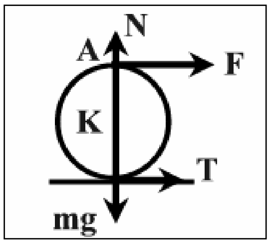
Θέματα στην κύλιση και την ολίσθηση



K1. Κύλινδρος μάζας m=2kg ακτίνας R=0,1m είναι αρχικά ακίνητος πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει τριβή. Ασκούμε στον κύλινδρο σταθερή δύναμη μέτρου F=30N, όπως στο σχήμα και ο κύλινδρος αρχίζει να κινείται. Δίνονται $g=10m/s^2$ και $I_{cm}=mR^2/2$.
Α. Για ποιες τιμές του συντελεστή τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου είναι δυνατή η κύλιση χωρίς ολίσθηση.
Β. Αν ο συντελεστής οριακής τριβής μ_σ θεωρείται ίσος με το συντελεστή τριβής ολίσθησης και είναι $\mu_\sigma=0,2$, να εξετάσετε το είδος της κίνησης του κυλίνδρου **κ**αι να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και τη γωνιακή επιτάχυνση.
Γ. Να βρείτε τα έργα της F, της τριβής Τα και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου για μετατόπιση Δx=34m.

<u>Λύση</u>

Α. Ας υποθέσουμε ότι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και ας αναζητήσουμε για ποιες τιμές του συντελεστή οριακής τριβής είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό με την προϋπόθεση ότι η δύναμη F=30N. Σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\nu}R$ (1)

$\Sigma F=ma_{cm}\rightarrow F+T=ma_{cm}$ (2) $\quad\quad \Sigma F_y=0\rightarrow N-mg=0\rightarrow N=mg$ (3)

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow FR-TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{a_{cm}}{R}\rightarrow F-T=\frac{ma_{cm}}{2}$ (4)

$(2)+(3)\rightarrow 2F=\frac{3ma_{cm}}{2}\rightarrow F=\frac{3ma_{cm}}{4}$ (5)

Από (2) (4)$\rightarrow F+T=\frac{4F}{3}\rightarrow T=\frac{F}{3}$ (6)

Για να μην ολισθαίνει πρέπει: $T<T_{max}\rightarrow T<\mu_\sigma N\rightarrow \mu_\sigma>\frac{T}{N}\rightarrow\mu_\sigma>\frac{\frac{F}{3}}{mg}\rightarrow\mu_\sigma>\frac{F}{3mg}\rightarrow$ $\boldsymbol{\mu_\sigma>0,5}$

Β. Αν $\mu_\sigma=0,2<0,5$ τότε ολισθαίνει και η τριβή είναι $T_{o\rho}=\mu N=4N$. Τα προηγούμενα ανασκευάζονται ως εξής:

$\Sigma F=ma_{cm}\rightarrow F+T_{o\rho}=ma_{cm}\rightarrow a_{cm}=17m/s^2$

$FR-TR=\frac{mR^2}{2}\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=260rad/s^2$

Γ. $\Delta x=½a_{cm}t^2\rightarrow t=2s$

$\upsilon_{cm}=a_{cm}t=34m/s$

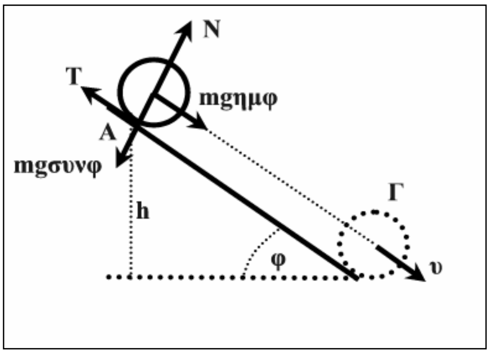
$\omega=\alpha_{\gamma\nu}t=500rad/s \quad\quad \Delta\theta=½\,\alpha_{\gamma\nu}t^2=520rad$

$W_F=F\cdot\Delta x+FR\Delta\theta=2580J$

$W_T=T\Delta x-TR\Delta\theta=-72J \quad\quad \Sigma W=W_F+W_T=2580-72\rightarrow\Sigma W=2508J$

$\Delta K=\Sigma W=2508J$ ή $\Delta K=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=½m\upsilon_{cm}^2+½I\omega^2=2508J$.

Κ.2 Συμπαγής και ομογενής κύλινδρος με μάζα, m=2kg και ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, $I_K=mR^2/2$ με R=0,1m αφήνεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ σε σημείο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ με ημφ=0,6 και συνφ=0,8.



Α. Για ποιες τιμές του συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής είναι δυνατή η κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Β. Αν ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής είναι ίσος με το συντελεστή τριβής ολίσθησης, μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου και είναι μ=0,1 να υπολογίσετε

B_1 την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και τη γωνιακή επιτάχυνση.

B_2. τα έργα του βάρους και της τριβής και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ έως την $t_1=2s$.

Δίνεται $g=10m/s^2$

Λύση

Α. Έστω ότι ο κύλινδρος κυλίεται (ΧΟ).

$\Sigma F_y=0 \rightarrow N-mg\sigma\upsilon\nu\varphi=0 \rightarrow N=mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ (1)

$\Sigma F_x=ma \rightarrow mg\eta\mu\varphi-T=ma$ (2)

$\Sigma \tau=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{a}{R} \rightarrow T=ma/2$ (3)

Από (2)(3)$\rightarrow T=mg\eta\mu\varphi/3$ (4)

Για να κυλίεται πρέπει $T\le\mu_\sigma N \rightarrow \frac{mg\eta\mu\varphi}{3}\le\mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow$ $\boldsymbol{\mu_\sigma\ge0,25}$

B_1. Αφού μ=0,1<0,25 ο κύλινδρος ολισθαίνει. Άρα οι εξισώσεις ανασκευάζονται ως εξής:
Η τριβή είναι τώρα ολίσθησης και ίση με την οριακή τιμή της
$T_{o\rho}=\mu_\sigma N=\mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow T_{o\rho}=1,6N$

$\Sigma F_x=ma_1 \rightarrow mg\eta\mu\varphi-T_{o\rho}=ma_1 \rightarrow$ $\boldsymbol{a_1=5,2m/s}$

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu1} \rightarrow T_{o\rho}R=\frac{mR^2}{2}\alpha_{\gamma\nu1} \rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha_{\gamma\nu1}=16rad/s^2}$

B_2. Τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ τα στοιχεία της σύνθετης κίνησης θα είναι:

$\Delta x=\frac{1}{2}a_1t^2=10,4m$, $\Delta\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\nu1}t^2=32rad$

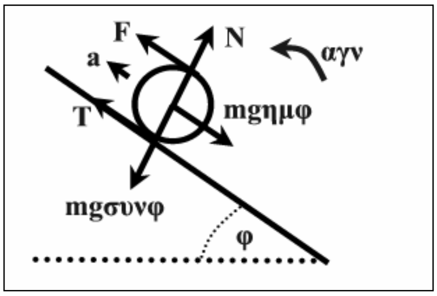
$\upsilon_{cm}=a_1t=10,4m/s$ $\omega=\alpha_{\gamma\nu1}t=32rad/s$

$W_{wx}=mg\eta\mu\varphi\cdot\Delta x=$**124,8J**

$W_T=-T\cdot\Delta x+TR\Delta\theta==-$ **11,52J**

$\Sigma W=W_{wx}+W_T=$**113,28J**

$\Delta K=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=$**113,28J**



Κ.3 Συμπαγής και ομογενής κύλινδρος έχει μάζα, m=2kg και ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, $I_K=mR^2/2$ με R=0,1m. Τοποθετείται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με ημφ=0,6 και συνφ=0,8, και του ασκείται δύναμη F με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα.

Α. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της δύναμης F , ώστε ο κύλινδρος να ισορροπεί;

Β. Ασκούμε στο κύλινδρο δύναμη μέτρου, F=15N και αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0=0$.

B_1. Για ποιες τιμές του συντελεστή μέγιστης στατικής τριβής είναι δυνατή η κύλιση χωρίς ολίσθηση.

B_2. Αν ο κύλινδρος κυλίεται να υπολογιστεί η ισχύς της δύναμης F=15 τη χρονική στιγμή t=2s.

Γ. Αν ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής είναι ίσος με το συντελεστή τριβής ολίσθησης, μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου και ισούται $\mu=\mu_\sigma=0,1$ και η δύναμη είναι F=15N να υπολογίσετε

Γ_1 την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και τη γωνιακή επιτάχυνση.

Γ_2. τα έργα της F, του βάρους και της τριβής και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ έως την $t_1=2s$.

<u>Λύση:</u>

Α. Ισορροπία σημαίνει να μην περιστρέφεται συνεπώς: $\Sigma\tau=0 \to FR-TR=0 \to F=T$
και να μη μεταφέρεται, συνεπώς $\Sigma F_x=0 \to F+T-mg\eta\mu\varphi=0 \to 2F=mg\eta\mu\varphi \to$ **F=6N**

B_1. Η F=15N>6N. Συνεπώς ο κύλινδρος έχει την τάση να κινηθεί προς τα πάνω. Έστω ότι η στατική τριβή, Τ έχει κατεύθυνση προς τα πάνω.

$\Sigma Fy=0 \to N-mg\sigma\upsilon\nu\varphi=0 \to N=mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ (1)

$\Sigma F_x=ma \to F+T-mg\eta\mu\varphi=ma_{cm}$ (2)

$\Sigma r=I\alpha_{\gamma\nu} \to FR-TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{a}{R}$ (3)

Από (2)(3)$\to a_{cm}=6m/s^2$ και T=9N

Για να κυλίεται πρέπει $T\le\mu_\sigma N \to T\le\mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \to$ **$\mu_\sigma\ge 9/16 \to \mu_\sigma\ge 0,5625$**

Δηλαδή χρειάζεται «καλή» στατική τριβή ώστε να γαντζώσει καλά στο επίπεδο και να κυλήσει κανονικά προς τα πάνω.

B_2. Τη χρονική στιγμή t=2s, η ταχύτητα είναι: $\upsilon_{cm}=a_{cm}t=at=12m/s$
Η δύναμη F παράγει έργο τόσο μεταφορικά όσο και περιστροφικά.
$P_F=F\upsilon_{cm}+FR\omega=F\cdot 2\upsilon_{cm} \to$ **$P_F=360J/s$**

Γ_1. Αν $\mu_\sigma=0,1<0,5625$ τότε ο κύλινδρος ολισθαίνει και η τριβή είναι ολίσθησης ίση με
$T_{o\rho}=\mu_\sigma N=\mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \to T_{o\rho}=1,6N$
Με θετική φορά προς τα πάνω:

$\Sigma F=ma \to F+T_{o\rho}-mg\eta\mu\varphi=ma_1 \to$ **$a_1=2,3m/s^2$**

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu 1} \to FR-T_{o\rho}R=\frac{mR^2}{2}\alpha_{\gamma\nu 1} \to$ **$\alpha_{\gamma\nu 1}=134rad/s^2$**

Συνεπώς ο κύλινδρος ολισθαίνει προς τα πάνω και περιστρέφεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Γ₂. Τη χρονική στιγμή t_1=2s τα στοιχεία της σύνθετης κίνησης θα είναι:

$\Delta x= ½a_1t^2=4,6m$, $\Delta\theta= ½\ \alpha_{\gamma\nu1}t^2=268rad$

$\upsilon_{cm}=a_1t=4,6m/s$ $\omega=\alpha_{\gamma\nu1}t=268rad/s$

Η F κάνει έργο θετικό τόσο στη μεταφορά όσο και στην περιστροφή, το βάρος κάνει έργο αρνητικό στη μεταφορά φυσικά και η τριβή κάνει έργο θετικό στη μεταφορά και αρνητικό στην περιστροφή.

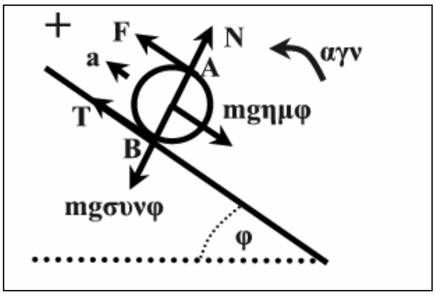
$W_F=FR\Delta\theta + F\Delta x=$**471J**

$W_T=T_{o\rho}\Delta x - T_{o\rho}R\Delta\theta=$**–35,2J**

$W_{wx}=-mg\eta\mu\varphi\cdot\Delta x=$**–55,2J**

ΔΚ=ΣW= $W_F+ W_T+ W_{wx}=$ **380,28J**

Κ.4 Παίρνουμε έναν κύλινδρο μάζας m=2kg, ακτίνας R=0,1m αυτόν, τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως φ, με ημφ=0,6 και συνφ=0.8. Ασκούμε στο άκρο Α του νήματος δύναμη παράλληλη στο επίπεδο με μέτρο ίσο F=10N και αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο να κινηθεί.



Α. Για ποιες τιμές του συντελεστή μέγιστης στατικής τριβής, μ_σ είναι δυνατή η κύλιση χωρίς ολίσθηση υπό αυτές τις συνθήκες;

B_1 Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ίσος με το συντελεστή μέγιστης στατικής τριβής, και είναι μ=0,1 πόση είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή επιτάχυνση με την οποία κινείται ο κύλινδρος **B_2.** Ποια είναι τα έργα των δυνάμεων F, T, w_x και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας στο χρονικό διάστημα από t=0 έως t=2s; Πόση είναι η ταχύτητα των σημείων Α και Β τη χρονική στιγμή t=2s;

Γ_1. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ίσος με το συντελεστή μέγιστης στατικής τριβής, και είναι μ=0,2 πόση είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή επιτάχυνση με την οποία κινείται ο κύλινδρος και η ταχύτητα των σημείων Α και Β;

Γ_2. Ποια είναι τα έργα των δυνάμεων F, T, w_x στο χρονικό διάστημα από t=0 έως t=2s;

Πόση είναι η ταχύτητα των σημείων Α και Β τη χρονική στιγμή t=2s;

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως τον άξονά του $I_\kappa = \frac{1}{2} mR^2$, και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$.

Λύση

Α. Ισορροπία σημαίνει να μην περιστρέφεται συνεπώς: Στ=0→FR−TR=0→F=T

και να μη μεταφέρεται, συνεπώς $\Sigma F_x=0$→ F+T−mgημφ=0→2F=mgημφ→ **F=6N**

Αφού F=10N>6N ο κύλινδρος κινείται προς τα πάνω που είναι και η θετική φορά.

ΣFy=0→ N−mgσυνφ=0→N=mgσυνφ (1)

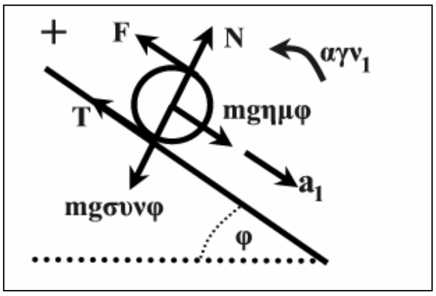
$\Sigma F_x=ma \rightarrow F+T - mg\eta\mu\varphi = ma_{cm}$ (2)

$\Sigma r = I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow FR-TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{a}{R}$ (3)

Από (2)(3)→ $a_{cm}=4/3 m/s^2$ και T=22/3N

Για να κυλίεται πρέπει $T \le \mu_\sigma N \rightarrow T \le \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow$ **$\mu_\sigma \ge 11/24 \rightarrow \mu_\sigma \ge 0{,}458$**

B_1 Με μ=0,1<0,458 ολισθαίνει. Προς τα πού όμως; Η τριβή είναι ολίσθησης με $T_{o\rho}=\mu_\sigma N \rightarrow T_{o\rho}=1{,}6N$



$\Sigma F=ma \rightarrow F+T_{o\rho}-mg\eta\mu\varphi=ma_1 \rightarrow$ **$a_1=-0{,}2m/s^2$**

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu1} \rightarrow FR-T_{o\rho}R=\frac{mR^2}{2}\alpha_{\gamma\nu1} \rightarrow$ **$\alpha_{\gamma\nu1}=84rad/s^2$**

Συνεπώς το κέντρο μάζας κινείται προς τα κάτω με $|a_1|=0{,}2m/s^2$ και ο κύλινδρος στρέφεται με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Δηλαδή παίρνει ανάποδες στροφές. Η τριβή είναι πολύ μικρή για να τον κρατήσει και γλιστράει προς τα κάτω ενώ περιστρέφεται.

B_2. Σε $\Delta t=t=2s$ τα κινηματικά στοιχεία θα είναι:

$\Delta x=\frac{1}{2}a_1t^2=0,4m$ $\upsilon_{cm}=a_1t=-0,4m/s$

$\omega=\alpha_{\gamma\nu1}t=168rad/s$ $\Delta\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\nu1}t^2=168rad$

Τα έργα: Το βάρος κάνει έργο θετικό, η F κάνει θετικό έργο στην περιστροφή αλλά αρνητικό στη μεταφορά και η Τ κάνει αρνητικό έργο τόσο στη μεταφορά όσο και στην περιστροφή

$W_{Wx}=mg\eta\mu\varphi\cdot\Delta x=4,8J$

$W_F=-F\Delta x+FR\Delta\theta=-4J+168=164J$

$W_T=-T\Delta x-TR\Delta\theta=-26,88J-0,64J=-27,52J$

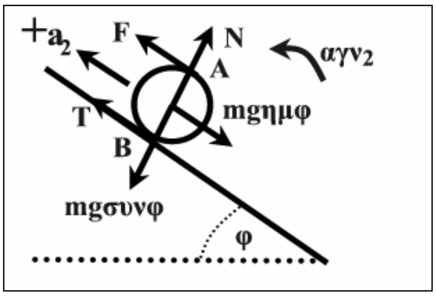
$\Sigma W=W_{Wx}+W_F+W_T\rightarrow\Sigma W=141,28J$

$\Delta K=\Sigma W=141,28J$

Οι ταχύτητες: $\upsilon_A=\upsilon_{cm}+\omega R=-0,4m/s+168\cdot0,1m/s=16,4m/s$

$\upsilon_B=\upsilon_{cm}-\omega R=-0,4m/s-16,8m/s=-17,2m/s$

Γ_1. Όταν είναι $\mu=0,2<0,458$ και πάλι ολισθαίνει. Τι αλλάζει όμως; Η τριβή είναι και πάλι ολίσθησης $T_{o\rho2}=\mu_\sigma N=0,2\cdot16=3,2N$. Η τριβή μεγαλώνει.



$\Sigma F_x=ma_2\rightarrow F+T_{o\rho2}-mg\eta\mu\varphi=ma_2\rightarrow$ $\mathbf{a_2=0,6m/s^2}$

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu2}\rightarrow FR-T_{o\rho2}\cdot R=\frac{mR^2}{2}\alpha_{\gamma\nu2}\rightarrow$ $\mathbf{\alpha_{\gamma\nu1}=68rad/s^2}$

Άρα ο κύλινδρος με τη βοήθεια της μεγαλύτερης τριβής ανεβαίνει προς τα πάνω με φορά πάντα αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού. Γαντζώνει στο έδαφος και ανεβαίνει αλλά η τριβή δεν επαρκεί για να κάνει κύλιση (ΧΟ). Επειδή $\alpha_{\gamma\nu,2}R>a_2$ ο κύλινδρος σπινάρει.

Γ_2. Σε $\Delta t=t=2s$ τα κινηματικά στοιχεία θα είναι:

$\Delta x=\frac{1}{2}a_2t^2=1,2m$ $\upsilon_{cm}=a_2t=1,2m/s$

$\omega=\alpha_{\gamma\nu2}t=136rad/s$ $\Delta\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\nu2}t^2=136rad$

Τα έργα: Το βάρος κάνει έργο αρνητικό, η F κάνει θετικό έργο στην περιστροφή και στη μεταφορά και η Τ κάνει έργο θετικό στη μεταφορά και αρνητικό στην περιστροφή

$W_{Wx}=-mg\eta\mu\varphi\cdot\Delta x=-14,4J$

$W_F=F\Delta x+FR\Delta\theta=148J$

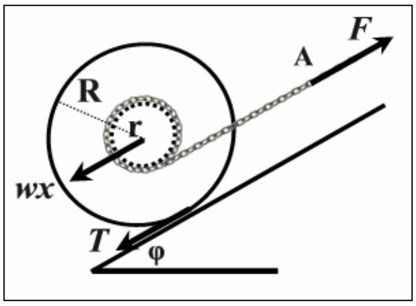
$W_T=T\Delta x-TR\Delta\theta=-39,68J$

$\Sigma W=W_{Wx}+W_F+W_T\rightarrow$ $\mathbf{\Sigma W=93,92J}$

Οι ταχύτητες: $\upsilon_A=\upsilon_{cm}+\omega R=1,2m/s+136\cdot0,1m/s=14,8m/s$

$\upsilon_B=\upsilon_{cm}-\omega R=1,2m/s-13,6m/s=-12,4m/s$

Κ.5 Ο κύλινδρος του σχήματος ακτίνας R=0,2 m και μάζα 5kg, έχει εγκοπή βάθους r=R/2 στην οποία έχει τυλιχθεί ένα αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε δύναμη F, παράλληλη στο επίπεδο. Υπάρχουν τριβές και δίνονται οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου μ=μs=0,8.



Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, ο οποίος συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων $I=\frac{1}{2}mR^2$, ημφ=0,6 και συνφ=0,8, ενώ $g=10m/s^2$.

Ι. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης F, ώστε ο κύλινδρος να ισορροπεί.

ΙΙ. Αν η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο F=45N,

α. Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει προς τα κάτω και να υπολογίσετε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, καθώς και η γωνιακή του επιτάχυνση.

β. Να υπολογίσετε τα έργα της F και της τριβής για μετατόπιση του άξονα του κυλίνδρου κατά 2m πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

ΙΙΙ. Αν η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο F=92N,

γ. Να εξετάσετε αν ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και να υπολογίσετε ξανά την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, καθώς και η γωνιακή του επιτάχυνση.

δ. Να υπολογίσετε το έργο της F, το έργο της τριβής και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου για μετατόπιση του άξονα κατά 3m.

__Λύση__

Ι. Για να ισορροπεί πρέπει να μην μεταφέρεται αλλά και να μην περιστρέφεται. Άρα η στατική τριβή πρέπει να έχει κατεύθυνση προς τα κάτω ώστε η ροπή της να αντιτίθεται στη ροπή της F.

$\Sigma\tau=0\rightarrow Fr-TR=0\rightarrow T=Fr/R\rightarrow T=F/2$

$\Sigma F_x=0\rightarrow F-mg\eta\mu\varphi-T=0\rightarrow F=2mg\eta\mu\varphi\rightarrow$ **F=60N**.

ΙΙ. α. Αν η F=45N<60N είναι σαφές ότι το κέντρο μάζας θα κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση α και ο κύλινδρος θα περιστρέφεται με $\alpha_{\gamma\nu}$. Υποθέτω ότι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η υπολογίζω την τριβή Τ. Αν βγει μικρότερη της $T_{o\rho}$ έχει καλώς και κάνει ΚΧΟ. Αν βγει μεγαλύτερη της $T_{o\rho}$ τότε σημαίνει ότι ολισθαίνει και τα πράγματα αλλάζουν άρδην.

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow Fr-TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\alpha}{R}\rightarrow\frac{F}{2}-T=\frac{m\alpha}{2}$ (1)

$\Sigma F_x=m\alpha\rightarrow mg\eta\mu\varphi+T-F=m\alpha$ (2)

Από (1)+(2)$\rightarrow mg\eta\mu\varphi-\frac{F}{2}=\frac{3m\alpha}{2}\rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha=1m/s^2}$ και $\alpha_{\gamma\nu}=\alpha/R\rightarrow\boldsymbol{\alpha_{\gamma\nu}=5rad/s^2}$

Από (1)$\rightarrow$Τ= 22,5N-2,5N$\rightarrow$**Τ=20Ν**

$T_{o\rho}=\mu N=\mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi=0{,}8\cdot50\cdot0{,}8N\rightarrow\boldsymbol{T_{o\rho}=32N}$ Άρα $\boldsymbol{T<T_{o\rho}}$**→ άρα κάνει ΚΧΟ.**

β. Η F εμποδίζει την κάθοδο του cm άρα το μεταφορικό της έργο είναι αρνητικό αλλά βοηθάει στην αύξηση της γωνιακής ταχύτητας άρα το περιστροφικό της έργο είναι θετικό:

$W_F=-F\Delta x_{cm}+Fr\cdot\Delta\theta=-F\Delta x_{cm}+F\frac{R}{2}\Delta\theta=-F\Delta x_{cm}+\frac{F\Delta x_{cm}}{2}=-\frac{F\Delta x_{cm}}{2}\rightarrow\boldsymbol{W_F=-45J}$

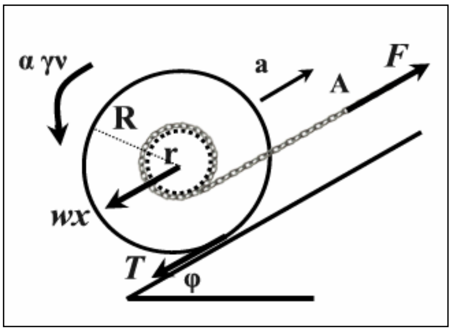
$\boldsymbol{W_T=0}$**,** αφού η τριβή είναι στατική και κάνει ΚΧΟ

ΙΙΙ. γ. Αν η F=92N>60N τότε το CM ανεβαίνει. Έστω και πάλι ότι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει:

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR - F\frac{R}{2} = \frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\alpha}{R} \rightarrow T - \frac{F}{2} = \frac{m\alpha}{2}$ (3)

$\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow F - mg\eta\mu\varphi - T = m\alpha$ (4) $\quad \frac{F}{2} - mg\eta\mu\varphi = \frac{3m\alpha}{2}$

$\rightarrow \alpha = 32/15 m/s^2$



Από (3)→$T = 154/3N$ Άρα $T > T_{o\rho}$ συνεπώς ολισθαίνει άρα δεν ισχύουν τα προηγούμενα, δηλαδή το α δεν είναι $32/15 m/s^2$. Η τριβή είναι ολίσθησης δηλαδή έχει τιμή $T_{o\rho} = \mu mg\eta\mu\varphi = 32N$. Συνεπώς: $F - mg\eta\mu\varphi - T_{o\rho} = ma \rightarrow$ **$a = 6m/s^2$**.

$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow T_{o\rho}R - F\frac{R}{2} = \frac{mR^2}{2}\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow \boldsymbol{\alpha_{\gamma\nu} = -28m/s^2}$. Άρα ο κύλινδρος παίρνει ανάποδες στροφές δηλαδή στρέφεται αριστερόστροφα ενώ το CM ανεβαίνει.

δ. Για μετατόπιση κατά $\Delta x_{cm} = 3m$ έχουμε: $\Delta x_{cm} = \frac{at^2}{2} \rightarrow t = 1s$. Άρα $\Delta\theta = \frac{\alpha_{\gamma\nu}t^2}{2} \rightarrow \Delta\theta = 14rad$

Η F κάνει θετικό έργο τόσο για τη μεταφορά προς τα πάνω όσο και για την ανάποδη περιστροφή αφού συμβάλει στην γωνιακή επιτάχυνση.

$W_F = F\cdot\Delta x_{cm} + F\frac{R}{2}\Delta\theta \rightarrow 276J + 128{,}8J \rightarrow$ **$W_F = 404{,}8J$**

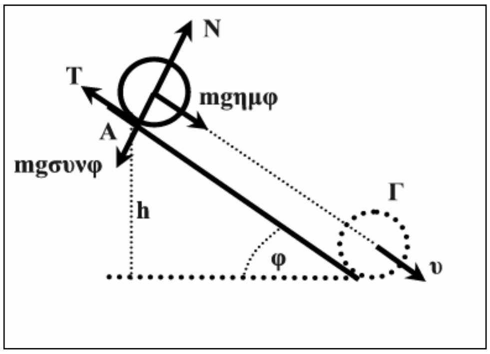
Η τριβή κάνει αρνητικό έργο τόσο για τη μεταφορά αφού είναι αντίθετη στη μετατόπιση, όσο και για την περιστροφή αφού παράγει ροπή αντίθετη της $\alpha_{\gamma\nu}$.

$W_T = -T_{o\rho}\Delta x_{cm} - T_{o\rho}R\cdot\Delta\theta = -32N\cdot 3m - 32N\cdot(14\cdot 0{,}2m) \rightarrow$ **$W_T = -185{,}6J$**

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται από το ΘΜΚΕ:

$\Delta K = W_F + W_T - mg\eta\mu\theta\cdot\Delta x_{cm} = 404{,}8J - 185{,}6J - 90J \rightarrow$ **$\Delta K = 129{,}2J$**

Κ.6 Λεπτή κυκλική στεφάνη μάζας m = 4 kg αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\varphi=30^0$ τη χρονική στιγμή $t_0=0$. Τη χρονική στιγμή t_1, έχει χάσει ύψος h = 2 m, ενώ το κέντρο μάζας έχει αποκτήσει ταχύτητα υ = 5 m/s.



Να υπολογίσετε

Α. Τη σταθερή δύναμη της τριβής της στεφάνης με το κεκλιμένο.

Β. Τη χρονική στιγμή t_1.

Γ. την κινητική της ενέργεια τη χρονική στιγμή t_1 και το έργο της τριβής.

Δ. Το ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1.

Δίνονται: g = 10 m/s², ημφ = 0,5)

__Λύση__

Α. Υποθέτω ότι η στεφάνη κάνει σύνθετη κίνηση μεταφορά και περιστροφή σε ένα τραχύ επίπεδο. Σε χρόνο t_1 το κέντρο μάζας της διανύει απόσταση $\Delta x=h/\eta\mu\varphi \rightarrow \Delta x=4m$, με επιτάχυνση α.

Από την κινηματική της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης

$\upsilon=\alpha t \rightarrow t_1=\upsilon/\alpha$

$$\Delta x=½\alpha t^2 \rightarrow \Delta x=\frac{\upsilon^2}{2\alpha} \rightarrow \alpha=\frac{\upsilon^2}{2\Delta x} \rightarrow \alpha=25/8\ m/s^2$$

$\Sigma F_x=m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi - T=m\alpha \rightarrow$ **T=7,5N**

Β. $t_1=\upsilon/\alpha \rightarrow t_1=8/5s$

$$\textbf{Γ.}\ \Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR=mR^2\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=\frac{T}{mR} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=\frac{15}{8R}\ rad/s^2$$

$$\omega=\alpha_{\gamma\nu}t_1 \rightarrow \omega=\frac{3}{R}\ rad/s$$

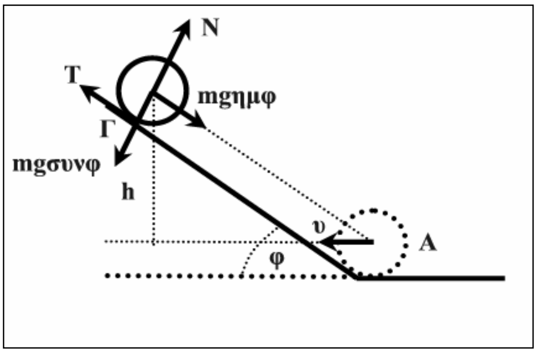
$K_{\tau\varepsilon\lambda}$= K= $½m\upsilon^2 + ½I\omega^2 = ½m\upsilon^2 + ½mR^2\omega^2 \rightarrow$ K=50J + 18J→ **K=68J**

Από το ΘΜΚΕ:

$W_{wx}+W_T = K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi} \rightarrow W_T=K_{\tau\varepsilon\lambda}- W_{wx} \rightarrow W_T=K-mg\eta\mu\varphi\ \Delta x=68J-80J \rightarrow$ $\mathbf{W_T=-12J}$

$$\textbf{Δ.}\ \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F\cdot\upsilon + \Sigma\tau\cdot\omega=m\alpha\upsilon + I\alpha_{\gamma\nu}\omega=m\alpha^2t + mR^2\alpha_{\gamma\nu}{}^2t \rightarrow \mathbf{\frac{\Delta K}{\Delta t} = 85J/s}$$

•**Κ.7** Μια σφαίρα μάζας 1kg κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_0$=4m/s και στην πορεία της συναντά ένα κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως φ=30°, κατά μήκος του οποίου συνεχίζει την κίνησή της. Η κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου έχει εξομαλυνθεί ώστε να μην διαταραχθεί το ομαλό πέρασμά της από το ένα επίπεδο στο άλλο. Αν η προς τα πάνω κίνηση της σφαίρας σταματήσει όταν το κέντρο της Ο ανέβει κατά h=1m, τότε:



Α. Να αποδείξετε ότι κατά την άνοδό της στο κεκλιμένο επίπεδο, η σφαίρα δέχεται δύναμη τριβής από το επίπεδο και να την υπολογίσετε.
Β. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που η σφαίρα μετατοπίζεται προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο
Γ. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που σταματά η άνοδός της στο κεκλιμένο επίπεδο.
Δ. Να υπολογίσετε το έργο της ασκούμενης τριβής κατά την άνοδο της σφαίρας.
Ε. Στη συνέχεια η σφαίρα κατεβαίνει. Να υπολογιστεί το έργο της τριβής κατά την κάθοδο και μέχρι να μηδενιστεί η γωνιακή της ταχύτητα, στιγμιαία.

Δίνονται $I=0{,}4mR^2$ και $g=10m/s^2$.

<u>Λύση</u>

Α. Έστω ότι σφαίρα δέχεται δύναμη τριβής Τ. Η μετατόπιση μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του CM είναι ημφ=h/Δx→ Δx=2m. Η μεταφορική κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση μέτρου, a.

$υ=υ_0-at \rightarrow t_{stop}=υ_0/a$

$Δx=υ_0t-½at^2 \rightarrow Δx_{stop}=\frac{υ_0^{\ 2}}{2a} \rightarrow a=\frac{υ_0^{\ 2}}{2Δx} \rightarrow |a|=4m/s^2$

$ΣF_x=ma \rightarrow mgημφ-T=m|a| \rightarrow$ **T=1N**

Β. $t_{stop}=υ_0/a \rightarrow t_{stop}=1s$

Γ. $Στ=Iα_{γν} \rightarrow TR=\frac{2}{5}mR^2 \cdot α_{γν} \rightarrow α_{γν}=5/2R\ rad/s^2$

$υ_0=ω_0R \rightarrow ω_0=υ_0/R=4/R\ rad/s$

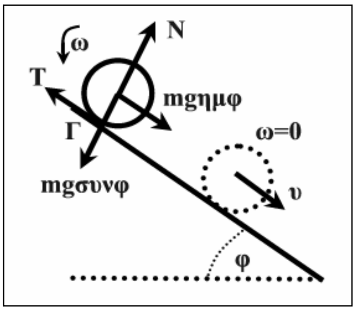
$ω=ω_0-α_{γν}t=\frac{4}{R}-\frac{5}{2R} \rightarrow ω=\frac{3}{2R}$

$K_{τελ}=K_{Π}=\frac{1}{2}Iω^2=\frac{1}{2}\frac{2mR^2}{5}ω^2 \rightarrow$ $\mathbf{K_{τελ}=0{,}45J}$

$K_{αρχ}=\frac{1}{2}Iω^2+\frac{1}{2}mυ_0^{\ 2}=\frac{7}{10}mυ_0^{\ 2} \rightarrow K_{αρχ}=11{,}2J$

Δ. Από το ΘΜΚΕ $W_T - mgημφ\cdot Δx= K_{τελ}-K_{αρχ} \rightarrow$ $\mathbf{W_T=-0{,}75J}$

Ε. Στη συνέχεια η σφαίρα κατεβαίνει περιστρεφόμενη με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού επιβραδυνόμενη περιστροφικά λόγω της Τ, αλλά επιταχυνόμενη μεταφορικά, μέχρι να μηδενιστεί η ω.



Επειδή και πάλι ισχύουν:

$mg\eta\mu\varphi - T = ma$ και $TR = \frac{2}{5}mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\nu}$

Η επιτάχυνση είναι ίδια $\alpha = 4m/s^2$ και η γωνιακή επιβράδυνση $\alpha_{\gamma\nu} = 5/2R$ και η αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega = 3/2R$ όση είχε τη στιγμή που σταμάτησε η άνοδος. Η γωνιακή ταχύτητα μηδενίζεται μετά από χρονικό διάστημα, t_1.

$\omega_1 = \omega - \alpha_{\gamma\nu}t_1 \rightarrow 0 = \omega - \alpha_{\gamma\nu}t_1 \rightarrow t_1 = 0{,}6s$

Μέχρι τότε έχει διανύσει διάστημα $\Delta x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = 0{,}72m$ και η τελική ταχύτητα θα είναι $\upsilon_1 = at_1 = 2{,}4m/s$. Η γωνία που θα διαγράψει στο χρονικό διάστημα $t_1 = 0{,}6s$ θα είναι:

$\Delta\theta_1 = \omega t_1 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\nu}t_1^2 = 9/20R \rightarrow \Delta\theta_1 R = 0{,}45m$

Το έργο της τριβής κατά την κάθοδο και μέχρι να μηδενιστεί η ω θα είναι

$W_T' = -T\Delta x_1 - TR\Delta\theta_1 = -1 \cdot 0{,}72J - 1 \cdot 0{,}45J = \mathbf{-1{,}17J}$