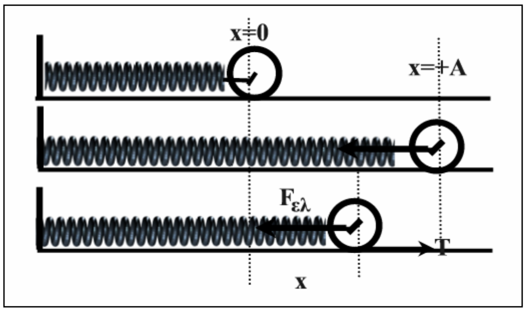
Β. 38 Ο κύλινδρος που φαίνεται στο σχήμα έχει μάζα m ακτίνα R και ροπή αδράνειας $I=mR^2/2$. Είναι συνδεδεμένος με κατάλληλη διάταξη με ελατήριο σταθεράς k που συνδέεται με το κέντρο μάζας του. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Αρχικά το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά A απομακρύνοντας τον κύλινδρο από τη θέση ισορροπίας του, και τον αφήνουμε ελεύθερο ώστε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς

α. D=k β. D=k/2 γ. D=2k δ. D=2k/3

Απάντηση

Για μια τυχαία απομάκρυνση, x: $\Sigma\tau_\kappa=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\alpha_{cm}}{R} \rightarrow T=\frac{m\alpha_{cm}}{2}$ (1)

$\Sigma F=m\alpha_{cm} \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}-T= m\cdot\alpha_{cm} \xrightarrow{(1)} F_{\varepsilon\lambda}-T=2T \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=3T \rightarrow -kx=3T \rightarrow T=-kx/3$ (2)

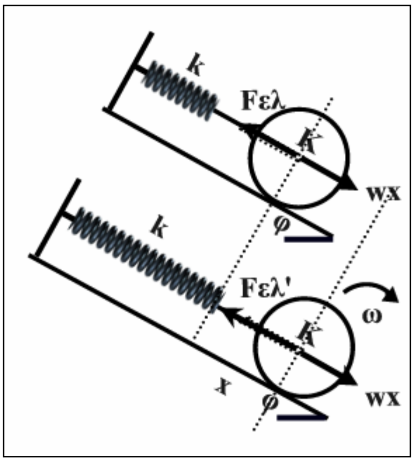
Οπότε: $\Sigma F= F_{\varepsilon\lambda}-T=3T-T=2T \rightarrow \Sigma F=2(-kx/3) \rightarrow \mathbf{\Sigma F=-2kx/3}$

Άρα, κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς **D=2k/3** Σωστό είναι το **(δ)**

Β.39 Το ελατήριο έχει σταθερά k, η μάζα του κυλίνδρου είναι m και η ροπή αδράνειας $I=mR^2$. Ο κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος να από εκείνη τη θέση στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi=30^0$.

Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς

α. D=2k β. D=k γ. D=k/2



Απάντηση

Στη θέση ισορροπίας του κυλίνδρου το ελατήριο έχει επιμήκυνση d και δέχεται στον άξονα x του κεκλιμένου επιπέδου τη συνιστώσα του βάρους w_x και τη δύναμη του ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}=kd$.

Ισχύει: $\Sigma F=0 \rightarrow w_x-F_{\varepsilon\lambda}=0 \rightarrow mg\eta\mu\varphi-kd=0 \rightarrow mg\eta\mu\varphi=kd$ (1)

Καθώς ο κύλινδρος κυλίεται θα πρέπει να ασκείται σε αυτόν στατική τριβή T για να μπορεί να περιστρέφεται. Σε μια τυχαία απομάκρυνση x έστω ότι το κέντρο μάζας του έχει επιτάχυνση α.

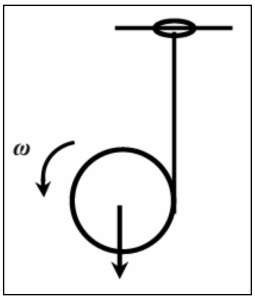
$\Sigma F_x=m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi-T-F_{\varepsilon\lambda}'=m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi-T-k(d+x)=m\alpha$ (2)

$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR=mR^2\frac{\alpha}{R} \rightarrow T=m\alpha$ (3)

Από (1)(2)(3)$\rightarrow mg\eta\mu\varphi-m\alpha-kd-kx=m\alpha \rightarrow 2m\alpha=-kx \rightarrow m\alpha=-kx/2$ (4)

$\Sigma F_x=m\alpha \rightarrow \mathbf{\Sigma F_x=-\frac{k}{2}x}$ Άρα κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς D=k/2 Σωστό είναι το **(γ)**

B.40 Ομογενής κυλινδρικός δίσκος ακτίνας R και μάζας m είναι τυλιγμένος με αβαρές νήμα η άλλη άκρη του οποίου είναι κρεμασμένη σε ακλόνητο σημείο. Αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο από την ηρεμία και αυτός εκτελεί ταυτόχρονα μια μεταφορική κίνηση με φορά προς τα κάτω και μια περιστροφική γύρω από το κέντρο μάζας του. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο δίσκο, $I=mR^2/2$. Η κινητική ενέργεια μεταφοράς του δίσκου τη στιγμή που θα έχει ολοκληρωθεί η τρίτη περιστροφή γύρω από το κέντρο μάζας του ισούται με:



α. 2πmgR β. 3πmgR γ. 4πmgR

Απάντηση

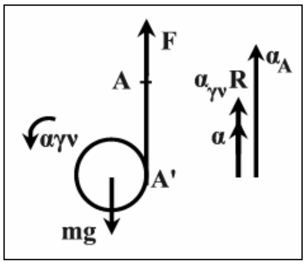
Μέχρι να κάνει τρεις πλήρεις περιστροφές ο δίσκος το κέντρο μάζας του θα έχει πέσει κατά h που είναι ίσο με το μήκος του νήματος που ξετυλίχτηκε δηλαδή $h=3\cdot 2\pi R=6\pi R$. Εξάλλου η ταχύτητα μεταφοράς του κέντρου μάζας υ ισούται με ωR, δηλαδή, $\upsilon=\omega R$.
Γράφουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το δίσκο από τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερος μέχρι το κέντρο μάζας του να πέσει κατά $h=6\pi R$.

$U_{αρχ}= mgh=mg6\pi R$.
$K_{αρχ}=0$
$U_{τελ}=0$

$$K_{τελ}=K_{μετ}+K_{περ}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{mR^2\cdot\upsilon^2}{2\cdot 2R^2}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{m\upsilon^2}{4}=K_{μετ}+\frac{K_{μετ}}{2}=\frac{3K_{μετ}}{2}$$

$U_{αρχ}+K_{αρχ}= U_{τελ}+K_{τελ} \rightarrow mg6\pi R=\frac{3K_{μετ}}{2}\rightarrow \mathbf{K_{μετ}= 4mg\pi R}$ Σωστό είναι το **(γ).**

B.41 Ομογενής κύλινδρος έχει μάζα m, ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος σ' αυτόν ίση με $I_K= ½\ mR^2$. Σε μικρό αυλάκι που είναι χαραγμένο στην κυλινδρική του επιφάνεια τυλίγεται αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου, Α, εφαρμόζεται κατακόρυφη σταθερή δύναμη F=4mg. Ο κύλινδρος αρχίζει να περιστρέφεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$.
Ι. Το μέτρο της επιτάχυνση του σημείου Α είναι:

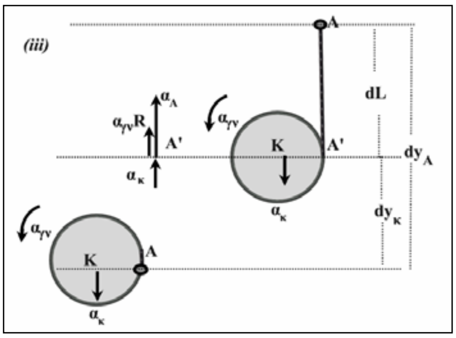


α. 3g β. 4g γ. 11g

ΙΙ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του δίσκου για ανύψωση του κέντρου μάζας κατά h, είναι:

α. 41mgh/3 β. 3mgh γ. 11mgh

Απάντηση



Ι. Αφού η δύναμη F=4mg είναι μεγαλύτερη από το βάρος mg το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα επιταχύνεται προς τα πάνω.
Το άκρο του νήματος Α και το σημείο Α′ του κυλίνδρου που εφάπτεται του νήματος έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια επιτάχυνση μεταξύ τους. Στο σημείο Α′ γίνεται η σύνθεση της επιτάχυνσης α_K του κέντρου μάζας και της επιτάχυνσης λόγω περιστροφής $\alpha_{γν}R$. Η συνισταμένη ισούται με την επιτάχυνση του σημείου Α′ δηλαδή και του Α και είναι η α_A.

Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$\vec{\alpha}_A=\vec{\alpha}_K+\vec{\alpha}_{\gamma\nu}R \rightarrow \alpha_A=\alpha_K+\alpha_{\gamma\nu}R$ (1)

Για τη μεταφορά : $\Sigma F=m\alpha_K \rightarrow F-mg=m\alpha_K \rightarrow 3mg=m\alpha_K \rightarrow \alpha_K=3g$ (2)

Για τη περιστροφή: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow FR=\frac{mR^2}{2}\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}R=\frac{2F}{m} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}R=8g$ (3)

Από (1),(2),(3) $\alpha_A=3g+8g=11g \rightarrow \boldsymbol{\alpha_A=11g}$ Σωστό είναι το **(γ)**

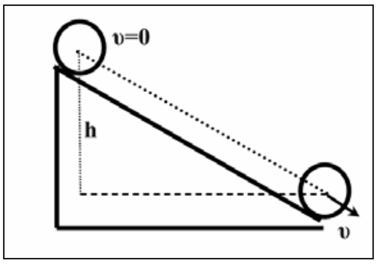
ΙΙ. Από το ΘΜΚΕ: $\Delta K=W_F+W_{mg}=F_A\cdot\Delta y_A-mg\Delta y_K$ (4) όπου $\Delta y_K=h$

$\Delta y_A=\frac{1}{2}\alpha_A t^2=\frac{1}{2}11gt^2$ και $\Delta y_K=\frac{1}{2}\alpha_K t^2=\frac{1}{2}\cdot 3gt^2$ Άρα $\Delta y_A=\frac{11}{3}\Delta y_K=\frac{11}{3}h$

$(4)\rightarrow \Delta K=4mg\frac{11}{3}h-mgh \rightarrow \boldsymbol{\Delta K=\frac{41}{3}mgh}$ Σωστό είναι το **(α)**

Β.42 Από ένα σημείο κεκλιμένου επιπέδου αφήνουμε μια στεφάνη με ροπή αδράνειας, Ι, να κατέβει. Αν το επίπεδο είναι λείο η στεφάνη θα κατέβει ολισθαίνοντας χωρίς τριβές, ενώ αν είναι τραχύ θα κατέβει κυλώντας χωρίς να ολισθαίνει. Η στεφάνη φτάνει με μεγαλύτερη ταχύτητα του κέντρου μάζας της, στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, αν το επίπεδο είναι:

α. Λείο. β. Τραχύ.



Δεχτείτε ότι και στις δύο περιπτώσεις το κέντρο μάζας πέφτει κατακόρυφα κατά το ίδιο, h.

Απάντηση

Στο λείο επίπεδο δεν υπάρχει στατική τριβή και η στεφάνη κάνει μόνο μεταφορική κίνηση διατηρώντας σταθερή τη μηχανική της ενέργεια.

$mgh=\frac{m\upsilon_1^2}{2} \rightarrow \upsilon_1=\sqrt{2gh}$

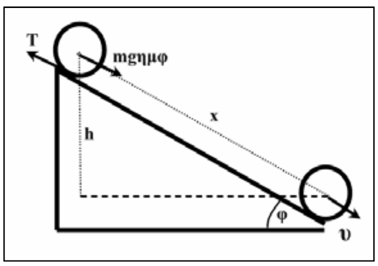
Στο τραχύ επίπεδο υπάρχει στατική τριβή και η στεφάνη κάνει σύνθετη κίνηση μεταφορική και περιστροφική. Και πάλι διατηρείται η μηχανική ενέργεια αφού η στατική τριβή αλλάζει συνεχώς σημείο εφαρμογής και δεν κάνει έργο.

$mgh=\frac{m\upsilon_2^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}$ Με $I=mR^2$ και $\omega=\upsilon/R$ αφού κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, έχουμε:

$mgh=\frac{m\upsilon_2^2}{2}+\frac{m\upsilon_2^2}{2} \rightarrow mgh=m\upsilon_2^2 \rightarrow \upsilon_2=\sqrt{gh}$

Άρα $\boldsymbol{\upsilon_1>\upsilon_2}$ οπότε σωστό είναι το **(α).**

Β.43 Ομογενής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης, φ, και διανύει διάστημα x. Να αποδείξετε ότι το έργο της στατικής τριβής για τη σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου είναι μηδέν.



Απάντηση

Γράφω το ΘΜΚΕ για τη μεταφορική κίνηση:
$\Sigma W=\Delta K_{\mu} \rightarrow (mg\eta\mu\varphi - T)x=\Delta K_{\mu}$ (1)

Γράφω το ΘΜΚΕ για τη περιστροφική κίνηση:
$\Sigma W=\Delta K_{\pi} \rightarrow TR\Delta\theta= \Delta K_{\pi} \rightarrow Tx= \Delta K_{\pi}$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) $\rightarrow (mg\eta\mu\varphi - T)x + Tx= \Delta K_{\mu}+\Delta K_{\pi} \rightarrow mg\eta\mu\varphi x=\Delta K_{o\lambda}$,
Άρα η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του στερεού ισούται μόνο με το έργο του βάρους, δηλαδή οφείλεται μόνο στο βάρος. Η στατική τριβή δεν κάνει έργο συνολικά για το στερεό.

Β.44 Ομογενές σώμα με κανονικό γεωμετρικό σχήμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Το γεωμετρικό σχήμα του σώματος είναι:

α. Σφαίρα β. Λεπτός δακτύλιος γ. Κύλινδρος

Απάντηση

$K_{\pi}=\frac{I\omega^2}{2}$, $K_{\mu}=\frac{m\upsilon^2}{2}$.

$K_{\pi}=K_{\mu} \rightarrow \frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{I\omega^2}{2} \rightarrow \frac{m\omega^2R^2}{2}=\frac{I\omega^2}{2} \rightarrow \mathbf{I=mR^2}$ Άρα είναι δακτύλιος και σωστό είναι το **(β).**

Γιατί όμως; Αν χωρίσουμε ένα δακτύλιο σε ν το πλήθος στοιχειώδεις μάζες m_i που απέχουν όλες απόσταση R από τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο, τότε η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα αυτό θα είναι:

$I=\sum_{1}^{\nu} m_iR^2=m_1R^2+m_2R^2+\ldots m_{\nu}R^2=(m_1+m_2+\ldots+m_{\nu})R^2=mR^2$

Β.45 Ομογενή στερεά μια σφαίρα και ένας κύλινδρος έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα και αφήνονται ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο κεκλιμένου επιπέδου. Τα σώματα κυλάνε χωρίς να ολισθαίνουν,
Ι. Θα φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με μεγαλύτερη κινητική ενέργεια:
α. Αυτό με τη μικρότερη ροπή αδράνειας.
β. Αυτό με τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.
γ. Κανένα από τα δύο.
ΙΙ. Θα φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με μεγαλύτερη ταχύτητα κέντρου μάζας:
α. Αυτό με τη μικρότερη ροπή αδράνειας.
β. Αυτό με τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.
γ. Κανένα από τα δύο
Δίνονται για τη σφαίρα $I_{\sigma}=2mR^2/5$ και για τον κύλινδρο $I_{\kappa}=mR^2/2$

Απάντηση

Ι. Γράφουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ) για το στερεό και για πτώση κατά h του κέντρου μάζας. Ας σημειωθεί ότι η στατική τριβή δεν κάνει έργο, αφού κάθε χρονική στιγμή ολοένα και άλλο σημείο του στερεού εφάπτεται του κεκλιμένου επιπέδου.

$E_{\alpha\rho\chi}=E_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow mgh=K$
άρα και τα δύο φτάνουν με την ίδια κινητική ενέργεια αφού αφήνονται από το ίδιο ύψος h.
Σωστό είναι το **(γ).**

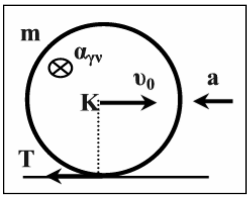
ΙΙ. Θα υπολογίσουμε τη ταχύτητα του κέντρου μάζας σαν συνάρτηση της ροπής αδράνειας με τη βοήθεια της ΑΔΜΕ.

$E_{αρχ}=E_{τελ} \rightarrow mgh=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2} \overset{\upsilon=\omega R}{\clubsuit} mgh=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{I\upsilon^2}{2R^2} \rightarrow \ldots \rightarrow \upsilon=\sqrt{\frac{2R^2mgh}{mR^2+I}}$ (1)

Επειδή $I_κ > I_σ$ από τη σχέση (1) φαίνεται ότι $\upsilon_κ < \upsilon_σ$ συνεπώς σωστό είναι το **(α)**

Β.46 Σφαίρα ($I=2mR^2/5$) μάζας m βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα του κέντρου μάζας υ_0 πάνω σε οριζόντιο τραχύ επίπεδο. Το έργο της τριβής ολίσθησης μέχρι να αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει είναι:

α. $-m\upsilon_0^2$ β. $-m\upsilon_0^2/5$ γ. $-m\upsilon_0^2/2$ δ. $-m\upsilon_0^2/7$



Απάντηση

Η στατική τριβή Τ είναι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στη σφαίρα και φροντίζει ώστε αυτή να επιβραδύνεται μεταφορικά και να επιταχύνεται περιστροφικά μέχρι να γίνει $\upsilon=\omega R$ δηλαδή να αρχίσει να κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση. Θα υπολογίσω την τελική ταχύτητα, υ συναρτήσει της αρχικής υ_0 και θα βρω το έργο της τριβής ως μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας.

$\Sigma\tau=I\alpha_{γν} \rightarrow TR=\frac{2mR^2}{5}\alpha_{γν} \rightarrow \mu \cdot mg=\frac{2mR^2}{5}\alpha_{γν} \rightarrow \alpha_{γν}=\frac{5\mu g}{2R}$ (1)

$T=\mu \cdot N=\mu \cdot mg$

$\Sigma F=ma \rightarrow T=ma \rightarrow \mu \cdot mg=ma \rightarrow a=\mu g$ (2)

Από την επιβραδυνόμενη μεταφορική: $\upsilon=\upsilon_0-at$ (3)

Από την επιταχυνόμενη περιστροφική: $\omega=\alpha_{γν}t \rightarrow t=\frac{\omega}{\alpha_{γν}}=\frac{2\omega R}{5\mu g}$ (4)

Από (2)(3)(4)$\rightarrow \upsilon=\upsilon_0-0{,}4\omega R$ (5)

Όταν αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση θα ισχύει $\upsilon=\omega R$.

Άρα η εξίσωση (5) γίνεται : $\upsilon=\upsilon_0-0{,}4\upsilon \rightarrow 1{,}4\upsilon=\upsilon_0 \rightarrow \upsilon=\frac{5\upsilon_0}{7}$ (6)

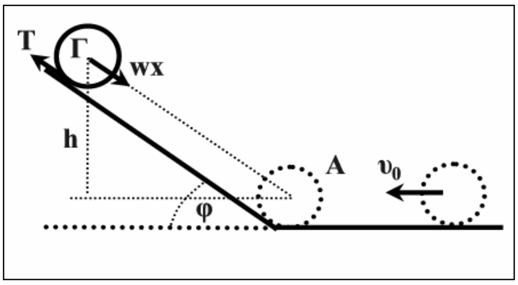
Η αρχική κινητική ενέργεια είναι: $K_{αρχ}=\frac{m\upsilon_0^2}{2}$

Η τελική όταν αρχίσει η κύλιση θα είναι: $K_{τελ}=K_{μ}+K_{π}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}=\frac{7m\upsilon^2}{10} \xrightarrow{(6)} K_{τελ}=\frac{5m\upsilon_0^2}{14}$

Από το ΘΜΚΕ:

$W_T=K_{τελ}-K_{αρχ}=\frac{5m\upsilon_0^2}{14}-\frac{m\upsilon_0^2}{2} \rightarrow \mathbf{W_T=-\frac{m\upsilon_0^2}{7}}$ Σωστό είναι το **(δ)**

Β.47 Δύο όμοιες σφαίρες ($I=2mR^2/5$) κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν με ταχύτητα $υ_0$ σε οριζόντιο επίπεδο. Ξαφνικά συναντούν η κάθε μια από ένα κεκλιμένο επίπεδο ίδιας γωνίας κλίσης φ και αρχίζουν να το ανεβαίνουν. Η Α σφαίρα ανεβαίνει σε τελείως λείο επίπεδο, ενώ η Β σφαίρα σε επίπεδο τραχύ ώστε να συνεχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



Ι. Ποια σφαίρα φτάνει πιο ψηλά;

α. η Α β. η Β γ. Καμιά

ΙΙ. Ποια σφαίρα φτάνει στο μέγιστο ύψος της πιο γρήγορα ;

α. η Α β. η Β γ. Καμιά

Απάντηση

Η σφαίρα Α. Στο λείο επίπεδο δεν υπάρχει τριβή άρα και ροπή για να επιβραδύνει τη σφαίρα γωνιακά, Συνεπώς η γωνιακή της ταχύτητα διατηρείται σταθερή μέχρι το μέγιστο ύψος h_1 που ανεβαίνει το κέντρο μάζας της. Γράφω την ΑΔΜΕ από το Α στο Γ:

$$½ mυ_0^2 + ½ Iω_0^2= mgh_1 + ½ Iω_0^2 \rightarrow h_1=\frac{υ_0^2}{2g} \rightarrow h_1=0{,}5\frac{υ_0^2}{g} \quad (1)$$

Η επιβράδυνση της σφαίρας είναι $α_1$: $ΣF_x=mα_1 \rightarrow mgημφ=mα_1 \rightarrow α_1=gημφ$

$$υ=υ_0-α_1t \xrightarrow{υ=0} t_1=\frac{υ_0}{gημφ} \quad (2)$$

Η σφαίρα Β κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Όταν φτάνει στο μέγιστο ύψος μηδενίζονται ταυτόχρονα και η ταχύτητα, υ=0 αλλά και η γωνιακή ταχύτητα, $ω_0=0$. Γράφω την ΑΔΜΕ από το Α στο Γ:

$$½ mυ_0^2 + ½ Iω_0^2= mgh_2 \rightarrow ½ mυ_0^2 + ½ (2mR^2/5)ω_0^2 = mgh_2 \rightarrow \frac{7mυ_0^2}{10}=mgh_2 \rightarrow h_2=0{,}7\frac{υ_0^2}{g} \quad (3)$$

Η σφαίρα επιβραδύνεται με επιβράδυνση $α_2$. Την υπολογίζω:

$$ΣF_x=mα_1 \rightarrow mgημφ-T=mα_2 \quad (5)$$

$$Στ=Iα_{γν} \rightarrow TR=\frac{2mR^2}{5}\cdot\frac{α_2}{R} \rightarrow T=\frac{2mα_2}{5} \quad (6) \qquad \text{Από (5)(6)} \rightarrow α_2=5gημφ/7$$

$$υ=υ_0-α_2t \xrightarrow{υ=0} t_2=\frac{υ_0}{α_2} \rightarrow t_2=\frac{7υ_0}{5gημφ} \quad (7)$$

Από (1) και (3)→ $\mathbf{h_2>h_1}$ άρα σωστό είναι το **(β)**

Από (2) και (7)→ $\mathbf{t_2>t_1}$ άρα σωστό είναι το **(α)**

Β.48 Ο κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα Μ ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς τον κύριο άξονα περιστροφής του $I=MR^2/2$. Λεπτό και αβαρές νήμα είναι τυλιγμένο γύρω του. Ο κύλινδρος αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0=0$, να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε τραχύ επίπεδο, από την ηρεμία υπό την επίδραση σταθερής δύναμης μέτρου F, που ασκείται στο άκρο του νήματος Ζ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ι. Το έργο της δύναμης F από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ έως τη χρονική στιγμή t που ολοκληρώνεται η πρώτη περιστροφή του κυλίνδρου, είναι:

α. 4πFR β. 2πFR γ. 0

ΙΙ. Η επιτάχυνση, α, του κέντρου μάζας του κυλίνδρου θα είναι:

α. 2F/3m β. 4F/3m γ. 8F/3m

ΙΙΙ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t θα είναι:

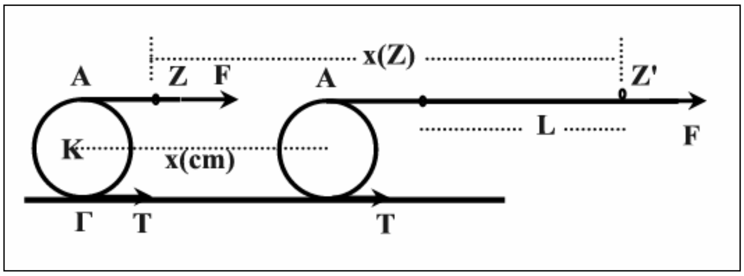
α. $\frac{8F^2t}{3m}$ β. $\frac{8F^2t}{9m}$ γ. $\frac{16F^2t}{9m}$

Απάντηση

I. Η δύναμη F ασκείται στο σημείο Z το οποίο έχει την ίδια επιτάχυνση με το σημείο Α του κυλίνδρου. Ως γνωστό ισχύει ότι:

$\alpha_A=\alpha_Z=\alpha+\alpha_{\gamma\nu}R=2\alpha$

όπου α η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.



Η μετατόπιση του Z θα είναι $x_Z=\frac{\alpha_Z t^2}{2}=\frac{2\alpha t^2}{2}=2x_{cm}$ δηλαδή διπλάσια από τη μετατόπιση του κέντρου μάζας.

Για μια περιστροφή, η μετατόπιση $x_{cm}=2\pi R$, άρα και του σημείου Z θα είναι $x_Z=2\cdot 2\pi R=4\pi R$.

Το έργο της F θα είναι: $W=F\cdot x_Z=F4\pi R=\mathbf{4\pi FR}$. Σωστό είναι το (**α**).

II. $\Sigma F=m\alpha \rightarrow F+T=m\alpha$ (1)

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow(F-T)R=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\alpha}{R}\rightarrow F-T=\frac{m\alpha}{2}$ (2)

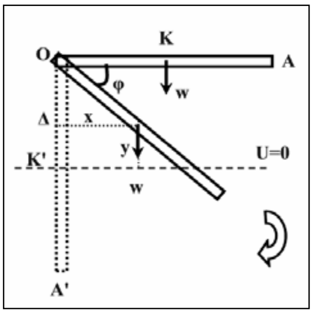
Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και παίρνω $2F=\frac{3m\alpha}{2}\rightarrow \boldsymbol{\alpha=\frac{4F}{3m}}$ Σωστό είναι το **(β).**

III. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας αναφέρεται τόσο στην κινητική ενέργεια μεταφοράς όσο και στην κινητική ενέργεια περιστροφής. Θεωρώ υ και α τις στιγμιαίες ταχύτητες και επιταχύνσεις του κέντρου μάζας.

$\frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{\Delta K_\mu}{\Delta t}+\frac{\Delta K_\pi}{\Delta t}=\Sigma F\cdot\upsilon+\Sigma\tau\cdot\omega=(F+T)\upsilon+(F-T)R\omega=2F\upsilon=2F\cdot\alpha\cdot t=2F\cdot\frac{4F}{3m}t\rightarrow\boldsymbol{\frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{8F^2t}{3m}}$ Σωστό είναι το **(α).**

Β.49 Ομογενής ράβδος($I_K=mL^2/12$) μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος σ΄ αυτήν. Την αφήνουμε από την οριζόντια θέση να περιστραφεί μόνο με την επίδραση του βάρους. Τριβές δεν υπάρχουν. Μέχρι να φτάσει στην κατακόρυφη θέση πως μεταβάλλονται:

i. Η ροπή αδράνειας.
ii. Η γωνιακή επιτάχυνση.
iii. Η κινητική, δυναμική και μηχανική ενέργεια.
iv. Η γωνιακή ταχύτητα.
v. Η στροφορμή, και ρυθμός μεταβολής στροφορμής



Απάντηση

i. Η ροπή αδράνειας είναι σταθερή, ανεξάρτητη από τη θέση της ράβδου και ίση με $I_{(O)}=I_K+m(L/2)^2=mL^2/3$.

ii. Υπολογίζω τη γωνιακή επιτάχυνση σε μια τυχαία θέση στην οποία η ράβδος έχει μετατοπιστεί γωνιακά κατά φ.

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow mgx=I\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi=I\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow\alpha_{\gamma\nu}=\frac{mgL\sigma\upsilon\nu\varphi}{2I}$.

Με τη γωνία φ να παίρνει τιμές από 0^0 έως 90^0 και το συνφ να κυμαίνεται από 1 έως 0 είναι φανερό ότι η γωνιακή επιτάχυνση μειώνεται από mgL/2I έως το μηδέν.

iii. Η ράβδος δέχεται μόνο 2 δυνάμεις, τη δύναμη του βάρους της και την αντίδραση από τον άξονα περιστροφής , Ο. Από αυτές, μόνο το βάρος κάνει έργο, αλλά είναι και δύναμη διατηρητική. Συνεπώς η μηχανική ενέργεια της ράβδου διατηρείται σταθερή. Καθώς η ράβδος κατεβαίνει η δυναμική ενέργεια βαρύτητας U=mgy μειώνεται αφού το κέντρο βάρους κατεβαίνει όλο και πιο χαμηλά. Ταυτόχρονα όμως αυξάνεται η κινητική ενέργεια,αφού, K+U=E= σταθερό.

iv. Γράφω την ΑΔΜΕ από τη αρχική θέση μέχρι μια τυχαία γωνιακή μετατόπιση κατά φ, (βλέπε σχήμα)

$K_\alpha+U_\alpha=K_\tau+U_\tau \rightarrow 0+mg\frac{L}{2}=\frac{I\omega^2}{2}+mgy$ όπου $y=\frac{L}{2}-\frac{L}{2}\eta\mu\varphi=\frac{L}{2}(1-\eta\mu\varphi)$.

Άρα η γωνιακή ταχύτητα είναι: $mg\frac{L}{2}=\frac{I\omega^2}{2}+mg\frac{L}{2}(1-\eta\mu\varphi)\rightarrow\omega=\sqrt{(mgL\eta\mu\varphi)/I}$

Με τη γωνία φ να παίρνει τιμές από 0^0 έως 90^0 και το ημφ να κυμαίνεται από 0 έως 1 είναι φανερό ότι η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται από 0 έως $\sqrt{mgL/I}$.

v. Το μέτρο της στροφορμής δίνεται από τη σχέση L=I·ω. Η ροπή αδράνειας είναι σταθερή, αλλά η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται, συνεπώς αυξάνεται και το μέτρο της στροφορμής. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με τη συνισταμένη ροπή. Άρα:

$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=mgx=mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$. Συνεπώς μειώνεται από mgL/2 έως 0.

Β.50 Οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας Μ ακτίνας R περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ΄ αυτόν. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα αυτόν είναι $I=MR^2/2$. Μικρό κομμάτι στόκου μάζας m=M/2 πέφτει κατακόρυφα και κολλάει στο δίσκο σε απόσταση r=R/2 από το κέντρο του. Μετά την προσκόλληση του στόκου το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_2. Αν K_1 και K_2 είναι οι κινητικές ενέργειες του συστήματος λόγω περιστροφής πριν και μετά την προσκόλληση του στόκου αντίστοιχα, τότε ο λόγος K_1/K_2 είναι ίσος με

α. 5/8 β. 5/4 γ. 9/8

Απάντηση

Το σύστημα είναι απομονωμένο, και συνεπώς η στροφορμή του διατηρείται.

Αρχικά η ροπή αδράνειας είναι μόνο του δίσκου $I_1=\frac{MR^2}{2}$

Μετά την προσάρτηση και του στόκου μάζας m=M/2 η ροπή αδράνειας του συστήματος γίνεται:

$I_2=(\frac{MR^2}{2}+mr^2)=\frac{MR^2}{2}+\frac{M}{2}\cdot\frac{R^2}{4}=\frac{5MR^2}{8}$

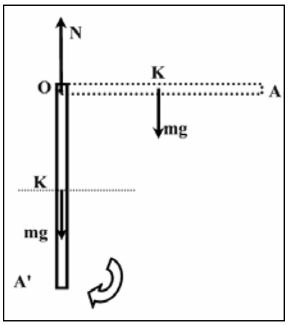
Η σχέση που συνδέει την κινητική ενέργεια περιστροφής με τη στροφορμή είναι: $K=\frac{I\omega^2}{2}=\frac{L^2}{2I}$

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{\frac{L^2}{2I_1}}{\frac{L^2}{2I_2}}=\frac{I_2}{I_1}=\frac{5/8}{1/2}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}\rightarrow\mathbf{\frac{K_1}{K_2}=\frac{5}{4}}$$ Σωστό είναι το **(β)**

Β.51 Μια ομογενής ράβδος μάζας, m, μήκους ΟΑ=L μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο Ο. Την αφήνουμε ελεύθερη από τη οριζόντια θέση. Η δύναμη Ν που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής Ο, όταν περνάει από την κατακόρυφη θέση είναι:

α. N=4mg, β. N=2,5mg γ. N=1,5mg d. N=mg

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο, $I=mL^2/3$



Απάντηση

Υπολογίζω την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν διέρχεται από την οριζόντια θέση, με τη βοήθεια της ΑΔΜΕ

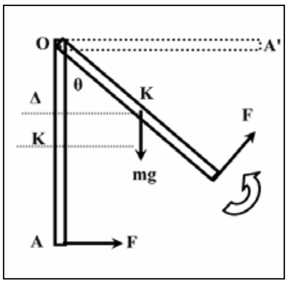
$E_{αρχ}=E_{τελ}\rightarrow mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2\rightarrow mgL=\frac{mL^2}{3}\omega^2\rightarrow \omega^2=\frac{3g}{L}$ (1)

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται η ράβδος στον κατακόρυφο άξονα ισούται με την κεντρομόλο δύναμη

$\Sigma F=m\omega^2\frac{L}{2}\rightarrow N-mg=m\omega^2\frac{L}{2}\xrightarrow{(1)} N=mg+\frac{3mg}{2}\rightarrow$ **N=2,5mg** Άρα σωστό είναι το **(β)**

* Στον οριζόντιο άξονα δεν υπάρχει συνιστώσα δύναμη αφού η επιτάχυνση είναι α=0.

Β.52 Μια ομογενής ράβδος μάζας, m, μήκους ΟΑ=L μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο Ο. Σε μια στιγμή t=0 και ενώ είναι κατακόρυφη και ακίνητη ασκείται στο άκρο Α δύναμη σταθερού μέτρου F=mg/4 που παραμένει συνεχώς κάθετη στη ράβδο



Ι. Να εξετάσετε αν η ράβδος θα φτάσει στην οριζόντια θέση.

ΙΙ. Η σανίδα αποκτάει μέγιστη γωνιακή ταχύτητα όταν θα έχει διαγράψει γωνία θ ως προς την κατακόρυφο τέτοια ώστε:

α. ημθ=1, β. ημθ=$\sqrt{2}/2$ γ. ημθ=1/2

ΙΙΙ. Στη θέση μέγιστης γωνιακής ταχύτητας, ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας είναι:

α. μέγιστος β. αρνητικός γ. Μηδέν

IV. Πόση είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια; α. K=0,063mgL β. K=mgL γ. K=0,05mgL

Δίνονται π=3,14, $\sqrt{3}$=1,73

Απάντηση

Ι. Θα υπολογίσω την κινητική ενέργεια στην οριζόντια θέση, Αν είναι K≥0 τότε φθάνει. Αν K<0 σημαίνει ότι έχει σταματήσει κάπου πιο μπροστά. Γράφω το ΘΜΚΕ από τη θέση (1) στη θέση (2)

$W_F+W_{mg}=K_{τελ}-K_{αρχ}\rightarrow K_{τελ}=F\cdot L\cdot\frac{\pi}{2}-mg\frac{L}{2}\rightarrow K_{τελ}=\frac{mgL\pi}{8}-\frac{mgL}{2}<0\rightarrow K_{τελ}<0$ άρα δεν φτάνει στην οριζόντια θέση.

ΙΙ. Η γωνιακή ταχύτητα γίνεται μέγιστη σε εκείνη τη θέση που σταματάει η επιτάχυνση και αρχίζει η επιβράδυνση, δηλαδή στη θέση όπου, $\alpha_{γν}=0\rightarrow \Sigma\tau=0$.

$\Sigma\tau=0\rightarrow FL-mg(KΔ)=0\rightarrow FL-mg(\frac{L}{2}ημθ)=0\rightarrow\frac{mgL}{4}=mg(\frac{L}{2}ημθ)\rightarrow$ **ημθ=1/2** Σωστό είναι το **(γ)**

ΙΙΙ. $\frac{\Delta K}{\Delta t}=\Sigma\tau\cdot\omega=0\cdot\omega\rightarrow\frac{\Delta K}{\Delta t}=0$, Σωστό είναι το **(γ)**

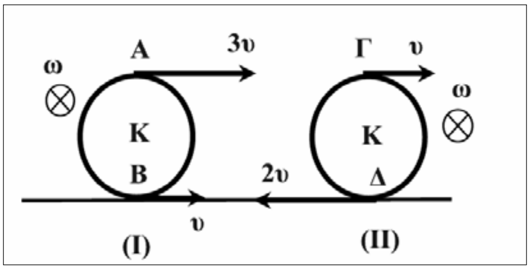
IV. Γράφω το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση μέγιστης γωνιακής ταχύτητας δηλαδή μέχρι να διαγράψει γωνία με ημθ=0,5→ θ=π/6 rad

Όπου $(KΔ)=(OK)-(OΔ)=\frac{L}{2}-\frac{L}{2}συνθ$

$W_F+W_{mg}=K_{τελ}-K_{αρχ}\rightarrow FL\cdot\frac{\pi}{6}-mg(KΔ)=K\rightarrow K=\frac{mgL\pi}{24}-mg(\frac{L}{2}-\frac{L}{2}συνθ)\rightarrow$ **K=0,063mgL**

Σωστό το **(α).**

B.53 Ενας ομογενής δακτύλιος κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με δύο διαφορετικούς τρόπους. Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το Ο είναι $I=mR^2$.
Να αντιστοιχήσετε τις παραπάνω κινήσεις με τις κινητικές ενέργειες που δίνονται από κάτω.



α. $K=m\upsilon^2$ β. $K= 5m\upsilon^2/2$ γ. $K=5m\upsilon^2/4$

Απάντηση

Στο δακτύλιο (I). Η κίνηση είναι σύνθετη και το κέντρο μάζας Κ κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ_K, ενώ η γωνιακή ταχύτητα είναι ω.

$\upsilon_A=\upsilon_K+\omega R \rightarrow 3\upsilon=\upsilon_K+\omega R$ (1)
$\upsilon_B= \upsilon_K-\omega R \rightarrow \upsilon= \upsilon_K-\omega R$ (2) Από (1)+(2)$\rightarrow 4\upsilon=2\upsilon_K \rightarrow \upsilon_K=2\upsilon$ και $\omega R=\upsilon$
$K_I= \frac{1}{2}m\upsilon_K^2+ \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow K_I=m2\upsilon^2 + \frac{m\upsilon^2}{2} \rightarrow$ $\mathbf{K_I= 5m\upsilon^2/2}$ Άρα **I→(β)**

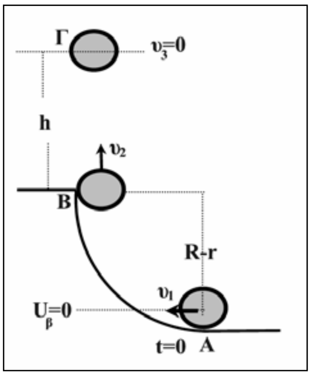
Στο δακτύλιο (II). Η κίνηση είναι σύνθετη αλλά επειδή το σημείο Δ έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Γ το κέντρο μάζας κινείται προς τα αριστερά, ενώ η γωνιακή ταχύτητα είναι ω και υποθέτω ότι έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.

$\upsilon_\Delta=\upsilon_K+\omega R \rightarrow 2\upsilon=\upsilon_K+\omega R$ (3)
$\upsilon_\Gamma= \upsilon_K-\omega R \rightarrow \upsilon= \omega R - \upsilon_K$ (4) Από (3)–(4) $\rightarrow \upsilon=2\upsilon_K \rightarrow \upsilon_K=\upsilon/2$ και $\omega R=3\upsilon/2$

$K_{II}= \frac{1}{2}m\upsilon_K^2+ \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow K_I=\frac{1}{2} m \frac{\upsilon^2}{4} + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{m\upsilon^2}{8} + \frac{9m\upsilon^2}{8} \rightarrow$ $\mathbf{K_I= 5m\upsilon^2/4}$ Άρα **I→(γ)**

B.54 Ο κύλινδρος με μάζα, m, ακτίνα r και ροπή αδράνειας $I=mr^2/2$ έχει στο σημείο Α του τεταρτοκυκλίου ταχύτητα $\upsilon_1=\sqrt{2g(R-r)}$ και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Ανεβαίνει με αυτόν τον τρόπο μέχρι το άκρο Β του τεταρτοκυκλίου και μετά το εγκαταλείπει φθάνοντας μέχρι το σημείο Γ, όπου ΒΓ=h. Αν η ακτίνα του τεταρτοκυκλίου είναι R, τότε το ύψος h είναι:

α. $h= (R-r)$ β. $h=\frac{R-r}{2}$ γ. $h=\frac{R-r}{4}$ δ. $h=\frac{R-r}{3}$



Απάντηση

Γράφω ΑΔΜΕ από το Α στο Β για να βρω τη υ_2 στο σημείο Β. Επειδή κυλίεται ισχύουν $\upsilon_1=\omega_1 r$ και $\upsilon_2=\omega_2 r$.
$E_A=E_B \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2+ \frac{1}{2}I\omega_1^2=mg(R-r) + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2+ \frac{1}{2}I\omega_2^2 \rightarrow \frac{3}{4}m\upsilon_1^2 = mg(R-r) + \frac{3}{4}m\upsilon_2^2 \rightarrow$

$\rightarrow \upsilon_2^2=\frac{3\upsilon_1^2-4g(R-r)}{3} \rightarrow \upsilon_2^2=\frac{2g(R-r)}{3}$ (1)

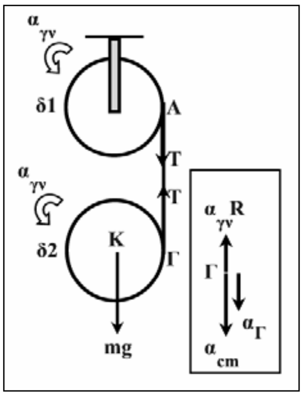
Γράφω ΑΔΜΕ από το Β στο Γ. Επειδή στη διαδρομή αυτή το σώμα δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους του που δεν έχει ροπή, η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή μέχρι το Γ, δηλαδή $\omega_3=\omega_2$.

$$E_B=E_\Gamma \rightarrow mg(R-r) + \tfrac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 = mg(h+R-r) + 0 + \tfrac{1}{2}I\omega_3^2 \rightarrow mgh=\tfrac{1}{2}m\upsilon_2^2 \rightarrow h=\frac{\upsilon_2^2}{2g} \xrightarrow{(1)}$$

$\mathbf{h=\frac{R-r}{3}}$ Σωστό είναι το **(δ)**

Β.55 Δύο κυλινδρικοί δίσκοι έχουν ίδια μάζα και ίδια ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα συμμετρίας τους και περιστροφής τους, $I=\tfrac{1}{2}mR^2$. Ο ένας δίσκος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα, ενώ αβαρές λεπτό νήμα είναι τυλιγμένο γύρω και από τους δύο δίσκους. Αν αφήσουμε τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το δεύτερο δίσκο ελεύθερο αυτός πέφτει, ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ του δίσκου είναι:

α. $\alpha_K=g$ β. $\alpha_K=0{,}8g$ γ. $\alpha_K=0{,}6g$ δ. $\alpha_K=0{,}5g$



Απάντηση

α. Για το δ_1: $T\cdot R=I_1\alpha_{\gamma\nu 1}$ Για το δ_2: $T\cdot R=I_2\alpha_{\gamma\nu 2}$ Άρα $\alpha_{\gamma\nu 1}=\alpha_{\gamma\nu 2}=\alpha_{\gamma\nu}$ (1).

Οι δύο δίσκοι περιστρέφονται υπό την επίδραση της ροπής της τάσης του νήματος και αφού έχουν τις ίδιες I έχουν και τις ίδιες γωνιακές επιταχύνσεις.

Ο δ_2 πέφτει με επιτάχυνση α_K: $\Sigma F=m\alpha_K \rightarrow mg-T=m\alpha_K$ (2)

Και περιστρέφεται με $\alpha_{\gamma\nu}$: $T\cdot R=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR=\frac{mR^2}{2}\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow T=\frac{mR}{2}\alpha_{\gamma\nu}$ (3)

Τα σημεία Α και Γ είναι σημεία του ίδιου νήματος άρα έχουν τις ίδιες επιταχύνσεις, $\alpha_A=\alpha_\Gamma$. (4)

Ο δίσκος δ_1 δεν μεταφέρεται μόνο στρέφεται και έτσι, $\alpha_A=\alpha_{\gamma\nu}\cdot R$ (5)

Ο δ_2 όμως πέφτει και περιστρέφεται συνεπώς: $\alpha_\Gamma=\alpha_K-\alpha_{\gamma\nu}R$ (6)

Άρα, από (4)(5)(6)→ $\alpha_A=\alpha_\Gamma \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}\cdot R=\alpha_K-\alpha_{\gamma\nu}R \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=\frac{\alpha_K}{2R}$ (7)

Από (3)(7)→$T=\frac{m\alpha_K}{4}$ (9)

Από (2)(9)→$mg=\frac{m\alpha_K}{4}+m\alpha_K \rightarrow \mathbf{\alpha_K=0{,}8g}$ Σωστό είναι το **(β)**

Β.56 Να εξηγήσετε γιατί η χρονική διάρκεια της περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της είναι σταθερή, δηλαδή 24h.

Απάντηση

Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της αλλά και γύρω από τον Ήλιο. Η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η βαρυτική έλξη από τον Ήλιο που παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης στην περιστροφή της γύρω από αυτόν. Η δύναμη αυτή είναι κεντρική, δηλαδή ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της Γης, άρα τέμνει τον άξονα ιδιοπεριστροφής της, δεν της ασκεί ροπή και έτσι δεν μπορεί να μεταβάλλει τη στροφορμή της.

Άρα $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0\rightarrow\frac{\Delta L}{\Delta t}=0\rightarrow\Delta L=0\rightarrow L=I\cdot\omega=$σταθερό$\rightarrow\omega=$σταθ.$\rightarrow T=$σταθ.

Β.57 Υποθέτουμε ότι οι κλιματολογικές συνθήκες επιβάλλουν τη μετανάστευση του πληθυσμού της Γης προς τις πολικές ζώνες. Τότε η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονα της:

α. Μένει σταθερή β. Μειώνεται γ. Αυξάνεται

Απάντηση

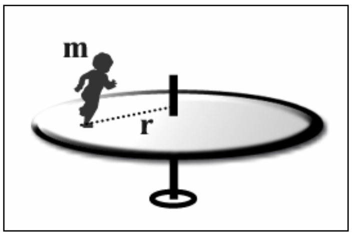
Η Γη με τους ανθρώπους της και ότι άλλο έχει επάνω της αποτελεί ένα απομονωμένο σύστημα καθώς εκτελεί περιστροφές γύρω από τον άξονα της. Η κεντρική έλξη από τον Ήλιο διέρχεται από τον άξονα περιστροφής της, δεν ασκεί ροπή και δεν μεταβάλλει τη στροφορμή της. Η στροφορμή λοιπόν αυτού του συστήματος διατηρείται σταθερή. Η μετακίνηση των ανθρώπων προς τους πόλους δηλαδή κοντά στον άξονα περιστροφής θα μειώσει τη ροπή αδράνειας του συστήματος, Ι, αφού πολλά από τα γινόμενα $m_i r_i^2$ θα μειωθούν. Αυτό θα γίνει αφού οι αποστάσεις, r_i, των στοιχειωδών μαζών των ανθρώπων από τον άξονα περιστροφής θα μειωθούν. Η σχέση στροφορμής και κινητικής ενέργειας είναι:

$$L=I\cdot\omega\rightarrow\omega=\frac{L}{I}\quad(1)\quad\text{και}\quad K=\frac{I\omega^2}{2}\xrightarrow{(1)}K=\frac{L^2}{2I}\quad(2)$$

Από τη σχέση (2) φαίνεται ότι, αφού L=σταθερό και η Ι μειώνεται, η κινητική ενέργεια, Κ αυξάνεται. Άρα σωστό είναι το **(γ).**

Β.58 Ο δίσκος μιας παιδικής χαράς περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στο δίσκο δεν ασκείται καμιά εξωτερική ροπή. Ένα παιδάκι μετακινείται από την περιφέρεια του δίσκου προς το κέντρο του. Τότε ο δίσκος θα περιστρέφεται:

α. Πιο γρήγορα β. Πιο αργά



Απάντηση

Αφού στο σύστημα δεν ασκείται εξωτερική ροπή τότε: $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0\rightarrow\frac{\Delta L}{\Delta t}=0\rightarrow\Delta L=0\rightarrow L=I\omega=$σταθερό.

Άρα η στροφορμή του συστήματος «δίσκος – παιδί», διατηρείται σταθερή. Καθώς το παιδί μετακινείται προς τον άξονα περιστροφής μειώνεται η ροπή αδράνειας του συστήματος, Ι, γιατί $I=I_\delta+I_\pi=I_\delta+mr^2$ όπου r η απόσταση του παιδιού από τον άξονα περιστροφής, m η μάζα του παιδιού και I_δ η ροπή αδράνειας του δίσκου.

Αυτό συνεπάγεται αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής. Άρα σωστό είναι το **(α).**

Β.59 Ένα απομονωμένο ομογενές αστέρι σφαιρικού σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό του με αρχική συχνότητα f. Λόγω βαρύτητας όμως σμικρύνεται διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα και την αρχική του μάζα. Σε κάποιο στάδιο συρρίκνωσης η νέα συχνότητα ιδιοπεριστροφής θα είναι:

α. Μεγαλύτερη από την αρχική,   β. Μικρότερη της αρχικής f,   γ. Ίση με την αρχική f.

Απάντηση

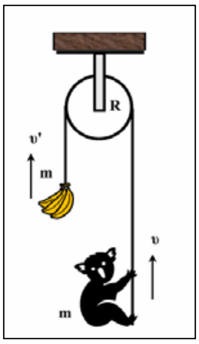
Το απομονωμένο αστέρι δεν δέχεται εξωτερικές ροπές και συνεπώς:

$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0\rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t}=0\rightarrow\Delta L=0\rightarrow L=I\omega=$σταθερό. Άρα:

$L_\alpha=L_\tau\rightarrow I_\alpha\omega_\alpha=I_\tau\omega_\tau\rightarrow\frac{2}{5}mR_1^2\omega_\alpha=\frac{2}{5}mR_2^2\omega_\tau\rightarrow\omega_\tau=\omega_\alpha\frac{R_1^2}{R_2^2}\overset{R_1>R_2}{\clubsuit}\omega_\tau>\omega_\alpha\rightarrow2\pi f_\tau>2\pi f_\alpha\rightarrow\mathbf{f_\tau>f_\alpha}$

Άρα σωστό είναι το **(α)**

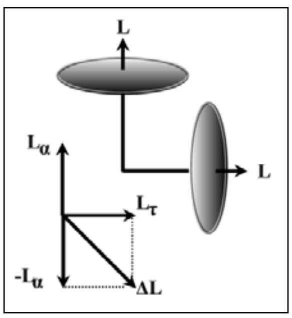
Β.60 Το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα αποτελείται από μια ελαφριά τροχαλία, ένα αβαρές σχοινί, το coala μάζας, m και ένα τσαμπί μπανάνες ίδιας μάζας. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί και το coala αρχίζει να σκαρφαλώνει το σχοινί με στόχο να φτάσει τις μπανάνες. Κατά την κίνηση του συστήματος δεν ασκούνται εξωτερικές τριβές.
Να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν με τη σχετική δικαιολόγηση:
α. Μεταβάλλεται η στροφορμή του συστήματος;
β. Κινείται το τσαμπί με τις μπανάνες και αν ναι προς ποια κατεύθυνση;
γ. Θα καταφέρει το coala να φτάσει τις μπανάνες;



Απάντηση
α. Η εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα , μπανάνες – coala – τροχαλία είναι:
$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=mgR-mgR=0$. Άρα $\Sigma\tau=\frac{\Delta L}{\Delta t}=0\rightarrow\Delta L=0\rightarrow L=$σταθερό, άρα η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.
β. Αν το coala αρχίσει να ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ, θα αποκτήσει ταχύτητα, υ′ και το τσαμπί από μπανάνες. Τι ταχύτητα όμως και προς ποια κατεύθυνση;
Από τη διατήρηση της στροφορμής έχουμε $L_{\alpha\rho\chi}=L_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow0=m\upsilon R-m\upsilon' R=0\rightarrow\upsilon'=\upsilon$.
γ. Άρα ανεβαίνουν και τα δύο με την ίδια ταχύτητα με αποτέλεσμα να είναι αδύνατο στο coala να φτάσει τις μπανάνες με αυτόν τον τρόπο.

Β.61 Ο δίσκος του σχήματος στρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα με στροφορμή σταθερού μέτρου L. Αν στρέψουμε τον άξονα περιστροφής του κατά 90^0 χωρίς να μεταβάλλουμε το μέτρο της στροφορμής του, τότε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής, $|\vec{\Delta L}|$ θα είναι:

α. 0   β. L   γ. $L\sqrt{2}$



Απάντηση

Η μεταβολή της στροφορμής (διανυσματικά) θα είναι:

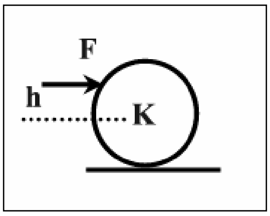
$\vec{\Delta L}=\vec{L}_\tau-\vec{L}_\alpha=\vec{L}_\tau+(-\vec{L}_\alpha)$

Από το σχήμα φαίνεται ότι το μέτρο μεταβολής της στροφορμής θα είναι η συνισταμένη των μέτρων των $\vec{L}_\tau$ και του $-\vec{L}_\alpha$ που αμφότερα είναι ίσα με L.

$|\Delta L|=\sqrt{|-L_\alpha^2|+|L_\tau^2|}=\sqrt{L^2+L^2}=L\sqrt{2}\rightarrow$ $\mathbf{|\Delta L|=L\sqrt{2}}$ Σωστό είναι το **(γ)**.

B.62 Μια μπάλα του μπιλιάρδου έχει μάζα M, ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα του κέντρου μάζας $I=2MR^2/5$. Η μπάλα δέχεται απότομο χτύπημα σε ύψος h από το κέντρο της και αποκτά αμέσως γωνιακή και μεταφορική ταχύτητα. Δεχτείτε ότι δεν υπάρχει η στατική τριβή. Το ύψος h στο οποίο χτυπήθηκε η μπάλα ώστε να αρχίσει αμέσως να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει είναι:

α. R β. 2R/5 γ. R/5



Απάντηση

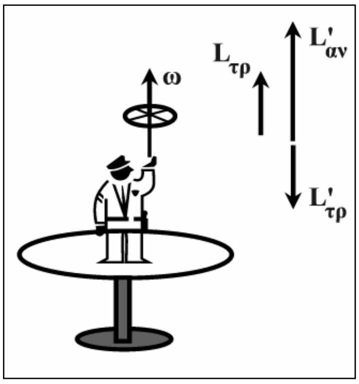
Για τη μεταφορική κίνηση: $\Sigma F=\frac{dp}{dt}\rightarrow F\cdot dt=m\upsilon-0\rightarrow F\cdot dt=m\omega R$ (1)

Για την περιστροφή: $\Sigma\tau=\frac{dL}{dt}\rightarrow F\cdot h\cdot dt=I\omega-0\rightarrow F\cdot h\cdot dt=\frac{2mR^2}{5}\omega$ (2)

Διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη: $\frac{1}{h}=\frac{5}{2R}\rightarrow \mathbf{h=\frac{2R}{5}}$ Σωστό είναι το **(β)**

B.63 Στο σχήμα φαίνεται ένα άνθρωπος που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι και κρατά ένα τροχό με τη βοήθεια του κατακόρυφου άξονά του. Το τραπέζι μπορεί να στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, χωρίς τριβές, αλλά είναι αρχικά ακίνητο, ενώ ο τροχός ή δη περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα, ω και με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Άνθρωπος και τραπέζι έχουν σταθερή ροπή αδράνειας, I. O τροχός έχει ροπή αδράνειας 2I.Αν ο άνθρωπος στρέψει τον άξονα του τροχού κατά 180^0 χωρίς να αλλάξει το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας, ω, τότε το τραπέζι μαζί με τον άνθρωπο θα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα:

α. –ω/4 β. +4ω γ. ω



Απάντηση

Στο σύστημα «τραπέζι με άνθρωπο – τροχός» δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές και συνεπώς η στροφορμή του διατηρείται. Η αρχική στροφορμή του συστήματος είναι μόνο αυτή του τροχού που την ονομάζουμε $\vec{L}_{\tau\rho}$. Γιατί το τραπέζι με τον άνθρωπο είναι ακόμα ακίνητα, Μετά την αντιστροφή του τροχού η στροφορμή του γίνεται $\vec{L}_{\tau\rho}'$ ενώ αποκτά στροφορμή και το τραπέζι μαζί με τον άνθρωπο, την $\vec{L}_{\alpha\nu}'$

$\vec{L}_{\alpha\rho\chi}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow \vec{L}_{\tau\rho}+\vec{L}_{\alpha\nu}=\vec{L}_{\tau\rho}'+\vec{L}_{\alpha\nu}'$

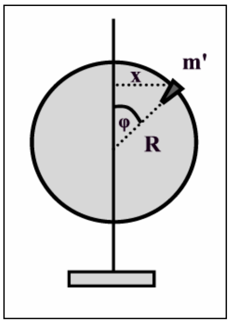
Με θετική τη φορά προς τα πάνω οι αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων είναι:

Αρχικά: $L_{\tau\rho}=2I\omega$ και $L_{\alpha\nu}=0$

Τελικά $L_{\tau\rho}'=-2I\omega$, $L_{\alpha\nu}'=I\omega'$

Άρα $2I\omega+0=-2I\omega+I\omega'\rightarrow \mathbf{\omega'=4\omega}$ Σωστό είναι το **(β).**

Β.64 Η σφαίρα μάζας M ακτίνας R είναι συμπαγής και ομογενής και περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που είναι και άξονας συμμετρίας της. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς ένα άξονα συμμετρίας της $I=2MR^2/5$. Στην περιφέρεια της σφαίρας είναι καρφωμένη μικρή σημειακή σφήνα μάζας $m=M/5$ σε τέτοια θέση ώστε η ακτίνα που συνδέει αυτή με το κέντρο της σφαίρας να σχηματίζει γωνία $\varphi=45^0$ με τον άξονα περιστροφής. Το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα, ω, χωρίς να δέχεται τριβές. Αν κατά τη διάρκεια της περιστροφής της σφαίρας, κάποιος αφαιρέσει τη σφήνα ακαριαία, ασκώντας δύναμη κάθετη στην επιφάνεια αυτής και με φορά προς τα έξω, η γωνιακή ταχύτητα αυτής γίνεται:



α. 7ω/2 β. 4ω/5 γ. 5ω/4

Απάντηση

Στο σύστημα σφαίρα – σφήνα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές. Η εξωτερική δύναμη που ασκείται για να βγάλει τη σφήνα έχει φορέα που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, άρα τέμνει τον άξονα περιστροφής και συνεπώς δεν παράγει ροπή. Άρα η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Επειδή όμως με την έξοδο της σφήνας μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας του συστήματος, θα μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας.

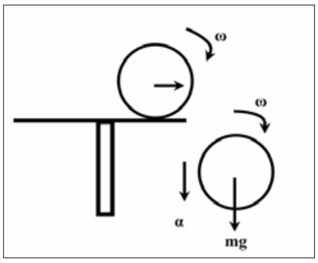
Στο σχήμα, $x=R\eta\mu\varphi=R\sqrt{2}/2$

$$I_{\alpha\rho\chi}=\frac{2}{5}MR^2+mx^2=\frac{2}{5}MR^2+\frac{M}{5}\cdot\frac{2R^2}{4}\rightarrow I_{\alpha\rho\chi}=\frac{MR^2}{2}$$

$$I_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{2}{5}MR^2$$

$$L_{\alpha\rho\chi}=L_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow I_{\alpha\rho\chi}\omega=I_{\tau\varepsilon\lambda}\omega'\rightarrow\omega'=\frac{I_{\alpha\rho\chi}\omega}{I_{\tau\varepsilon\lambda}}=\frac{\frac{MR^2}{2}\omega}{\frac{2}{5}MR^2}\rightarrow\boldsymbol{\omega'=5\omega/4}$$ Σωστό είναι το **(γ).**

Β.65 Μια μπάλα κυλάει πάνω σε οριζόντιο τραπέζι και μετά πέφτει στο κενό, όπου δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους της. Να εξηγήσετε αναλυτικά αν αυξάνονται, μειώνονται ή μένουν σταθερά τα ακόλουθα μεγέθη της μπάλας:
α. Η στροφορμή.
β. Η ταχύτητα κέντρου μάζας
γ. Η κινητική ενέργεια.
δ. Η μηχανική ενέργεια.
ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας.



Απάντηση

α. Όταν βγαίνει στο κενό δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους της mg η οποία διέρχεται από το κέντρο μάζας της δεν ασκεί ροπή και έτσι η στροφορμή της διατηρείται σταθερή, $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0\rightarrow\frac{\Delta L}{\Delta t}=0\rightarrow\Delta L=0\rightarrow L=I\omega=$σταθερό.

β. Η δύναμη του βάρους δίνει σταθερή επιτάχυνση στο κέντρο μάζας, $\Sigma F=mg=m\alpha\rightarrow\alpha=g$, και συνεπώς η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, αφού $\upsilon=\alpha t$.

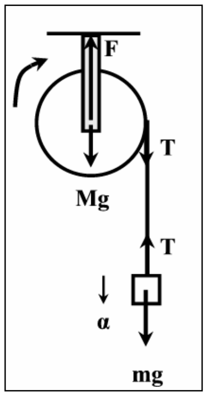
γ. Η κινητική ενέργεια είναι άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής και λόγω μεταφοράς, δηλ.

$K=\frac{I\omega^2}{2}+\frac{m\upsilon^2}{2}$. Αφού η ω διατηρείται σταθερή και η υ του κέντρου μάζας αυξάνεται αυτό σημαίνει ότι η συνολική κινητική ενέργεια αυξάνεται.

δ. Η δύναμη του βάρους είναι διατηρητική και συνεπώς η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.
ε. $K=K_\pi+K_\mu$ με K_π=σταθερό.

$\frac{dK}{dt}=\frac{dK_\pi}{dt}+\frac{dK_\mu}{dt}=\frac{dK_\mu}{dt}=\frac{dW}{dt}=\frac{mgdy}{dt}=mg\upsilon=mggt=mg^2t$ άρα ο dK/dt αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.

Β.66 Η τροχαλία έχει μάζα M ακτίνα R και ροπή αδράνειας $I_{cm}=0{,}5MR^2$. Το σώμα έχει μάζα m=M και αφήνεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ να πέφτει, ενώ το νήμα δεν ολισθαίνει μέσα στο λούκι της τροχαλίας. Δίνεται το g. Να εκφραστούν σε σχέση με το χρόνο:
α. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος.
β. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας.
γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας.
δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος.
ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητική ενέργειας του σώματος, dK_σ/dt.
στ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητική ενέργειας της τροχαλίας dK_τ/dt .
ζ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητική ενέργειας του συστήματος dK/dt.



Απάντηση

Για το σώμα: $\Sigma F=m\alpha \rightarrow mg-T=m\alpha$ (1)
Για τροχαλία: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow TR=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{\alpha}{R}\rightarrow T=\frac{M\alpha}{2}=\frac{m\alpha}{2}$ (2)
Από (1) και (2)$\rightarrow \alpha=\frac{2g}{3}$ και $\alpha_{\gamma\nu}=\frac{2g}{3R}$

α. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας: $\boldsymbol{\frac{d\omega}{dt}=\alpha_{\gamma\nu}=\frac{2g}{3R}}$

β. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος: $\boldsymbol{\frac{d\upsilon}{dt}=\alpha=\frac{2g}{3}}$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας: $\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=I,\alpha_{\gamma\nu}=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{2g}{3R}\rightarrow \boldsymbol{\frac{dL}{dt}=\frac{mRg}{3}}$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος: $\frac{d\upsilon}{dt}=\Sigma F=m\alpha\rightarrow\boldsymbol{\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{2mg}{3}}$

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητική ενέργειας του σώματος:

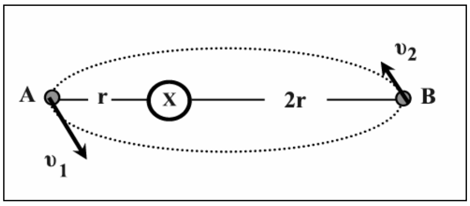
$\frac{dK_\sigma}{dt}=\frac{d\Sigma W_\sigma}{dt}=\frac{\Sigma Fdy}{dt}=\Sigma F\cdot\upsilon=m\alpha\cdot\alpha t=m\alpha^2t=m\frac{4g^2}{9}t\rightarrow\boldsymbol{\frac{dK_\sigma}{dt}=\frac{4mg^2t}{9}}$

στ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητική ενέργειας της τροχαλίας:
$\frac{dK_\tau}{dt}=\frac{d\Sigma W_\tau}{dt}=\frac{\Sigma\tau\cdot d\theta}{dt}=\Sigma\tau\cdot\omega=I\cdot\alpha_{\gamma\nu}\cdot\alpha_{\gamma\nu}\cdot t=I\alpha_{\gamma\nu}^2t=\frac{MR^2}{2}\cdot\left(\frac{2g}{3R}\right)^2t\rightarrow\boldsymbol{\frac{dK_\tau}{dt}=\frac{2mg^2t}{9}}$

ζ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητική ενέργειας του συστήματος:

$\frac{dK}{dt}=\frac{dK_\sigma}{dt}+\frac{dK_\tau}{dt}=\frac{4mg^2t}{9}+\frac{2mg^2t}{9}\rightarrow\boldsymbol{\frac{dK}{dt}=\frac{2mg^2t}{3}}$

Β.67 Δορυφόρος του πλανήτη Χ διαγράφει ελλειπτική τροχιά έχοντας το κέντρο του πλανήτη στη θέση της μιας κύριας εστίας της τροχιάς του. Θεωρούμε ότι η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η δύναμη της παγκόσμιας έλξης από τον πλανήτη, Χ Όταν ο δορυφόρος περνά από τη θέση Α, που φαίνεται στο σχήμα, έχει κινητική ενέργεια Κ, ενώ όταν περνάει από τη θέση, Β η κινητική του ενέργεια γίνεται:



α. Κ/4, β. Κ/2 γ. Κ

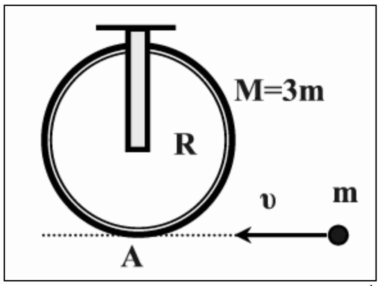
Απάντηση

Η ελκτική δύναμη F που ασκεί ο πλανήτης Χ στον δορυφόρο του διέρχεται από το κέντρο μάζας του δορυφόρου και συνεπώς δεν ασκεί καμία ροπή σ΄ αυτόν. Άρα η στροφορμή του δορυφόρου λόγω περιστροφής γύρω από τον πλανήτη διατηρείται σταθερή. Αν υποθέσουμε ότι ο δορυφόρος μάζας m συμπεριφέρεται σαν υλικό σημείο, τότε η στροφορμή του είναι L=mυr. Οι στροφορμές στις δύο θέσεις Α και Β θα είναι ίσες:

$L_A=L_B \rightarrow m\upsilon_1 r=m\upsilon_2 2r \rightarrow \upsilon_2=\upsilon_1/2$.

$K_A=K=\frac{m\upsilon_1^2}{2}$ και $K_B=\frac{m\upsilon_2^2}{2}=\frac{m\upsilon_1^2}{8}=\frac{K}{4} \rightarrow \mathbf{K_B=\frac{K}{4}}$ Σωστό είναι το **(α)**

Β.68 Ο δακτύλιος του σχήματος έχει μάζα Μ, ακτίνα R και όλη του τη μάζα του συγκεντρωμένη στην περιφέρεια. Ο δακτύλιος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, αλλά αρχικά είναι ακίνητος. Το βλήμα μάζας m=M/3 έρχεται με οριζόντια ταχύτητα, και κινητική ενέργεια, Κ και σφηνώνεται στο σημείο Α του δακτυλίου, ακαριαία.



Ι. Η απώλεια της κινητικής ενέργειας λόγω της πλαστικής κρούσης είναι:
α. Κ/2 β. Κ/4 γ. 3Κ/4

ΙΙ. Αν η κρούση διαρκεί χρονικό διάστημα Δt, η μέση ροπή που δέχτηκε ο δακτύλιος από το βλήμα στη διάρκεια αυτή είναι
α. $\frac{MR\upsilon}{4\Delta t}$ β. $\frac{mR\upsilon}{4\Delta t}$ γ. 0

Απάντηση

Ι. Στην πλαστική κρούση του βλήματος με τον δακτύλιο ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής. Αμέσως μετά την κρούση το σύστημα αποκτά κοινή γωνιακή ταχύτητα, ω.

$L_\pi=L_\mu \rightarrow m\upsilon R=I_{o\lambda}\omega \rightarrow m\upsilon R=(MR^2+mR^2)\omega \overset{M=3m}{\clubsuit} \omega=\frac{\upsilon}{4R}$ (1)

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι: $K_\pi=\frac{m\upsilon^2}{2}=K$

Η κινητική ενέργεια μετά την κρούση είναι: $K_\mu=\frac{I_{o\lambda}\omega^2}{2}=\frac{(MR^2+mR^2)\omega}{2} \rightarrow K_\mu=\frac{m\upsilon^2}{8}$

$\Delta K=K_\mu-K_\pi=\frac{m\upsilon^2}{8}-\frac{m\upsilon^2}{2}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{m\upsilon^2}{2} \rightarrow \Delta K=-\frac{3K}{4}$,

Άρα η μεταβολή είναι **3Κ/4** και σωστό είναι το **(γ).**

II. Αν η κρούση διαρκεί dt το βλήμα ασκεί στο δακτύλιο μέση ροπή ίση με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του δακτυλίου.

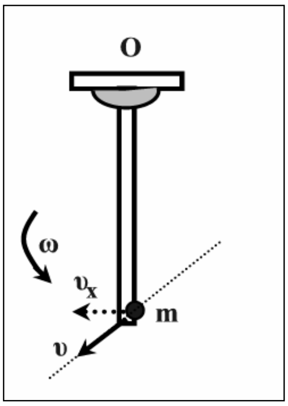
$$\tau=\frac{\Delta L_{\delta\alpha\kappa}}{\Delta t}=\frac{I_\delta\omega_\tau-I_\delta\omega_\alpha}{\Delta t}=\frac{MR^2\omega}{\Delta t}=\frac{MR^2\upsilon}{4R\Delta t}\rightarrow \boldsymbol{\tau=\frac{MR\upsilon}{4\Delta t}}$$

Σωστό είναι το **(α)**

B.69 Μια ομογενής ράβδος ΟΑ, μάζας $m_1=m$ και μήκους L μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο Ο και είναι κάθετος σ΄ αυτήν. Τη χρονική στιγμή t που η ράβδος φτάνει στην κατακόρυφη θέση με γωνιακή ταχύτητα ω, βλήμα μάζας $m_2=m/3$ σφηνώνεται στο ελεύθερο άκρο, Α, της ράβδου με ταχύτητα υ υπό γωνία $\varphi=30^0$ ως προς την κατακόρυφο και με κατεύθυνση αντίθετη από τη φορά κίνησης της ράβδου. Μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα ράβδου και βλήματος ακινητοποιείται ακαριαία. Η σχέση που συνδέει τα υ και ω είναι:

α. $\upsilon=\omega L$ β. $\upsilon=\omega L/2$ γ. $\upsilon=2\omega L$

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της, $I_{cm}=mL^2/12$.



Απάντηση

Βλήμα και ράβδος δέχονται μόνο τη δύναμη του βάρους τους που είναι κατακόρυφη και διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, Ο. Συνεπώς οι δυνάμεις αυτές δεν παράγουν εξωτερική ροπή για το σύστημα. Άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος ράβδος – βλήμα.

Πριν την κρούση η στροφορμή του συστήματος στον άξονα x είναι το αλγεβρικό άθροισμα των στροφορμών της ράβδου Ιω και του βλήματος $-\frac{m}{3}\upsilon_x L$, όπου $\upsilon_x=\upsilon\eta\mu30^0=\upsilon/2$. Το (–) δηλώνει ότι η φορά κίνησης του βλήματος είναι αντίθετη από αυτή της ράβδου. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα σύμφωνα με τα δεδομένα ακινητοποιείται και η στροφορμή του μηδενίζεται. Εξάλλου η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα περιστροφής που περνάει από το άκρο Ο και είναι κάθετος στη ράβδο είναι:

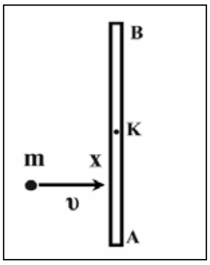
$$I_O=I_{cm}+m(L/2)^2=\frac{mL^2}{3}$$

$$L_{\alpha\rho\chi}=L_{\tau\epsilon\lambda}\rightarrow L_{\alpha,\rho\alpha\beta}+L_{\alpha,\,\beta\lambda}=0\rightarrow \frac{mL^2}{3}\omega-\frac{m}{3}\frac{\upsilon}{2}L\rightarrow \boldsymbol{\upsilon=2\omega L.}$$

Σωστό είναι το **(γ).**

B.70 Ράβδος μάζας M=2m και μήκους L με $I_{cm}=mL^2/12$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας m έρχεται με ταχύτητα, υ και διαπερνάει ακαριαία τη ράβδο σε απόσταση x=L/4 από το CM. Το βλήμα βγαίνει με ταχύτητα υ/2 και η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το CM, Κ. Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση είναι:

α. $7m\upsilon^2/64$ β. $m\upsilon^2/16$ γ. $3m\upsilon^2/64$



Απάντηση

Το σύστημα ράβδος–βλήμα είναι απομονωμένο συνεπώς ισχύει τόσο η αρχή διατήρησης ορμής και στροφορμής. Το βλήμα εισέρχεται με ταχύτητα, υ και εξέρχεται με υ/2, ενώ η ράβδος αποκτά μεταφορική ταχύτητα V_K και γωνιακή ταχύτητα ω,

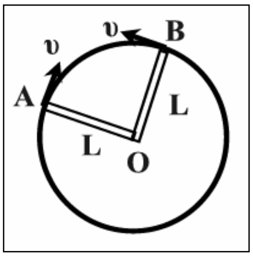
ΑΔΟ: $p_{προ}=p_{μετα} \rightarrow mυ=2mV_K+\frac{mυ}{2} \rightarrow V_K=υ/4$ (1)

ΑΔ Στροφορμής: $L_{προ}=L_{μετα} \rightarrow mυ\frac{L}{4} = m\frac{υ}{2}\cdot\frac{L}{4} + Iω \rightarrow mυ\frac{L}{4} = m\frac{υ}{2}\cdot\frac{L}{4}+\frac{2mL^2}{12}ω \rightarrow \ldots\ ω=\frac{3υ}{4L}$

Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση είναι:

$K=\frac{1}{2}2mV_K^2+\frac{1}{2}Iω^2 \rightarrow \ldots . \rightarrow$ $\mathbf{K= 7mυ^2/64}$ Σωστό είναι το **(α)**

Β.71 Σε οριζόντιο λείο επίπεδο και γύρω από κατακόρυφο σταθερό άξονα κινούνται δύο ράβδοι ΟΑ και ΟΒ μήκους L και μαζών m και 3m αντιστοίχως. Τα άκρα τους Α και Β έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας, υ και κινούνται αντίθετα. Οι ράβδοι συγκρούονται πλαστικά και σχηματίζουν μια ράβδο. Η ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm}=ML^2/12$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της πλαστικής κρούσης είναι



α. $ΔK=-mυ^2$ β. $ΔK=-mυ^2/2$ γ. $ΔK=-mυ^2/3$

Απάντηση

Η ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο είναι μέσω Steiner:

$I_O=I_{cm}+ M(L/2)^2 + (ML^2/12) + (ML^2/4) \rightarrow I_O=ML^2/3$.

Άρα οι ροπές αδράνειας των δύο ραβδών είναι της (ΟΑ) $I_1=mL^2/3$ και της (ΟΒ), $I_2=3mL^2/3=mL^2$

Η κάθε ράβδος περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω=υ/L. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα, ω′. Κατά την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής

$L_2+L_1=L_{ολ} \rightarrow I_2ω-I_1ω=(I_1+I_2)ω' \rightarrow mL^2ω - \frac{mL^2}{3}ω= (mL^2+\frac{mL^2}{3})ω' \rightarrow ω'=ω/2$ (1)

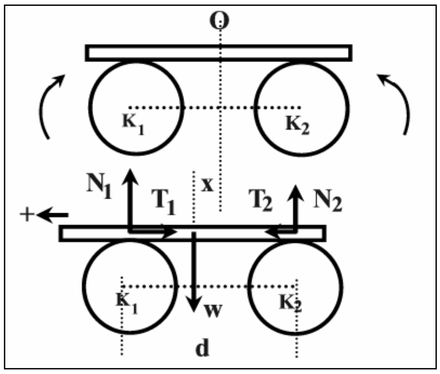
Πριν την κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος ήταν

$K_{προ}=\frac{1}{2}mL^2ω^2 +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2ω^2=\frac{2}{3}mLω^2 \rightarrow K_{προ}=\frac{2}{3}mυ^2$

$K_{μετα}=\frac{1}{2}(I_1+I_2)ω'^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}mL^2\frac{ω^2}{4} \rightarrow K_{μετα}=\frac{1}{6}mυ^2$

$ΔK=K_{μετα}-K_{προ} \rightarrow ΔK=\frac{1}{6}mυ^2-\frac{2}{3}mυ^2 \rightarrow$ $\mathbf{ΔK=-\frac{mυ^2}{2}}$ Σωστό είναι το **(β)**

B.72 Οι δύο όμοιοι κύλινδροι που φαίνονται στο σχήμα μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονες που διέρχονται από το κέντρο τους, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Πάνω στους κυλίνδρους τοποθετούμε ισοπαχή και ομογενή σανίδα έτσι ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το μέσο της διακέντρου K_1K_2 των δύο κυλίνδρων. Βάζουμε τους τροχούς σε περιστροφή με τις φορές που φαίνονται στο σχήμα και μετατοπίζουμε οριζόντια και λίγο τη σανίδα από την αρχική της θέση. Να δείξετε ότι κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς.



α. $D=\frac{2\mu mg}{d}$ β. $D=\frac{\mu mg}{d}$ γ. $D=\frac{4\mu mg}{d}$

Δίνονται, $K_1K_2=d$, το βάρος της σανίδας, $w=mg$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στη σανίδα και τους κυλίνδρους, μ.

Απάντηση

Η σανίδα δέχεται το βάρος της w, τις δύο αντιδράσεις N_1,N_2 από τους κυλίνδρους και τις τριβές T_1,T_2 από αυτούς. Η φορά των T_1,T_2 καθορίζεται από τη φορά περιστροφής των κυλίνδρων και τη λογική ότι πρέπει να είναι ίδια με τη φορά που θέλει ο κάθε κύλινδρος να σπρώξει τη σανίδα.
Οι δύο τριβές είναι: $T_1=\mu N_1$ και $T_2=\mu N_2$

Στον κατακόρυφο άξονα ,y η σανίδα ισορροπεί συνεπώς:
$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1+N_2-w=0 \rightarrow N_1+N_2=mg \rightarrow N_2=mg-N_1$ (1)

Προκαλούμε μια μικρή τυχαία οριζόντια απομάκρυνση της σανίδας από τη θέση ισορροπίας της κατά, x, προς τα αριστερά. Η ράβδος δεν περιστρέφεται και αυτό σημαίνει ότι:

$\Sigma\tau_O=0 \rightarrow N_2\left(\frac{d}{2}+x\right)-N_1\left(\frac{d}{2}-x\right)=0 \rightarrow N_2\frac{d}{2}-N_1\frac{d}{2}+(N_2+N_1)x=0 \overset{(1)}{\clubsuit} (mg-N_1)\frac{d}{2}-N_1\frac{d}{2}+mgx=0 \rightarrow \ldots \rightarrow$

$N_1=\frac{mg}{2}+\frac{mgx}{d}$ (2)

Από (1)(2)$\rightarrow N_2=\frac{mg}{2}-\frac{mgx}{d}$ (3)

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται στη ράβδο στον οριζόντιο άξονα των x, είναι:

$\Sigma F_x=T_2-T_1=\mu N_2-\mu N_1=\mu(N_2-N_1)=\mu\left(\frac{mg}{2}-\frac{mgx}{d}-\frac{mg}{2}-\frac{mgx}{d}\right)=\mu\left(-\frac{2mgx}{d}\right) \rightarrow \mathbf{\Sigma F_x=-\frac{2\mu mg}{d}x.}$

Άρα η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής $\Sigma F_X=-Dx$ με $D=\frac{2\mu mg}{d}$, οπότε παίζει το ρόλο της δύναμης επαναφοράς και αναγκάζει τη σανίδα να κάνει οριζόντια ταλάντωση με θέση ισορροπίας την αρχική θέση του μέσου της Ο. Η σταθερά επαναφοράς είναι η $\mathbf{D=\frac{2\mu mg}{d}}$**. Σωστό είναι το (α)**

Β.73 Από το εσωτερικό ενός κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R, που έχει ύψος h, αφαιρούμε πλήρως ένα ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r, όπου r < R,

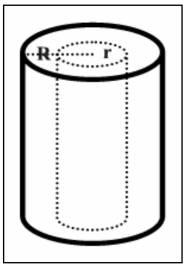
Ι. Η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που προκύπτει μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος, είναι

α. $I=\frac{MR^2}{2}(1-\frac{r^4}{R^4})$ β. $I=\frac{Mr^2}{2}$ γ. $I=\frac{MR^2}{2}(1-\frac{r^2}{R^2})$

ΙΙ. Στη συνέχεια λιπαίνουμε το κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και το επανατοποθετούμε στη θέση του, ούτως ώστε να εφαρμόζει απόλυτα με τον κοίλο κύλινδρο χωρίς τριβές. Το νέο σύστημα που προκύπτει αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο. Αν υποθέσουμε ότι R=2r και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g, τότε η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος είναι:

α. $a=\frac{32g\eta\mu\varphi}{47}$ $a=\frac{3g\eta\mu\varphi}{7}$ γ. $a=\frac{2g\eta\mu\varphi}{5}$

Απάντηση:



Ι. Το κυλινδρικό τμήμα που αφαιρούμε έχει μάζας m και ακτίνα r. Άρα το κοίλο που απομένει θα έχει ροπή αδράνειας :

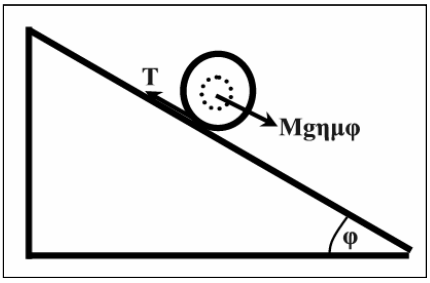
$I_{κοιλ}=I_R-I_r=\frac{MR^2}{2}-\frac{mr^2}{2}$

Οι κύλινδροι έχουν την ίδια πυκνότητα συνεπώς ισχύει:

$\rho_R=r_r\rightarrow\frac{M}{V_R}=\frac{m}{Vr}\rightarrow\frac{M}{\pi R^2h}=\frac{m}{\pi r^2h}\rightarrow m=\frac{Mr^2}{R^2}$

Άρα $I_{κοιλ}=\frac{MR^2}{2}-\frac{Mr^4}{2R^2}\rightarrow$ $\mathbf{I=\frac{MR^2}{2}(1-\frac{r^4}{R^4})}$

Σωστό είναι το **(α)**



ΙΙ. Η ροπή αδράνειας του κοίλου όταν, R=2r είναι: $I_{κοιλ}=\frac{15}{32}MR^2$. Μετά την επανατοποθέτηση ο κύλινδρος μάζας M κάνει μεταφορική κίνηση, αλλά μόνο ο κοίλος κάνει περιστροφική αφού το τμήμα που επανατοποθετήσαμε δεν περιστρέφεται λόγω του λιπαντικού.

$\Sigma F_x=ma\rightarrow Mg\eta\mu\varphi-T=Ma$ (1)

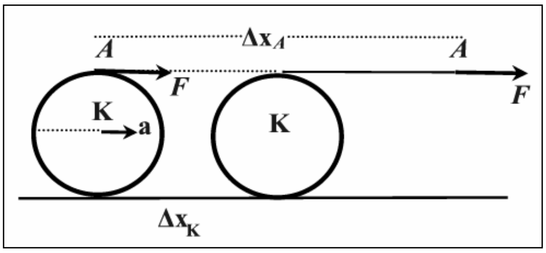
$\Sigma\tau=I_{κοιλ}\alpha_{γν}\rightarrow TR=\frac{15}{32}MR^2\frac{a}{R}\rightarrow T=15Ma/32$ (2)

Από (1) και (2)$\rightarrow Mg\eta\mu\varphi-\frac{15Ma}{32}=Ma\rightarrow Mg\eta\mu\varphi=\frac{47Ma}{32}\rightarrow$ $\mathbf{a=\frac{32g\eta\mu\varphi}{47}}$ Σωστό είναι το (α)

B.74 Μια στεφάνη μάζας m ακτίνας R με όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στην περιφέρεια έχει τυλιγμένο νήμα στο οποίο ασκείται δύναμη F και το ξετυλίγει ενώ αυτή βρίσκεται αρχικά ακίνητη πάνω σε **λείο** επίπεδο.
I. Να ελέγξετε αν η στεφάνη κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
II. Για οριζόντια μετατόπιση του άκρου A του νήματος κατά $\Delta x_A=d$, η μεταφορική κινητική ενέργεια K_μ και η αντίστοιχη περιστροφική K_π του κυλίνδρου είναι :

α. $K_\mu=K_\pi=\frac{1}{2}Fd$ β. $K_\mu=K_\pi=Fd$ γ. $K_\mu=Fd,\ K_\pi=\frac{1}{2}Fd$ δ. $K_\mu=\frac{1}{2}Fd,\ K_\pi=Fd$

Απάντηση:

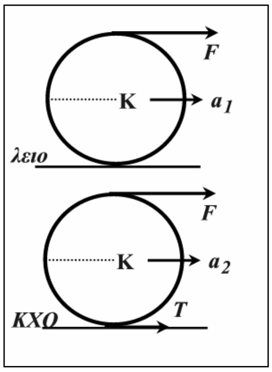


I. Η ροπή αδράνειας της στεφάνης είναι $I=mR^2$
$\Sigma F_x=ma \rightarrow F=ma \rightarrow a=F/m$ (1)
$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow FR=mR^2\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=F/mR$ (2)
Από (1) και (2)$\rightarrow$ $\mathbf{a=\alpha_{\gamma\nu}R}$
Άρα κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση (ΚΧΟ)

II. Το σημείο A έχει ταχύτητα $\upsilon_A=\upsilon_K+\alpha_{\gamma\nu}R=2\upsilon_K$ συνεπώς διανύει διπλάσια οριζόντια απόσταση από το κέντρο μάζας K της στεφάνης. Άρα $d=2\Delta x_K \rightarrow \Delta x_K=d/2$

Η κινητική ενέργεια μεταφοράς ισούται με το μεταφορικό έργο της F
$K_\mu=W_F=F\Delta x_K=F(d/2) \rightarrow K_\mu=\frac{Fd}{2}$ (3)
Η κινητική ενέργεια περιστροφής ισούται με το έργο της ροπής της F
$K_\pi=W_\tau=\tau\cdot\Delta\theta=FR\Delta\theta=F\Delta x_K \rightarrow K_\pi=\frac{Fd}{2}$ (4)
Από (3)(4) $\mathbf{K_\mu=K_\pi=\frac{1}{2}Fd}$ Σωστό είναι το **(α)**

B.75 Δύο κύλινδροι ίδια μάζας, ίδιας ακτίνας και ίδιας ροπής αδράνειας $I=\frac{1}{2}mR^2$, τυλίγονται με νήμα και τοποθετούνται πάνω σε διαφορετικά οριζόντια επίπεδα. Ο (α) σε λείο και ο (β) σε τραχύ ώστε να μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αν ασκήσουμε ίδια δύναμη F και μέχρι να ξετυλιχτεί νήμα ίδιου μήκους L.
I. Οι μετατοπίσεις Δx_1 και Δx_2 των κέντρων μάζας του κάθε κυλίνδρου θα έχουν τη σχέση:
α. $\Delta x_1=\Delta x_2$ β. $\Delta x_1=2\Delta x_2$ γ. $\Delta x_2=2\Delta x_1$ δ. $\Delta x_1=4\Delta x_2$
II. Οι κινητικές ενέργειες K_A και K_B των δύο κυλίνδρων θα συνδέονται με τις σχέσεις:
α. $K_1=K_2$ β. $K_1=0{,}50K_2$ γ. $K_1=1{,}25K_2$ δ. $K_1=0{,}75K_2$



Απάντηση:

I. Στην περίπτωση (α): $F=ma_1$ (1) και $FR=(mR^2/2)\alpha_{\gamma\nu1}$ (2) $\rightarrow \alpha_{\gamma\nu1}R=2a_1$ (3)
Στην περίπτωση (β): $F+T=ma_2$ (4) και $FR-TR=(mR^2/2)\alpha_{\gamma\nu2}$ (5) με $\alpha_{\gamma\nu2}R=a_2$ (6)
Από (4)(5)(6)$\rightarrow$ $F=3ma_2/4$ (1) $\xrightarrow{1}$ $a_1=3a_2/4$ (7)

Αφού είναι ίδιο το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται σε κάθε περίπτωση θα έχουμε:

$\Delta l_1=\Delta l_2 \rightarrow R\Delta\theta_1=R\Delta\theta_2 \rightarrow \ \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\nu 1}t_1^{\,2}=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\nu 2}t_2^{\,2} \xrightarrow{3,6} \frac{2a_1}{R}t_1^{\,2}=\frac{a_2}{R}t_2^{\,2} \xrightarrow{7} 2\frac{3}{4}a_2t_1^{\,2}=a_2t_2^{\,2} \rightarrow t_2^{\,2}=3t_1^{\,2}/2$

(8)

$\Delta x_1=\frac{1}{2}a_1t_1^{\,2}$ και $\Delta x_2=\frac{1}{2}a_2t_2^{\,2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}a_1\cdot\frac{3}{2}t_1^{\,2}=a_1t_1^{\,2}=2\Delta x_1 \rightarrow \mathbf{\Delta x_2=2\Delta x_1}$ Σωστό το **(γ)**

II. Στην περίπτωση (α): $\Delta x_1=\frac{1}{2}a_1t_1^{\,2}$ και το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται είναι:

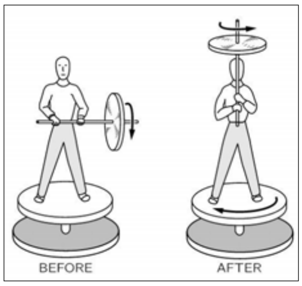
$\Delta l_1=R\Delta\theta_1=R\,\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\nu 1}t_1^{\,2}=R\frac{1}{2}\cdot\frac{2a_1}{R}t_1^{\,2}=a_1t_1^{\,2}=2\Delta x_1 \rightarrow \Delta l_1=2\Delta x_1$

Άρα από το ΘΜΚΕ: $K_1=W_1=F\Delta x_1+FR\Delta\theta_1=F\Delta x_1+F\Delta l_1=3F\Delta x_1$

Στην περίπτωση (β): $K_2=W_2=F\Delta x_2+FR\Delta\theta_2=2F\Delta x_2=4F\Delta x_1$

Άρα: $\frac{K_1}{K_2}=\frac{3}{4} \rightarrow \mathbf{K_1=0{,}75K_2}$ Σωστό είναι το **(δ)**

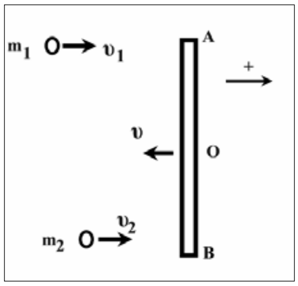
Β.76 Δώστε μια εξήγηση για τις δύο διαδοχικές καταστάσεις που φαίνονται στο σχήμα.
Εξετάστε αν παραβιάζονται οι αρχές διατήρησης
α. της στροφορμής
β. της ενέργειας
γ. της μηχανικής ενέργειας



Απάντηση:

Ο τροχός μπορεί να περιστρέφεται αρχικά αλλά δεν έχει στροφορμή στον κατακόρυφο άξονα, y. Το τραπέζι είναι αρχικά ακίνητο. Συνεπώς αρχικά το σύστημα έχει στον άξονα y μηδενική στρφορμή. Όταν ο άνθρωπος φέρνει τον άξονα του τροχού στην κατακόρυφη θέση η στροφορμή του διατηρείται σταθερή αφού δεν ασκείται πάνω του ροπή. Το σύστημα «τροχός – τραπέζι – ανθρωπος» πρέπει να διατηρήσει σταθερή τη στροφορμή του, δηλαδή μηδέν αφού δεν δέχεται εξωτερικές ροπές. Συνεπώς θα πρέπει το τραπέζι μαζί με τον άνθρωπο να αποκτήσουν αντίθετη στροφορμή ώστε το διανυσματικό άθροισμα να παραμείνει μηδέν.
Η μηχανική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται αφού το τραπέζι με τον άνθρωπο αποκτούν τώρα κινητική ενέργεια ενώ του τροχού δεν άλλαξε. Αυτό είναι δυνατόν γιατί ο άνθρωπος ξοδεύει ενέργεια ένα μέρος της οποίας μεταβιβάζεται στο σύστημα ως κινητική. Προφανώς η ενέργεια διατηρείται σταθερή όπως σε κάθε φυσικό φαινόμενο.

Β.77 Μια δοκός μάζας Μ και μήκους d κινείται στο διάστημα εκτός πεδίου βαρύτητας, με ταχύτητας υ. Με αντίθετη κατεύθυνση κινούνται δύο σφαίρες με μάζες $m_1=m_2=M/2$ και ταχύτητα $\upsilon_1=4\upsilon$ και $\upsilon_2=2\upsilon$ αντίστοιχα. Φτάνοντας ταυτόχρονα οι σφαίρες συσσωματώνονται στα δύο άκρα Α και Β. Το σύστημα μετά την κρούση



Ι. περιστρέφεται γύρω από το μέσον Ο με γωνιακή ταχύτητα

α. $\omega=3\upsilon/d$ β. $\omega=3\upsilon/2d$ γ. $\omega=3\upsilon/4d$

ΙΙ. έχει κινητική ενέργεια
α. $K=11M\upsilon^2/12$ β. $K=M\upsilon^2/12$ γ. $K=M\upsilon^2/3$

Απάντηση:

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον O και είναι κάθετος στη ράβδο:

$L_{πριν}=L_{μετα} \rightarrow m_1υ_1\frac{d}{2} - m_2υ_2\frac{d}{2} = I_{ολ}\cdot ω.$ (1)

Με $I_{ολ}= I+I_1+I_2=\frac{Md^2}{12}+\frac{M}{2}\cdot\frac{d^2}{4}+\frac{M}{2}\cdot\frac{d^2}{4}=\frac{Md^2}{3}$ (2)

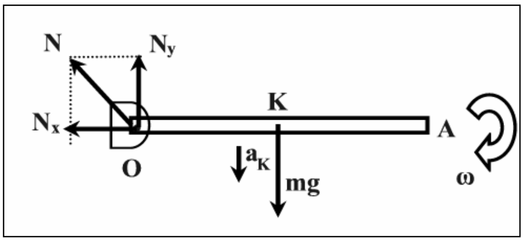
Από (1) και (2) $\rightarrow Mυ\frac{d}{2}=\frac{Md^2}{3}ω \rightarrow$ **ω=3υ/2d** Σωστό είναι το **(β)**

II. Από την ΑΔο κατά την κρούση υπολογίζω την κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας του συστήματος V, μετά την κρούση:

$p_{προ}=p_{μετα} \rightarrow \frac{M}{2}4υ+\frac{M}{2}2υ-Mυ=(\frac{M}{2}+\frac{M}{2}+M)V \rightarrow V=υ.$

Άρα: $K=\frac{1}{2}(M+\frac{M}{2}+\frac{M}{2})V^2+\frac{1}{2}\frac{Md^2}{3}ω^2 \rightarrow \mathbf{K=\frac{11Mυ^2}{12}}$ Σωστό είναι το **(α)**

Β.78 Μια ομογενής ράβδος μάζας, m=3kg, μήκους ΟΑ=d=1m μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο Ο. Κάποια στιγμή διέρχεται από την οριζόντια θέση με γωνιακή ταχύτητα $ω=\sqrt{5}$ rad/s. Η δύναμη N που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής Ο, όταν περνάει από την κατακόρυφη θέση είναι:



α. $N=7,5\sqrt{2}N$ β. N=7,5N γ. $N=3,5\sqrt{2}N$ d. $N=15\sqrt{2}N$

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο, $I=md^2/3$

Απάντηση

Υπολογίζω τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου σετ θέση αυτή. Η ροπή αδράνειας είναι: $I_O=md^2/3=1kgm^2$.

$Στ=I_O\cdot α_{γν} \rightarrow mg(d/2)= I_O\cdot α_{γν} \rightarrow α_{γν}=15rad/s^2$.

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας K είναι $a_K=α_{γν}(d/2) \rightarrow a_K=7,5m/s^2$.

Η ράβδος δέχεται στο άκρο Ο δύο συνιστώσες δυνάμεις. Η μία είναι οριζόντια N_x και συνδέεται με την κεντρομόλο επιτάχυνση

$ΣF_x= mω^2\cdot(d/2) \rightarrow N_x= mω^2\cdot(d/2) \rightarrow \mathbf{N_x=7,5N}$

Η άλλη είναι κατακόρυφη N_y και σχετίζεται με την επιτρόχια επιτάχυνση του κέντρου μάζας

$ΣF_y=ma_K \rightarrow mg-N_y=ma_K \rightarrow N_y=mg-ma_K \rightarrow \mathbf{N_y=7,5N}$

Η συνισταμένη δύναμη θα έχει μέτρο $N=\sqrt{N_x^2+N_y^2} \rightarrow \mathbf{N=7,5\sqrt{2}N}$ Άρα σωστό είναι το **(α)**

Η κατεύθυνση της N ως προς τον άξονα x, είναι: $εφθ=N_y/N_x=1 \rightarrow θ=45^0$.