

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

### 1. Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;

Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

### 2. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;

Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

### 3. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

### 4. Τι ονομάζεται μονώνυμο και πια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;

Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

### 5. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;

Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

### 6. Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα;

Ονομάζονται ίσα δύο μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

Ονομάζονται αντίθετα δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

### 7. Τι ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

Ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

### 8. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό μονώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

Ονομάζουμε σταθερό μονωνύμο κάθε αριθμό και μηδενικό μονώνυμο τον αριθμό 0.

Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

### 9. Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;

Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

### 10. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

### 11. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

**12. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;**

Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

**13. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;**

Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

**14. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;**

Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0.

Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

**15. Πως πολλαπλασιάζουμε:**

**α. Μονώνυμο με πολυώνυμο ;**

**β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο ;**

Για να πολλαπλασιάσουμε:

- α. Μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

**16. Τι ονομάζεται ταυτότητα;**

Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

**17. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:**

i.  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ii.  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

iii.  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

iv.  $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

v.  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

**Αποδείξεις**

i.  $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ii.  $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

iii.  $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta) = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

iv.  $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)^2(\alpha - \beta) = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - \beta) = \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

v.  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

**18. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;**

Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

## 19. Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις της παραγοντοποίησης;

**1. Κοινός παράγοντας:** Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$a\beta + a\gamma - a\delta = a(\beta + \gamma - \delta)$$

**2. Ομαδοποίηση:** Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα. Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα πρέπει να είναι ίδιες.

$$a\beta + a\gamma - \delta\beta - \delta\gamma = a(\beta + \gamma) - \delta(\beta + \gamma) = (\beta + \gamma)(a - \delta)$$

**3. Διαφορά τετραγώνων:** Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , στην οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο **τελειών τετραγώνων** σε γινόμενο.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

**4. Ανάπτυγμα τετραγώνου:** Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:  $a^2 + 2a\beta + \beta^2$  ή  $a^2 - 2a\beta + \beta^2$ , τότε θα γίνει αντίστοιχα  $(a + \beta)^2$  ή  $(a - \beta)^2$ , που είναι γινόμενα παραγόντων αφού:  $(a + \beta)^2 = (a + \beta)(a + \beta)$  και  $(a - \beta)^2 = (a - \beta)(a - \beta)$

$$a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a + \beta)^2$$
$$a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2$$

**5. Τριώνυμο της μορφής  $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$**  το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$x^2 + (a + \beta)x + a\beta = (x + a)(x + \beta)$$

**6. Τριώνυμο της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma$ :** Όταν η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  έχει λύσεις τις  $\rho_1, \rho_2$  το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

### Παραδείγματα:

- Κοινός παράγοντας:**  $6xy^3 - 3x^2y^5 + 9x^4y^2 = 3xy^2(2y - xy^3 + 3x^3)$
- Ομαδοποίηση:**  $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$
- Διαφορά τετραγώνων:**  $9x^2 - \frac{25y^2}{4} = (3x)^2 - \left(\frac{5y}{2}\right)^2 = \left(3x - \frac{5y}{2}\right)\left(3x + \frac{5y}{2}\right)$
- Ανάπτυγμα τετραγώνου:**  $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$   
**Ανάπτυγμα τετραγώνου:**  $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$
- Τριώνυμο της μορφής  $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$ :**  
 $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \cdot 2 = (x + 3)(x + 2)$   
**Τριώνυμο της μορφής  $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$ :**  
 $x^2 - x - 6 = x^2 + (-3 + 2)x + (-3) \cdot 2 = [x + (-3)](x + 2) = (x - 3)(x + 2)$
- Τριώνυμο της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma$ :**  $2x^2 + 5x - 3$

$$a=2 \quad \Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$$

$$\beta=5$$

$$\gamma=-3$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$
$$\frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)[x - (-3)] = \left(2x - 2\frac{1}{2}\right)(x + 3) = (2x - 1)(x + 3)$$

## 20. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

## 21. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει εκτός απ' αυτές που μηδενίζουν τον παρονομαστή αφού όπως γνωρίζουμε δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

**Παράδειγμα:**  $\frac{x^2 + 6}{x + 2}$  Η αλγεβρική παράσταση ορίζεται αρκεί  $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

## 22. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα (αν δεν είναι γινόμενα τους παραγοντοποιούμε).

**Παράδειγμα:**  $\frac{5x - 10}{x^2 - 4} = \frac{5(x - 2)}{x^2 - 2^2} = \frac{5(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{5}{x + 2}$

## 23. Πως κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων.

<p><b>Πολλαπλασιασμός</b></p>	$\alpha \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \quad \text{και}$ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$	<p>Πχ: <math>3y \frac{5x^2}{6y^2} = \frac{3y \cdot 5x^2}{6y^2} = \frac{15yx^2}{6y^2} = \frac{5x^2}{2y}</math></p> <p><math>\frac{x^2 - 1}{3x + 3} \cdot \frac{2x}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{3(x + 1)} \cdot \frac{2x}{x - 1}</math></p> <p>Πχ: <math>= \frac{(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot 2x}{3(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{2x}{3}</math></p>
<p><b>Διαίρεση</b></p>	$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$	<p>Πχ: <math>\frac{x}{x + 1} : \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \frac{x}{x + 1} \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{2x^2} =</math></p> <p><math>= \frac{x(x - 1)(x + 1)}{2x^2(x + 1)} = \frac{x - 1}{2x^2}</math></p>
<p><b>Πρόσθεση - αφαίρεση</b></p>	$\frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma}$	<p>Πχ: <math>\frac{3x}{x - 2} + \frac{2x - 1}{x - 2} - \frac{7 + x}{x - 2} = \frac{3x + (2x - 1) - (7 + x)}{x - 2} =</math></p> <p><math>= \frac{3x + 2x - 1 - 7 - x}{x - 2} = \frac{4x - 8}{x - 2} = \frac{4(x - 2)}{x - 2} = 4</math></p>

Προσοχή αν τα κλάσματα δεν είναι ομώνυμα τα κάνουμε ομώνυμα βρίσκοντας το

Ε.Κ.Π. των παρονομαστών:

	Βήματα
$\text{Πχ: } \frac{2}{3x^2-3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x-3} =$	1 <sup>ο</sup> : Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
$\frac{2}{3x(x-1)} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3(x-1)}$	2 <sup>ο</sup> : Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών Ε.Κ.Π.=6x(x-1)
$\frac{\frac{2}{\cancel{2}}}{3x(x-1)} + \frac{\frac{5}{\cancel{5}}}{6x} - \frac{\frac{2}{\cancel{2}}}{3(x-1)} =$ $= \frac{4}{6x(x-1)} + \frac{5(x-1)}{6x(x-1)} - \frac{4x}{6x(x-1)} =$	3 <sup>ο</sup> : Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και τις πράξεις που μεταφέρονται στον αριθμητή.
$= \frac{4+5(x-1)-4x}{6x(x-1)} = \frac{4+5x-5-4x}{6x(x-1)} = \frac{x-1}{6x(x-1)} = \frac{1}{6x}$	4 <sup>ο</sup> : Κάνουμε τυχόν παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις που προκύπτουν.