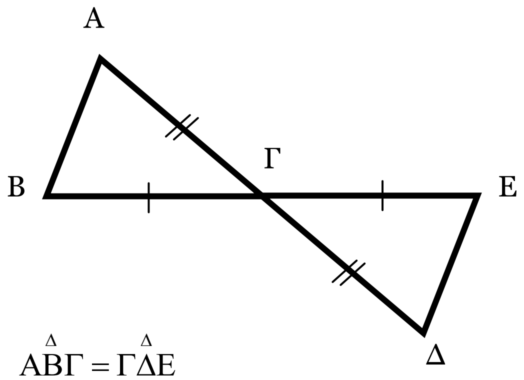
1ο Επαναληπτικό φυλλάδιο στην Γεωμετρία
Γ΄ Γυμνασίου
Ασκήσεις στην ισότητα τριγώνων

Ισότητα Τριγώνων

1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα:



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta\mathrm{E}}$:

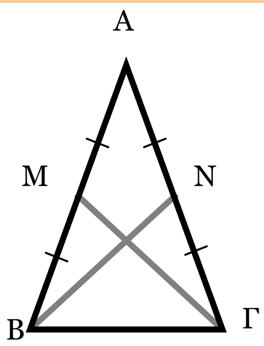
Έχουν, ΑΓ=ΓΔ (Δεδομένο)

ΒΓ=ΓΕ (Δεδομένο)

$\Gamma_1 = \Gamma_2$

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ-Π) προκύπτει $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}} = \overset{\triangle}{\Gamma\Delta\mathrm{E}}$

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρνουμε τις διαμέσους ΒΝ και ΓΜ. Να αποδείξετε ότι ΒΝ = ΓΜ .



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{MB\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{NB\Gamma}}$:

Έχουν, ΒΓ κοινή πλευρά

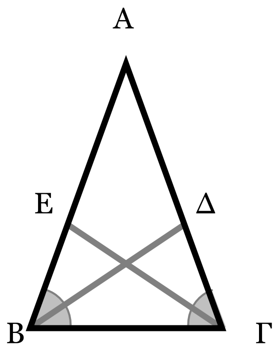
ΒΜ=ΓΝ ως μισά ίσων τμημάτων (ΑΒ=ΑΓ)

$\mathrm{B} = \Gamma$ ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου.

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ-Π) προκύπτει $\overset{\triangle}{\mathrm{MB\Gamma}} = \overset{\triangle}{\mathrm{NB\Gamma}}$

και επειδή $\mathrm{B} = \Gamma$ τότε ΜΓ=ΒΝ (Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ .



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{EB\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\Delta\mathrm{B\Gamma}}$:

Έχουν, ΒΓ κοινή πλευρά

$\mathrm{E\Gamma B} = \Delta\mathrm{B\Gamma}$ ως μισές ίσων γωνιών ($\mathrm{B} = \Gamma$)

$\mathrm{B} = \Gamma$ ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου.

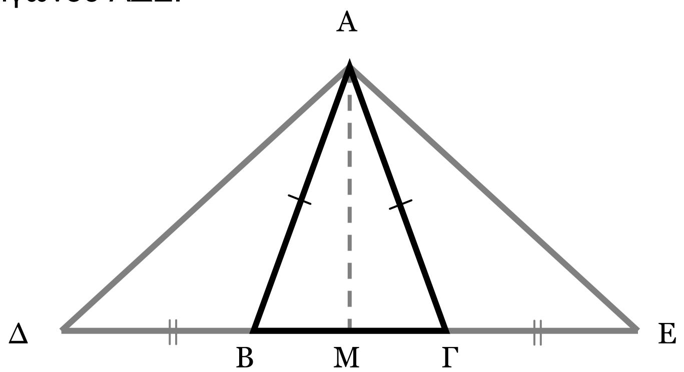
Άρα από το κριτήριο (Γ-Π-Γ) προκύπτει $\overset{\triangle}{\mathrm{EB\Gamma}} = \overset{\triangle}{\Delta\mathrm{B\Gamma}}$

και επειδή $B = \Gamma$ τότε ΔΒ=ΓΕ (Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ και προς τις δύο κατευθύνσεις, κατά ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ .

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β. Να δείξετε ότι η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι διάμεσος και του τριγώνου ΑΔΕ.



α. Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$:
Έχουν, ΑΒ=ΑΓ (Δεδομένο)
ΒΔ=ΓΕ (Δεδομένο)
$AB\Delta = A\Gamma E$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών $B = \Gamma$

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ-Π) προκύπτει $\overset{\Delta}{AB\Delta} = \overset{\Delta}{A\Gamma E}$

και επειδή $AB\Delta = A\Gamma E$ τότε ΑΔ=ΑΕ (Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές). Άρα το $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές.

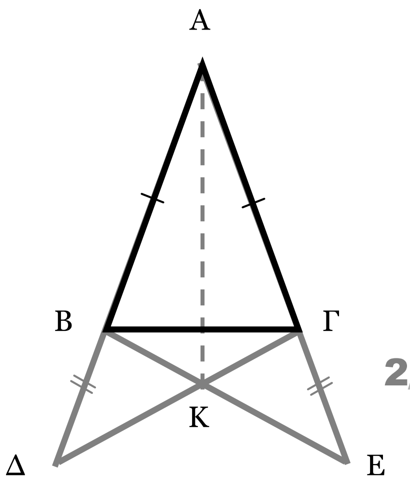
β. Επειδή $\begin{cases} \Delta B = \Gamma E & \textit{και} \\ BM = M\Gamma & \\ ------ & \textit{Άρα} \\ \Delta M = ME & \end{cases}$ $(\textit{Προσθέτω κατά μέλη})$

οπότε η Αμ είναι διάμεσος του τριγώνου $\overset{\Delta}{A\Delta E}$.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές προς το μέρος του Β και του Γ, κατά ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ, αντίστοιχα.

α. Να δείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ .

β. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ τότε να δείξετε ότι η ΑΚ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ.



α. Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Delta\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{B\Gamma E}$:
Έχουν, ΒΓ κοινή
ΒΔ = ΓΕ (Δεδομένο)
$\Delta B\Gamma = E\Gamma B$ (ως παραπληρώματα ίσων

γωνιών $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΓΒ}$ διότι είναι γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου).

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ-Π) προκύπτει $\overset{\Delta}{ΒΔΓ} = \overset{\Delta}{ΒΓΕ}$

και επειδή $\widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΕΓΒ}$ τότε ΒΕ = ΓΔ (Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

β. Επειδή αποδείξαμε $\overset{\Delta}{ΒΔΓ} = \overset{\Delta}{ΒΓΕ}$ και ΒΔ = ΓΕ τότε $\widehat{ΕΒΓ} = \widehat{ΔΓΒ}$ (Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες πλευρές έχουμε ίσες γωνίες). Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΒΚΓ}$ έχει τις γωνίες της βάσης του ίσες άρα είναι ισοσκελές, οπότε ΚΒ=ΚΓ. Επειδή:

- ΚΒ=ΚΓ το Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ και
- ΑΒ=ΑΓ το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ.

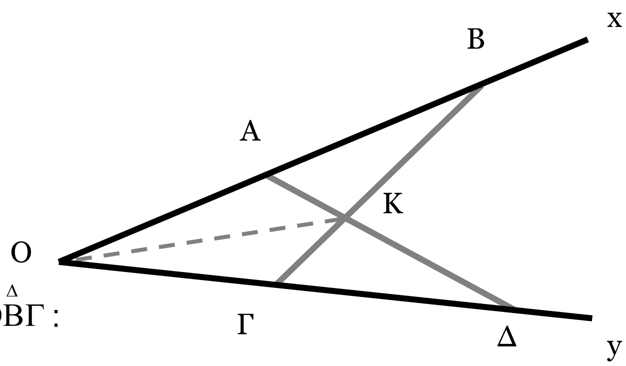
Άρα η ευθεία, που ορίζεται από τα σημεία Α και Κ, η ΑΚ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ.

6. Στις πλευρές Οx και Οy μιας γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε, αντίστοιχα ίσα τμήματα ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ . Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΓΒ.

α. Να δείξετε ότι ΑΔ = ΓΒ .

β. Να δείξετε ότι η ΟΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

γ. Να δείξετε ότι ΑΚ = ΚΓ .



α. Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΟΑΔ}$ και $\overset{\Delta}{ΟΒΓ}$:

Έχουν, $\hat{O}$ κοινή

ΟΑ = ΟΓ (Δεδομένο)

ΟΒ = ΟΔ (Δεδομένο)

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ-Π) προκύπτει $\overset{\Delta}{ΟΑΔ} = \overset{\Delta}{ΟΒΓ}$

και επειδή $\hat{O}$ κοινή τότε ΑΔ = ΓΒ (Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από κοινή γωνία έχουμε ίσες πλευρές).

β και γ . Επειδή δείξαμε στο (α) ότι $\overset{\Delta}{ΟΑΔ} = \overset{\Delta}{ΟΒΓ}$ και:

- ΟΑ=ΟΓ τότε $\widehat{ΑΔΟ} = \widehat{ΓΒΟ}$ (1) και
- ΟΔ=ΟΒ τότε $\widehat{ΔΑΟ} = \widehat{ΒΓΟ}$ (2)

(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες πλευρές έχουμε ίσες γωνίες).
Αυτά τα συμπεράσματα θα μας χρειαστούν παρακάτω.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΑΚΒ}$ και $\overset{\Delta}{ΓΚΔ}$:

Έχουν, ΑΒ=ΓΔ (ως διαφορές ίσων τμημάτων ΑΒ=ΟΒ-ΟΑ και ΓΔ=ΟΔ-ΟΓ)

$\widehat{ΑΔΟ} = \widehat{ΓΒΟ}$ (Το δείξαμε παραπάνω(1))

$\widehat{ΒΑΚ} = \widehat{ΔΓΚ}$ (ως παραπληρώματα ίσων γωνιών των $\widehat{ΔΑΟ} = \widehat{ΒΓΟ}$)

Άρα από το κριτήριο (Γ-Π-Γ) προκύπτει $\overset{\Delta}{ΑΚΒ} = \overset{\Delta}{ΓΚΔ}$.

και επειδή $K\Delta\Gamma = KBA$ τότε ΚΓ= ΚΑ (3) (Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AKO}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma KO}$:
Έχουν, ΟΑ=ΟΓ (Δεδομένο)

$OAK = O\Gamma K$ (Το δείξαμε παραπάνω(2))
ΚΑ= ΚΓ (Το δείξαμε παραπάνω(3))

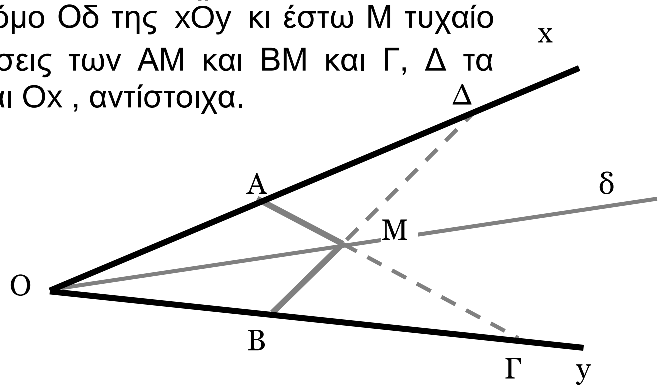
Άρα από το κριτήριο (Π-Γ-Π) προκύπτει $\overset{\Delta}{AKO} = \overset{\Delta}{\Gamma KO}$.

και επειδή ΚΑ= ΚΓ τότε $AOK = \Gamma OK$ (Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες πλευρές έχουμε ίσες γωνίες). Άρα η ΟΚ είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

7. Στις πλευρές Οx και Οy μιας γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε, αντίστοιχα ίσα τμήματα ΟΑ = ΟΒ. Φέρνουμε τη διχοτόμο Οδ της $x\hat{O}y$ κι έστω Μ τυχαίο σημείο της. Έστω επίσης οι προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ και Γ, Δ τα σημεία τομής τους με τις πλευρές Οy και Οx , αντίστοιχα.

α. Να δείξετε ότι ΑΓ = ΒΔ .

β. Να δείξετε ότι ΑΔ = ΒΓ .



α. Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{OAM}$ και $\overset{\Delta}{OBM}$:

Έχουν, $AOM = BOM$ (Διότι Οδ διχοτόμος)
ΟΑ = ΟΒ (Δεδομένο)
ΟΜ κοινή πλευρά

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ-Π) προκύπτει $\overset{\Delta}{OAM} = \overset{\Delta}{OBM}$

και επειδή $AOM = BOM$ τότε ΑΜ = ΜΒ (1)
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές),

και επειδή ΟΜ κοινή τότε $OAM = OBM$ (2)
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από κοινή πλευρά έχουμε ίσες γωνίες),
Αυτά τα συμπεράσματα θα μας χρειαστούν παρακάτω.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{OA\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{OB\Delta}$:

Έχουν, $OA\Gamma = OB\Delta$ (Το δείξαμε στο (2))
ΟΑ = ΟΒ (Δεδομένο)
O κοινή γωνία

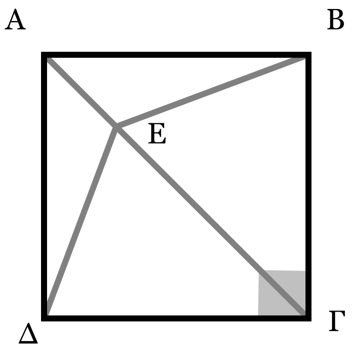
Άρα από το κριτήριο (Γ-Π-Γ) προκύπτει $\overset{\Delta}{OA\Gamma} = \overset{\Delta}{OB\Delta}$

και επειδή O κοινή γωνία τότε ΑΓ=ΒΔ
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από κοινή γωνία έχουμε ίσες πλευρές).

β. Επειδή δείξαμε ότι $\overset{\Delta}{OA\Gamma} = \overset{\Delta}{OB\Delta}$ και επειδή $OA\Gamma = OB\Delta$ τότε ΟΓ=ΟΔ
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

$$\text{Έτσι έχουμε} \begin{cases} O\Gamma = O\Delta & \textit{και} & \\ OB = O\Gamma & & (\textit{Αφαιρώ} \quad \textit{κατά} \quad \textit{μέλη}) \\ ----------- & \textit{Άρα} & \\ O\Gamma - OB = O\Delta - O\Gamma & \textit{οπότε} & B\Gamma = A\Delta \end{cases}$$

8. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΑΓ. Αν Ε τυχαίο σημείο της ΑΓ τότε να δείξετε ότι ΒΕ = ΔΕ .



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{ABE}}$:

Έχουν, $\mathrm{\Delta AE = BAE}$ (Διότι ΑΓ διχοτόμος της γωνίας A του τετραγώνου. Αυτή είναι μια από τις ιδιότητες του τετραγώνου που λέει πως οι διαγώνιες του διχοτομούν τις γωνίες του).

ΑΔ = ΑΒ (Ίσες πλευρές του τετραγώνου)

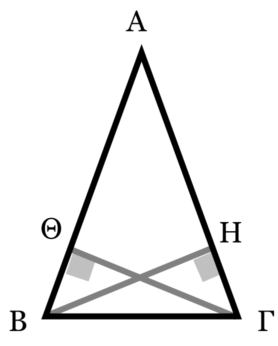
ΑΕ κοινή πλευρά

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ-Π) προκύπτει $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}} = \overset{\Delta}{\mathrm{ABE}}$

και επειδή $\mathrm{\Delta AE = BAE}$ τότε ΔΕ=ΒΕ.
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

Ισότητα Ορθογωνίων Τριγώνων

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρνουμε τα ύψη ΒΗ και ΓΘ. Να αποδείξετε ότι ΒΗ = ΓΘ .



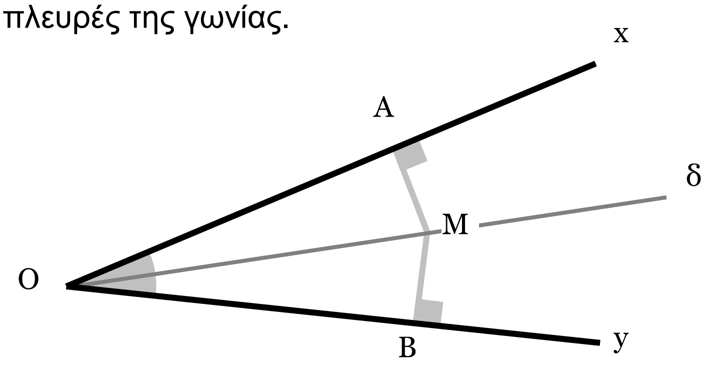
Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Theta\Gamma}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{BH\Gamma}}$:
Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια άρα θα πάμε στα κριτήρια Σύγκρισης ορθογωνίων τριγώνων.

Έχουν, $\mathrm{B = \Gamma}$ (Ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου)

ΒΓ κοινή πλευρά

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ) αφού έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μια μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση προκύπτει $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Theta\Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathrm{BH\Gamma}}$ και επειδή $\mathrm{B = \Gamma}$ τότε ΓΘ =ΒΗ.
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

10. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου Οδ μιας γωνίας $x\hat{O}y$ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.



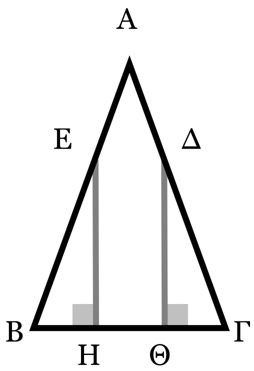
Αρκεί να δείξω ότι ΜΑ=ΜΒ.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{OAM}$ και $\overset{\Delta}{OBM}$:
Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια άρα θα πάμε στα κριτήρια
Σύγκρισης ορθογωνίων τριγώνων.

Έχουν, $AOM = BOM$ (Διότι η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας xOy)
ΟΜ κοινή πλευρά

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ) αφού έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μια μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση προκύπτει $\overset{\Delta}{OAM} = \overset{\Delta}{OBM}$ και επειδή $AOM = BOM$ τότε ΑΜ=ΜΒ.
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ε, Δ σημεία στις πλευρές του, έτσι ώστε ΒΕ = ΔΘ. Να δείξετε ότι τα σημεία Ε και Δ ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.



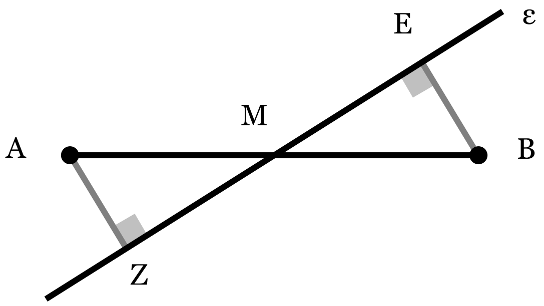
Αρκεί να δείξω ότι ΕΗ=ΔΘ.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{BHE}$ και $\overset{\Delta}{\Delta\Theta\Gamma}$:
Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια άρα θα πάμε στα κριτήρια
Σύγκρισης ορθογωνίων τριγώνων.

Έχουν, $B = \Gamma$ (Ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου)
ΒΕ=ΔΘ (Δεδομένο)

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ) αφού έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μια μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση προκύπτει $\overset{\Delta}{BHE} = \overset{\Delta}{\Delta\Theta\Gamma}$ και επειδή $B = \Gamma$ τότε ΕΗ=ΔΘ.
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

12. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το μέσον του Μ και (ε) μια τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Μ . Να αποδείξετε ότι τα άκρα Α και Β ισαπέχουν από την ευθεία (ε).



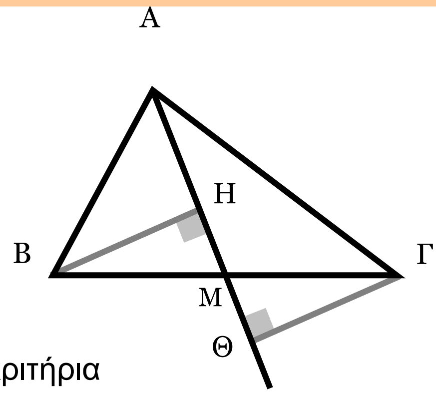
Αρκεί να δείξω ότι ΑΖ=ΒΕ.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AMZ}$ και $\overset{\Delta}{MEB}$:
Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια άρα θα πάμε στα κριτήρια Σύγκρισης ορθογωνίων τριγώνων.

Έχουν, $AMZ = BME$ (Ως κατακορυφήν γωνίες)
ΑΜ=ΜΒ (Διότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ)

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ) αφού έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μια μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση προκύπτει $\overset{\Delta}{AMZ} = \overset{\Delta}{MEB}$ και επειδή $AMZ = BME$ τότε ΑΖ=ΒΕ.
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ, την οποία και προεκτείνουμε πέραν του σημείου Μ. Να δείξετε ότι οι κορυφές Β και Γ του τριγώνου ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ.



Αρκεί να δείξω ότι ΒΗ=ΓΘ.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{BHM}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Theta M}$:
Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια άρα θα πάμε στα κριτήρια Σύγκρισης ορθογωνίων τριγώνων.

Έχουν, $BMH = \Gamma M\Theta$ (Ως κατακορυφήν γωνίες)
ΒΜ=ΜΓ (Διότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ, αφού η διάμεσος του τριγώνου είναι η ΑΜ)

Άρα από το κριτήριο (Π-Γ) αφού έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μια μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση προκύπτει $\overset{\Delta}{BHM} = \overset{\Delta}{\Gamma\Theta M}$ και επειδή $BMH = \Gamma M\Theta$ τότε ΒΗ=ΓΘ.
(Διότι σε **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ίσες πλευρές).