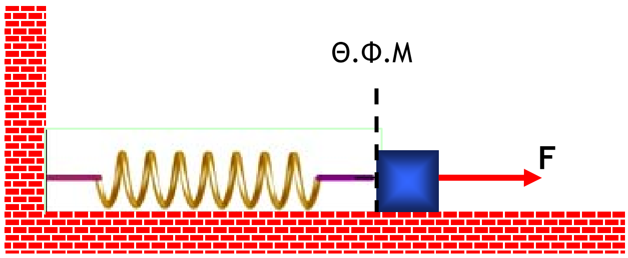
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σώμα μάζας **m=1 kg** που είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς **k=400N/m**, το άλλο άκρο του οποίου είναι συνδεδεμένο με ακλόνητο σημείο. Αρχικά το σώμα ισορροπεί στη **Θ**έση **Φ**υσικού **Μ**ήκους του ελατηρίου. Απ' τη χρονική στιγμή t=0 και μετά ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη **F=80N**, όπως φαίνεται στο σχήμα, οπότε αυτό εκτελεί ταλάντωση.



α) Να αποδείξετε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της κίνησης του σώματος

β) Να βρείτε το πλάτος και να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης του σώματος θεωρώντας ως θετική τη φορά της δύναμης.

γ) Να βρεθεί η χρονική διάρκεια της κίνησης από τη στιγμή που περνά από τη θέση με απομάκρυνση $x = \frac{A}{2}$ με θετική ταχύτητα μέχρι τη θέση που ο ρυθμός μεταβολής της ορμής έχει τιμή $-40\sqrt{3}\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}$ και το μέτρο της ταχύτητας του αυξάνεται.

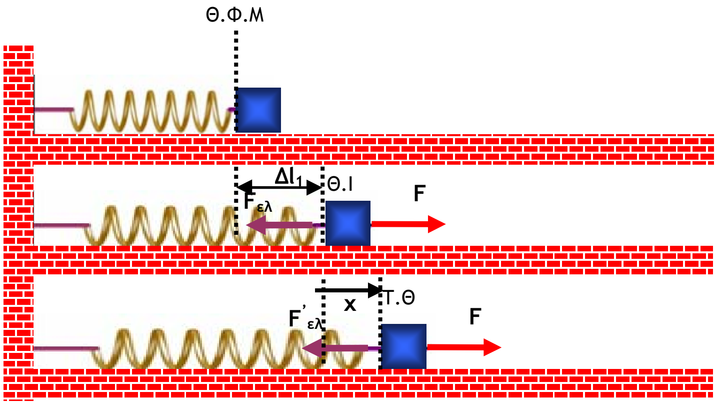
δ) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{F_{ελ(max)}}{F_{επ(max)}}$

ε) Ποιο είναι το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας όταν ισχύει K=3U;

στ) Αν καταργηθεί η F τη στιγμή που το σώμα φτάνει στη θετική ακραία θέση ποιο είναι το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σώματος;

Απάντηση:

α) Για να αποδείξω ότι ένα σώμα κάνει Α.Α.Τ. σχεδιάζω το σώμα σε τρεις θέσεις όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Στη Θ.Ι:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F = F_{ελ} \rightarrow \boxed{F = k\Delta l_1}\ (1)$$

Στην τυχαία Θέση:

$$\Sigma F = F - F'_{ελ} \rightarrow \Sigma F = F - k(\Delta l + x) \rightarrow$$

$$\Sigma F = F - k\Delta l - kx \xrightarrow{(1)} \boxed{\Sigma F = -kx}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{400}} \rightarrow T = \frac{\pi}{10}s$$

β) Το σώμα αρχικά ήταν ακίνητο δηλαδή υ=0, οπότε η Θ.Φ.Μ είναι και ακραία θέση για την ταλάντωση. Η απόσταση της ακραίας Θέσης από τη Θ.Ι είναι το πλάτος, δηλαδή $A=\Delta l_1 \xrightarrow{(1)} A=\frac{F}{k} \to A=\frac{80}{400} \to A=0.2m$

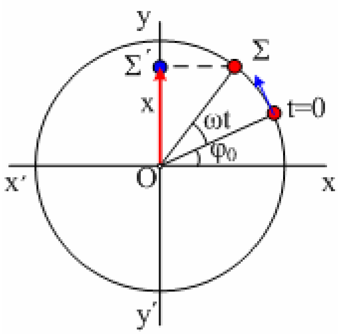
Για να γράψουμε την εξίσωση πρέπει να βρούμε την αρχική φάση της ταλάντωσης. Την t=0 x=-A αφού επιλέξαμε ως θετική φορά προς τα δεξιά.
Έτσι, έχουμε:

$$x = A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \to -A = A\cdot\eta\mu\varphi_0 \to \eta\mu\varphi_0 = -1 \to \eta\mu\varphi_0 = -\eta\mu\frac{\pi}{2} \to \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \to \omega=\sqrt{\frac{400}{1}} \to \boxed{\omega = 20 rad/s}$$

Άρα η εξίσωση της ταλάντωσης είναι: $\boxed{x = 0.2\cdot\eta\mu(20t+\frac{3\pi}{2})}$

γ) Για να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα κίνησης μεταξύ δυο θέσεων μπορούμε να δουλέψουμε με δυο τρόπους. Είτε επιλύνοντας την εξίσωση της απομάκρυνσης για τις δυο τιμές του x είτε με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος.
Επειδή στο σχολικό βιβλίο δε γίνεται καμία αναφορά στο στρεφόμενο διάνυσμα, τα παιδιά υποχρεούνται να γράψουν δυο λόγια σαν περιγραφή του .
Έστω ότι έχουμε ένα σώμα Σ που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, διαγράφοντας έναν κατακόρυφο κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R=A. Το σώμα ξεκινά για t=0 από μια θέση όπου η επιβατική ακτίνα σχηματίζει γωνία φ_0 με τον άξονα x. Μετά από χρόνο t το σώμα έχει διαγράψει γωνία θ=ωt όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.



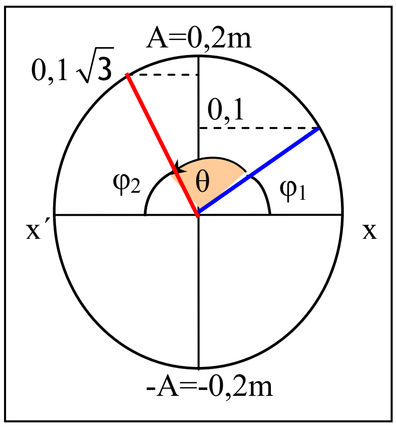
Αν πάρουμε την προβολή στον άξονα y΄y του σώματος Σ, θα πάρουμε το σώμα Σ΄ το οποίο απέχει από το κέντρο Ο του κύκλου απομάκρυνση:
(ΟΣ΄)=x=(ΟΣ)ημ(ωt+φ_0) ή x=A·ημ(ωt + φ_0).
Παρατηρούμε δηλαδή ότι το σημείο Σ΄ εκτελεί α.α.τ στον κατακόρυφο άξονα y΄y γύρω από τη θέση ισορροπίας Ο, με γωνιακή συχνότητα ω (όση και η γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος Σ) και αρχική φάση φ_0 (όση είναι η αρχική γωνία που σχηματίζει το σώμα Σ με τον οριζόντιο ημιάξονα Οx).

Αρχικά βρίσκω τις δυο θέσεις των σωμάτων.

$x_1=\frac{A}{2}$, Για τη δεύτερη θέση ισχύει:

$$\frac{dp}{dt}=\Sigma F \to \frac{dp}{dt}=-Dx \to -40\sqrt{3}=-400x_2 \to$$

$\boxed{x_2 = 0.1\sqrt{3}m}$ Επειδή το μέτρο της ταχύτητας του αυξάνεται, το σώμα κινείται προς τη Θ.Ι με υ<0.



Βρίσκω τις γωνίες φ_1, φ_2.

$$\eta\mu\varphi_1=\frac{x_1}{A} \to \eta\mu\varphi_1=\frac{0.1}{0.2} \to \eta\mu\varphi_1=\frac{1}{2} \to \varphi_1=\frac{\pi}{6}$$

$$\eta\mu\varphi_2 = \frac{x_2}{A} \rightarrow \eta\mu\varphi_2 = \frac{0.1\sqrt{3}}{0.2} \rightarrow \eta\mu\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$$

Άρα η γωνία είναι:

$$\theta = \pi - \varphi_1 - \varphi_2 \rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega\Delta t = \frac{\pi}{2} \rightarrow 20\Delta t = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\pi}{40} s}$$

δ) $\dfrac{F_{\varepsilon\lambda(max)}}{F_{\varepsilon\pi(max)}} = \dfrac{k\Delta l_{max}}{DA} = \dfrac{k(\Delta l_1 + A)}{kA} = \dfrac{k(A+A)}{kA} = 2$

ε) Από Α.Δ.Ε.Τ προκύπτει:

$$K + U = E \rightarrow 4U = E \rightarrow 4\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow \boxed{x = \pm\frac{A}{2}}$$

$K + U = E \rightarrow \dfrac{K}{3} + K = E \rightarrow \dfrac{4K}{3} = E \rightarrow K = \dfrac{3}{4}E \rightarrow \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}m\upsilon_{max}{}^2 \rightarrow \boxed{\upsilon = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_{max}}$ Άρα :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\Sigma F \cdot x)}{dt} = \Sigma F \cdot \frac{dx}{dt} = (\Sigma F \cdot u) \rightarrow \frac{dK}{dt} = (-Dx \cdot u) \rightarrow$$

$$\left|\frac{dK}{dt}\right| = k\frac{A}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A = 400 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{3} \cdot 10 \cdot 0{,}2 = 80 \cdot \sqrt{3} \ \ J/s.$$

Στ) Αν καταργηθεί η F στην θετική ακραία θέση, η θέση αυτή παραμένει ακραία αλλά αλλάζει η Θ.Ι., η οποία ταυτίζεται με τη Θ.Φ.Μ. Άρα $A' = \Delta l_1 + A \rightarrow A' = 2A = 0.4m$.