4. Με τον νέο θεσμό των τετραμήνων στα Λύκεια ο βαθμός σε ένα εξεταζόμενο μάθημα στο τέλος του χρόνου συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των δύο τετραμήνων με βαρύτητα 35% στο κάθε τετράμηνο και 30% στην τελική εξέταση. Αν ένας μαθητής είχε στα Μαθηματικά 13 στο Α’ τετράμηνο, 13 στο Β’ τετράμηνο και στην τελική εξέταση ο βαθμός του ήταν 2, τότε να βρείτε τον τελικό του βαθμό και τον απλό μέσο όρο των βαθμών του.

Λύση: Ο τελικός του βαθμός θα είναι

$$\bar{x} = \frac{0{,}35 \times 13 + 0{,}35 \times 13 + 0{,}30 \times 2}{0{,}35 + 0{,}35 + 0{,}3} = 9{,}70$$

Ο απλός μέσος όρος (χωρίς βαρύτητα) θα ήταν $\bar{x} = \dfrac{13 + 13 + 2}{3} = 9{,}33$.

5. Να βρείτε τη διακύμανση και την Τυπική Απόκλιση των δεδομένων του πίνακα.

$Αριθμός\ Παιδιών\ x_i$	$Οικογένειες\ f_i$
0	5
1	10
2	7
3	4
4	3
5	2
6	1
$ΣΥΝΟΛΟ$	**32**

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{32} = \frac{64}{32} = 2$$

Η διακύμανση s^2, ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των μεταβλητών από τον μέσο όρο, υπολογίζεται:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

$$s^2 = \tfrac{1}{32} \cdot [\, (0-2)^2 \cdot 5 + (1-2)^2 \cdot 10 + (2-2)^2 \cdot 7 + (3-2)^2 \cdot 4 + (4-2)^2 \cdot 3 +$$

$$(5-2)^2 \cdot 4 + (6-2)^2 \cdot 1] =$$

$$\frac{20 + 10 + 0 + 4 + 12 + 16 + 16}{32} = \frac{78}{32} \approx 2{,}44$$

Η Τυπική Απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{(2{,}44)^2} \approx 1{,}56$.

Τα πιο πάνω αποτελέσματα μπορούν να γίνουν και με τη βοήθεια ενός πίνακα.

$Αριθμός\ Παιδιών\ x_i$	$Οικογένειες\ f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
0	5	$(0-2)^2 \cdot 5$
1	10	$(1-2)^2 \cdot 10$
2	7	$(2-2)^2 \cdot 7$
3	4	$(3-2)^2 \cdot 4$
4	3	$(4-2)^2 \cdot 3$
5	2	$(5-2)^2 \cdot 2$
6	1	$(6-2)^2 \cdot 1$
$ΣΥΝΟΛΟ$	**32**	**80**

Άρα, $s^2 = \frac{78}{32} \approx 2{,}44$ και $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{(2{,}44)^2} \approx 1{,}56$.

6. Ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας Α είναι $\overline{x_A} = €2200$ και η αντίστοιχη Τυπική Απόκλιση είναι $s_A = €270$, ενώ ο μέσος μισθός μιας εταιρείας B είναι $\overline{x_B} = €1100$ και η αντίστοιχη Τυπική Απόκλιση είναι $s_B = €220$. Σε ποια από τις δύο εταιρείες υπάρχει ομοιογένεια μισθών;

Λύση:

Υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας των μισθών για κάθε εταιρεία $CV_A = \frac{s_A}{|\overline{x_A}|} = \frac{270}{2200} = 12{,}2\%$,$CV_B = \frac{s_B}{|\overline{x_B}|} = \frac{220}{1100} = 20\%$.

Παρατηρούμε ότι αν και η Τυπική Απόκλιση μισθών στην εταιρεία A είναι μεγαλύτερη από την Τυπική Απόκλιση μισθών στην εταιρεία B, ο συντελεστής μεταβλητότητας στην εταιρεία A είναι μικρότερος. Αυτό μάς δείχνει ότι στην εταιρεία A υπάρχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών από ότι στην εταιρεία B.

Δραστηριότητες

1. Να διακρίνετε ποια από τα ακόλουθα είναι μέτρα θέσης ή μέτρα διασποράς: διάμεσος, εύρος, διακύμανση, μέση τιμή, επικρατούσα τιμή, τυπική απόκλιση και σταθμισμένος μέσος.

2. Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: $8, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 9, 10, 10, 15, 13, 14, 17$. Να υπολογίσετε:
   (α) τα τρία βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσο, επικρατούσα τιμή)
   (β) το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής

3. Αν η τιμή 12 έχει βαρύτητα 0,2, η τιμή 14 έχει βαρύτητα 0,3 και η τιμή 17 έχει βαρύτητα 0,5, να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πιο πάνω τιμών.

4. Η μέση επίδοση στο μάθημα των Μαθηματικών 17 αγοριών και 13 κοριτσιών μιας τάξης είναι 16,8. Η μέση επίδοση των κοριτσιών είναι 15,6. Να βρείτε τη μέση επίδοση των αγοριών.

5. Ένας φοιτητής πήρε σε 5 διαφορετικά μαθήματα για το πρώτο εξάμηνο τους βαθμούς $7, 8, 9, 10$ και 6. Ποια θα είναι η τελική του βαθμολογία, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος, που είναι αντίστοιχα $2, 3, 1, 4$ και 5;

6. Τα μήκη 5 διαφορετικών τιμών x σε mm είναι: $210, 220, 230, 240$ $και$ 250
   (α) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηκών x.
   (β) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηκών y, z, ω, αν $y = \frac{x}{10}$, $z = x - 200$ και $\omega = \frac{x-200}{10}$.

7. Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με ν παρατηρήσεις είναι ίση με μηδέν. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τις παρατηρήσεις;

8. Στις τρεις πιο κάτω λίστες δεδομένων ο Μέσος Όρος είναι ο αριθμός 50. Χωρίς να κάνετε τις σχετικές πράξεις, να αναφέρετε σε ποια από τις τρεις λίστες υπάρχει η μικρότερη και σε ποια η μεγαλύτερη διασπορά των παρατηρήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$Λίστα1$	0	20	40	50	60	80	100
$Λίστα2$	0	48	49	50	51	52	100
$Λίστα3$	0	1	2	50	98	99	100

9. Η μέση τιμή 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 7,5. Να υπολογίσετε την τυπική τους απόκλιση.

10. Η μέση τιμή ηλικίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 32 χρόνια. Ποια θα είναι η μέση τιμή ηλικίας των ίδιων υπαλλήλων ύστερα από τρία χρόνια;

11. Για τον τελικό βαθμό, στο μάθημα της Στατιστικής, ένας φοιτητής βαθμολογείται με 10% για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 40% για ενδιάμεση εξέταση και με 50% για την τελική εξέταση. Ποιος θα είναι ο τελικός βαθμός ενός φοιτητή που βαθμολογήθηκε με 87 από τα 100 για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 72 από τα 100 στην ενδιάμεση εξέταση και με 47 από τα 100 στην τελική εξέταση;

12. Αν σε ένα δείγμα ο μέσος όρος είναι $\bar{x} = 15$ και ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV = 20\%$, να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση του δείγματος.

13. Αν στον διπλανό πίνακα η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 7{,}5$,
    (α) να συμπληρώσετε τον πίνακα και να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των τιμών
    (β) να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας

$Τιμές\ x_i$	$Συχνότητα\ f_i$
5	3
6	5
7	12
8	9
9	…
10	3
$ΣΥΝΟΛΟ$	

14. Από ένα δείγμα 30 μαθητών της Β΄ Γυμνασίου ο μέσος όρος του βάρους τους ήταν $\overline{x_1} = 48Kg$ με τυπική απόκλιση $s_1 = 7Kg$, ενώ από ένα δεύτερο δείγμα 40 μαθητών Γ΄ Λυκείου ο μέσος όρος του βάρους τους ήταν $\overline{x_2} = 76Kg$ με τυπική απόκλιση $s_2 = 7Kg$. Να εξετάσετε κατά πόσον τα δύο δείγματα έχουν τον ίδιο ή διαφορετικό συντελεστή μεταβλητότητας.

15. Σε ένα διαγώνισμα η μέση τιμή της βαθμολογίας για το τμήμα A' ήταν 16,5 και η τυπική απόκλιση 3,2.
    (α) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβλητότητας.
    (β) Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των βαθμών του τμήματος A' με τους αντίστοιχους βαθμούς του τμήματος B' που είχε τον ίδιο μέσο όρο, αλλά η τυπική απόκλισή του ήταν 1,5.

16. Αν σε μία τάξη, ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_1αγοριών είναι $\bar{x}$ και ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_2κοριτσιών είναι $\bar{y}$,
    (α) να αποδείξετε ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας όλων των παιδιών της τάξης είναι $\frac{\nu_1 \cdot \bar{x} + \nu_2 \cdot \bar{y}}{\nu_1 + \nu_2}$
    (β) Να βρείτε το μέσο όρο της βαθμολογίας μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στο μάθημα των Μαθηματικών, αν τα 11 κορίτσια είχαν μέσο όρο 16,7 και τα 9 αγόρια είχαν μέσο όρο 13,7.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις.

   (α) Ο μέσος όρος και η διάμεσος των τιμών $1,2,3,4,5,6,7$ συμπίπτουν.

   (β) Η τυπική απόκλιση σε ένα δείγμα με ν παρατηρήσεις αλλάζει όταν σε κάθε τιμή προσθέσουμε 2 μονάδες.

   (γ) Αν $\bar{x} = 4$ και $C.V = 50\%$, τότε η τυπική απόκλιση είναι 2.

   (δ) Η διάμεσος 11 διαφορετικών παρατηρήσεων αλλάζει, αν αφαιρέσουμε την μεγαλύτερη και την μικρότερη παρατήρηση.

   (ε) Αν η κάθε παρατήρηση μιας μεταβλητής X πολλαπλασιασθεί επί 5, τότε και η νέα μέση τιμή θα πολλαπλασιασθεί επί 5.

   (στ) Αν η κάθε παρατήρηση μιας μεταβλητής X πολλαπλασιασθεί επί 5, τότε και η νέα διασπορά θα πολλαπλασιασθεί επί 5.

2. Αν η μέση τιμή σε ένα δείγμα των παρατηρήσεων $5, 8, 9, \alpha$ και 16 είναι 10, να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση στο δείγμα.

3. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση σε εξέταση ενός μαθήματος σε Παγκύπριες εξετάσεις είναι $10{,}5$ και $3{,}8$ αντίστοιχα. Έχει αποφασιστεί να δοθούν σε όλους τους μαθητές 2 επιπλέον μονάδες, γιατί είχε δοθεί μία άσκηση με λανθασμένα δεδομένα, που δεν μπορούσε να λυθεί και είχαν βαθμολογηθεί όλοι με μηδέν. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η νέα Μέση Τιμή θα είναι 12,5 και η Τυπική Απόκλιση στο μάθημα θα παραμείνει η ίδια. Να εξετάσετε κατά πόσο, είναι ορθός ο ισχυρισμός του μαθητή.

4. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $80Km/h$ από την πόλη A στην πόλη B και επιστρέφει από την πόλη B στην πόλη A με σταθερή ταχύτητα $120Km/h$. Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου για όλη τη διαδρομή.

5. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες συχνότητές τους. Από τον πίνακα απουσιάζουν η 2η και η 3η συχνότητα.

$Τιμές\ x_i$	$Συχνότητα\ f_i$
7	16
8	;
9	;
10	26
$\boldsymbol{ΣΥΝΟΛΟ}$	**100**

   (α) Να προσδιορίσετε τις τιμές των συχνοτήτων που απουσιάζουν, αν $\bar{x} = 8{,}63$.

   (β) Να υπολογίσετε την Τυπική Απόκλιση.

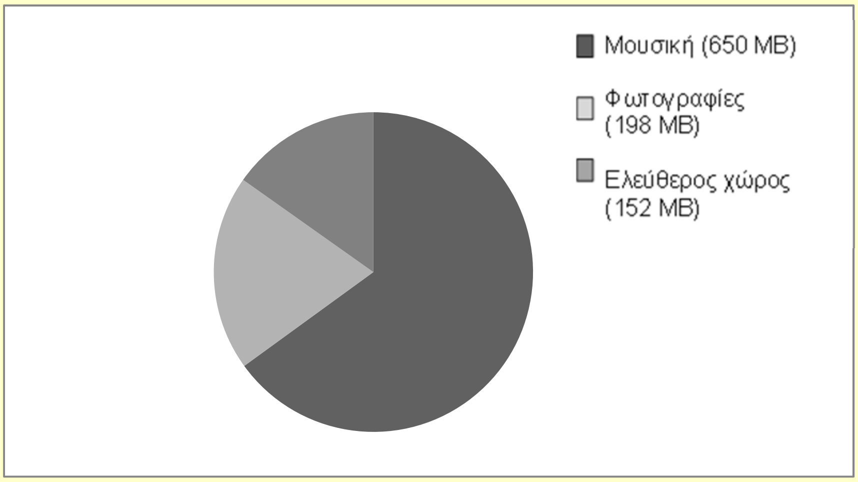
6. Σε ένα Λύκειο υπάρχουν 500 μαθητές. Η A' τάξη του Λυκείου έχει 200 μαθητές με Μέσο Όρο ηλικίας 15,7 χρόνια, ενώ η B' τάξη έχει 180 μαθητές με Μέσο Όρο ηλικίας 16,9 χρόνια. Οι υπόλοιποι μαθητές της Γ΄ Λυκείου έχουν Μέσο Όρο ηλικίας 17,7 χρόνια. Να υπολογίσετε τον Μέσο Όρο ηλικίας όλων των μαθητών του σχολείου.

7. Αν $x_1, x_2, , \dots, x_\nu$ είναι ν-παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και Τυπική Απόκλιση s_x και $\kappa > 0$ είναι μια σταθερά, να βρείτε τον Μέσο Όρο και την Τυπική Απόκλιση των παρατηρήσεων $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ συναρτήσει των s_x και κ και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα, όταν:
   (α) $y_1 = x_1 + \kappa, y_2 = x_2 + \kappa, \dots\ , y_\nu = x_\nu + \kappa$
   (β) $y_1 = x_1 - \kappa, y_2 = x_2 - \kappa, \dots\ , y_\nu = x_\nu - \kappa$
   (γ) $y_1 = x_1 \cdot \kappa,\ y_2 = x_2 \cdot \kappa, \dots\ ,\ y_\nu = x_\nu \cdot \kappa$

Λύση Προβλήματος

ΡΑΒΔΟΣ ΜΝΗΜΗΣ

Η ράβδος μνήμης (USB Stick) είναι μια μικρή, φορητή, ηλεκτρονική συσκευή αποθήκευσης δεδομένων. Ο Ιωάννης έχει μια ράβδο μνήμης στην οποία αποθηκεύει αρχεία μουσικής και φωτογραφίες. Η ράβδος μνήμης έχει χωρητικότητα $1\ GB\ (1000\ MB)$. Στο πιο κάτω γράφημα, παρουσιάζεται η κατανομή της χωρητικότητας της ράβδου μνήμης του Ιωάννη.



Ερώτηση 1: Ο Ιωάννης θέλει να μεταφέρει στη ράβδο μνήμης ένα άλμπουμ με φωτογραφίες χωρητικότητας 350 MB, αλλά δεν υπάρχει αρκετός ελεύθερος χώρος στη ράβδο μνήμης. Παρόλο που δεν θέλει να διαγράψει κανένα από τα άλμπουμ με τις φωτογραφίες που ήδη υπάρχουν, εντούτοις είναι πρόθυμος να διαγράψει μέχρι και δύο άλμπουμ μουσικής. Το μέγεθος των άλμπουμ μουσικής στη ράβδο μνήμης του Ιωάννη είναι:

Άλμπουμ	Μέγεθος
Άλμπουμ 1	100 MB
Άλμπουμ 2	75 MB
Άλμπουμ 3	80 MB
Άλμπουμ 4	55 MB
Άλμπουμ 5	60 MB
Άλμπουμ 6	80 MB
Άλμπουμ 7	75 MB
Άλμπουμ 8	125 MB

Διαγράφοντας το πολύ δύο άλμπουμ μουσικής, είναι δυνατόν ο Ιωάννης να έχει αρκετό ελεύθερο χώρο στη ράβδο μνήμης του, ώστε να μπορεί να προσθέσει το άλμπουμ με τις φωτογραφίες; Να βάλεις σε κύκλο "Ναι" ή "Όχι" και να υποστηρίξεις την απάντησή σου, δείχνοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς.

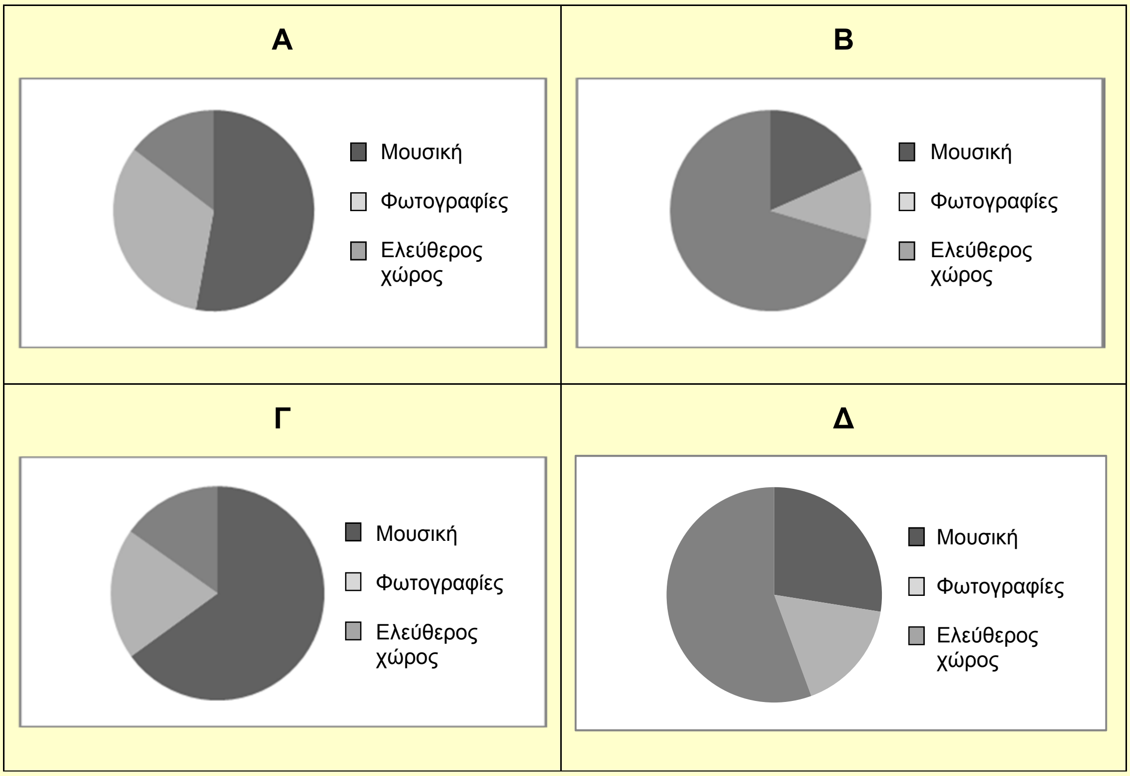
Απάντηση: Ναι / Όχι

Ερώτηση 2: Κατά τη διάρκεια των επόμενων εβδομάδων, ο Ιωάννης διαγράφει κάποιες φωτογραφίες και κάποια από τα αρχεία μουσικής, αλλά ταυτόχρονα προσθέτει καινούρια αρχεία φωτογραφιών και μουσικής. Η νέα κατάσταση χωρητικότητας της ράβδου μνήμης παρουσιάζεται στον πιο κάτω πίνακα:

Μουσική	550 MB
Φωτογραφίες	338 MB
Ελεύθερος χώρος	112 MB

Ο αδερφός του Ιωάννη του έδωσε μια καινούρια ράβδο μνήμης χωρητικότητας $2GB$ $(2000\ MB)$, η οποία είναι εντελώς άδεια. Έτσι, ο Ιωάννης μετέφερε το περιεχόμενο της παλιάς ράβδου μνήμης στην καινούρια.

Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα αναπαριστά την κατανομή της χωρητικότητας της καινούριας ράβδου μνήμης; Να βάλεις σε κύκλο Α, Β, Γ ή Δ.


Α
Μουσική
Φωτογραφίες
Ελεύθερος χώρος
Β
Μουσική
Φωτογραφίες
Ελεύθερος χώρος
Γ
Μουσική
Φωτογραφίες
Ελεύθερος χώρος
Δ
Μουσική
Φωτογραφίες
Ελεύθερος χώρος

PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να αποδείξετε ότι η Τυπική Απόκλιση πέντε διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι $\sqrt{2}$.

2. Η μέση τιμή 22 παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X είναι 64. Διαπιστώθηκε ότι οι μισές παρατηρήσεις είχαν υπερεκτιμηθεί κατά 6 μονάδες η καθεμιά και ότι δέκα από τις υπόλοιπες παρατηρήσεις είχαν υποεκτιμηθεί κατά 11 μονάδες η καθεμιά. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων με τα ορθά δεδομένα.

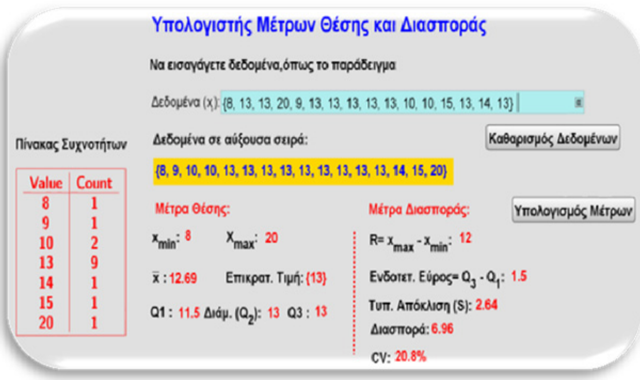
3. Σε ένα δείγμα 5 παρατηρήσεων το άθροισμα τους είναι 30 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 200. Να υπολογίσετε τη Μέση Τιμή και την Τυπική Απόκλιση του δείγματος.

4. Να αποδείξετε ο τύπος $s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$, που δίνει τη Διασπορά για ν παρατηρήσεις σε ένα δείγμα μπορεί να γραφεί και ως $s^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_\nu^2}{\nu} - (\bar{x})^2$.

5. Ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X έχει μέση τιμή $\bar{x} = 15$ και διασπορά $s_x^2 = 16$. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά ενός δείγματος μιας άλλης μεταβλητής Y , αν σε κάθε παρατήρηση της y_i ισχύει $y_i = 3x_i + 10\,, i = 1,2,\ldots,\nu$.

6. Η μέση τιμή 5 παρατηρήσεων είναι 4 και η διασπορά τους είναι 10. Αν για τις 4 παρατηρήσεις ισχύει $(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2 = 14$, να υπολογίσετε την 5η παρατήρηση x_5.

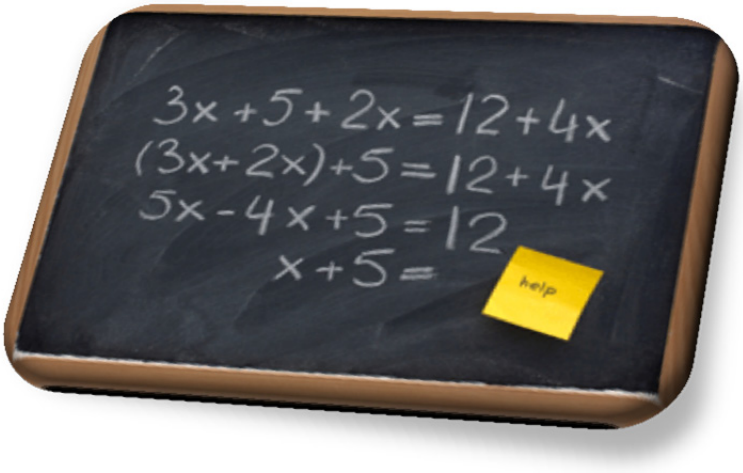
7. Να ανοίξετε το αρχείο *«ALykEn08_YpologistisStat.ggb»*. Να συμπληρώσετε τους βαθμούς για κάθε τμήμα στην κατάλληλη θέση (Δεδομένα (x)) και στη συνέχεια να πατήσετε το κουμπί (Υπολογισμός μέτρων), για να πάρετε όλα τα μέτρα θέσης και διασποράς. Να συγκρίνετε τα δύο τμήματα.



Τμήμα A'	**13**	**13**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**18**
Τμήμα B'	**10**	**13**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**16**	**18**	**20**

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Α΄ τεύχους



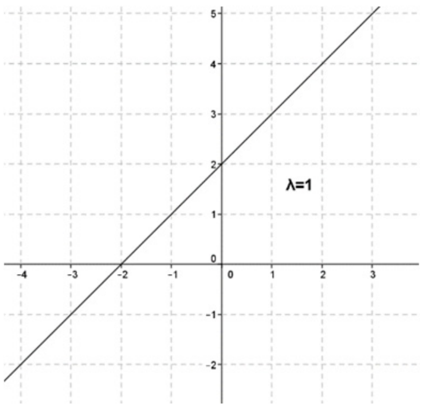
Επανάληψη

Σελίδα 8

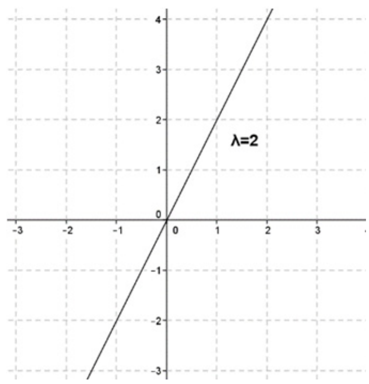
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$AB = 5, A\Gamma = 5, B\Gamma = 5\sqrt{2}$
2.	$\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{8}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{29}, \sqrt{29}$
3.	30 καθίσματα
4.	$10\pi\ m, 25\pi\ m^2$
5.	(α) $x = -2$ (β) $x = 7$ (γ) Αδύνατη (δ) Αόριστη
6.	(α) $\lambda = 3$ (β) $\lambda = -9$
7.	(α) $\alpha = -3$ (β) $\alpha = 6$
8.	$A: x \geq \frac{2}{3}$ $B: x \leq 4$
9.	(α) $x \geq 1,\ x < 5$ (β) $1 \leq x < 5$ (γ) $x = 1$ (δ) π.χ. $1,\ \frac{7}{3},\ 3,\ 4,\ 98$ (ε) $x = 4$

10.

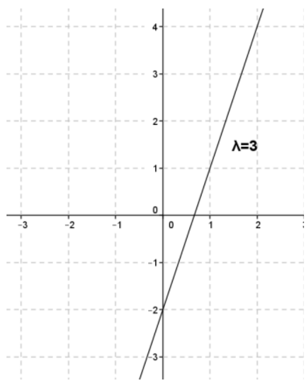
(α)



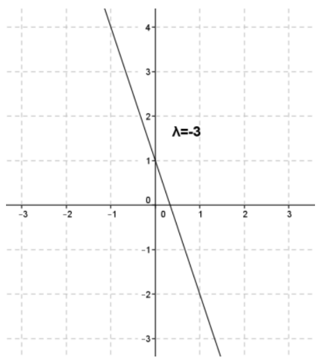
(β)



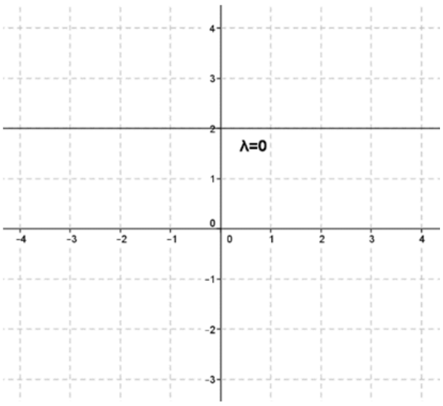
(γ)

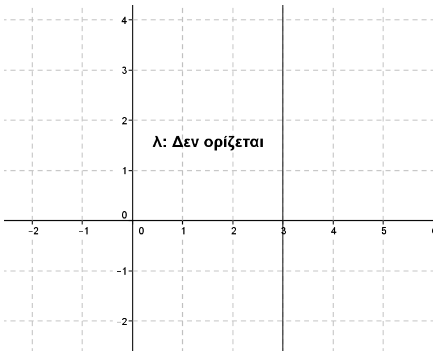


(δ)



(ε) (στ)





11.	(α) $\alpha = -3$	(β) π.χ. $(-2,6)$, $(0,0)$
12.	$\beta = 2$	
13.	(α) $y = \frac{3x}{2} + 1$	(β) $y = 4$
14.	(α) $x = 0, y = 3$	(β) $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{2}$
15.	$(-1,-2)$	
16.	(α) $x^2 + 4x + 4$ (β) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ (γ) $\frac{x^2}{4} - 2x + 4$	(δ) $x^2 - 9$ (ε) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ (στ) $4x^2 - 1$
19.	(α) $2x(x+1)(x-1)$ (β) $(y-5-x)(y-5+x)$ (γ) $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(x+1)(x^2-x+1)$ (δ) $-5y(2x+y)$	
20.	(α) $x = 0$ ή $x = 5$ (β) $x = -3$ ή $x = 2$	(γ) $\alpha = -3$ ή $\alpha = 1$ (δ) $x = 1$ ή $x = \frac{2}{3}$
21.	(α) $\frac{x}{x+1}$	(β) $\frac{\alpha-4}{\alpha}$
22.	(α) $x = 1$, απορρίπτεται (β) $x = -3$ απορρίπτεται, $x = -2$ (γ) $x = -3$ απορρίπτεται, $x = 3$	
23.	8,9	
26.	(α) $\sigma\upsilon\nu A = \frac{4}{5}$	(β) $\eta\mu\Gamma = \frac{4}{5}$
27.	$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{5}$, $\varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$	
28.	$12{,}30\ m$	
29.	(α) $x = 12{,}99\ cm$, $y = 10{,}24\ cm$ (β) $x = 79{,}67\ cm$, $y = 46\ cm$	

Πραγματικοί Αριθμοί

Σελίδα 23 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) 2 (β) 3	(γ) 12 (δ) a	(ε) $\sqrt{x}$ (στ) $\sqrt{x}$
2.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ	(δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΛΑΘΟΣ (στ) ΛΑΘΟΣ	(ζ) ΣΩΣΤΟ (η) ΛΑΘΟΣ
3.	(α) $3\cdot\sqrt[3]{2}$ (β) $2a\cdot\sqrt{2a}$	(γ) $x\cdot\sqrt[4]{x}$ (δ) $2\alpha\cdot\sqrt[3]{2\alpha}$	(ε) $x\cdot\sqrt[6]{x}$ (στ) $x\cdot\sqrt[5]{x}$
4.	(α) Δ (β) A		
5.	(α) 1 (β) $\frac{13+\sqrt{3}}{3}$	(γ) 5 (δ) $8\cdot\sqrt{5}$	
6.	(α) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ (β) $\sqrt[3]{4}$ (γ) $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	(δ) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (ε) $\sqrt{a}+1$	
7.	2401		
10.	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$		
13.	(α) -6 (β) 12	(γ) $-4, 4$ (δ) Αδύνατη στο $\mathbb{R}$	
14.	(α) $5, 5$ (β) -2	(γ) $-3, 0, 3$ (δ) $2, 8$	(ε) -6

Σελίδα 28 Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) 2 (β) 64 (γ) 32	(δ) 5 (ε) 16 (στ) $\frac{729}{512}$	(ζ) $\frac{4}{9}$ (η) 1 (θ) 32
2.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ	(ε) ΛΑΘΟΣ (στ) ΣΩΣΤΟ (ζ) ΛΑΘΟΣ
3.	(α) 1 (β) 5 (γ) 1	(δ) $\frac{1}{9}$ (ε) $\frac{9}{16x^4}$ (στ) $\frac{8x^3y^3}{27}$	(ζ) $4\alpha-\beta$ (η) 8α
4.	(α) $9\cdot\sqrt[3]{9}$ (β) 256	(γ) 1 (δ) 1	(ε) $\frac{31}{3}$ (στ) 13
5.	$16\ sec$		

Σελίδα 37 Ιδιότητες Διάταξης Πραγματικών Αριθμών

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ	(δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ	(ζ) ΛΑΘΟΣ (η) ΣΩΣΤΟ (θ) ΛΑΘΟΣ (ι) ΣΩΣΤΟ
2.	(α) $Δ$ (β) $Δ$	(γ) $Α$ (δ) $Δ$	
3.	(α) $>$ (β) $<$	(γ) $>$ (δ) $>$	(ε) $<$
4.	$Δ$		
5.	(α) $A < B$ (β) $Γ > Δ$	(γ) $E < Z$ (δ) $H > Θ$	(ε) $K > Λ$
7.	$\frac{x}{y}, 1, \frac{y}{x}$		
11.	$-4 < 2x + 3y < 1$ $-4 < xy < -1$	$-2 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} < \frac{-2x}{3y} < \frac{4}{3}$	
12.	$103{,}60 \leq Π \leq 104{,}40$	$634{,}81 \leq E \leq 645{,}21$	
13.	(α) Π.χ. αν $2 < 3$ και $-1 < 0$ δεν ισχύει: $2 - (-1) < 3 - 0$ (β) Π.χ. αν $2 < 3$ και $-3 < -1$ δεν ισχύει: $\frac{2}{-3} < \frac{3}{-1}$		
15.	$6 - \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{30}$		

Σελίδα 40 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) $13 - 6\sqrt{3}$	(β) $8 - 2\sqrt{3}$	
2.	$12\sqrt{2}$		
3.	(α) $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$	(β) $5 + \sqrt{3} > 3 + \sqrt{5}$	(γ) $\sqrt{10 + 2\sqrt{15}} > \sqrt{5} + \sqrt{3}$
4.	(α) 27	(β) Αδύνατη	(γ) -22
5.	(α) $6\sqrt{7} - 6\sqrt{5}$	(β) $\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}$	(γ) $\frac{\sqrt[10]{x^7}}{x}$
6.	$\frac{1}{8} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$, $-9 < -\frac{36}{x+1} < -\frac{9}{2}$		
7.	(β) $14 < 2x + 4y < 24$		
8.	(β) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{6}$		
9.	(β) $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}$		
11.	$γ < β < α$		
12.	$3α - 4γ > 3β - 4γ$		

13.	(β) $2^{3012}, 0$
15.	$x = -11, y = 3, z = 2$

Σελίδα 43 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	$A = \begin{cases} -5x + 6 - 3(x+3)\sqrt{x+3}, & -3 < x < -2 \\ -3x + 10 - 3(x+3)\sqrt{x+3}, & -2 < x < 2 \end{cases}$
2.	(α) $x = -1$ (β) $x = 12$ (γ) $x = 2$ (δ) $x = 1$
3.	$A = 1 - \sqrt{2},\ B = \frac{\sqrt{2}}{2}$
4.	see table below
5.	(α) $x = 0$ (β) $x = 0$ ή $x = 243$ (γ) $x = 0$ ή $x = 16$
6.	$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{y}-1}$, $\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}$, $\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}-1}$
7.	(α) $B\Gamma = \sqrt{a+\beta}$
8.	(α) $A < B$ (β) $\Gamma < \Delta$ (γ) $E > Z$

4.

Γ	Δ	E	Z	H	Θ
a^3	a^2	$\sqrt{a}$	$\sqrt{\beta}$	β^2	β^3

Τριγωνομετρία

Σελίδα 52 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας σε Κανονική Θέση

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Η τελική πλευρά της γωνίας $100°$ είναι στο $2^{ο}$ τεταρτημόριο (β) Η τελική πλευρά της γωνίας $-\frac{\pi}{4}$ rad είναι στο $4^{ο}$ τεταρτημόριο (γ) Η τελική πλευρά της γωνίας $450°$ ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα των τεταγμένων (δ) Η τελική πλευρά της γωνίας $-210°$ είναι στο $2^{ο}$ τεταρτημόριο
2.	(α) $360° + 135° = 495°, -720° + 135° = -585°$ (β) $-360° - 20° = -380°, 1080° - 20° = 1060°$ (γ) $6\pi - \frac{7\pi}{6} = \frac{29\pi}{6}\ rad, -4\pi + \frac{7\pi}{6} = -\frac{17\pi}{6} rad$
3.	$\frac{\pi}{6}\ rad, \frac{\pi}{4}\ rad, \frac{\pi}{2}\ rad, \frac{2\pi}{3}\ rad$
4.	$300°, 210°, 270°, 900°$
5.	(α) $O\Lambda$ → τελική πλευρά της ω , OA → αρχική πλευρά της ω $\varphi = 360° + \omega$ (β) Αρχική πλευρά: OA, Τελική πλευρά: $O\Lambda$ (γ) Αρχική πλευρά: OA, Τελική πλευρά: $O\Lambda$
6.	$\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \varepsilon\varphi\theta = 1,$ $\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = -\sqrt{2}, \quad \tau\varepsilon\mu\theta = -\sqrt{2}, \quad \sigma\varphi\theta = 1$

Σελίδα 57 Τριγωνομετρικός Κύκλος

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ	
2.	$-\frac{3}{2}$	
3.	$\eta\mu 236° < 0, \sigma\upsilon\nu 236° < 0,$ $\varepsilon\varphi 236° > 0, \tau\varepsilon\mu 236° < 0,$ $\sigma\tau\varepsilon\mu 236° < 0, \sigma\varphi 236° > 0$	$\eta\mu\frac{3\pi}{7} > 0, \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7} > 0,$ $\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{7} > 0, \tau\varepsilon\mu\frac{3\pi}{7} > 0,$ $\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{3\pi}{7} > 0, \sigma\varphi\frac{3\pi}{7} > 0$
	$\eta\mu(-52°) < 0, \sigma\upsilon\nu(-52°) > 0,$ $\varepsilon\varphi(-52°) < 0, \tau\varepsilon\mu(-52°) > 0,$ $\sigma\tau\varepsilon\mu(-52°) < 0, \sigma\varphi(-52°) < 0$	$\eta\mu\left(-\frac{4\pi}{3}\right) > 0, \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{4\pi}{3}\right) < 0,$ $\varepsilon\varphi\left(-\frac{4\pi}{3}\right) < 0, \tau\varepsilon\mu\left(-\frac{4\pi}{3}\right) < 0,$ $\sigma\tau\varepsilon\mu\left(-\frac{4\pi}{3}\right) > 0, \sigma\varphi\left(-\frac{4\pi}{3}\right) < 0$

4.	(α) 2° τεταρτημόριο (β) 2° τεταρτημόριο (γ) 4° τεταρτημόριο	

Σελίδα 65 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**		
1.	(α) $60°$ ή $120°$	(β) $160°$	(γ) $150°$

2.

α.	β.	γ.
1	5	6

3.	(α) $ημ15°$ (β) $ημ18°$	(γ) $-εφ80°$ (δ) $-στεμ40°$
4.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ
5.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ	(ε) ΛΑΘΟΣ (στ) ΣΩΣΤΟ (ζ) ΛΑΘΟΣ
6.	$A = συνα + σφα\, ,\, B = 2(ημα + συνα)$	
7.	Για τα σημεία B και $Γ$: $\frac{9π}{7}, \frac{16π}{7}, \frac{23π}{7}$ Για τα σημεία $Δ$ και E: $-\frac{26π}{7}, -\frac{19π}{7}, -\frac{12π}{7}, -\frac{5π}{7}$	

Σελίδα 70 Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	(α) $τεμφ = \frac{13}{5}, ημφ = \frac{12}{13}, στεμφ = \frac{13}{12}, εφφ = \frac{12}{5}, σφφ = \frac{5}{12}$ (β) $ημφ = -\frac{12}{37}, συνφ = \frac{35}{37}, τεμφ = \frac{37}{35}, εφφ = -\frac{12}{35}, σφφ = -\frac{35}{12}$ (γ) $σφφ = \frac{8}{15}, τεμφ = -\frac{17}{8}, συνφ = -\frac{8}{17}, ημφ = -\frac{15}{17}, στεμφ = -\frac{17}{15}$
2.	$ημω = \frac{5\sqrt{x^2+25}}{x^2+25},\ τεμω = \frac{\sqrt{x^2+25}}{x}$
3.	$A = -\frac{7}{5}$
4.	$A = 10$
6.	(α) $συν15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$ (β) $εφ15° = 2 - \sqrt{3}$
7.	$A = -1, B = σφ^2x$
9.	$εφx = \frac{ημx}{\sqrt{1 - ημ^2x}}$
11.	$θ = 30°$

Σελίδα 73 Δραστηριότητες Ενότητας	
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	Γ
3.	$\eta\mu\theta = \frac{\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha)}{2}$
4.	$\alpha = \eta\mu\theta, \beta = \varepsilon\varphi\theta, \gamma = \tau\varepsilon\mu\theta, \delta = \sigma\upsilon\nu\theta$
5.	$\theta = 60°$
7.	(β) i. $\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}$ ii. $\frac{2}{\alpha^2-1}$ iii. $\frac{\alpha(3-\alpha^2)}{2}$
8.	Γ
14.	$\frac{\eta\mu x+1}{\eta\mu x-1}, 0, \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
17.	$A = 23$
18.	$A = -\frac{11}{16}$

Σελίδα 77 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού	
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	(α) $-3+\sqrt{3} \leq A \leq 3+\sqrt{3}$ (β) $-3+\pi \leq B \leq 3+\pi$
4.	$\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1}{2}$
7.	Ελάχιστη όταν $x = \frac{-6\kappa\pi+\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$ Μέγιστη όταν $x = \frac{-6\kappa\pi-2\pi}{6}$ ή $x = \frac{-6\kappa\pi+4\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$
8.	$6\ m$
9.	$12{,}86\ m$
10.	(α) $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}, AH = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (β) Ορθογώνιο

Κύκλος

Σελίδα 85 Θέση δύο Κύκλων

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Εφάπτονται εξωτερικά (β) Ξένοι εξωτερικά (γ) Ξένοι εσωτερικά (δ) Εφάπτονται εσωτερικά
2.	(α) $9\ cm$ (β) $1\ cm$
3.	$8\ km < ΜΛ < 28\ km$
4.	(α) Εφάπτονται εξωτερικά (β) Ξένοι εξωτερικά (γ) Τέμνονται
5.	(α) $x = 5\ cm$ (β) $5\ cm < x < 19\ cm$ (γ) $x > 19\ cm$

Σελίδα 92 Εγγεγραμμένες Γωνίες

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) $x = 40^o$ (β) $x = 43^o$ (γ) $x = 90^o$	(δ) $x = 34^o$ (ε) $x = 40^o, \quad y = 60^o$ (ζ) $x = 32^o$	(η) $x = 150^o$ (θ) $x = 100^o, y = 120^o$
2.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ	
3.	$R = 2\sqrt{2}\ cm$		

Σελίδα 96 Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) $x = 54^o, y = 56^o$	(β) $x = 117^o$	(γ) $x = 51^o, y = 102^o$
2.	$A\widehat{K}B = 140^o$		
3.	30^o		
6.	Το τόξο $ΒΓ$ που αντιστοιχεί στην $Β\widehat{Κ}Γ$ είναι 122^o		
7.	(β) Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο του $ΔΕ$		

Σελίδα 97 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) $x = 172°$ (β) $x = 180°$	(γ) $x = 66°, y = 72°$ (δ) $x = 300°$	(ε) $x = 30°$ (στ) $x = 147°$
2.	$A = 55°, B = 105°, Γ = 125°, Δ = 75°$		
4.	(α) Τα τόξα είναι ίσα (γ) $x = 108°$		
5.	$\hat{A} = 80°, \hat{B} = 60°, \hat{Γ} = 40°$		
6.	(β) $\hat{A} = 90°, \hat{K} = 60°, \hat{B} = 30°$		

7.	$B\widehat{\Gamma}\Delta = 60°$, $B\widehat{M}\Delta = 45°$
11.	$K\hat{A}B = 90°$ Η ακτίνα KA είναι κάθετη με την AB στο σημείο A του κύκλου, άρα η AB είναι εφαπτομένη
12.	$\hat{\varphi} = 95°$

Σελίδα 101 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(β) Ισοσκελές Τραπέζιο

Ορίζουσες - Ευθεία

Σελίδα 106 Ορίζουσες (2×2)

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) 0 (β) $-\sqrt{6}$ (γ) -2	(δ) -2 (ε) 1 (στ) $(\alpha-\beta)^2$
2.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ
3.	(α) 10 (β) -10	(γ) 80
4.	$\lambda = 8$ ή $\lambda = -1$	

Σελίδα 109 Ορίζουσες (3×3)

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) 98	(β) 28
2.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ
3.	(α) 396 (β) 0	(γ) 62 (δ) 30
5.	$x = 13$ ή $x = 2$	

Σελίδα 118 Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) $3x + 2y = 3$ (β) $x = -2$ (γ) $y = 3$	
2.	$\sqrt{3}x - 3y + 6 + 2\sqrt{3}$	
3.	(α) $3x + y + 1 = 0$ (β) $x + y - 7 = 0$ (γ) $5x - y + 15 = 0$	
4.	(α) $-3x + 2y = 9$ (β) $3x - 5y = 3$	
5.	(α) $45°$ (β) $71{,}57°$	(γ) $18{,}43°$ (δ) $45°$
6.	(α) $AB: y = 4x - 1,\ A\Gamma: y = 3,\ B\Gamma: x = 2$ (β) $75{,}96°,\ 0°,\ 90°$	
7.	$\hat{A} = 54{,}16°, \hat{B} = 77{,}47°, \hat{\Gamma} = 48{,}37°$	
9.	$3x - 4y = 15$	
10.	$\kappa = 3$	
11.	$\alpha = -\dfrac{3}{2}$	
12.	(β) $x - 2y = -3$	

13.	(α) $x-y=-3, 2x+y=6, 2x+7y=-6$ (β) $B(-3,0)\,,\Gamma(4,-2)$
14.	$x-6y+17=0$
15.	$(-34,-14)$
16.	$(-3,0),(0,3),(-1,-2)$
17.	(α) $2x+y=1$ (β) $2x+y=-1$
18.	$(-2,-2)$

Σελίδα 126 Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας – Δέσμη Ευθειών

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**	
1.	(α) $\lambda=\frac{1}{3}$ (β) $\lambda=-1$	(γ) $\lambda=0$ (δ) Δεν ορίζεται
2.	(α) $\lambda_1=-1, \lambda_2=\frac{5}{3}$ (β) $(0,2),(2,0)$	
3.	$\alpha=\frac{5}{2}$	
4.	(α) $(1,5),(5,7),(-1,1),(3,3)$	
5.	$y=x, x-3y+7=0$	
6.	$A(8,1)$	
8.	$3x+y=8$	
9.	$-6x+3y=20$	
11.	$x-y=7$	
13.	(β) $\mu=1$ (γ) Δεν υπάρχει	(δ) $\mu=0$
14.	(β) $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ (γ) $(1,6)$	

Σελίδα 135 Απόσταση Σημείου από Ευθεία – Εμβαδόν Τριγώνου

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**		
1.	(α) $\frac{27}{5}$ (β) 9		(γ) 4
2.	(α) $\frac{33\sqrt{41}}{41}$ (β) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$		(γ) 1
3.	9 και 18		
4.	(α) $\frac{3}{2}$	(β) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(γ) $\frac{\sqrt{130}}{2}$
5.	$A\Delta=4, E_{AB\Gamma}=20\,\tau.\mu.$		

6.	$\frac{9}{2}$
7.	$x = 2$
8.	$E = 25\ \tau.\mu.$
9.	$E_{AB\Gamma\Delta} = 19\ \tau.\mu.$
10.	$\frac{1}{2}\lvert\lambda^2(\kappa-\mu)+\kappa^2(\mu-\lambda)+\mu^2(\lambda-\kappa)\rvert$

Σελίδα 136 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**		
1.	(α) -10 (β) -38		(γ) -2 (δ) 0
2.	(α) 0 (β) $(\alpha-\beta)x$		(γ) -2
4.	(α) $x = \pm 1$		(β) $x = 1\ ,\ x = 3$
5.	(α) $(\alpha-\beta)^2$		(β) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$
7.	(α) $\lambda = -\frac{5}{3}$		(β) $\lambda = \sqrt{3}$
8.	(α) $\lambda = \sqrt{3}$ (β) $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}$		(γ) $\lambda = 9$ (δ) Δεν ορίζεται
9.	(α) $y = -3x - 3$	(β) $y = 3$	(γ) $x = -2$
10.	$x + y = 5$		
12.	(α) $y = -3x + 1,\ y = \frac{1}{3}x + 1$ (β) $y = -\frac{1}{2}x + 2,\ y = 2x + 2$		
13.	$8{,}13^o$		
14.	$146{,}31^o$		
16.	$\lambda \neq 1, \lambda = -\frac{3}{2}$		
18.	(α) $2x - 3y - 7 = 0$ (β) $-4x + 3y + 11 = 0$ (γ) $x + 3y + 1 = 0$		
19.	(α) $\Gamma(3{,}0)$ ή $\Gamma(10{,}0)$ (β) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$		
20.	(α) 6 (β) 3		(γ) 6 (δ) 8
23.	$x + y = -1, \qquad x - y = -3$		

Σελίδα 139 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού		
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**	
4.	(α) $x = -1, x = \frac{1}{3}$	(β) $x = 0, x = 3^5$
6.	$x - y + 9 = 0$ και $x - y - 3 = 0$	
7.	(α) $\lambda = 3$ (β) $\lambda = \frac{3}{2}$	(γ) $\lambda = \frac{9}{5}$ (δ) Δεν υπάρχει
8.	$y = \frac{2}{3}x + 2$ και $y = \frac{2}{3}x - 2$	
9.	(α) $\left(5, \frac{9}{2}\right)$ (β) $8x + 2y = 49$ (γ) $\left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right)$ και $\left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$	
10.	$\kappa = 1$	
11.	$2x + 16y = 9$ και $64x - 8y = -37$	
12.	(α) $(-1,2)$ (β) $y = 2, x = -1$ και $x - 2y = -5$ (γ) Το M	
15.	(α) $\Phi(-1, 2)$ (β) $y = 2,\ x = -1,\ x - 2y + 5 = 0$	(γ) Το K

Στατιστική

Σελίδα 149 Μέτρα Θέσης και Διασποράς

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Μέτρα θέσης: Διάμεσος, Μέση Τιμή, Επικρατούσα τιμή, Σταθμισμένος Μέσος Μέτρα Διασποράς: Εύρος, Διακύμανση, Τυπική Απόκλιση
2.	(α) Μέση Τιμή=13,88, Διάμεσος= 13,5, Επικρατούσα Τιμή= 13 (β) Εύρος= 12, Τυπική απόκλιση= 3,85, Συντελεστής μεταβολής: $C.V = 27{,}78\%$
3.	Μέση Τιμή= 15,1
4.	Μέση επίδοση αγοριών: 17,72
5.	Τελική βαθμολογία: 7,8
6.	(α) Μέση Τιμή: $\bar{x} = 230$ (β) $\bar{y} = 23\,, \bar{z} = 30\,, \bar{\omega} = 3$
7.	Όλες οι τιμές πρέπει να συμπίπτουν με τη μέση τιμή, δηλαδή ($x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = \bar{x}$).
8.	Μικρότερη Διασπορά: Λίστα 2 Μεγαλύτερη Διασπορά: Λίστα 3
9.	1,71
10.	35 χρόνια
11.	61
12.	Τυπική απόκλιση: 3
13.	(α) Αντίστοιχη Συχνότητα: 6, Σύνολο: 38, Τυπική Απόκλιση: 1,37 (β) $C.V = 18{,}29\%$
14.	$C.V_1 > C.V_2$
15.	(α) $C.V = 19{,}39\%$ (β) $C.V_B = 9{,}09\%$ Μεγαλύτερη ομοιογένεια βαθμών στο τμήμα Β.
16.	(β) 15,35

Σελίδα 151 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ	(ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ
2.	4,24		
3.	Ο ισχυρισμός είναι ΟΡΘΟΣ		
4.	96 Km/h		
5.	(α) 31 , 27 (β) $s = 1{,}04$		
6.	16,61		
7.	(α) Μέση Τιμή: $\bar{x} + \kappa$, Τυπική απόκλιση: s_x (β) Μέση Τιμή: $\bar{x} - \kappa$, Τυπική απόκλιση: s_x (γ) Μέση Τιμή: $\kappa \cdot \bar{x}$, Τυπική απόκλιση: $\kappa \cdot s_x$		

Σελίδα 155 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού	
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
2.	66
3.	Μέση Τιμή 6 Τυπική απόκλιση= 2
5.	Μέση Τιμή: 55, Τυπική απόκλιση: $s_Y = 144$
6.	$x_5 = 10$ *ή* $x_5 = -2$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β:\ α,β\in Z$ και $β\neq0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2nd F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\square}{\square}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 · 3 4 – 1 · 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 4 = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT 2 3 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X^2 =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\|-3\|$	Abs (-) 3 =	$\|-3\|$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	9 – 6 : 2 $M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	3 X M – 6 ÷ M =	3 X M – 6 : M 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290