ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Αν δίνεται η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης:

$$\chi = A\eta\mu\left(\omega t + \phi_o\right)$$

για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε:

α. Μπορούμε να βρούμε το πλάτος $\mathbf{A}$, την κυκλική συχνότητα $\boldsymbol{\omega}$, καθώς και την περίοδο $\mathbf{T = 2\pi/\omega}$, τη συχνότητα $\mathbf{f = \omega/2\pi}$ και την αρχική φάση $\boldsymbol{\phi_o}$.

β. Μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις εξισώσεις όλων των υπόλοιπων μεγεθών της ταλάντωσης:

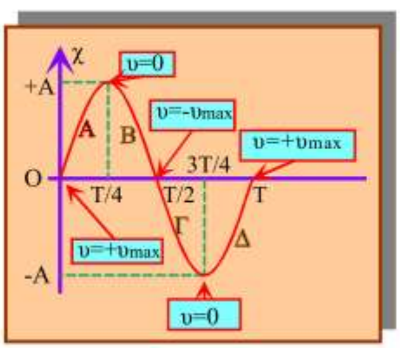
Ταχύτητα: $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \phi_o\right)$

Επιτάχυνση: $\alpha = -\omega^2\chi = -\omega^2 A\eta\mu\left(\omega t + \phi_o\right)$

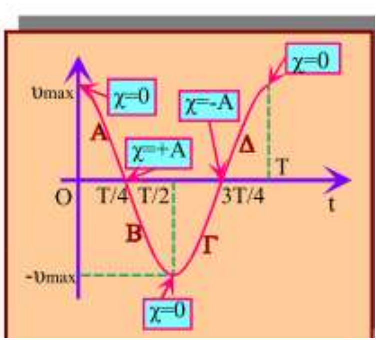
Δύναμη: $F = m\alpha = -m\omega^2 A\eta\mu\left(\omega t + \phi_o\right)$

Μελέτη της ταλάντωσης μέσω δοσμένης γραφικής παράστασης.

Έστω ότι δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης ή της ταχύτητας:



Τμήμα A	Κίνηση από τη Θ.Ι. προς την πάνω Α.Θ.Τ.	$\chi > 0, \vec{\chi} \uparrow$ $\upsilon > 0, \vec{\upsilon} \downarrow$
Τμήμα B	Κίνηση από την πάνω Α.Θ.Τ. προς τη Θ.Ι.	$\chi > o, \vec{\chi} \downarrow$ $\upsilon < 0, \lvert\vec{\upsilon}\rvert \uparrow$
Τμήμα Γ	Κίνηση από τη Θ.Ι. προς την κάτω Α.Θ.Τ.	$\chi < 0, \lvert\vec{\chi}\rvert \uparrow$ $\upsilon < 0, \lvert\vec{\upsilon}\rvert \downarrow$
Τμήμα Δ	Κίνηση από την κάτω Α.Θ.Τ προς τη Θ.Ι.	$\chi < 0, \lvert\vec{\chi}\rvert \downarrow$ $\upsilon > 0, \vec{\upsilon} \uparrow$



Τι σημαίνουν οι εκφράσεις:

Κίνηση στο θετικό ημιάξονα:
Περιοχές όπου **$\chi>0$:** τμήματα **Α** και **Β**

Κίνηση κατά τη θετική φορά:
Περιοχές όπου **$\upsilon>0$:** τμήματα **Α** και **Δ**

<u>Σημείωση</u>: Από κάθε θέση της ταλάντωσης του το σώμα διέρχεται κινούμενο και προς τις δυο κατευθύνσεις, **θετική όπου** $\upsilon > 0$, **αρνητική όπου** $\upsilon < 0$. Έτσι, αν δίνεται η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t = 0$, θα δίνεται ταυτόχρονα και ένας περιορισμός σχετικός με την ταχύτητα του. Σε αντίθετη περίπτωση, θα έχουμε δυο λύσεις για την αρχική φάση.

Οι γραφικές παραστάσεις που σχεδιάστηκαν, αντιστοιχούν σε εξισώσεις:

Απομάκρυνσης: $\chi = A\eta\mu\omega t$

Ταχύτητας: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t, \quad \upsilon_{max} = \omega A$

Αν οι εξισώσεις έχουν αρχική φάση, οι γραφικές παραστάσεις μετατοπίζονται ανάλογα.

Προσδιορισμός αρχικής φάσης φ_o

Έστω ότι δίνεται η απομάκρυνση χ από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $t = 0$.

α. Γράφουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης στη μορφή:

$$\chi = A\eta\mu(\omega t + \phi_o)$$

β. Θέτουμε $t = 0$ και την απομάκρυνση που δίνεται. Επιλύουμε την τριγωνομετρική εξίσωση απ' όπου προκύπτουν δυο δέσμες λύσεων:

$$\eta\mu\phi_o = \eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} \phi_o = 2\kappa\pi + \theta \\ \phi_o = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases} \xrightarrow[\kappa=0]{0\le\phi_o\le 2\pi} \begin{matrix} \phi_o = \theta \\ \phi_o = \pi - \theta \end{matrix}$$

Δεκτή θα γίνει η λύση που θα επαληθεύει και τον περιορισμό που θα δίνεται, συνήθως για την ταχύτητα. Αν δίνεται η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακολουθούμε αντίστοιχη διαδικασία. Γράφουμε:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_o)$$

και επιλύουμε την εξίσωση των συνημίτονων, οι λύσεις της οποίας είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\phi_o = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \varphi_o = 2\kappa\pi \pm \theta \xrightarrow{0\le\phi_o\le 2\pi} \begin{cases} \xrightarrow{\kappa=0} \phi_o = \theta \\ \xrightarrow[\kappa=1]{} \phi_o = 2\pi - \theta \end{cases}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

$\eta\mu 0 = 0$	$\sigma\upsilon\nu 0 = 1$
$\eta\mu 90 = 1$	$\sigma\upsilon\nu 90 = 0$
$\eta\mu 180 = 0$	$\sigma\upsilon\nu 180 = -1$
$\eta\mu 270 = -1$	$\sigma\upsilon\nu 270 = 0$
$\eta\mu 360 = 0$	$\sigma\upsilon\nu 360 = 1$

$$\eta\mu 30 = \sigma\upsilon\nu 60 = 1/2$$

$$\eta\mu 60 = \sigma\upsilon\nu 30 = \sqrt{3}/2$$

$$\eta\mu 45 = \sigma\upsilon\nu 45 = \sqrt{2}/2$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1° ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$\eta\mu(-\chi) = -\eta\mu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(-\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$
$\varepsilon\phi(-\chi) = -\varepsilon\phi\chi$
$\sigma\phi(-\chi) = -\sigma\phi\chi$

$\eta\mu(2\pi - \chi) = -\eta\mu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(2\pi - \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$
$\varepsilon\phi(2\pi - \chi) = -\varepsilon\phi\chi$
$\sigma\phi(2\pi - \chi) = -\sigma\phi\chi$

$\eta\mu(\pi/2 + \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(\pi/2 + \chi) = -\eta\mu\chi$
$\varepsilon\phi(\pi/2 + \chi) = -\sigma\phi\chi$
$\sigma\phi(\pi/2 + \chi) = -\varepsilon\phi\chi$

$\eta\mu(\pi/2 - \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(\pi/2 - \chi) = \eta\mu\chi$
$\varepsilon\phi(\pi/2 - \chi) = \sigma\phi\chi$
$\sigma\phi(\pi/2 - \chi) = \varepsilon\phi\chi$

$\eta\mu(\pi + \chi) = -\eta\mu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(\pi + \chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi$
$\varepsilon\phi(\pi + \chi) = \varepsilon\phi\chi$
$\sigma\phi(\pi + \chi) = \sigma\phi\chi$

$\eta\mu(\pi - \chi) = \eta\mu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(\pi - \chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi$
$\varepsilon\phi(\pi - \chi) = -\varepsilon\phi\chi$
$\sigma\phi(\pi - \chi) = -\sigma\phi\chi$

$\eta\mu(3\pi/2 + \chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(3\pi/2 + \chi) = \eta\mu\chi$
$\varepsilon\phi(3\pi/2 + \chi) = -\sigma\phi\chi$
$\sigma\phi(3\pi/2 + \chi) = -\varepsilon\phi\chi$

$\eta\mu(3\pi/2 - \chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(3\pi/2 - \chi) = -\eta\mu\chi$
$\varepsilon\phi(3\pi/2 - \chi) = \sigma\phi\chi$
$\sigma\phi(3\pi/2 - \chi) = \varepsilon\phi\chi$

$\eta\mu(2\kappa\pi + \chi) = \eta\mu\chi$
$\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$
$\varepsilon\phi(2\kappa\pi + \chi) = \varepsilon\phi\chi$
$\sigma\phi(2\kappa\pi + \chi) = \sigma\phi\chi, \kappa \in Z$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \theta \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}$
- $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \theta$
- $\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\theta \Rightarrow \chi = \kappa\pi + \theta$
- $\sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\theta \Rightarrow \chi = \kappa\pi + \theta, \ \kappa \in Z$