Επαναληπτικό Φυλλάδιο
Ασκήσεις στις εξισώσεις 2ου Βαθμού - Λύσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ είναι αδύνατη.

β. $-2x^2+8=0 \Rightarrow -2x^2=-8 \Rightarrow \frac{\cancel{-2}x^2}{\cancel{-2}}=\frac{-8}{-2} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow$

$x=\sqrt{4} \quad ή \quad x=-\sqrt{4} \Rightarrow x=2 \quad ή \quad x=-2$

γ. $x^2-6=0 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\sqrt{6} \quad ή \quad x=-\sqrt{6}$

δ. $3x^2-27=0 \Rightarrow \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}=\frac{27}{3} \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9} \quad ή \quad x=-\sqrt{9}$

$x=3 \quad ή \quad x=-3$

ε. $5x^2-7x=0 \Rightarrow x(5x-7)=0 \Rightarrow x=0 \quad ή \quad 5x-7=0$

$x=0 \quad ή \quad 5x=7 \Rightarrow x=0 \quad ή \quad \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}=\frac{7}{5} \Rightarrow x=0 \quad ή \quad x=\frac{7}{5}$

στ. $2x^2=-5 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}=\frac{-5}{2} \Rightarrow x^2=\frac{-5}{2}$ είναι αδύνατη.

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $x^2+6x+8=0$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=6^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4$$

$a=1$

$\beta=6$

$\gamma=8$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-6\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{-6\pm2}{2}= \begin{cases} \nearrow \frac{-6-2}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \\ \searrow \frac{-6+2}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

β. $x^2-4x+4=0$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$$

$a=1$

$\beta=-4$

$\gamma=4$

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}==\frac{-(-4)}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$$

Αλλιώς $x^2-4x+4=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot2+2^2=0 \Rightarrow (x-2)^2=0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

γ. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$a = 1$

$\beta = -5$

$\gamma = 6$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \searrow \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $(x + 2)^2 + 5 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = -5$ είναι αδύνατη.

β.
$(3x-1)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (3x-1)^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow (3x-1-3)(3x-1+3) = 0 \Rightarrow$

$(3x-4)(3x+2) = 0 \Rightarrow 3x - 4 = 0 \quad ή \quad 3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \quad ή \quad 3x = -2 \Rightarrow$

$\dfrac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \dfrac{4}{3} \quad ή \quad \dfrac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \dfrac{-2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{4}{3} \quad ή \quad x = -\dfrac{2}{3}$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α.
$(x+2)^2 - (x-6)^2 = 0 \Rightarrow \left[(x+2)-(x-6)\right]\cdot\left[(x+2)+(x-6)\right] = 0 \Rightarrow$

$(\cancel{x} + 2 - \cancel{x} + 6)(x + 2 + x - 6) = 0 \Rightarrow 8\cdot(2x-4) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow$

$2x = 4 \Rightarrow \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \dfrac{4}{2} \Rightarrow x = 2$

β.
$(x-1)^2 + (x+2)^2 = 29 \Rightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 + x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 = 29 \Rightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 - 29 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + x - 12) = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 1 + 48 = 49$$

$a = 1$

$\beta = 1$

$\gamma = -12$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \nearrow \dfrac{-1+7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \searrow \dfrac{-1-7}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α.
$(x-1)^2 = -x + 1 \Rightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 = -x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x - 1 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ή \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ή \quad x = 1$

β. $\sqrt{2}x^2+5x+2\sqrt{2}=0$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=25-8\cdot\sqrt{2}^2=25-8\cdot 2=25-16=9$$

$a=\sqrt{2}$

$\beta=5$

$\gamma=2\sqrt{2}$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{-5\pm 3}{2\sqrt{2}}=$$

$$\nearrow\ \frac{-5+3}{2\sqrt{2}}=\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\searrow\ \frac{-5-3}{2\sqrt{2}}=\frac{-8}{2\sqrt{2}}=-\frac{4}{\sqrt{2}}=-\frac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $(x+1)(2x-3)=0\Rightarrow x+1=0 \quad ή \quad 2x-3=0\Rightarrow x=-1 \quad ή \quad 2x=3\Rightarrow$

$x=-1 \quad ή \quad \frac{2x}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=-1 \quad ή \quad x=\frac{3}{2}$

β. $(x-1)(x^2-4)=0\Rightarrow x-1=0 \quad ή \quad x^2-4=0\Rightarrow x=1 \quad ή \quad x^2-2^2=0\Rightarrow$

$x=1 \quad ή \quad (x-2)(x+2)=0\Rightarrow x=1 \quad ή \quad x-2=0 \quad ή \quad x+2=0\Rightarrow$

$x=1 \quad ή \quad x=2 \quad ή \quad x=-2$

γ.

$(4x^2-9)(2x^2+4x)=0\Rightarrow\left[(2x)^2-3^2\right]\cdot 2x(x+2)=0\Rightarrow(2x-3)(2x+3)\cdot 2x(x+2)=0\Rightarrow$

$2x-3=0 \quad ή \quad 2x+3=0 \quad ή \quad 2x=0 \quad ή \quad x+2=0\Rightarrow 2x=3 \quad ή \quad 2x=-3 \quad ή \quad x=0 \quad ή \quad x-2\Rightarrow$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{3}{2} \quad ή \quad \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{-3}{2} \quad ή \quad x=0 \quad ή \quad x-2\Rightarrow x=\frac{3}{2} \quad ή \quad x=-\frac{3}{2} \quad ή \quad x=0 \quad ή \quad x-2$

1

δ. $2x^3+8x^2-24x=0\Rightarrow 2x\left(x^2+4x-12\right)=0\Rightarrow 2x=0 \quad ή \quad x^2+4x-12=0\Rightarrow$

$x=0 \quad ή \quad x^2+4x-12=0$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot 1\cdot(-12)=16+48=64$$

$a=1$

$\beta=4$

$\gamma=-12$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 8}{2}=$$

$$\nearrow\ \frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\searrow\ \frac{-4-8}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 2(αβ - 1) = 0$. Αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό α+β , τότε να αποδείξετε ότι α = β = 1 .
Για βοήθεια ισχύει $\alpha^2+\beta^2=o \Rightarrow \alpha=\beta=0$.

Αφού η εξίσωση $x^2 - 2x - 2(αβ - 1) = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό α+β τότε πρέπει

$$(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)-2(\alpha\beta-1)=0 \Rightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha-2\beta-2\alpha\beta+2=0 \Rightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha-2\beta+2=0 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha+\beta^2-2\beta+1+1=0 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-2\beta+1=0 \Rightarrow$$

$$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=0 \Rightarrow \alpha-1=0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta-1=0 \Rightarrow \alpha=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta=1$$

8. Για ποιες τιμές των κ, λ η παρακάτω εξίσωση έχει μοναδική λύση το μηδέν ;

$$5x^2+(2\kappa-1)x+\lambda+4=0$$

Αφού η εξίσωση $5x^2+(2\kappa-1)x+\lambda+4=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 0 τότε πρέπει $50^2+(2\kappa-1)\cdot 0+\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=-4$, άρα η εξίσωση γίνεται

$$5x^2+(2\kappa-1)x-\cancel{4}+\cancel{4}=0 \Rightarrow 5x^2+(2\kappa-1)x=0 \Rightarrow x\left[5x+(2\kappa-1)\right]=0 \Rightarrow$$

$$x=0 \quad ή \quad 5x+(2\kappa-1)=0 \Rightarrow x=0 \quad ή \quad 5x=-(2\kappa-1) \Rightarrow x=0 \quad ή \quad \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}=-\frac{(2\kappa-1)}{5} \Rightarrow$$

$$x=0 \quad ή \quad x=-\frac{(2\kappa-1)}{5}$$

Όμως πρέπει η εξίσωση να έχει το 0 μοναδική ρίζα άρα πρέπει $x=-\frac{(2\kappa-1)}{5}=0 \Rightarrow 2\kappa-1=0 \Rightarrow 2\kappa=1 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\kappa}{\cancel{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \kappa=\frac{1}{2}$

9. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = 3x^2 - 9$ και $B(x) = (x - 1)^2$.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο Γ = Α – Β .

$$\Gamma(x)=A(x)-B(x)= 3x^2-9 -(x-1)^2=3x^2-9 -(x^2-2x+1)=3x^2-9 -x^2+2x-1$$

$$\Gamma(x)=2x^2+2x-10$$

β. Να λύσετε τις εξισώσεις: Α = 0 , Β = 0 και Γ = 0 .

$$A(x)=0 \Rightarrow 3x^2-9=0 \Rightarrow 3(x^2-3)=0 \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow$$

$$x=\sqrt{3} \quad ή \quad x=-\sqrt{3}$$

$$B(x)=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$\Gamma(x)=0 \Rightarrow 2x^2+2x-10=0 \Rightarrow 2\left(x^2+x-5\right)=0 \Rightarrow x^2+x-5=0$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-5)=1+20=21$$

$$a=1 \qquad \beta=1 \qquad \gamma=-5$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}= \begin{cases} \nearrow \ \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ \searrow \ \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Προβλήματα Εξισώσεων 2ου Βαθμού

10. Να βρείτε δύο ακέραιους αριθμούς, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 15 και γινόμενο 56.

Έστω x,y οι ζητούμενοι αριθμοί με x>y. Πρέπει $x+y=15 \Rightarrow y=15-x \quad (1)$ και $x\cdot y=56 \quad (2)$. Αντικαθιστώ την σχέση (1) στην σχέση (2) και έχω

$$x\cdot(15-x)=56 \Rightarrow 15x-x^2-56=0 \Rightarrow -x^2+15x-56=0$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=15^2-4\cdot(-1)\cdot(-56)=225-224=1$$

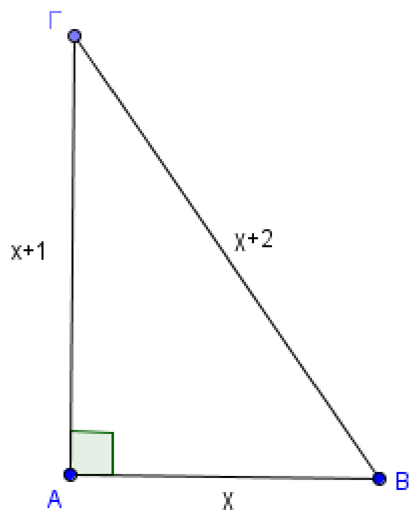
$$a=-1 \qquad \beta=15 \qquad \gamma=-56$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=\frac{-15\pm1}{-2}= \begin{cases} \nearrow \ \dfrac{-15+1}{-2}=\dfrac{-14}{-2}=7 \\ \searrow \ \dfrac{-15-1}{-2}=\dfrac{-16}{-2}=8 \end{cases}$$

Από τις δύο λύσεις που βρήκα για το x δέχομαι την μεγαλύτερη διότι αρχικά δεχτήκαμε το x>y,έτσι x=8 και για να βρώ το y θέτω x=8 στην (1) και παίρνω $y=15-8=7$.

11. Τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσα με τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου.

Έστω x,x+1,x+2 οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου που είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:



$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+x^2+2\cdot x\cdot1+1^2=x^2+2\cdot x\cdot2+2^2 \Rightarrow$$

$$2x^2+2x+1=x^2+4x+4 \Rightarrow 2x^2+2x+1-x^2-4x-4=0 \Rightarrow$$

$$x^2-2x-3=0$$

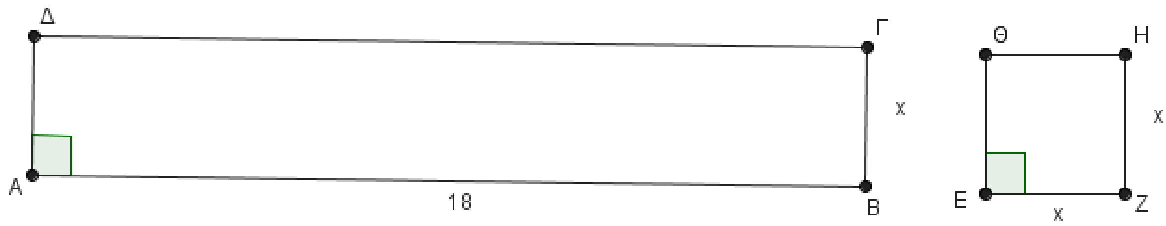
$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16$$

$$a=1 \qquad \beta=-2 \qquad \gamma=-3$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2\pm4}{2}= \begin{cases} \nearrow \ \dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ \searrow \ \dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

Η λύση x=-1 απορρίπτεται διότι ο x είναι φυσικός αριθμός, άρα x=3. Οπότε οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι ΑΒ=3, ΑΓ=4, ΒΓ=5.

12. Μια διάσταση ενός ορθογωνίου είναι 18m και η άλλη του διάσταση είναι ίση με το μήκος πλευράς τετραγώνου. Αν το εμβαδό του ορθογώνιου είναι ίσο με το εξαπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου, τότε να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.



Αν x>0 είναι η πλευρά του τετραγώνου και η μια διάσταση του ορθογωνίου με $x \neq 18$ τότε έχουμε για τα εμβαδά τους:

$(\text{ΑΒΓΔ}) = 18 \cdot x = 18x$ και

$(\text{ΕΖΗΘ}) = x^2$

Όμως πρέπει $(\text{ΑΒΓΔ}) = 6 \cdot (\text{ΕΖΗΘ}) \Rightarrow 18x = 6x^2 \Rightarrow 18x - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x(3-x) = 0 \Rightarrow$
$6x = 0 \quad ή \quad 3 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ή \quad 3 = x$

Η λύση x=0 απορρίπτεται άρα x=3m.

Προσοχή πρέπει το x<18 ώστε το εμβαδό του ορθογώνιου να είναι ίσο με το εξαπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου.