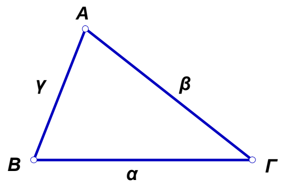
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ *ΘΕΩΡΙΑΣ* ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

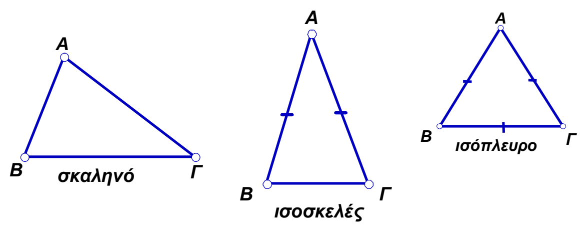
1. Τι ονομάζεται Τρίγωνο και ποια τα κύρια στοιχεία του;



- Ονομάζεται ***τρίγωνο*** το επίπεδο σχήμα που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία τα οποία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα.
- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι, οι πλευρές του και οι γωνίες του
- ***Πλευρές*** του τριγώνου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του.
- ***Γωνίες*** του τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του.

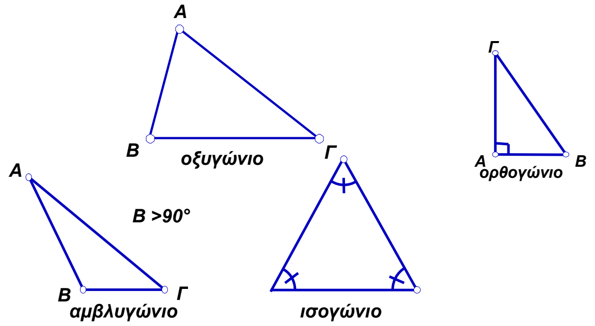
2. Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές, και ως προς τις γωνίες τους;

Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις πλευρές του λέγεται:



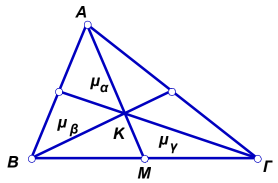
- ***σκαληνό***, αν οι πλευρές του είναι άνισες,
- ***ισοσκελές***, αν δύο πλευρές του είναι ίσες,
- ***ισόπλευρο***, αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.

Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις γωνίες του λέγεται:

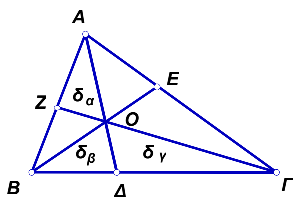


- ***οξυγώνιο***, αν όλες του οι γωνίες είναι οξείες,
- ***ορθογώνιο***, αν μία γωνία του είναι ορθή,
- ***αμβλυγώνιο***, αν μία γωνία του είναι αμβλεία.
- ***Ισογώνιο*** αν όλες οι γωνίες του είναι ίσες

3. Τι ονομάζεται διάμεσος, διχοτόμος, ύψος, τριγώνου.

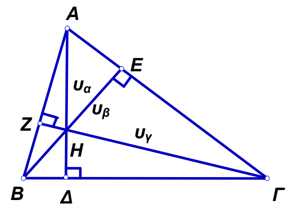


- ***Διάμεσος*** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς.Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διάμεσους που συμβολίζονται μ_α , μ_β , μ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.

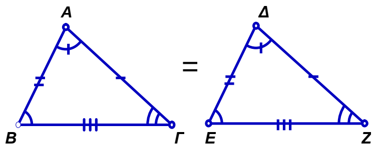


- ***Διχοτόμος*** μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με την απέναντι πλευρά και διχοτομεί τη γωνία αυτή.
  Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διχοτόμους που συμβολίζονται
  δ_α, δ_β, δ_γ αντίστοιχα και διέρχονται από το ίδιο σημείο.

- ***Ύψος*** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή του κάθετο προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρία ύψη που συμβολίζονται $\boldsymbol{\upsilon_\alpha}$, $\boldsymbol{\upsilon_\beta}$, $\boldsymbol{\upsilon_\gamma}$ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



4. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα ;



Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους (πλευρές απέναντι από ίσες γωνίες) ίσες μία προς μία.

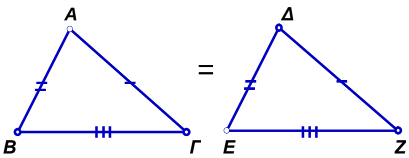
Έτσι αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα τότε: $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{\Delta}\\ \hat{B}=\hat{E}\\ \hat{\Gamma}=\hat{Z}\end{array}\right\}$ Γωνίες

$\left.\begin{array}{l}AB=\Delta E\\ B\Gamma=EZ\\ A\Gamma=\Delta Z\end{array}\right\}$ Ομόλογες πλευρές

5. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα; *(Κριτήρια ισότητας τριγώνων)*

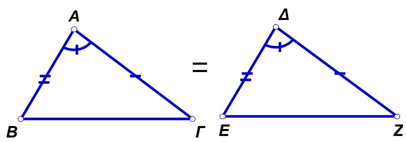
Κριτήριο (Π. Π. Π.)

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι τρεις πλευρές του ενός είναι ίσες με τις τρεις πλευρές του άλλου μία προς μία.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:



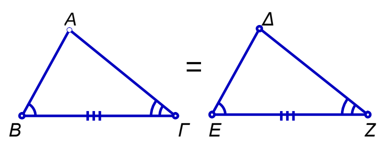
$\left.\begin{array}{l}AB=\Delta E\\ B\Gamma=EZ\\ A\Gamma=\Delta Z\end{array}\right\}$ οπότε είναι $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$

- ***Κριτήριο (Π. Γ. Π.)***
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του ενός είναι ίσες με τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του άλλου αντίστοιχα.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:



$\left.\begin{array}{l}AB=\Delta E\\ A\Gamma=\Delta Z\\ \hat{A}=\hat{\Delta}\end{array}\right\}$ οπότε είναι $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$

- ***Κριτήριο (Π. Γ. Γ.)***
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του ενός είναι ίσες με την μία πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του άλλου αντίστοιχα.

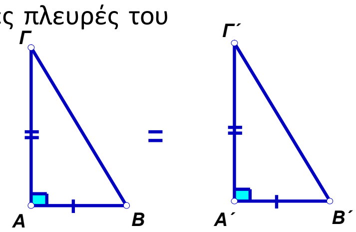


- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν: $\left.\begin{array}{l} B\Gamma = EZ \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} = \hat{Z} \end{array}\right\}$ οπότε είναι $AB\Gamma = \Delta EZ$

6. *Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα; (Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)*

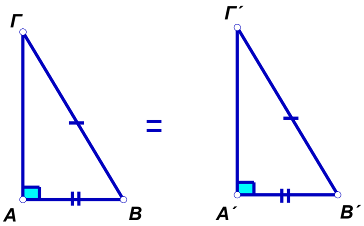
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι δύο κάθετες πλευρές του ενός είναι ίσες με τις δύο κάθετες πλευρές του άλλου.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :

$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^{\circ} \\ AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma' \end{array}\right\}$ οπότε είναι $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$



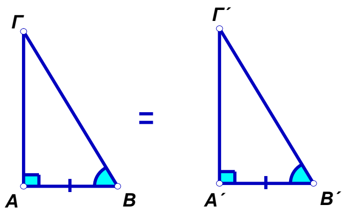
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά του άλλου.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :

$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^{\circ} \\ AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \end{array}\right\}$ οπότε είναι $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$



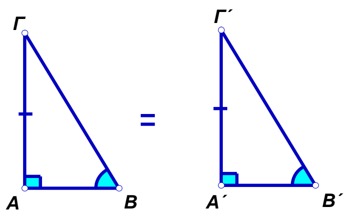
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η προσκείμενη της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με τη μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη της οξεία γωνία του άλλου.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

1 $\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^{\circ} \\ AB = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\}$ οπότε είναι $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$



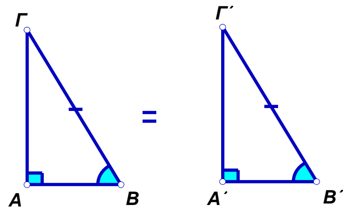
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η απέναντι της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την μία κάθετη πλευρά και την απέναντι της οξεία γωνία του άλλου.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^{\circ} \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\}$ οπότε είνα $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$



- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του άλλου.

♦ Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^o \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

7. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ;

♦ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

♦ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος.

8. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

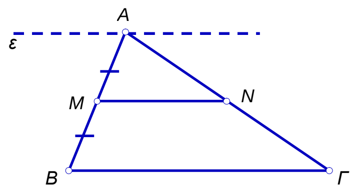
♦ Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

♦ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

9. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του , αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς του ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν. Θα δείξουμε ότι ΑΝ = ΝΓ. Από το σημείο Α φέρνουμε μια βοηθητική ευθεία ε // ΒΓ. Οι παράλληλες ευθείες ε, ΜΝ και ΒΓ ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Επομένως ΑΝ = ΝΓ.



10. Τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και με τι ισούται;

♦ Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$, ονομάζεται ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει ΓΔ=λ·ΑΒ.

♦ Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους *εφόσον* έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

11. Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ;

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β και δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα ***α,*** *β,* ***γ, δ.***

Τα ευθύγραμμα τμήματα **α, δ** ονομάζονται ***άκροι όροι,*** ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα ***β, γ*** ονομάζονται ***μέσοι όροι*** της αναλογίας.

12. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών ;

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα ***α, β, γ, δ*** εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. **Οι σημαντικότερες από τις ιδιότητες αυτές είναι:**

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

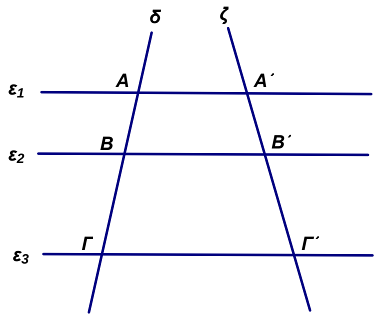
- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

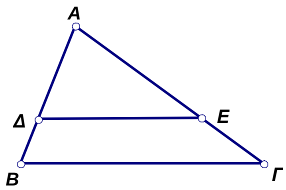
13. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή και τις πρόταση που προκύπτουν από αυτό για ένα τρίγωνο.



- Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μια είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης.

Δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ τότε $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

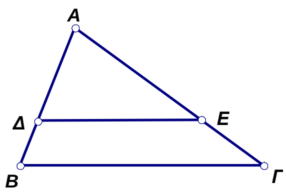
- Κάθε παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές του, σε ίσους λόγους.



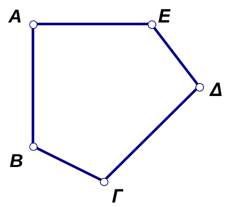
Δηλαδή ***αν ΔΕ // ΒΓ τότε*** $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$

Αντίστροφα:

- Αν μια ευθεία που τέμνει δύο πλευρές τριγώνου τις χωρίζει σε ίσους λόγους, είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά.



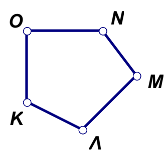
Δηλαδή ***αν*** $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$ ***τότε ΔΕ // ΒΓ***



14. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;

Δύο πολύγωνα λέγονται ***όμοια***, όταν το ένα είναι ***μεγέθυνση*** ή ***σμίκρυνση*** του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι

έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες(αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες.



Έτσι τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΟΚΛΜΝ που έχουν,

$\hat{A} = \hat{O}$, $\hat{B} = \hat{K}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Lambda}$, $\hat{\Delta} = \hat{M}$, $\hat{E} = \hat{N}$

και $\frac{AB}{OK} = \frac{B\Gamma}{K\Lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{\Lambda M} = \frac{\Delta E}{MN} = \frac{EA}{NO} = \lambda$ είναι όμοια.

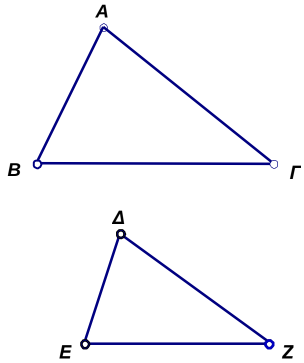
Το λ ονομάζεται λόγος ομοιότητας.

15. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητα δύο πολυγώνων;

Από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

16. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;



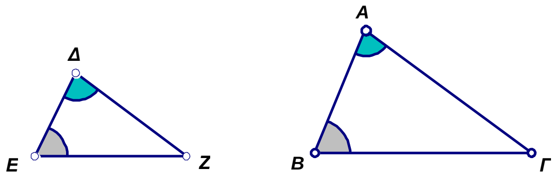
- Δύο τρίγωνα λέγονται ***όμοια*** όταν έχουν τις γωνίες τους ***ίσες*** μία προς μία και τις ***ομόλογες*** (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή

αν $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \sim \overset{\triangle}{\Delta EZ}$, τότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

και $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ Ο λόγος των αντιστοίχων (ομολόγων) πλευρών τους ονομάζεται λόγος ομοιότητας και συμβολίζεται με λ.

17. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια; ***(Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)***

Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου μία προς μία.



Αν δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν

$\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, τότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \sim \overset{\triangle}{\Delta EZ}$,,

και επομένως $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

18. Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων;

- Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

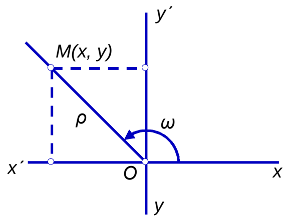
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

19. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας;

- Έστω ω ($0^\circ \leqq \omega \leqq 180^\circ$)η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Οx, όταν αυτός στραφεί κατά τη θετική φορά.

- Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ(x, y) με $\widehat{xOM} = ω$ και ΟΜ = $ρ = \sqrt{x^2 + y^2}$ τότε ορίζουμε:

- $ημω = \frac{y}{ρ}$
- $συνω = \frac{x}{ρ}$
- $εφω = \frac{y}{x}$

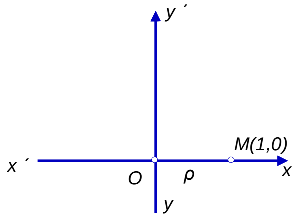


- Το ημω και συνω παίρνουν τιμές από το – 1 έως το +1.
- Είναι δηλαδή $-1 \leqq ημω \leqq 1$ και $-1 \leqq συνω \leqq 1$
- Η εφω παίρνει οποιαδήποτε τιμή.
- Αν το Μ(x, y) βρίσκεται στο 1^{ο} τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω>0, εφω>0
- Αν το Μ(x, y) βρίσκεται στο 2^{ο} τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω<0, εφω<0

20. Ποιοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω = 0° ή ω = 90° ή ω = 180°;

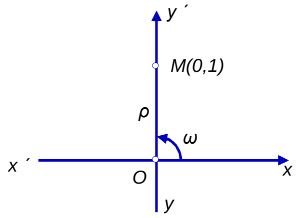
Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οx π.χ. το Μ(1,0), τότε $ω = \widehat{xOM} = 0°$ και ρ = ΟΜ=1 οπότε έχουμε:

- $ημ0° = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$
- $συν0° = \frac{x}{ρ} = \frac{1}{1} = 1$
- $εφ0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$



Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οy π.χ. το Μ(0, 1), τότε $ω = \widehat{xOM} = 90°$ και ρ = ΟΜ=1 οπότε έχουμε:

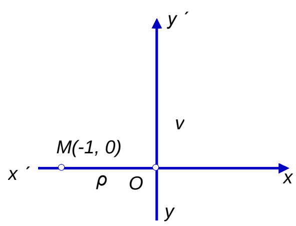
- $ημ90° = \frac{y}{ρ} = \frac{1}{1} = 1$
- $συν90° = \frac{x}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$
- εφ90° δεν ορίζεται, αφού x = 0



Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οx΄ π.χ. το σημείο Μ(–1, 0), τότε $ω = \widehat{xOM} = 180°$ και ρ = ΟΜ = 1 οπότε

έχουμε:

- $ημ180° = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$
- $συν180° = \frac{x}{ρ} = \frac{-1}{1} = 1$
- $εφ180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$



21. **Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;**

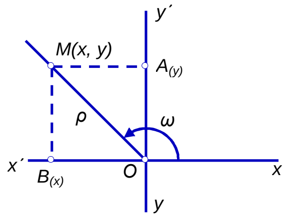
Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° - ω ισχύουν:

- ημ(180° – ω) = ημω
- συν(180° – ω) = –συνω
- εφ(180° – ω) = –εφω

22. **Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι τύποι:**

α. $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ **και** **β.** $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$

Απόδειξη α.

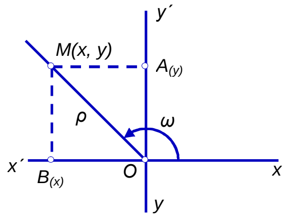


$$ημ^2ω + συν^2ω = \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 = \frac{y^2}{ρ^2} + \frac{x^2}{ρ^2} =$$

$$\frac{y^2 + x^2}{ρ^2} = \frac{|y|^2 + |x|^2}{ρ^2} = \frac{OA^2 + OB^2}{ρ^2}$$

$$\frac{OA^2 + AM^2}{ρ^2} = \frac{OM^2}{ρ^2} = \frac{ρ^2}{ρ^2}$$

Απόδειξη β.



$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} = \frac{y \cdot ρ}{x \cdot ρ} = \frac{y}{x} = εφω$$

23. **Να διατυπώσετε τον νόμο των ημιτόνων.**

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{α}{ημA} = \dfrac{β}{ημB} = \dfrac{γ}{ημγ}$

24. **Να διατυπώσετε τον νόμο των συνημιτόνων.**

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις

- $α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγσυνA$
- $β^2 = γ^2 + α^2 – 2γασυνB$
- $γ^2 = α^2 + β^2 – 2αβσυνΓ$