

Μια εύκολη επαναληπτική άσκηση στη μηχανική ΑΑΤ, αλλά ...
με πολλά χρήσιμα ερωτήματα για έλεγχο των γνώσεων και επανάληψη.

Υλικό σημείο μάζας $m = 0,02\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,4\text{m}$ και περιόδου $T = \frac{\pi}{10}$ s. Την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση όπου η δυναμική του ενέργεια U είναι μηδέν ($U = 0$), κινούμενο κατά την θετική κατεύθυνση.

α. Να βρείτε την αρχική θέση x του ταλαντωτή, την αρχική φάση ϕ_0 της ΑΑΤ και να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης, συναρτήσει του χρόνου.

β. Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$, την απομάκρυνση, την ταχύτητα, την επιτάχυνση, την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου.

γ. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο t , την απομάκρυνση, την ταχύτητα, την επιτάχυνση, την συνισταμένη δύναμη, την ολική, την δυναμική και την κινητική ενέργεια.

δ. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x , την επιτάχυνση, την συνισταμένη δύναμη, την ολική, την δυναμική και την κινητική ενέργεια.

ε. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την ταχύτητα v , την ολική, την δυναμική και την κινητική ενέργεια.

ζ. Να βρείτε την ελάχιστη χρονική διάρκεια που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση $x_1 = 0$ στη θέση $x_2 = +0,2\text{m}$ αν κινείται κατά την θετική κατεύθυνση.

η. Κατά το χρονικό διάστημα της προηγούμενης ερώτησης (ζ), να βρείτε το έργο της συνισταμένης δύναμης, που ενεργεί στο υλικό σημείο.

θ. Για ποιες τιμές της απομάκρυνσης x η δυναμική ενέργεια U του ταλαντωτή είναι ίση με το 50% της ολικής του ενέργειας E ;

ι. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$, να βρείτε για το υλικό σημείο, τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.

κ. Να βρείτε την χρονική στιγμή t_1 , στην οποία η δυναμική ενέργεια U του ταλαντωτή είναι ίση με το 25% της ολικής του ενέργειας E , για δεύτερη φορά. Πόση είναι τότε, η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του ταλαντωτή;

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Λύση

Υλικό σημείο μάζας $m = 0,02\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,4\text{m}$ και περιόδου $T = \pi/10\text{ s}$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση όπου η δυναμική του ενέργεια $U = 0$ κινούμενο κατά την θετική κατεύθυνση.

- α. Να βρείτε την αρχική θέση x του ταλαντωτή, την αρχική φάση φ_0 της ΑΑΤ και να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης, συναρτήσει του χρόνου.

$$\text{την } t = 0 \text{ είναι } U = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Επειδή για } t = 0 \text{ είναι } x = 0 \text{ και } v > 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

$$A = 0,4\text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 20\text{rad/s}$$

$$x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow x = 0,4\eta\mu 20t \quad (\text{SI})$$

$$v = \omega A\eta\mu\omega t \Rightarrow v = 8\sigma\upsilon\nu 20t \quad (\text{SI})$$

$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu\omega t \Rightarrow \alpha = -160\eta\mu 20t \quad (\text{SI})$$

- β. Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t = T/6$ την απομάκρυνση, την ταχύτητα, την επιτάχυνση, την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου.

$$x = 0,4\eta\mu 20t \Rightarrow x = 0,4\eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{6} \text{ m} \Rightarrow x = 0,4\eta\mu \frac{\pi}{3} \text{ m} \Rightarrow x = 0,4 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m} \Rightarrow x = 0,2\sqrt{3}\text{m}$$

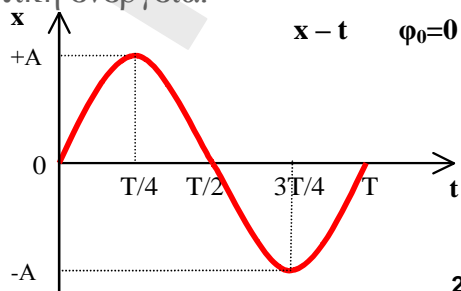
$$v = 8\sigma\upsilon\nu 20t \Rightarrow v = 8\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \text{ m/s} \Rightarrow v = 8 \frac{1}{2} \text{ m/s} \Rightarrow v = 4\text{m/s}$$

$$\alpha = -160\eta\mu 20t \Rightarrow \alpha = -160\eta\mu \frac{\pi}{3} \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha = -160 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha = -80\sqrt{3}\text{m/s}^2$$

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}0,02 \cdot 20^2 (0,2\sqrt{3})^2 \text{ J} \Rightarrow U = 0,48 \text{ J}$$

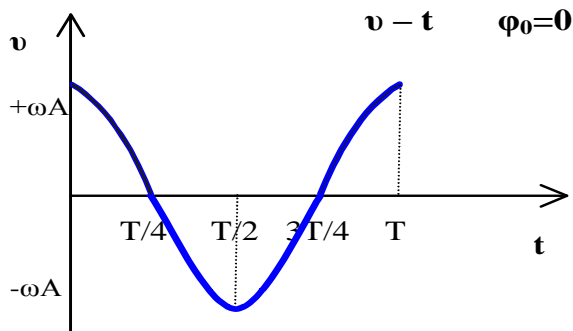
$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}0,02 \cdot 4^2 \text{ J} \Rightarrow K = \frac{1}{2}0,02 \cdot 4^2 \text{ J} \Rightarrow K = \frac{1}{2}0,02 \cdot 4^2 \text{ J} \Rightarrow K = 0,16 \text{ J}$$

- γ. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο t , την απομάκρυνση, την ταχύτητα, την επιτάχυνση, την συνισταμένη δύναμη, την ολική, την δυναμική και την κινητική ενέργεια.



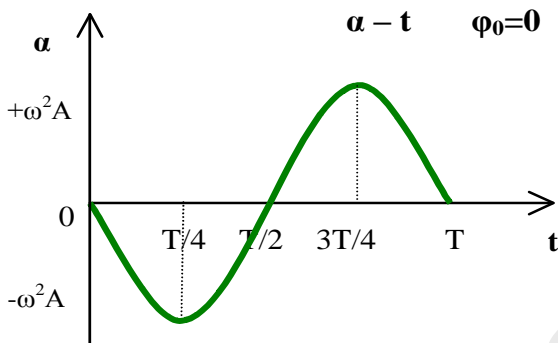
$$A = 0,4\text{m}$$

$$T = \frac{\pi}{10}\text{s}$$



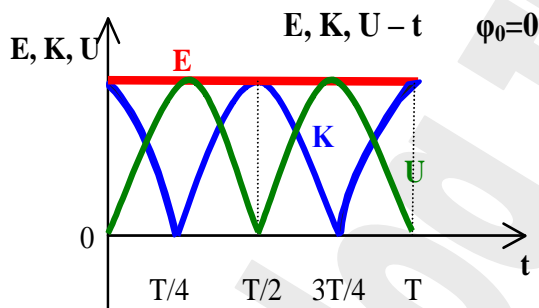
$$v_{\max} = \omega A = 8 \text{ m/s}$$

$$T = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$



$$\alpha_{\max} = \omega^2 A = 160 \text{ m/s}^2$$

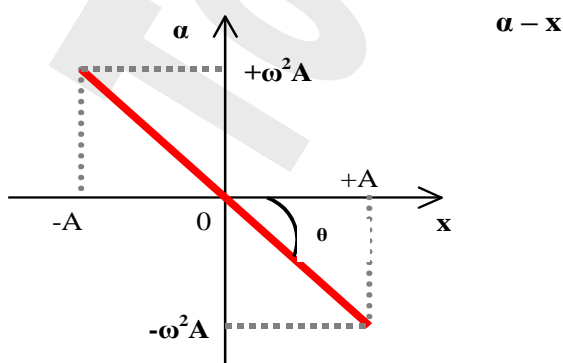
$$T = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$



$$E = 0,64 \text{ J}$$

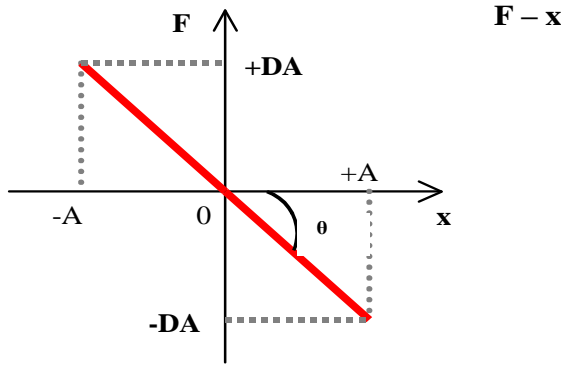
$$T = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

δ. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x , την επιτάχυνση, την συνισταμένη δύναμη, την ολική, την δυναμική και την κινητική ενέργεια.



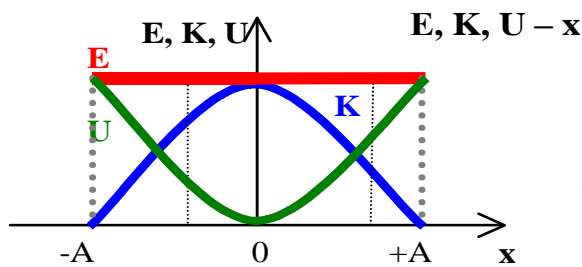
$$\alpha_{\max} = \omega^2 A = 160 \text{ m/s}^2$$

$$A = 0,4 \text{ m}$$



$$F_{\max} = DA = 3,2 \text{ N/m}$$

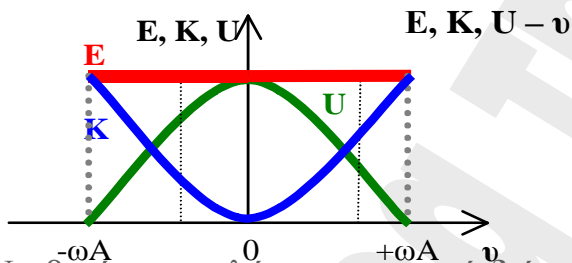
$$A = 0,4\text{m}$$



$$E = 0,64 \text{ J}$$

$$A = 0,4\text{m}$$

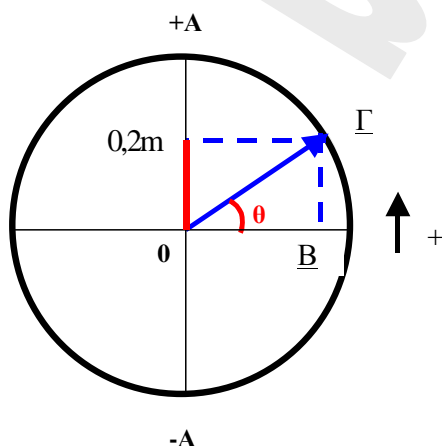
ε. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την ταχύτητα v , την ολική, την δυναμική και την κινητική ενέργεια.



$$E = 0,64 \text{ J}$$

$$v_{\max} = \omega A = 8\text{m/s}$$

ζ. Να βρείτε την ελάχιστη χρονική διάρκεια που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση $x_1=0$ στη θέση $x_2=+0,2\text{m}$ αν κινείται κατά την θετική κατεύθυνση.



$$\eta\mu\theta = \frac{B\Gamma}{O\Gamma} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{0,2\text{m}}{0,4\text{m}}$$

$$\Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\theta = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{6\omega} - 0$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{6 \cdot 20} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{120} \text{ s}$$

η. Κατά το χρονικό διάστημα της προηγούμενης ερώτησης (ζ), να βρείτε το έργο της συνισταμένης δύναμης που ενεργεί στο υλικό σημείο.

$$v_{APX}^2 = \omega^2 \left[\sqrt{A^2 - x_{APX}^2} \right]^2 \Rightarrow v_{APX}^2 = 20^2 \left[\sqrt{0,4^2 - 0^2} \right]^2 \Rightarrow v_{APX} = 8 \text{ m/s}$$

$$v_{TEA}^2 = \omega^2 \left[\sqrt{A^2 - x_{TEA}^2} \right]^2 \Rightarrow v_{TEA}^2 = 20^2 \left[\sqrt{0,4^2 - 0,2^2} \right]^2 \Rightarrow v_{TEA} = 4\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$W_{\Sigma F} = K_{TEA} - K_{APX} \Rightarrow W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} m v_{TEA}^2 - \frac{1}{2} m v_{APX}^2$$

$$\Rightarrow W_{\Sigma F} = \left[\frac{1}{2} 0,02 \cdot (4\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} 0,02 \cdot (8)^2 \right] \text{ J} \Rightarrow W_{\Sigma F} = -0,16 \text{ J}$$

θ. Για ποιες τιμές της απομάκρυνσης x η δυναμική ενέργεια U του ταλαντωτή είναι ίση με το 50% της ολικής του ενέργειας E ;

$$U = \frac{50}{100} E \Rightarrow U = \frac{1}{2} E \Rightarrow \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} A^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2} = \pm 0,2\sqrt{2} \text{ m}$$

ι. Τη χρονική στιγμή $t = T/6$ να βρείτε για το υλικό σημείο, τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -m\omega^2 \cdot x = -0,02 \cdot 20^2 \cdot 0,2\sqrt{3} \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -1,6\sqrt{3} \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -Dx \cdot v = -1,6\sqrt{3} \cdot 4 \text{ J/s} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -6,4\sqrt{3} \text{ J/s}$$

κ. Να βρείτε την χρονική στιγμή t , στην οποία η δυναμική ενέργεια U του ταλαντωτή είναι ίση με το 25% της ολικής του ενέργειας E , για δεύτερη φορά. Πόση είναι τότε η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του ταλαντωτή;

$$U = \frac{25}{100} E \Rightarrow U = \frac{1}{4} E \Rightarrow \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} A^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{2} = \pm 0,2 \text{ m}$$

Την 2^η φορά που $U = \frac{25}{100} E$, είναι $x > 0$, $v < 0$, $a < 0$.

Άρα δεκτή λύση είναι η $x = +0,2 \text{ m}$

$$x = 0,4 \eta \mu 20t \Rightarrow 0,2 = 0,4 \eta \mu 20t \Rightarrow \eta \mu 20t = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta \mu 20t = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$20t = \frac{\pi}{6} \quad (v > 0) \quad \text{ή} \quad 20t = \frac{5\pi}{6} \quad (v < 0) \rightarrow \text{ΔΕΚΤΗ ΛΥΣΗ}$$

$$20t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{5\pi}{120} \text{ s} \Rightarrow t = \frac{\pi}{24} \text{ s}$$

$$v = 8 \sigma \nu \eta \mu 20t \Rightarrow v = 8 \sigma \nu \eta \mu 20 \frac{5\pi}{120} \Rightarrow v = 8 \sigma \nu \frac{5\pi}{6} \text{ m/s} \Rightarrow v = 8 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ m/s} \Rightarrow v = -4\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 A \eta \mu \omega t \Rightarrow a = -160 \eta \mu 20 \frac{5\pi}{120} \Rightarrow a = -160 \eta \mu \frac{5\pi}{6} \text{ m/s}^2 \Rightarrow a = -160 \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 \Rightarrow a = -80 \text{ m/s}^2$$