**Περιστροφή στερεού σώματος**

# ΘΕΜΑΤΑ Α

**Α.1** Στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Όλα τα σημεία που περιστρέφονται έχουν:
α. την ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση,
β. την ίδια γωνιακή ταχύτητα,
γ. την ίδια γραμμική, αλλά διαφορετική γωνιακή ταχύτητα.
δ. ίδια γωνιακή και ίδια γραμμική ταχύτητα.

**Α.2** Δίσκος περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Δύο σημεία Α και Β απέχουν από τον άξονα περιστροφής αποστάσεις r και 2r αντιστοίχως. Τα δύο σημεία έχουν κάθε χρονική στιγμή
α. την ίδια γραμμική ταχύτητα
β. την ίδια γραμμική επιτάχυνση
γ. την ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση
δ. κεντρομόλους επιταχύνσεις που συνδέονται με τη σχέση $\alpha_{κεν,B}=2\alpha_{κεν,A}$.

**Α.3** Σφαίρα ακτίνας R=0,2m βάλλεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με αρχική οριζόντια ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_0$=10m/s . Για να κυλίεται εξ αρχής (χωρίς να ολισθαίνει) θα πρέπει να έχει και αρχική γωνιακή ταχύτητά που είναι ίση :

α. 100 rad/s, β.50 rad/s γ. 0 δ. 2 rad/s

**Α.4** Τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Αν $\upsilon_{cm}$ η ταχύτητα του τροχού λόγω μεταφορικής κίνησης, τότε η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού που απέχουν από το έδαφος απόσταση R, έχει μέτρο:

α. $\upsilon_{cm}$ β. $2\upsilon_{cm}$ γ. 0. δ. $\sqrt{2}\upsilon_{cm}$

**Α.5** Σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα. Τότε
α. όλα της τα σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα
β. κανένα σημείο της σφαίρας δεν έχει στιγμιαία συνολική ταχύτητα μηδέν
γ. όλα τα σημεία της σφαίρας μεταφέρονται με την ίδια ταχύτητα
δ. το σημείο που κάθε στιγμή απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το οριζόντιο επίπεδο έχει συνολική ταχύτητα ίση με αυτή του κέντρου μάζας.

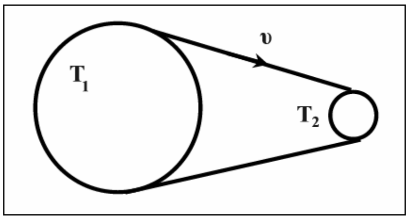
**Α.6** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένας τροχός που κινείται. Σε ποια ή ποιες περιπτώσεις ο τροχός:

1. Κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει: 2. Μεταφέρεται χωρίς να στρέφεται :
3. Στρέφεται χωρίς να μεταφέρεται : 4. Εκτελεί σύνθετη κίνηση :

**Α.7** Ομογενής τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας, υ. Στο χρονικό διάστημα που ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού κάνει μια πλήρη περιστροφή, το κέντρο μάζας του θα έχει μετατοπιστεί κατά

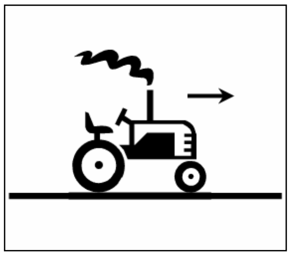
α. πR β. 2πR γ. 4πR δ. πR/2

**A.8** Οι δύο τροχοί $T_1$ και $T_2$ με ακτίνες $R_1$ και $R_2$, $R_1=4R_2$ συνδέονται με ιμάντα και στρέφονται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες για τις οποίες ισχύει η σχέση:




α. $\frac{\omega_1}{\omega_2}= 1$   β. $\frac{\omega_1}{\omega_2}= 4$   γ. $\frac{\omega_1}{\omega_2}= \frac{1}{4}$   δ. $\frac{\omega_1}{\omega_2}= 2$

**A.9** Το τρακτέρ κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα και οι τροχοί με ακτίνες $R_1$, $R_2$, ($R_1<R_2$) κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Αν σε χρόνο t, διαγράφουν αντίστοιχα $N_1$ και $N_2$ περιστροφές, τότε ισχύει η σχέση:

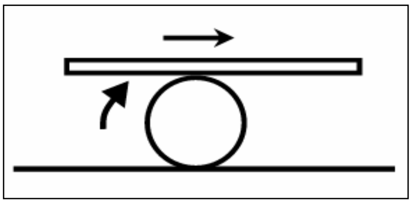


α. $\frac{N_1}{N_2}=\frac{R_2}{R_1}$   β. $\frac{N_1}{N_2}=\frac{R_1}{R_2}$   γ. $\frac{N_1}{N_2}=1$

**A.10** Να χαρακτηρίσετε με (Σ) τις σωστές και με (Λ) τις λανθασμένες προτάσεις που ακολουθούν:

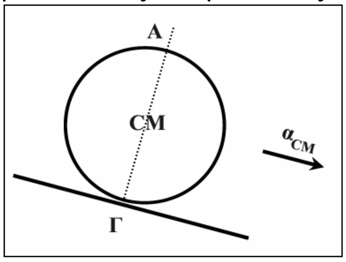
α. Αν ένα αυτοκίνητο κινείται επιβραδυνόμενα προς το Βορρά τότε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας των τροχών του έχει κατεύθυνση προς τη Δύση και της γωνιακής επιτάχυνσης προς την Ανατολή.
β. Το κέντρο μάζας είναι ένα σημείο που μπορεί να βρίσκεται και εκτός σώματος.
γ. Ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, $\alpha_{\gamma\nu}$ και επιτάχυνση κέντρου μάζας, $\alpha_{cm}$. Ένα τυχαίο σημείο που απέχει απόσταση r από το κέντρο μάζας έχει κάθε χρονική στιγμή επιτάχυνση, $\vec{a}=\overrightarrow{a_{cm}}+\overrightarrow{a_{\gamma\nu}r}$ .
δ. Ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω. Αν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινείται κατά Δs τότε και κάθε άλλο σημείο του τροχού στρέφεται κατά τόξο μήκους Δs.
ε. Κατά τη μεταφορική κίνηση ενός στερεού υπάρχουν σημεία που μένουν ακίνητα.

**A.11** Η οριζόντια σανίδα μήκους d εφάπτεται στο πάνω μέρος κυλίνδρου και καθώς ωθείται προς τα δεξιά παρασύρει και τον κύλινδρο σε κύλιση χωρίς όμως να ολισθαίνει ως προς αυτόν. Τότε



α. Η σανίδα μεταφέρεται με την ίδια ταχύτητα που έχει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.
β. Αν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει μετατοπιστεί κατά x, τότε και η σανίδα θα έχει μετατοπιστεί κατά x.
γ. Αν η σανίδα έχει μετατοπιστεί κατά x, τότε το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα έχει μετατοπιστεί κατά x/2.
δ. Η ταχύτητα της σανίδας και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού έχουν την ίδια κατεύθυνση.

**A.12** Ομογενής τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο με επιτάχυνση κέντρου μάζας $\alpha_{cm}$. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;
α. Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση έχουν την ίδια διεύθυνση που ταυτίζεται με τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου.




β. Η εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου A είναι $2\alpha_{cm}$
γ. Όλα τα σημεία του τροχού έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση.
δ. Η συνολική επιτάχυνση κάθε σημείου είναι $\vec{a}=\overrightarrow{a_{cm}}+\overrightarrow{a_{\gamma\nu}r}+\overrightarrow{a_{\kappa\varepsilon\nu}}$
ε. Η συνολική επιτάχυνση του σημείου Γ ισούται $\omega^2 R$, όπου ω η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του τροχού.

**Α.13** Στερεό σώμα είναι αρχικά ακίνητο. Να αντιστοιχήσετε τις κινήσεις της αριστερής στήλης με τις συνθήκες της δεξιάς:

| | |
|---|---|
| α. Ισορροπία | 1. $\Sigma \vec{F}=0, \Sigma\tau\neq0$ |
| β. Μόνο μεταφορική | 2. $\Sigma \vec{F}\neq0, \Sigma\tau=0$ |
| γ. Μόνο περιστροφική | 3. $\Sigma \vec{F}\neq0, \Sigma\tau\neq0$ |
| δ. Μεταφορική και περιστροφική | 4. $\Sigma \vec{F}=0, \Sigma\tau=0$ |

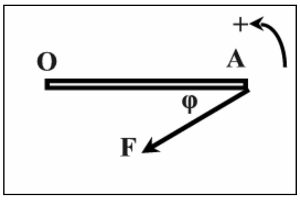
**Α.14** Στερεό σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων. Τότε
α. είναι και οι τρεις συγγραμμικές
β. πρέπει και οι τρεις να είναι παράλληλες
γ. αν δεν είναι παράλληλες θα πρέπει οι φορείς τους να διέρχονται από το ίδιο σημείο
δ. η συνισταμένη των δύο εξ αυτών είναι αντίθετη από την τρίτη δύναμη.

**Α.15** Ράβδος ισορροπεί πάνω σε τραπέζι, ενώ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Στη ράβδο ασκούνται δύο οριζόντιες δυνάμεις που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτήν. Συνεπώς
α. οι δυνάμεις αποτελούν ζεύγος
β. είναι μεταξύ τους παράλληλες
γ. είναι συγγραμμικές
δ. η συνισταμένη ροπής τους είναι μηδέν.

**Α.16** Ένα στερεό σώμα ισορροπεί όταν
α. η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδέν
β. η συνισταμένη ροπή που δέχεται είναι μηδέν
γ. δέχεται πάνω από δύο δυνάμεις
δ. η συνισταμένη ροπή και η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν

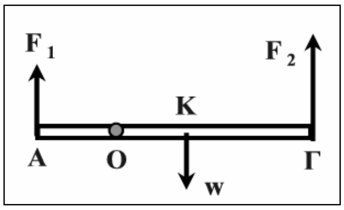
**Α.17** Ένα ζεύγος δυνάμεων αποτελείται από δύο
α. δυνάμεις ίσου μέτρου.
β. ίσες δυνάμεις με παράλληλους φορείς.
γ. δυνάμεις με ίσα μέτρα, αντίθετη κατεύθυνση και παράλληλους φορείς.
δ. δυνάμεις με συνολική ροπή μηδέν.

**Α.18** Η ράβδος ΟΑ, μήκους L, μπορεί να στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η ράβδος και η δύναμη, F. Η ροπή της δύναμης ως προς αυτόν τον άξονα είναι:




α. 0 β. F·Lημφ γ. –F·L·ημφ δ. –F·L·συνφ

**Α.19** Η ομογενής ράβδος ΑΓ, βάρους w, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο. Δύο δυνάμεις $F_1$, $F_2$ ασκούνται στα άκρα Α και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος ισορροπεί. Ποιες από τις σχέσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες;




α. $F_1(ΟΑ)= F_2(ΟΓ)$ β. $F_1+F_2-w=0$

γ. $\Sigma\tau_O=0$ δ. $F_1(ΟΑ) + w(ΟΚ)-F_2(ΟΓ)=0$

**Α.20** Η ροπή αδράνειας
α. είναι διανυσματικό μέγεθος.
β. μετριέται σε kg·m.
γ. εξαρτάται και από τη θέση του άξονα περιστροφής.
δ. είναι ίδια για μια συμπαγή και μια κοίλη σφαίρα ίδιας μάζας και ακτίνας ως προς τον ίδιο άξονα.

**Α.21** Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;
Η ροπή αδράνειας
α. Έχει τη μικρότερη τιμή της όταν ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος.
β. Ισούται με $mR^2$ για ένα ομογενή δακτύλιο μάζας m ακτίνας R ως προς κάθε άξονα περιστροφής του, με όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στην περιφέρεια.
γ. Είναι μεγαλύτερη για ένα σώμα που έχει τη μάζα του κατανεμημένη μακριά από τον άξονα περιστροφής του.
δ. Εκφράζει την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση.

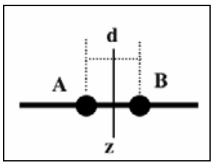
**Α.22** Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος:
α. μπορεί να έχει την ίδια τιμή για δύο διαφορετικούς, αλλά παράλληλους άξονες.
β. είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του
γ. εξαρτάται από τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.
δ. είναι ανάλογη της συνισταμένης ροπής που ασκείται στο σώμα.

**Α.23** Η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου μάζας m, μήκους, L, είναι:
α. ανεξάρτητη από το μήκος της.
β. ανάλογη του τετραγώνου της μάζας της.
γ. μέγιστη ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν.
δ. μέγιστη ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος στο μήκος της.

**Α.24** Η ροπή αδράνειας κυκλικού δακτυλίου μάζας m, ακτίνας R, του οποίου όλη η μάζα θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρεια, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο αυτού είναι:

α. $I=2mR^2$ β. $I=0$ γ. $I=\frac{1}{2}mR^2$ δ. $I= mR^2$

**Α.25** Η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς λεπτού δίσκου ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που είναι κάθετος στην επιφάνεια αυτού είναι ίση
α. με το μηδέν, αν το σώμα δεν περιστρέφεται.
β. με το μηδέν, αν το σώμα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας.
γ. με το μηδέν, αν ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας του.
δ. ελάχιστη αν ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας του.




**Α.26** Δύο σημειακές μάζες m, απέχουν απόσταση d, συνδέονται με αβαρή ράβδο και ο άξονας περιστροφής τους z διέρχεται από το μέσον της ράβδου και είναι κάθετος σ΄ αυτήν. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα αυτόν είναι ίση με I. Αν απομακρύνουμε τις δύο μάζες κατά την ίδια απόσταση, ως προς τον άξονα περιστροφής, ώστε η μεταξύ τους απόσταση να γίνει 2d, τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον ίδιο άξονα, θα είναι:

α. 4I β. 2I γ. 8I δ. I/4

**Α.27** Μια σφαίρα σταθερής μάζας και ακτίνας μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Η σφαίρα παρουσιάζει μεγαλύτερη αδράνεια
α. αν την περιστρέφουμε αργά παρά αν την περιστρέφουμε γρήγορα.
β. αν είναι από ομογενές μέταλλο παρά από ομογενές ξύλο.
γ. αν είναι κούφια παρά συμπαγής.
δ. αν ο άξονας περιστροφής της είναι κατακόρυφος παρά πλάγιος.

**A.28** Σώμα έχει γωνιακή επιτάχυνση όταν
α. η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του είναι ίση με μηδέν.
β. η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται πάνω του είναι διάφορη του μηδενός.
γ. δέχεται δυνάμεις.
δ. η συνολική ροπή που ασκείται πάνω του είναι διάφορη του μηδενός.

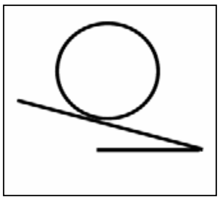
**A.29** Σφαιρικός φλοιός μάζας m και ακτίνας R και συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας m, ακτίνας R μπορούν να περιστρέφονται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους.
α. Έχουν ίσες ροπές αδράνειας.
β. Αν επιταχύνονται με την ίδια γωνιακή επιτάχυνση τότε η συμπαγής σφαίρα δέχεται μικρότερη ροπή, από αυτή που δέχεται ο σφαιρικός φλοιός.
γ. Αν δεχτούν ίσες ροπές θα αποκτήσουν και ίσες γωνιακές επιταχύνσεις.
δ. Αν δεχτούν την ίδια ροπή τότε ο σφαιρικός φλοιός απόκτά μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση.

**A.30** Κύλινδρος μάζας m ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης, φ και δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους του και τη δύναμη από το κεκλιμένο.
α. Αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι τελείως λείο, ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
β. Υπεύθυνη για τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι η δύναμη της στατικής τριβής.
γ. Αν κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, τότε η γωνιακή επιτάχυνση είναι ανεξάρτητη από τη γωνία κλίσης φ.
δ. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στον κύλινδρο είναι μηδέν.

**A.31** Αν σε ένα στερεό σώμα ισχύουν ταυτόχρονα, $\Sigma\vec{F}\neq 0$ και $\Sigma\tau=0$, τότε το σώμα μπορεί να:
α. μεταφέρεται με επιτάχυνση και να περιστρέφεται ομαλά.
β. μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα και να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.
γ. ισορροπεί.
δ. μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα και να περιστρέφεται μεταβαλλόμενα.

**A.32** Σ΄ ένα στερεό σώμα ενεργούν δυνάμεις για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: $\Sigma\vec{F}=0$, $\Sigma\tau\neq 0$. Τότε
α. το κέντρο μάζας επιταχύνεται ομαλά.
β. αν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα, εκτελεί μόνο ευθύγραμμη ομαλή μεταφορική κίνηση.
γ. η γωνιακή ταχύτητα του σώματος σε κάθε περίπτωση μεταβάλλεται.
δ. σε κάθε περίπτωση η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι μηδέν.

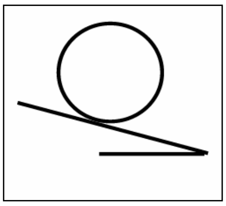
**A.33** Κύλινδρος αφήνεται από σημείο ενός τελείως λείου κεκλιμένου επιπέδου. Στο σώμα ασκούνται η δύναμη του βάρους και η κάθετη δύναμη του επιπέδου. Αν $\Sigma\vec{F}$ και $\Sigma\vec{\tau}$ είναι η συνισταμένη δύναμη και η συνισταμένη ροπή που ασκούνται στον κύλινδρο, τότε κατά την κάθοδο του κυλίνδρου ισχύει:



α. $\Sigma\vec{F}=0$ και $\Sigma\vec{\tau}=0$ β. $\Sigma\vec{F}=0$ και $\Sigma\vec{\tau}\neq 0$
γ. $\Sigma\vec{F}\neq 0$ και $\Sigma\vec{\tau}\neq 0$ δ. $\Sigma\vec{F}\neq 0$ και $\Sigma\vec{\tau}=0$

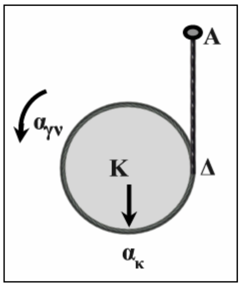
**A.34** Αν σε ένα στερεό σώμα ισχύουν ταυτόχρονα $\Sigma\vec{F}=0$ και $\Sigma\tau=0$ τότε το σώμα μπορεί
α. να βρίσκεται σε ηρεμία.
β. να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή μεταφορική κίνηση.
γ. να εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.
δ. ισχύουν όλα τα προηγούμενα.

**A.35** Κύλινδρος αφήνεται πάνω σε τραχύ κεκλιμένο επίπέδο. Στο σώμα ασκούνται η δύναμη του βάρους η κάθετη δύναμη του επιπέδου και η στατική τριβή. Αν $\Sigma\vec{F}$ και $\Sigma\vec{\tau}$ είναι η συνισταμένη δύναμη και η συνισταμένη ροπή που ασκούνται στον κύλινδρο, τότε κατά την κάθοδο του κυλίνδρου ισχύει:



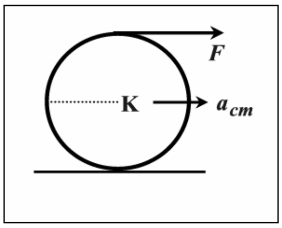
α. $\Sigma\vec{F}=0$ και $\Sigma\vec{\tau}=0$ β. $\Sigma\vec{F}=0$ και $\Sigma\vec{\tau}\neq 0$ γ. $\Sigma\vec{F}\neq 0$ και $\Sigma\vec{\tau}\neq 0$ δ. $\Sigma\vec{F}\neq 0$ και $\Sigma\vec{\tau}=0$

**A.36** Στο γιο– γιο του σχήματος κρατάμε ακίνητο το άκρο Α και αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει.




α. Αιτία για την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού είναι η ροπή του βάρους ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Δ.
β. Αιτία για τη μεταφορική επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι η συνισταμένη του βάρους w και της τάσης Τ του νήματος.
γ. Αιτία για τη μεταφορική επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι μόνο το βάρος.
δ. Ο κύλινδρος κάνει επιταχυνόμενη περιστροφή και ομαλή μεταφορά

**A.37** Σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο με σταθερή επιτάχυνση δεχόμενη τη δύναμη που φαίνεται στο σχήμα. Αν ξαφνικά η δύναμη F καταργηθεί και η δύναμη του αέρα είναι αμελητέα, τότε η κίνηση της σφαίρας στη συνέχεια θα είναι




α. ομαλή περιστροφή και ομαλή μεταφορά.
β. επιταχυνόμενη περιστροφή και ομαλή μεταφορά.
γ. επιβραδυνόμενη μεταφορά και ομαλή περιστροφή.
δ. επιβραδυνόμενες μεταφορά και περιστροφή.

**A.38** Σε ένα σώμα που αρχικά ηρεμεί ασκούνται δύο μόνο δυνάμεις και το σώμα κάνει μόνο στροφική κίνηση γύρω το κέντρο μάζας του. Τότε
α. οι δυνάμεις αποτελούν ζεύγος.
β. οι ροπές των δυνάμεων είναι αντίθετες.
γ. τα μέτρα των δυνάμεων δεν μπορούν να είναι ίσα.
δ. οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το κέντρο μάζας του σώματος.

**A.39** Σε ένα σώμα ασκούνται δύο μόνο δυνάμεις και το σώμα κάνει μόνο μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας. Τότε
α. οι δυνάμεις αποτελούν ζεύγος.
β. οι δυνάμεις είναι αντίθετες.
γ. οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το κέντρο μάζας και οι δυνάμεις είναι αντίθετες.
δ. ο φορέας της συνισταμένης των δυνάμεων περνά από το κέντρο μάζας.

**A.40** Σε ένα σώμα ασκούνται δύο μόνο δυνάμεις και το σώμα κάνει μόνο μεταφορική κίνηση με σταθερή επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Τότε
α. οι δυνάμεις αποτελούν ζεύγος.
β. οι δυνάμεις είναι αντίθετες.
γ. οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το κέντρο μάζας και οι δυνάμεις είναι αντίθετες.
δ. ο φορέας της συνισταμένης των δυνάμεων περνά από το κέντρο μάζας.

**A.41** Τροχός που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας, εισέρχεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τότε
α. θα συνεχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με την ίδια ταχύτητα.
β. θα κάνει μόνο μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα.
γ. θα κάνει μόνο περιστροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.
δ. θα επιταχυνθεί μεταφορικά και περιστροφικά.

**A.42** Η στροφορμή ενός υλικού σημείου μάζας m που περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με γραμμική ταχύτητα μέτρου, υ:

α. Έχει μονάδα μέτρησης το 1 $kg{\cdot}m^2/s$. β. Έχει μέτρο $L=m\upsilon r^2$.

γ. Είναι μονόμετρο μέγεθος. δ. Έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$.

**A.43** Σπιν ονομάζουμε:
α. Τη στροφορμή που σχετίζεται με τη περιστροφή του σώματος γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

β. Τη στροφορμή που σχετίζεται με τη περιστροφή του σώματος γύρω από άξονα που διέρχεται από ένα οποιοδήποτε σημείο του σώματος.
γ. Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ενός στερεού σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του.
δ. Το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ενός στερεού σώματος κατά τη περιστροφή του σώματος γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

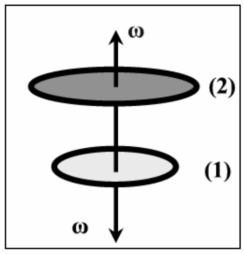
**Α.44** Για να μείνει σταθερή η στροφορμή ενός σώματος που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα πρέπει:
α. Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται να είναι μηδέν.
β. Να μην δέχεται καθόλου δυνάμεις.
γ. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δέχεται να είναι σταθερό.
δ. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δέχεται να είναι μηδέν.

**Α.45** Αθλητής που πηδάει από εξέδρα πριν πέσει στο νερό κάνει διάφορες κινήσεις στον αέρα. Αυτό που μένει σταθερό μέχρι να πέσει στο νερό, είναι
α. η γωνιακή ταχύτητα β. η ροπή αδράνειας.
γ. η κινητική του ενέργεια. δ. η στροφορμή.

**Α.46** Αν ένα αυτοκίνητο κατευθύνεται προς τη Δύση, το διάνυσμα της στροφορμής των τροχών του θα κατευθύνεται προς:
α. Ανατολή β. Δύση γ. Βορρά δ. Νότο

**Α.47** Πετάμε μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω φροντίζοντας να της δώσουμε μια αρχική γωνιακή ταχύτητα γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα. Δεχόμαστε ότι όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους της.
α. Η ροπή αδράνειας της μπάλας ως προς τον άξονα περιστροφής της μεταβάλλεται.
β. Η ορμή της μπάλας διατηρείται σταθερή.
γ. Αν η τροχιά του κέντρου μάζας της μπάλας ήταν καμπυλόγραμμη θα ήταν αδύνατο να διατηρήσει τη στροφορμή της.
δ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της μπάλας είναι μηδέν ανεξάρτητα από τη μορφή της τροχιάς του κέντρου μάζας της.

**Α.48** Ο ομογενής δίσκος (1) περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω, χωρίς να δέχεται εξωτερικές ροπές, όπως στο σχήμα. Αν πάνω του πέσει ένας άλλος δίσκος (2) που είχε αντίθετη γωνιακή ταχύτητα και το σύστημα των δύο δίσκων σταματήσει να περιστρέφεται, τότε πρέπει οι δύο δίσκοι:
α. να έχουν ίσες ροπές αδράνειας.
β. να έχουν ίσες μάζες.
γ. να έχουν ίσες ακτίνες.
δ. σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να συμβεί αυτό.



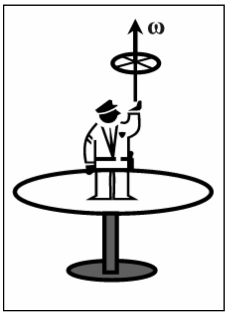

**Α.49** Στο σχήμα φαίνεται ένα άνθρωπος που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι και κρατά ένα τροχό με τη βοήθεια του κατακόρυφου άξονά του. Το τραπέζι μπορεί να στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, χωρίς τριβές, αλλά είναι αρχικά ακίνητο, όπως και ο τροχός. Άνθρωπος και τραπέζι έχουν σταθερή ροπή αδράνειας, Ι. Ο τροχός έχει ροπή αδράνειας Ι/4. Αν ο άνθρωπος βάλει τον τροχό σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα, ω, χωρίς να αλλάξει θέση, τότε το τραπέζι μαζί με τον άνθρωπο θα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα:

α. –ω/2 β. –ω/4 γ. ω/4 δ. ω

**Α.50** Αθλητής καταδύσεων καθώς περιστρέφεται στον αέρα, μαζεύει τα άκρα του. Με την τεχνική αυτή

α. αυξάνεται η στροφορμή του. γ. αυξάνεται η γωνιακή του ταχύτητα.
β. μειώνεται η γωνιακή του ταχύτητα. δ. αυξάνεται η ροπή αδράνειας του σώματος.

**Α.51** Στο σχήμα φαίνεται ένα άνθρωπος που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι και κρατά ένα τροχό με τη βοήθεια του κατακόρυφου άξονά του. Το τραπέζι μπορεί να στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, χωρίς τριβές, αλλά είναι αρχικά ακίνητο, ενώ ο τροχός ή δη περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα, ω και με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Άνθρωπος και τραπέζι έχουν σταθερή ροπή αδράνειας, Ι. Ο τροχός έχει ροπή αδράνειας 2Ι.Αν ο άνθρωπος στρέψει τον άξονα του τροχού κατά $180^0$ χωρίς να αλλάξει το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας, ω τότε το τραπέζι μαζί με τον άνθρωπο θα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα:




α. –ω/4 β. +4ω γ. ω/4 δ. ω

**Α.52** Στεφάνη με ροπή αδράνειας $I=mr^2$ κυλάει ομαλά χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα ω. Η κινητική της ενέργεια είναι:

α. $mr^2\omega^2$ β. $mr^2\omega^2/2$ γ. $2mr^2\omega^2$

**Α.53** Ομογενής σφαίρα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο τραπέζι με σταθερή ταχύτητα, φτάνει στην άκρη του τραπεζιού και πέφτει στο κενό. Καθώς πέφτει δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους της. Ποιο από τα μεγέθη που ακολουθούν **δεν** διατηρείται σταθερό.

α. Στροφορμή β. Κινητική ενέργεια περιστροφής,

γ. Ταχύτητα κέντρου μάζας. δ. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

**Α.54** Στερεό περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό ακλόνητο άξονα. Η κινητική ενέργεια του σώματος

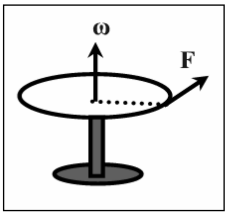
α. ισούται με το γινόμενο του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας επί τη ροπή αδράνειας του σώματος.

β. θα διπλασιαστεί, αν το μέτρο της στροφορμής διπλασιαστεί, ενώ η ροπή αδράνειας διατηρείται σταθερή.

γ. θα διπλασιαστεί, αν διπλασιαστεί η γωνιακή ταχύτητα του σώματος ενώ η ροπή αδράνειας διατηρείται σταθερή.

δ. θα τετραπλασιαστεί, αν το μέτρο της στροφορμής διπλασιαστεί, ενώ η ροπή αδράνειας διατηρείται σταθερή.

**Α.55** Δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ΄ αυτόν. Στην περιφέρεια του δίσκου ασκείται εφαπτομενική δύναμη F που παράγει ροπή και περιστρέφει το δίσκο.




α. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο.

β. Το έργο της ροπής για κάθε μια περιστροφή είναι διαφορετικό στην πρώτη από τη δεύτερη περιστροφή.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο.

δ. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου διατηρείται σταθερή.

**Α.56** Μια σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κινούμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου. Στην αρχή ανέρχεται και μετά κατέρχεται.

α. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μεταβάλλεται.

β. Η φορά του διανύσματος της στατικής τριβής παραμένει σταθερή.

γ. Η φορά του διανύσματος της γωνιακής επιτάχυνσης μεταβάλλεται.

δ. Η φορά του διανύσματος της ταχύτητας του κέντρου μάζας παραμένει σταθερή.

**Α.57** Σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και το κέντρο μάζας της επιταχύνεται ομαλά. Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ισούται με τη μεταβολή της:

α. κινητικής ενέργειας του σώματος.

β. μεταφορικής κινητικής ενέργειας του σώματος.

γ. περιστροφικής κινητικής ενέργειας του σώματος.

δ. μηχανικής ενέργειας του σώματος.

**Α.58** Παιδί κυλάει μια στεφάνη στην ανηφόρα με επιταχυνόμενη κίνηση. Η στεφάνη κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και οι τριβές με τον αέρα είναι αμελητέες. Το μέρος της χημικής ενέργειας του παιδιού που μεταβιβάζεται μόνο στη στεφάνη μετατρέπεται σε

α. κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς. β. κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς και περιστροφής.
γ. δυναμική ενέργεια βαρύτητας. δ. το β και το γ.

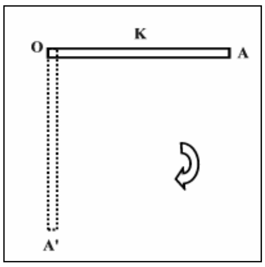
**Α.59** Μια μπάλα που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε τραπέζι με σταθερή ταχύτητα, πέφτει στο κενό. Καθώς η μπάλα πέφτει στο κενό
α. η μηχανική ενέργεια της μπάλας αυξάνεται.
β. η μεταφορική κινητική ενέργεια διατηρείται σταθερή.
γ. η στροφορμή της μπάλας μειώνεται.
δ. η περιστροφική κινητική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

**Α.60** Ομογενής σφαίρα αφήνεται από το σημείο κεκλιμένου επιπέδου να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
α. Το επίπεδο είναι λείο.
β. Η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.
γ. Η στροφορμή διατηρείται.
δ. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας αυξάνεται.

**Α.61** Αν έλιωναν οι πολικοί πάγοι και ανέβαινε λίγο η στάθμη της θάλασσας, τότε η κινητική ενέργεια περιστροφής της Γης θα
α. αυξανότανε.
β. μειωνότανε
γ. έμενε σταθερή.

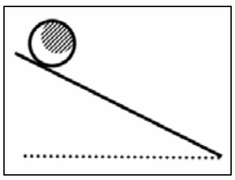
**Α.62** Δύο ανομοιογενείς δίσκοι, ίδιας ακτίνας R μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονα τον κύριο άξονα συμμετρίας τους. Οι δύο δίσκοι είναι αρχικά ακίνητοι και αρχίζουν να στρέφονται υπό την επίδραση της ίδια σταθερής δύναμης που ασκείται εφαπτομενικά στην περιφέρειά τους. Μετά από πέντε πλήρεις περιστροφές, ποιος από τους δύο αποκτάει μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα;
α. Αυτός με τη μικρότερη ροπή αδράνειας.
β. Αυτός με τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.
γ. Κανένας από τους δύο.
δ. Χρειαζόμαστε και άλλες πληροφορίες για τους δίσκους για να απαντήσουμε.

**Α.63** Ομογενής ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος σ΄ αυτήν. Την αφήνουμε από την οριζόντια θέση να περιστραφεί μόνο με την επίδραση του βάρους. Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι η σωστή.




α. Το έργο του βάρους ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής της ενέργειας.
β. Η στροφορμή αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.
γ. Η κινητική ενέργεια διατηρείται σταθερή.
δ. Όταν φτάνει στην κατακόρυφη θέση, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται.

**Α.64** Μια σφαίρα αφήνεται σε σημείο του κεκλιμένου επιπέδου και αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει προς τα κάτω Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής της ενέργειας



α. είναι μηδέν.
β. είναι σταθερός με θετική αλγεβρική τιμή.
γ. αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο.
δ. αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο του χρόνου.

**Α.65** Παιδί κυλάει μια στεφάνη που ανεβαίνει κεκλιμένο επίπεδο με επιταχυνόμενη κίνηση. Η στεφάνη κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και οι τριβές με τον αέρα είναι αμελητέες. Το μέρος της χημικής ενέργειας του παιδιού που μεταβιβάζεται μόνο στη στεφάνη μετατρέπεται σε
α. κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς.

β. κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής.
γ. δυναμική ενέργεια βαρύτητας.
δ. σε όλα τα προηγούμενα.

**Α.66** Στερεό σώμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό και ακλόνητο άξονα.. Η συνισταμένη ροπή που ασκείται σε ένα στερεό είναι σταθερή και με θετική αλγεβρική τιμή. Τότε:
α. οι φορείς όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα περνούν από το κέντρο μάζας του σώματος.
β. η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή.
γ. η στροφορμή αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο του χρόνου.
δ. η κινητική ενέργεια αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο του χρόνου.

**Α.67** Να χαρακτηρίσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες προτάσεις που ακολουθούν:

1. Αν ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα προς το Βορρά τότε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας των τροχών του έχει κατεύθυνση προς τη Δύση.
2. Όσο μικρότερη είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος τόσο πιο εύκολο είναι να το περιστρέψουμε γύρω από σταθερό άξονα.
3. Είναι αδύνατο ένα σώμα που έχει κάποια χρονική στιγμή γωνιακή ταχύτητα μηδέν να έχει γωνιακή επιτάχυνση διάφορη του μηδενός.
4. Ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω. Αν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινείται κατά Δs τότε και κάθε άλλο σημείο του τροχού στρέφεται κατά τόξο μήκους Δs.
5. Κατά τη μεταφορική κίνηση ενός στερεού υπάρχουν σημεία που μένουν ακίνητα.

**Α.68** Να χαρακτηρίσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες προτάσεις που ακολουθούν:

1. Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με ροπή αδράνειας, Ι, είναι ανάλογη της ροπής αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής για σταθερή ροπή δύναμης.
2. Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής.
3. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος έχει τη μικρότερη τιμή ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του σώματος ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του.
4. Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι μηδέν, τότε το σώμα έχει πάντοτε γωνιακή επιτάχυνση μηδέν.
5. Σε στερεό που κάνει σύνθετη κίνηση είναι αδύνατο να υπάρχει σημείο εκτός του κέντρου μάζας που να έχει συνεχώς ταχύτητα ίση με αυτή του κέντρου μάζας.

**Α.69** Να χαρακτηρίσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες προτάσεις που ακολουθούν:

1. Όταν ένα στερεό ισορροπεί το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδέν ως προς οποιονδήποτε άξονα του σώματος.
2. Μια κοίλη και μια συμπαγής σφαίρα, ίδιας μάζας και ακτίνας που στρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους έχουν την ίδια κινητική ενέργεια περιστροφής.
3. Όταν ένα σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα υπό την επίδραση σταθερής ροπής, το έργο της ροπής είναι ίδιο για κάθε περιστροφή.
4. Όταν η χορεύτρια πάγου περιστρέφεται γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα και θέλει να μειώσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τότε απλώνει τα χέρια της.
5. Όταν ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, το σημείο επαφής του τροχού με το δρόμο έχει ταχύτητα μηδέν.

**Α.70** Να χαρακτηρίσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες προτάσεις που ακολουθούν:

1. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.

2. Για να διατηρείται σταθερή η στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων πρέπει το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα να είναι μηδέν.
3. Η ροπή αδράνειας του σώματος δεν εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής του.
4. Ένας τεχνητός δορυφόρος της Γης που διαγράφει κυκλική τροχιά μόνο με την επίδραση του βάρους του, περιστρέφεται με σταθερή στροφορμή.
5. Αν ένα άστρο ψύχεται και συστέλλεται χωρίς να μεταβληθεί η μάζα του τότε η γωνιακή ταχύτητα ιδιοπεριστροφής του αυξάνεται.

**Α.71** Να χαρακτηρίσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες προτάσεις που ακολουθούν:

1. Κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση ενός κυλίνδρου σε κεκλιμένο επίπεδο, το βάρος είναι υπεύθυνο για την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.
3. Αν ένα σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με την επίδραση σταθερής ροπής ξεκινώντας από την ηρεμία, η στιγμιαία τιμή της ισχύος της ροπής αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο.
3. Όταν ο φορέας της δύναμης που ασκείται σε ένα ελεύθερο στερεό σώμα δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε το σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.
4. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός στρεφόμενου σώματος είναι ίσος με τη συνολική ροπή που του ασκείται.
5. Η σχέση $\Sigma\tau=I{,}\alpha_{\gamma\nu}$ ισχύει και για τις σύνθετες κινήσεις χωρίς προϋποθέσεις.

**Α.72** Να χαρακτηρίσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες προτάσεις που ακολουθούν:

1. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής μετριέται σε $kgm^2/s^2$.
2. Η Γη έχει στροφορμή λόγω της περιστροφής της γύρω από τον Ήλιο.
3. Αν η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών που ασκούνται σε ένα σώμα είναι μηδέν τότε η στροφορμή του σώματος διατηρείται σταθερή.
4. Η ροπή αδράνειας ενός σφαιρικού φλοιού μάζας m και ακτίνας r, είναι $I=mr^2/3$.
5. Η κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα και έχει σταθερή ροπή αδράνειας είναι ανάλογη με το τετράγωνο της στροφορμής του.

**Α.73** Να χαρακτηρίσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες προτάσεις που ακολουθούν:

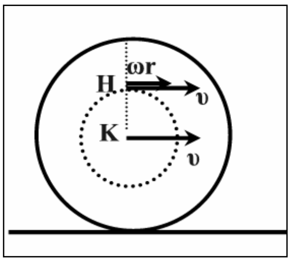
1.Σε τροχό που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας, η στροφορμή του διατηρείται σταθερή.
2. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν σε ένα σύστημα σωμάτων είναι ίσο με το μηδέν, ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν υπολογιστεί.
3. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται το έργο της ροπής που δέχεται το σώμα.
4. Το σπιν της Γης είναι η στροφορμή που σχετίζεται με την περιστροφή της γύρω από τον Ήλιο.
5. Αν σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα ασκηθούν δυνάμεις έτσι ώστε ΣF=0 και Στ=0 τότε το σώμα κάνει σύνθετη ομαλή κίνηση.

**Απαντήσεις**

Α1(β), Α2(δ), Α3(β), Α4(δ), Α5(γ), Α6(1-ε,2–β, 3–α, 4–γδε), Α7(β), Α8(γ), Α9(α), Α10(ΣΣΛΛΛ), Α11(γ), Α12(αβδε), Α13(α–4,β–2,γ–1,δ–4), Α14(γ), Α15(δ), Α16(δ), Α17(γ), Α18(γ), Α19(γδ), Α20(γ), Α21(αβγδ), Α22(α), Α23(δ), Α24(δ), Α25(δ), Α26(α), Α27(γ), Α28(δ), Α29(β), Α30(β), Α31(α), Α32(γ), Α33(δ), Α34(δ), Α35(γ). Α36(β), Α37(α), Α38(α), Α39(γ), Α40(δ), Α41(α), Α42(α). Α43(α), Α44(δ), Α45(δ), Α46(δ), Α47(δ), Α48(α), Α49(β), Α50(γ), Α51(β), Α52(α), Α53(γ), Α54(δ), Α55(α), Α56(β), Α57(α), Α58(δ), Α59(δ), Α60(β), Α61(β), Α62(α), Α63(δ), Α64(γ), Α65(δ), Α66(δ), Α67(ΣΣΛΛΛ), Α68(ΛΛΣΛΣ), Α69(ΣΛΣΣΣ), Α70(ΛΛΛΣΣ), Α71(ΛΣΛΣΛ), Α72(ΣΣΣΛΣ), Α73(ΣΣΛΛΛ)

## ΘΕΜΑΤΑ Β

**Β.1** Ο τροχός ακτίνας R, που φαίνεται στο σχήμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα υ. Τα μέτρα των ταχυτήτων των σημείων Η και Ζ που απέχουν από το κέντρο μάζας, Κ, αποστάσεις R/2 και βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο με αυτό, είναι:




α. $υ_H=3υ/2$ και $υ_Z=υ/2$
β. $υ_H=υ/2$ και $υ_Z=3υ/2$
γ. $υ_H=υ/2$ και $υ_Z=υ/2$

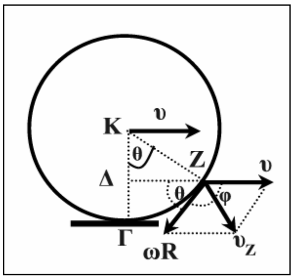
**Απάντηση:**

Ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και ισχύει ότι υ=ωR. Τα σημεία Η και Ζ απέχουν απόσταση r=R/2 από το κέντρο μάζας, Κ και έχουν ταυτόχρονα δύο ταχύτητες, μια μεταφορική ίση με αυτή του κέντρου μάζας, $\vec{υ}$ και μια γραμμική λόγω περιστροφής ίση με $\vec{ωr}$ όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού. Η συνισταμένη αυτών των ταχυτήτων είναι η ταχύτητα των σημείων και υπολογίζεται ως διανυσματικό άθροισμα: $\vec{υ}_H=\vec{υ}+\vec{ωr}$ και $\vec{υ}_Z=\vec{υ}+\vec{ωr}$

$υ_H=υ+ωr=υ+ω\frac{R}{2}=υ+\frac{υ}{2}=3\frac{υ}{2} \rightarrow \boldsymbol{υ_H=3\frac{υ}{2}}$

$υ_Z=υ-ωr=υ-ω\frac{R}{2}=υ-\frac{υ}{2}=\frac{υ}{2} \rightarrow \boldsymbol{υ_Z=\frac{υ}{2}}$ Άρα σωστό είναι το **(α).**

**Β.2** Ο τροχός ακτίνας R, που φαίνεται στο σχήμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα υ. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Ζ που βρίσκεται στην περιφέρεια και απέχει από το έδαφος απόσταση R/2 είναι:




α. υ β. 3υ/2 γ. 2υ δ. 0

**Απάντηση:**

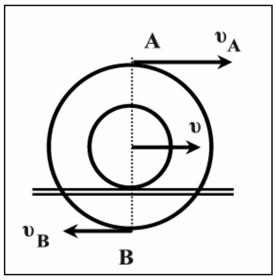
Το σημείο Ζ απέχει από το έδαφος απόσταση R/2 , άρα (ΔΓ)=R/2 και (ΚΔ)=R/2 άρα,
$συνθ=\frac{ΚΔ}{ΚΖ}=\frac{1}{2} \rightarrow θ=60^0$.

Το σημείο Ζ έχει δύο ταχύτητες μια λόγω μεταφοράς ίση με την ταχύτητα υ του κέντρου μάζας και μια ωR λόγω περιστροφής που είναι εφαπτόμενη στην περιφέρεια του τροχού. Επειδή όμως ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει ότι υ=ωR. Η συνολική ταχύτητα του Ζ θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο αυτών ταχυτήτων που σχηματίζουν γωνία, φ, όπου $φ=180^0-θ=120^0$.

$\vec{υ}_Z=\vec{υ}+\vec{ωR}$

$υ_Z=\sqrt{υ^2+(ωR)^2+2υ(ωR)συν120^0}=\sqrt{υ^2+υ^2+2υ^2(-0,5)} \rightarrow \boldsymbol{υ_Z=υ}.$ Άρα σωστό είναι το **(α).**

**Β.3** Καρούλι με εσωτερική ακτίνα R και εξωτερική 2R κυλίεται χωρίς ολίσθηση πάνω σε μια οριζόντια ράγα με την εσωτερική του επιφάνεια να εφάπτεται στη ράγα, όπως στο σχήμα. Αν $\upsilon_A$ είναι το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου (Α) και $\upsilon_B$ το μέτρο του κατώτερου σημείου Β, τότε ισχύει:




α. $\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}=0$ β. $\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}=3$ γ. $\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}=\frac{1}{3}$

**Απάντηση:**

Το καρούλι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με την εσωτερική του επιφάνεια ακτίνας R να εφάπτεται της ράγας. Συνεπώς η ταχύτητα του κέντρου μάζας, υ θα ισούται με ωR. Η ταχύτητα στα σημεία Α και Β θα προκύψει ως διανυσματικό άθροισμα της υ και της ταχύτητας λόγω περιστροφής που είναι ω·2R. Τα μέτρα των ταχυτήτων θα είναι:

$\upsilon=\omega R$

$\upsilon_A=\upsilon+\omega\cdot 2R=\upsilon+2\upsilon=3\upsilon$

$\upsilon_B=|\upsilon-\omega\cdot 2R|=|\upsilon-2\upsilon|=\upsilon$ Άρα: $\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}=\frac{\upsilon}{3\upsilon}\rightarrow \boldsymbol{\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}=\frac{1}{3}}$ Σωστό είναι το **(γ).**

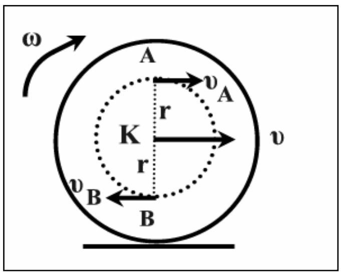
**Β.4** Τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή δύο σημεία Α και Β της κατακόρυφης διαμέτρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από το κέντρο έχουν ταχύτητες $\upsilon_A$=10m/s και $\upsilon_B$=4m/s. Η ταχύτητα υ του κέντρου μάζας του τροχού είναι:

α. 6m/s β. 7m/s γ. 14m/s δ. 14m/s

**Απάντηση:**

Τα σημεία Α και Β που απέχουν ίσες αποστάσεις r από το κέντρο μάζας Κ θα έχουν τις ίδιες ταχύτητες λόγω περιστροφής ωr. Ταυτόχρονα θα έχουν και ταχύτητα λόγω μεταφοράς, υ. Η συνολική ταχύτητα του κάθε σημείου θα είναι:

$\vec{\upsilon}_A=\vec{\upsilon}+\vec{\omega r}$ και $\vec{\upsilon}_B=\vec{\upsilon}+\vec{\omega r}$ και κατά μέτρο:

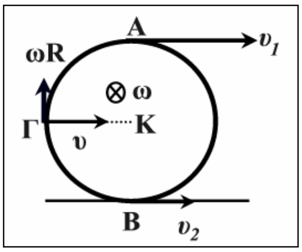



$\upsilon_A=\upsilon+(\omega r)$ (1) και $\upsilon_B=\upsilon-(\omega r)$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε:

$\upsilon_A+\upsilon_B=2\upsilon\rightarrow\upsilon=\frac{\upsilon_A+\upsilon_B}{2}\rightarrow\boldsymbol{\upsilon=7m/s}$ Σωστό είναι το **(β)**

**Β.5** Για την κίνηση του κυλίνδρου που φαίνεται στο σχήμα γνωρίζουμε ότι $\upsilon_1$=30m/s και $\upsilon_2$=10m/s. Ως θετική θεωρείται η κατεύθυνση προς τα δεξιά.




**Ι.** Ο κύλινδρος

α. μεταφέρεται χωρίς να περιστρέφεται β. κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

γ. περιστρέφεται χωρίς να μεταφέρεται δ. μεταφέρεται και περιστρέφεται

**ΙΙ.** Η ταχύτητα του κέντρου μάζας, Κ, είναι:

α. υ=10m/s β. υ=30m/s γ. υ=25m/s δ.υ=20m/s

**ΙΙΙ.** Η ταχύτητα του σημείου Γ είναι: α. $10\sqrt{2}$m/s β. $10\sqrt{3}$m/s γ. $10\sqrt{5}$m/s

**Απάντηση:**

**Ι.** Αφού το σημείο Β έχει ταχύτητα $\upsilon_2 \neq 0$ η κίνηση δεν μπορεί να κύλιση χωρίς ολίσθηση. Αφού $\upsilon_1 \neq \upsilon_2$ δεν μπορεί να είναι και μεταφορά. Αφού οι $\upsilon_1$, $\upsilon_2$ έχουν ίδια κατεύθυνση δεν μπορεί να είναι περιστροφή. Η κίνηση είναι σύνθετη αποτελούμενη από μεταφορά και περιστροφή. Άρα σωστό είναι το **(δ)**.

**ΙΙ.** Υποθέτουμε ότι το κέντρο μάζας κινείται με ταχύτητα, υ προς τα δεξιά και ο κύλινδρος περιστρέφεται δεξιόστροφα.

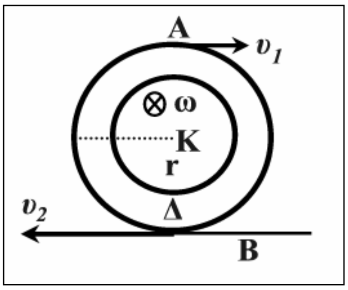
$\upsilon_A = \upsilon + \omega R \rightarrow \upsilon_1 = \upsilon + \omega R$ (1)

(1)+(2)$\rightarrow \upsilon_1 + \upsilon_2 = 2\upsilon \rightarrow$ **υ=20m/s** σωστό είναι το **(δ)**

$\upsilon_B = \upsilon - \omega R \rightarrow \upsilon_2 = \upsilon - \omega R$ (2)

**ΙΙΙ.** Από (1)–(2)$\rightarrow \upsilon_1 - \upsilon_2 = 2\omega R \rightarrow \omega R = 10$m/s $\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon^2 + (\omega R)^2} \rightarrow \upsilon_\Gamma = 10\sqrt{5}$m/s Σωστό το **(γ)**

**Β.6** Για την κίνηση του κυλίνδρου που φαίνεται στο σχήμα γνωρίζουμε ότι τα μέτρα των ταχυτήτων είναι $\upsilon_1$=10m/s και $\upsilon_2$=20m/s. Ως θετική θεωρείται η κατεύθυνση προς τα δεξιά.




**Ι.** Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του είναι:

α. υ=–5m/s β. υ=5m/s γ. υ=–15m/s

**ΙΙ.** Η ταχύτητα του σημείου Δ που απέχει r=R/2 από το Κ είναι:

α. 12,5m/s β. –12,5m/s γ. –10m/s

**Απάντηση**

**Ι.** Υποθέτουμε ότι ο κύλινδρος κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ και με δεξιόστροφη περιστροφή.

$\upsilon_1 = \upsilon + \omega R$ (1)

$\upsilon_2 = \omega R - \upsilon$ (2) Από (1)–(2)$\rightarrow \upsilon_1 - \upsilon_2 = 2\upsilon \rightarrow$ **υ= –5m/s** Σωστό είναι το **(α)**

Από (2)$\rightarrow \omega R = \upsilon_2 + \upsilon \rightarrow \omega R$=20m/s–5m/s$\rightarrow \omega R$=15m/s

Συνεπώς το κέντρο μάζας Κ του κυλίνδρου κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου υ=5m/s ενώ η περιστροφή είναι δεξιόστροφη. Κοινώς παίρνει ανάποδες στροφές.

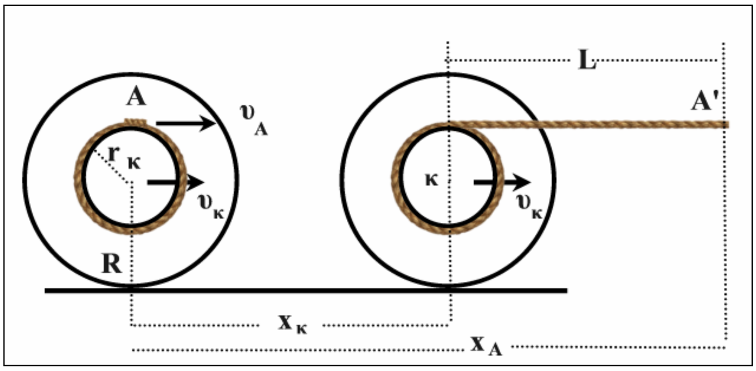
**ΙΙ.** Η ταχύτητα του Δ είναι: $\upsilon_\Delta = \upsilon - \omega r \rightarrow \upsilon_\Delta = \upsilon - (\omega R/2)$=–5m/s – 7,5m/s$\rightarrow$ **$\upsilon_\Delta$=–12,5m/s**

**Β.7** Στο σχήμα φαίνεται τροχός ακτίνας R που έχει μια προεξοχή που σχηματίζει αυλάκι ακτίνας r<R. Στο αυλάκι είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα. Τραβάμε το άκρο Α του νήματος με σταθερή ταχύτητα, $\upsilon_A$, και το νήμα ξετυλίγεται ενώ ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
Μέσα στο χρονικό διάστημα που ο τροχός θα διαγράψει μια πλήρη περιστροφή, το σημείο Α έχει μετατοπιστεί οριζόντια κατά:

α. 2πR β. 2πr γ. 2π(R+r)

### Απάντηση

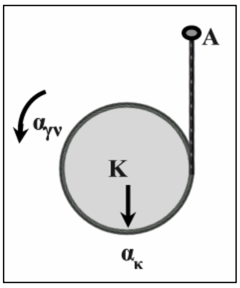
Ο τροχός μετατοπίζεται με ταχύτητα κέντρου μάζας $\vec{\upsilon}_K$ και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Το σημείο Α θα έχει ταχύτητα που είναι το διανυσματικό άθροισμα της $\vec{\upsilon}_K$ και της γραμμικής ταχύτητας, λόγω περιστροφής $\vec{\omega r}$ όπου $\omega=\upsilon_\kappa/R$.




$$\upsilon_A=\upsilon_\kappa+\omega r=\upsilon_\kappa+\frac{\upsilon_\kappa}{R}r\rightarrow \upsilon_A=\upsilon_\kappa\frac{R+r}{R}$$

Το νήμα είναι τυλιγμένο στο αυλάκι ακτίνας r.Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται για στροφή του τροχού κατά Δθ είναι L=r·Δθ. Για μια πλήρη περιστροφή, γωνίας Δθ=2π rad, το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται γίνεται, L=2πr (1)
Η μετατόπιση του κέντρου μάζας τροχού Κ, για μια πλήρη περιστροφή είναι αντίστοιχα, $x_\kappa=2\pi R$ (2)
Η μετατόπιση του άκρου του νήματος από τη θέση Α στη θέση Α′ είναι $x_A$ και, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα ισούται με:
$x_A=x_\kappa+L=2\pi R+2\pi r\rightarrow \mathbf{x_A=2\pi(R+r)}$ Άρα σωστό είναι το **(γ)**.
* Αν το αυλάκι είχε ακτίνα R, όση και του τροχού, τότε θα ήταν, $x_A=2\pi(R+R)=4\pi R$, δηλαδή διπλάσια από τη μετατόπιση του κέντρου μάζας, Κ.

**Β.8** Στο δίσκο (γιο–γιο) ακτίνας R, που φαίνεται στο σχήμα, καθώς το σχοινί ξετυλίγεται, το κέντρο μάζας του Κ, κινείται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_\kappa$ ενώ ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\nu}$. Το άκρο του σχοινιού Α μπορεί να κινείται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_A$. Να βρεθούν οι σχέσεις του συνδέουν τα μέτρα των τριών επιταχύνσεων $\alpha_A$, $\alpha_\kappa$ και $\alpha_{\gamma\nu}$ στις περιπτώσεις που ακολουθούν:



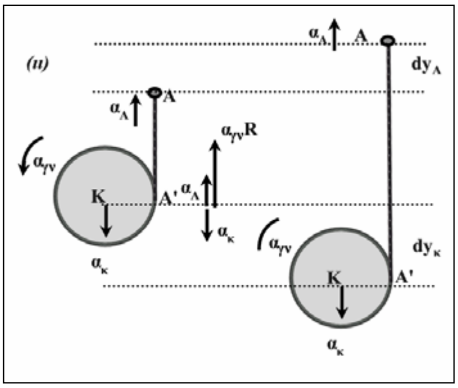

**Ι.** Το σημείο Α μένει ακίνητο και το κέντρο Κ πέφτει.
**ΙΙ.** Το σημείο Α ανεβαίνει και το κέντρο Κ πέφτει.
**ΙΙΙ**. Το σημείο Α και το κέντρο Κ ανεβαίνουν.

### Απάντηση

**Ι.** Η μετατόπιση $dy_\kappa$ του κέντρου μάζας σε χρόνο dt ισούται με το μήκος του νήματος, που ξετυλίγεται στον ίδιο χρόνο. Αλλά το μήκος του νήματος θα ισούται με το μήκος του τόξου που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας του δίσκου, δηλαδή, ds=Rdθ, όπου R η ακτίνα και dθ η γωνία στροφής.

$$dy_\kappa=Rd\theta\rightarrow\frac{dy_\kappa}{dt}=\frac{Rd\theta}{dt}\rightarrow\upsilon_\kappa=R\omega\rightarrow\frac{d\upsilon_\kappa}{dt}=\frac{d(R\omega)}{dt}\rightarrow \boldsymbol{\alpha_\kappa=R\alpha_{\gamma\nu}}$$

**ΙΙ.** Το μήκος dl του νήματος που ξετυλίγεται τώρα θα ισούται με την μετατόπιση του κέντρου μάζας προς τα κάτω αλλά και τη μετατόπιση του άκρου Α του νήματος προς τα πάνω, $dy_A$, (βλέπε σχήμα, ii).

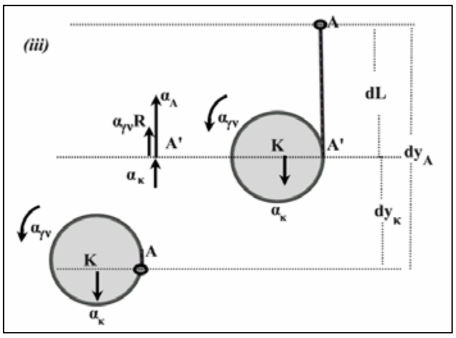



$$dl = dy_\kappa + dy_A \rightarrow R d\theta = dy_\kappa + dy_A \rightarrow \frac{R d\theta}{dt} = \frac{dy_\kappa}{dt} + \frac{dy_A}{dt} \rightarrow \omega R = \upsilon_\kappa + \upsilon_A \rightarrow$$

$$\frac{d(R\omega)}{dt} = \frac{d\upsilon_\kappa}{dt} + \frac{d\upsilon_A}{dt} \rightarrow \alpha_{\gamma\nu} R = \alpha_\kappa + \alpha_A \rightarrow \boldsymbol{\alpha_A = \alpha_{\gamma\nu} R - \alpha_\kappa}$$

<u>2$^{ος}$ τρόπος:</u>
Από το σχήμα μπορούμε να δούμε ότι κάθε σημείο του σχοινιού έχει την ίδια επιτάχυνση με το άκρο Α, άρα και το σημείο που κάθε φορά εφάπτεται στο δίσκο όπως το Α′
Στο σημείο Α′ συντίθενται οι επιταχύνσεις λόγω περιστροφής $\alpha_{\gamma\nu} R$ και η επιτάχυνση λόγω μεταφοράς $\alpha_\kappa$ που έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Αλλά η συνισταμένη τους είναι η $\alpha_A$ με φορά προς τα <u>πάνω αφού το Α ανεβαίνει</u>. Άρα από τη σύνθεση των διανυσμάτων έχουμε: $\alpha_A = \alpha_{\gamma\nu} R - \alpha_\kappa$

**ΙΙΙ.** Η κατακόρυφη ανύψωση $dy_A$ του σημείου Α ισούται με το άθροισμα του μήκους του νήματος dL=Rdθ που ξετυλίγεται και της μετατόπισης $dy_K$ του κέντρου μάζας προς τα κάτω, (Σχ. iii).

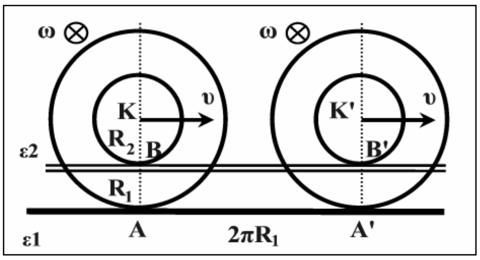



$$dy_A = R d\theta + dy_\kappa \rightarrow \frac{dy_A}{dt} = \frac{R d\theta}{dt} + \frac{dy_\kappa}{dt} \rightarrow \upsilon_A = \omega R + \upsilon_\kappa \rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} + \frac{d\upsilon_\kappa}{dt} \rightarrow \boldsymbol{\alpha_A = \alpha_{\gamma\nu} R + \alpha_\kappa}$$

<u>2$^{ος}$ τρόπος:</u>
Από το σχήμα μπορούμε να δούμε ότι κάθε σημείο του σχοινιού έχει την ίδια επιτάχυνση με το άκρο Α, άρα και το σημείο που κάθε φορά εφάπτεται στο δίσκο όπως το Α′.Στο σημείο Α′ συντίθενται οι επιταχύνσεις λόγω περιστροφής $\alpha_{\gamma\nu} R$ και η επιτάχυνση λόγω μεταφοράς $\alpha_\kappa$ που έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Αλλά η συνισταμένη τους είναι η $\alpha_A$ με φορά προς τα <u>πάνω αφού το Α ανεβαίνει</u>. Άρα από τη σύνθεση έχουμε: $\alpha_A = \alpha_{\gamma\nu} R + \alpha_\kappa$

**Β9.** Δύο ομόκεντρου κύλινδροι με ακτίνες $R_1$, $R_2$ ( $R_2 < R_1$) είναι καλά συνδεδεμένοι μεταξύ τους και αποτελούν ένα ενιαίο σύστημα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο ($\varepsilon_1$). Ταυτόχρονα ο μικρότερος τροχός κυλίεται πάνω σε παράλληλο επίπεδο ($\varepsilon_2$), όπως φαίνεται στο σχήμα.
Αν ο κύλινδρος κάνει μια πλήρη περιστροφή και το σημείο Α μετατοπιστεί οριζόντια κατά $2\pi R_1$, τότε το σημείο Β θα έχει μετατοπιστεί κατά




α. $2\pi R_1$ β. $2\pi R_2$ γ. $2\pi(R_1 - R_2)$ δ. $2\pi(R_1 + R_2)$

**Απάντηση**

Ο τροχός ακτίνας $R_1$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο (1) και αν κάνει μια πλήρη περιστροφή (Δθ=2π rad) το κέντρο μάζας του, Κ, θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = R_1 \cdot \Delta\theta = 2\pi R_1$. Μαζί με το Κ θα μετατοπιστεί και κάθε σημείο του κυλίνδρου άρα και το Β, δηλαδή κατά $2\pi R_1$, άρα σωστό είναι **(α)**.

* Κάποιος θα έλεγε ότι ταυτόχρονα και ο μικρότερος τροχός κάνει μια περιστροφή συνεπώς και το Β θα έπρεπε να μετατοπιστεί οριζόντια στο δικό του επίπεδο $\varepsilon_2$ κατά $2\pi R_2 \neq 2\pi R_1$. Άρα υπάρχει κάποιο παράδοξο. Όμως αυτό είναι λάθος γιατί ο τροχός $R_1$ δεν κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση, αφού το σημείο Β δεν έχει ταχύτητα μηδέν.

$\upsilon=\omega R_1$ $\qquad \upsilon_A=\upsilon-\omega R_1=0$

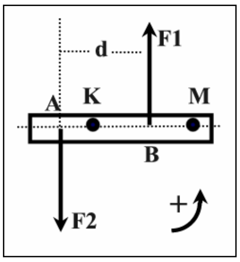
Αλλά: $\upsilon_B=\upsilon-\omega R_2 \rightarrow \upsilon_B=\omega(R_1-R_2)\neq 0$ ή $\upsilon_B=\upsilon(1-\frac{R_2}{R_1})$

Το σημείο Α δεν έχει ταχύτητα συνεπώς σε χρόνο μιας περιόδου, Τ, διαγράφει γωνία τόξου $\Delta\theta=\omega T$ και μήκος τόξου $\Delta s_A=R_1\Delta\theta=R_1\omega T=2\pi R_1$.

Το Β έχει ταχύτητα $\upsilon_B$ προς τα δεξιά άρα μετατοπίζεται κατά $x_1=\upsilon_B T=\omega(R_1-R_2)T=2\pi(R_1-R_2)$ ενώ ταυτόχρονα διαγράφει και αντίθετο τόξο μήκους $x_2=\omega R_2 T=2\pi R_2$

Άρα: $\Delta s_B=x_1-x_2=2\pi(R_1-R_2)-2\pi R_2=2\pi R_1$. Δεν υπάρχει κανένα παράδοξο.

**Β.10** Η συνολική ροπή των δύο αντίρροπων δυνάμεων του σχήματος που έχουν ίσα μέτρα είναι:
α. Μεγαλύτερη ως προς το σημείο Κ
β. Μεγαλύτερη ως προς το σημείο Μ.
γ. Ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.




**Απάντηση**

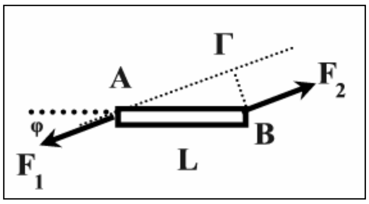
Υπολογίζω τη συνολική ροπή ως προς το Κ:
$\tau_K=F_1(KB)+F_2(KA)=F[(KA)+(KB)]=F(AB)=Fd \rightarrow \tau_K=Fd \quad (1)$

Υπολογίζω τη συνολική ροπή ως προς το Μ:
$\tau_M=F_2(MA)-F_1(MB)=F[(MA)-(MB)]=F(AB)=Fd \rightarrow \tau_M=Fd \quad (2)$

Άρα η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων είναι το ίδιο για κάθε σημείο, Σωστό είναι το **(γ).**

**Β.11** Στη ράβδο ΑΒ, μήκους L ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων με $F_1=F_2=F$ και $\varphi=30^0$. Η ροπή του ζεύγους είναι:

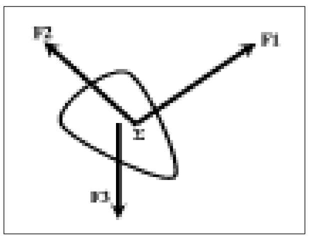
α. $F\cdot L/2$ $\qquad$ β. $FL\sqrt{3}/2$ $\qquad$ γ. $F\cdot L$




## Απάντηση

Οι $F_1$, $F_2$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων που οι φορείς τους απέχουν απόσταση, (ΒΓ)= Lημφ.
$\tau=F\cdot d=F\cdot L\eta\mu\varphi=F\cdot L\eta\mu 30^0=F\cdot L/2 \rightarrow$ **$\tau=F\cdot L/2$** $\quad$ Σωστό είναι το **(α)**.

**Β.12** Ένα στερεό σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών μη παράλληλων δυνάμεων. Να εξηγήσετε γιατί οι φορείς τους πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

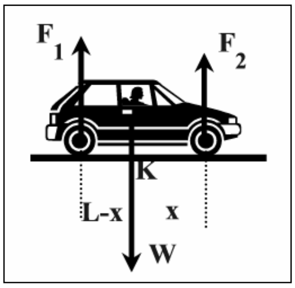



**Απάντηση**

Το σώμα ισορροπεί συνεπώς $\Sigma\tau=0 \rightarrow \tau_1+\tau_2+\tau_3=0$. Αν πάρουμε τις ροπές των δύο δυνάμεων ως προς το σημείο τομής τους, Σ, τότε αυτές είναι μηδενικές. Άρα πρέπει και η ροπή της τρίτης να είναι μηδέν, δηλαδή $\tau_3=0$, οπότε θα πρέπει και ο φορέας της τρίτης δύναμης να διέρχεται από το ίδιο σημείο.

**Β.13** Η απόσταση μεταξύ του άξονα των πίσω τροχών και του άξονα των μπροστινών τροχών ενός αυτοκινήτου είναι 3m. Το βάρος του αυτοκινήτου κατανέμεται κατά 55% στους πίσω τροχούς και κατά 45% στους μπροστινούς. Το κέντρο βάρους του αυτοκινήτου βρίσκεται σε απόσταση x πίσω από το μπροστινό άξονα:

α. x=1,65m β. x=1,55m γ. x=1,45m



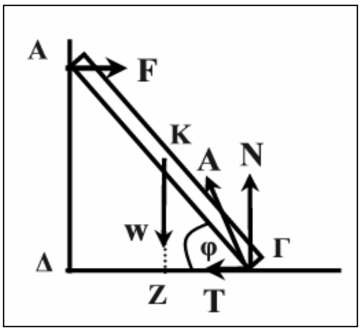

### Απάντηση:

Στους τροχούς ασκούνται οι αντιδράσεις του εδάφους που σύμφωνα με τα δεδομένα είναι $F_1$=0,55w και $F_2$=0,45w, όπου w το βάρος του αυτοκινήτου που ασκείται στο κέντρο βάρους, Κ. Το Κ απέχει x από τον μπροστινό άξονα και L–x από τον πίσω. Αφού το σύστημα ισορροπεί έχουμε:

$\Sigma\tau_K=0 \rightarrow F_2x - F_1(L-x)=0 \rightarrow 0{,}45w\cdot x=0{,}55w(3-x)\rightarrow \ldots\rightarrow x=1{,}65m$ Σωστό είναι το **(α)**

**Β.14** Η ομογενής δοκός μήκους ΑΓ=L ισορροπεί μεταξύ ενός λείου κατακόρυφου τοίχου και του πατώματος. Η γωνία μεταξύ της δοκού και του πατώματος είναι φ. Ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής μεταξύ της δοκού και του πατώματος είναι $\mu_\sigma$. Η ελάχιστη τιμή της γωνίας φ για την οποία η ράβδος δεν ολισθαίνει πάνω στο πάτωμα δίνεται από τη σχέση:

α. $\varepsilon\varphi\varphi_{min}=1/\mu_\sigma$ β. $\varepsilon\varphi\varphi_{min}=1/2\mu_\sigma$ γ. $\varepsilon\varphi\varphi_{min}=\mu_\sigma$




### Απάντηση:

Η ράβδος μήκους L ισορροπεί υπό την επίδραση των δυνάμεων:
Του βάρους της w, της κάθετης αντίδρασης, F του τοίχου, αφού αυτός είναι λείος, και της αντίδρασης Α του εδάφους. Η Α αναλύεται σε δύο συνιστώσες στην οριζόντιας αντίδραση του εδάφους που είναι η δύναμη της στατικής τριβής, Τ και την κάθετη αντίδραση του εδάφους, Ν. Αφού ισορροπεί ισχύουν οι τρεις συνθήκες ισορροπίας:

$$\Sigma\tau_\Gamma=\rightarrow w(Z\Gamma)-F(A\Delta)=0 \rightarrow F=w\frac{(Z\Gamma)}{(A\Delta)}=w\frac{\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi}{L\eta\mu\varphi}\rightarrow F=\frac{w}{2\varepsilon\varphi\varphi} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_x=0\rightarrow F-T=0\rightarrow F=T \qquad (2) \qquad \text{Από (1),(2)} \rightarrow T=\frac{w}{2\varepsilon\varphi\varphi} \qquad (4)$$

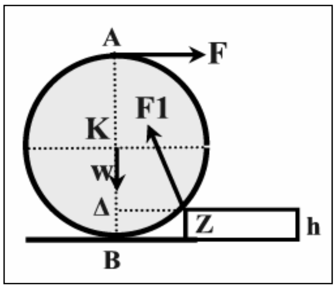
$$\Sigma F_y=0\rightarrow N-w=0\rightarrow N=w \qquad (3)$$

Για να μην ολισθαίνει θα πρέπει $T<\mu_\sigma N\rightarrow\mu_\sigma>\frac{T}{N}\overset{(3)(4)}{\clubsuit}\mu_\sigma>\frac{\frac{w}{2\varepsilon\varphi\varphi}}{w}\rightarrow\mu_\sigma>\frac{1}{2\varepsilon\varphi\varphi}\rightarrow\varepsilon\varphi\varphi>\frac{1}{2\mu_\sigma}\rightarrow\boldsymbol{\varepsilon\varphi\varphi_{min}=\frac{1}{2\mu_\sigma}}$

Άρα σωστό είναι το **(β).**

**Β.15** Κυλινδρικό ομογενές βαρέλι ακτίνας R και βάρους w βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και στηρίζεται σ' αυτό με την κυλινδρική του επιφάνεια. Το βαρέλι ακουμπάει σε σκαλοπάτι ύψους h=R/4
Η ελάχιστη δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί στο σημείο Α και σε οριζόντια κατεύθυνση ώστε το βαρέλι να χάσει την επαφή του με το οριζόντιο έδαφος είναι η

α. $F_{min}=w\sqrt{7}/7$ β. $F_{min}=w$ γ. $F_{min}=w\sqrt{7}$



**Απάντηση**

Αν η F έχει την κατάλληλη τιμή ώστε το βαρέλι να χάσει την επαφή του με το πάτωμα η αντίδραση Ν του πατώματος μηδενίζεται. Για να συμβεί αυτό πρέπει $\tau_F \geq \tau_w$ ως προς το σημείο περιστροφής Ζ.

$$\tau_F \geq \tau_w \rightarrow F(A\Delta) \geq w(\Delta Z) \rightarrow F \geq \frac{w(\Delta Z)}{A\Delta} \quad (1)$$

$$(\Delta Z)=\sqrt{R^2-(K\Delta)^2}=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{h(2R-h)}=\frac{R}{4}\sqrt{7} \quad (2)$$

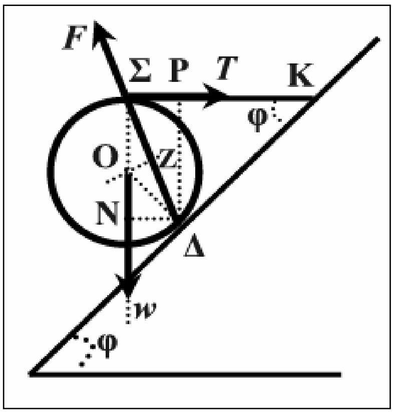
$$(A\Delta)=2R-h=7R/4 \quad (3)$$

$(1) \rightarrow F \geq w\sqrt{7}/7 \rightarrow$ $\mathbf{F_{min}=w\sqrt{7}/7}$ Άρα σωστό είναι το **(α)**

* Αν το βαρέλι ξεκολλήσει από το έδαφος θα υπερπηδήσει το εμπόδιο γιατί όσο ανεβαίνει θα αυξάνεται η ροπή της F και θα μειώνεται η ροπή του βάρους

**Β. 16** Ο ομογενής τροχός του σχήματος έχει βάρος w και ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=60^0$ με τη βοήθεια νήματος. Να υπολογίσετε τη δύναμη F που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στον τροχό και την τάση Τ, του νήματος.

**Απάντηση:**




Ο τροχός δέχεται τρεις δυνάμεις, του βάρος w, την τάση Τ του νήματος και την αντίδραση F από το κεκλιμένο επίπεδο. Αφού ισορροπεί θα πρέπει και οι φορείς και των τριών δυνάμεων να διέρχονται από το ίδιο σημείο, που στο σχήμα είναι το Σ. Γράφουμε τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών για τα σημεία (Ο) και (Δ).

$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow T(O\Sigma)-F(OZ)=0 \quad (1)$

Το τετράπλευρο ΚΣΟΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο ( δύο απέναντι γωνίες ορθές), άρα $\measuredangle\ \varphi+(\Sigma O\Delta)=180^0 \rightarrow \Sigma O\Delta=120^0 \rightarrow ZO\Delta=\varphi=60^0$. Άρα:

$(O\Sigma)=R$ και $(OZ)=R\sigma\upsilon\nu 60^0=R/2$

Από $(1) \cdot T \cdot R-F(R/2)=0 \rightarrow F=2T \quad (2)$

$\Sigma\tau_\Delta=0 \rightarrow T(P\Delta)-w(N\Delta)=0 \quad (3)$

$\measuredangle\ O\Delta N=\Sigma\Delta N-\Sigma\Delta O=60^0-30^0=30^0$ Άρα: $(P\Delta)=(\Sigma N)=R+(ON)=R+R\eta\mu 30^0=3R/2 \rightarrow (P\Delta)=3R/2$

$(N\Delta)=R\sigma\upsilon\nu 30^0=R\sqrt{3}/2$

Από $(3) \rightarrow T=\frac{w(N\Delta)}{(P\Delta)}=\frac{wR\sqrt{3}/2}{3R/2} \rightarrow \mathbf{T=w\sqrt{3}/3} \quad (4)$ Από (2) και (4) $\rightarrow$ $\mathbf{F=2\,w\sqrt{3}/3}$

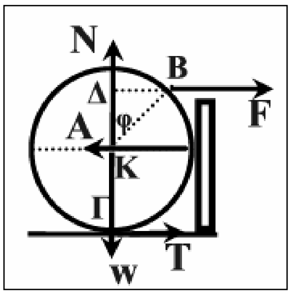
**Β.17** Ο κύλινδρος του σχήματος έχει βάρος w και ισορροπεί εφαπτόμενος ενός λείου κατακόρυφου τοίχου. Στο σημείο Β ασκούμε δύναμη F=w έτσι ώστε η γωνία $B\hat{K}\Delta=\varphi=60^0$.

**Ι.** Η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από τον τοίχο είναι

α. A=w β. A=3w/2 γ. A=2w

**ΙΙ.** Η δύναμη της τριβής που δέχεται από το πάτωμα είναι

α. Τ=0 β. T=w/2 γ. T=w/4




**Απάντηση**

**Ι.** Η δύναμη Α που δέχεται ο κύλινδρος από τον τοίχο πρέπει να είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής τους αφού οι τοίχος είναι λείος. Συνεπώς διέρχεται από το κέντρο, Κ. Αφού ισορροπεί η συνολική ροπή που δέχεται θα είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο άρα και το σημείο επαφής με το πάτωμα δηλαδή το Γ.

$\Sigma\tau_\Gamma=0 \rightarrow F(\Delta\Gamma)-A(K\Gamma)=0 \rightarrow F(\Delta A+K\Gamma)- A\cdot(K\Gamma)=0 \rightarrow F(R+R\sigma\upsilon\nu\varphi) = A\cdot R \rightarrow F\cdot\frac{3R}{2} = A\cdot R \rightarrow$ $\mathbf{A=3w/2}$ .

Σωστό είναι το **(β)**

**ΙΙ.** Ο κύλινδρος δεν περιστρέφεται συνεπώς θα πρέπει η συνολική ροπή ως προς το κέντρο του να είναι μηδέν. Άρα πρέπει να υπάρχει τριβή Τ ώστε η ροπή της να εξισορροπεί τη ροπή της F.

$\Sigma\tau_K=0 \rightarrow F(K\Delta)-T(\Gamma A)=0 \rightarrow FR\sigma\upsilon\nu\varphi=TR \rightarrow T=\frac{F}{2} \rightarrow$ $\mathbf{T=w/2}$     Σωστό είναι το **(β)**

**Β.18** Δύο συμπαγείς και ομογενείς σφαίρες ίδιας πυκνότητας, d, με ακτίνες $R_1$, $R_2$ με $R_2=2R_1$ έχουν ροπές αδράνειας ως προς τον κύριο άξονα συμμετρίας τους. Ο λόγος $I_1/I_2$ ισούται με:

α. 1/4     β. 1/32     γ. 8     δ. 16

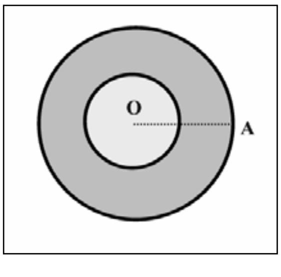
**Απάντηση:**

Η πυκνότητα της σφαίρας: $\rho=\frac{m}{V} \rightarrow m=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$.   Η ροπή αδράνειας: $I=\frac{2}{5}mR^2=\frac{2}{5}\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot R^2 = \frac{8}{15}\rho\cdot\pi R^5$

$I_1=\frac{8}{15}\rho\cdot\pi R_1^5$     $\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_1^5}{R_2^5}=\frac{R_1^5}{(2R_1)^5}=(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32} \rightarrow \mathbf{\frac{I_1}{I_2}=\frac{1}{32}}$     Σωστό είναι το **(β)**

$I_2=\frac{8}{15}\rho\cdot\pi R_2^5$

**Β.19** Ο ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας Μ του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I=MR^2/2$ και επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μάζα ενός τμήματος του δίσκου είναι ανάλογη της επιφάνειας που καλύπτει, δηλαδή $M/R^2$=σταθερό. Αφαιρούμε ένα κυκλικό δίσκο ακτίνας $R_1=R/2$ .
Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου που σχηματίστηκε είναι:




α. $I_\delta=MR^2/8$     β. $I_\delta=7MR^2/6$     γ. $I_\delta= 15MR^2/32$

**Απάντηση**

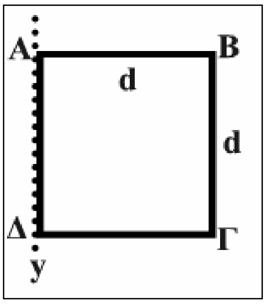
Η μάζα του δακτυλίου που αφαιρέθηκε είναι $M_1$: $\frac{M}{R^2}=\frac{M_1}{R_1^2} \rightarrow M_1=\frac{M}{4}$ και έχει ροπή αδράνειας ως προς τον ίδιο άξονα: $I_1=\frac{1}{2}M_1R_1^2$

Άρα $I_\delta= I-I_1=\frac{1}{2}MR^2-\frac{1}{2}M_1R_1^2=\frac{1}{2}MR^2-\frac{1}{2}\frac{M}{4}\cdot\frac{R^2}{4} \rightarrow I_\delta=\frac{MR^2}{2}-\frac{MR^2}{32} \rightarrow \mathbf{I_\delta=\frac{15MR^2}{32}}$

Άρα σωστό είναι το **(γ)**

**B.20** Μια ομογενής τετράγωνη τάβλα μάζας M=4m, πλευράς, d, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y και έχει ροπή αδράνειας ως προς αυτόν, $I_1$. Ένα τετράγωνο πλαίσιο αποτελείται από 4 ράβδου μήκους d και μάζας m η κάθε μία και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y που ταυτίζεται με τη μία πλευρά τους. Η ροπή αδράνειας του πλαισίου ως προς τον άξονα αυτόν είναι $I_2$. Για τα $I_1$ και $I_2$ ισχύει:

α. $I_1=I_2$ β. $I_1>I_2$ γ. $I_1<I_2$




**Απάντηση**

Η ροπή αδράνειας της τάβλας: Θεωρούμε ότι η τάβλα αποτελείται από ν όμοιες οριζόντιες λεπτές ράβδους μήκους d, μάζας $m_i$ έτσι ώστε $M=\nu m_i$. Η κάθε ράβδος έχει ροπή αδράνειας ως προς τον κατακόρυφο άξονα, y που διέρχεται από το ένα άκρο της, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner:

$I_i=(1/12)m_i d^2 + m_i(d/2)^2=m_i d^2/3$. Άρα για όλη την τάβλα: $I_1=\nu I_i= \nu\cdot m_i d^2/3 \rightarrow I_1=\dfrac{Md^2}{3} \rightarrow \mathbf{I_1=\dfrac{4md^2}{3}}$

Η ροπή αδράνειας του πλαισίου: Η πλευρά ΑΔ ταυτίζεται με τον άξονα περιστροφής και έχει μηδενική ροπή αδράνειας, $I_{ΑΔ}=0$. Οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ σύμφωνα με το θεώρημα Steiner έχουν

$I_{ΑΒ}=I_{ΓΔ}=md^2/3$. Θεωρούμε ότι η πλευρά ΒΓ αποτελείται από Ν υλικά σημεία που το καθένα έχει μάζα $m_j$, με $m=N\cdot m_j$. Το κάθε υλικό σημείο έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y: $I_j=m_j d^2$. Άρα $I_{ΒΓ}= N\cdot I_j=Nm_j d^2=md^2$.

Άρα $I_2= I_{ΑΒ}+ I_{ΒΓ}+I_{ΓΔ}+ I_{ΔΑ}= (md^2/3) + md^2 +(md^2/3) + 0 \rightarrow \mathbf{I_2=\dfrac{5md^2}{3}}$

Άρα $I_2>I_1$. Άρα σωστό είναι το **(γ)**

*Βλέπουμε ότι ανάμεσα στα δύο στερεά ένα συμπαγές και ένα πλαίσιο ίδιων μαζών και διαστάσεων, μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, ως προς τον ίδιο άξονα έχει εκείνο που έχει τη μάζα του κατανεμημένη στην περιφέρεια.*

**B.21** Συμπαγής ομογενής κυκλικός δίσκος (1) και ομογενής κυκλικός δακτύλιος (2) έχουν ίδια μάζα και ακτίνα και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στην επιφάνεια που αυτοί ορίζουν. Κάποια στιγμή ασκούνται στα σώματα αυτά δυνάμεις ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρεια. Οι γωνιακές επιταχύνσεις που θα αποκτήσουν θα είναι:

α. $\alpha_{γν1}=\alpha_{γν2}$ β. $\alpha_{γν1}>\alpha_{γν2}$ γ. $\alpha_{γν1}<\alpha_{γν2}$

**Απάντηση**

Τα δύο στερεά έχουν ίδιες μάζες και ίδιες διαστάσεις. Όμως στον δακτύλιο όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια, ενώ στον δίσκο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε όλη την έκτασή του. Άρα στον δακτύλιο όλα τα γινόμενα $m_i R_i^2$ έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής με R την ακτίνα του δακτυλίου που είναι και η μέγιστη απόσταση από τον άξονα. Αντιθέτως στο δίσκο τα γινόμενα $m_i R_i^2$ έχουν διάφορες αποστάσεις $R_i$:R από τον άξονα περιστροφής του. Αφού είναι $I=\Sigma m_i R_i^2$ είναι προφανές ότι $I_1<I_2$.

$\Sigma\tau_1=I_1\alpha_{γν1}$ (1) $\Sigma\tau_2=I_2\alpha_{γν2}$ (2) $\Sigma\tau_1=\Sigma\tau_2=FR$ (3)

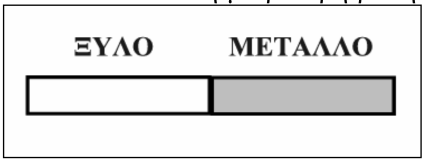
Από (1),(2),(3) έχουμε $I_1\alpha_{γν1}= I_2\alpha_{γν2} \rightarrow \dfrac{\alpha_{γν1}}{\alpha_{γν2}}=\dfrac{I_1}{I_2}>1 \rightarrow \boldsymbol{\alpha_{γν1}>\alpha_{γν2}}$ Σωστό είναι το **(β).**

**Β.22** Μια πόρτα αποτελείται από δύο ίσα, ομογενή και συμπαγή ορθογώνια ενωμένα. Το ένα της τμήμα είναι μεταλλικό, ενώ το άλλο ξύλινο, όπως βλέπουμε και στην οριζόντια τομή της πόρτας που φαίνεται στο σχήμα. Από ποια πλευρά πρέπει να τοποθετήσουμε τους μεντεσέδες ώστε να απαιτείται η μικρότερη ροπή προκειμένου να ανοίξουμε ή να κλείσουμε την πόρτα;

α. Από τη πλευρά του ξύλινου μέρους.

β. Από την πλευρά του μεταλλικού μέρους.

γ. Δεν έχει καμιά διαφορά.




## Απάντηση:

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο, $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\nu}$, η ροπή που πρέπει να ασκήσουμε για να περιστρέψουμε την πόρτα είναι ανάλογη με τη ροπή αδράνειας που αυτή έχει ως προς τον άξονα περιστροφής της, αν υποθέσουμε ότι η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή. Η ροπή αδράνειας είναι γενικώς $I=\Sigma m_i r_i^2$. Αν το μεταλλικό μέρος που έχει μεγαλύτερη μάζα είναι κοντά στον άξονα περιστροφής, τότε περισσότερη μάζα απέχει μικρότερες αποστάσεις από τον άξονα και σύμφωνα με τον ορισμός του Ι, η ροπή αδράνειας θα είναι μικρότερη. Άρα θα απαιτείται και μικρότερη ροπή. Άρα σωστό είναι **(β).**

**Β.23** Αν δύο ομογενείς δίσκοι ίδιων διαστάσεων με διαφορετικές μάζες περιστρέφονται γύρω από τον ίδιο σταθερό άξονα συμμετρίας τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, τότε, για να σταματήσουμε τους δύο δίσκους στο ίδιο χρονικό διάστημα χρειάζεται να ασκήσουμε:

α. Ίσες ροπές. β. Μεγαλύτερη ροπή στον βαρύτερο. γ. Μεγαλύτερη ροπή στον ελαφρύτερο.

Δίνεται για το δίσκο η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, $I=mR^2/2$ .

**Απάντηση**

Έστω ότι το χρονικό διάστημα που χρειάζονται οι τροχοί για να σταματήσουν είναι t. Γράφω την εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας στην επιβραδυνόμενη κίνηση, ως εξής:

$\omega=\omega_0-|\alpha_{\gamma\nu}|\, t \xrightarrow{\omega=0} |\alpha_{\gamma\nu}| = \dfrac{\omega_0}{t}$ (1)

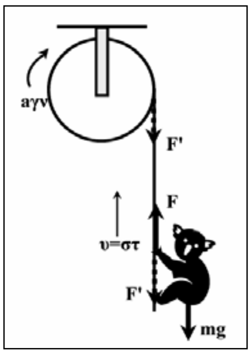
$I=\dfrac{mR^2}{2}$ (2) Από (1),(2),(3)→$\boldsymbol{\tau=\dfrac{mR^2}{2}\cdot\dfrac{\omega_0}{t}}$

$\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\nu}$ (3)

Άρα για να σταματήσουμε στον ίδιο χρόνο, ενώ έχουν το ίδιο $\omega_0$ θα πρέπει σ΄ αυτόν με τη μεγαλύτερη μάζα να ασκηθεί και μεγαλύτερη ροπή. Άρα σωστό είναι το **(β).**

**Β.24** Το αρκουδάκι μάζας m ανεβαίνει το σχοινί με σταθερή ταχύτητα ενώ η τροχαλία μάζας, Μ και ακτίνας, R, στρέφεται έτσι ώστε το σχοινί να μην ολισθαίνει μέσα στο αυλάκι της. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I=MR^2/2$. Η γραμμική επιτάχυνση, α, ενός σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας είναι:

α. α=0 β. α=g γ. α=2mg/M




**Απάντηση**

Το αρκουδάκι μάζας m δέχεται τις δυνάμεις του βάρους του mg και τη δύναμη, F από το νήμα που το βοηθά να ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα. Άρα:

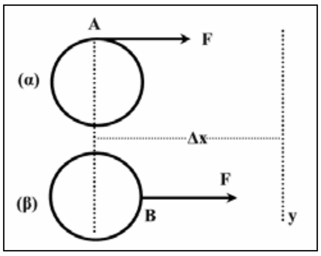
$\Sigma F=0 \rightarrow F-mg=0 \rightarrow F=mg$ (1)

Η τροχαλία περιστρέφεται χάρη στη ροπή που παράγει η τάση του νήματος F⁄ που είναι ίση με την αντίδραση της F που ασκεί το νήμα στο αρκουδάκι.
Άρα ισχύει: F=F′
Ακόμα ισχύει και ότι: $\alpha=\alpha_{\gamma\nu}R$ για κάθε σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας.

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow FR=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{\alpha}{R}\rightarrow F=\frac{M\alpha}{2}$ (2)

Από (1) και (2)→ $mg=\frac{M\alpha}{2}\rightarrow \boldsymbol{\alpha=\frac{2mg}{M}}$ Σωστό είναι το **(γ)**

**Β.25** Οι δύο όμοιο δίσκοι (α) και (β) μπορούν να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβές. Αρχικά οι δίσκοι είναι ακίνητοι και τα κέντρα τους απέχουν ίδια απόσταση x από την ευθεία y. Ασκούμε στον κάθε δίσκο τις ίδιες σταθερές δυνάμεις F με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα, τη μια πάντα στο σημείο Α και την άλλη πάντα στο σημείο, Β. Αν ο δίσκος (α) χρειάζεται χρόνο $t_\alpha$ για να φτάσει στην ευθεία y, ενώ ο δίσκος (β) χρόνο $t_\beta$, τότε:




α. $t_\alpha>t_\beta$ β. $t_\alpha=t_\beta$ γ. $t_\alpha<t_\beta$

**Απάντηση**

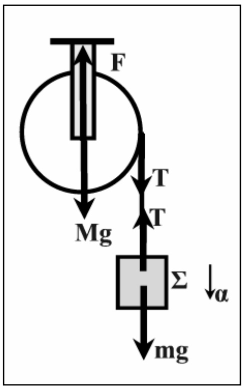
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι τα κέντρα μάζας των δύο δίσκων βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη ευθεία όταν ξεκινούν. Συνεπώς όταν φτάνουν στην ευθεία y θα έχουν διανύσει την ίδια απόσταση έστω Δx.
Ο τροχός (β) κάνει μόνο μεταφορική κίνηση με επιτάχυνση $\alpha_2$ υπό την επίδραση της δύναμης F. Αντίθετα ο τροχός (α) κάνει σύνθετη κίνηση αλλά η μεταφορική του κίνηση γίνεται με επιτάχυνση $\alpha_2$ υπό την επίδραση της δύναμης F. Επειδή έχουν και ίδια μάζα θα ισχύει και για τους δύο τροχούς:

$F=m\alpha_1$ και $F=m\alpha_2$ Άρα $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$.

Άρα τα κέντρα μάζας των τροχών έχουν την ίδια επιτάχυνση, α, και διανύσουν την ίδια απόσταση Δx στον ίδιο χρόνο t αφού ισχύει, $\Delta x=\frac{1}{2}\alpha t^2$. Συνεπώς σωστό είναι το **(β).**

**Β.26** Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα Μ, ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής της, $I=MR^2/2$ και το σώμα Σ έχει μάζα m για τις οποίες ισχύει M=4m. Αρχικά κρατάμε το σώμα ακίνητο και το νήμα τεντωμένο. Αφήνουμε το σώμα να πέσει. Η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της είναι:

α. F=5Mg/4 β. F=4Mg/3 γ. F=7Mg/6




**Απάντηση**

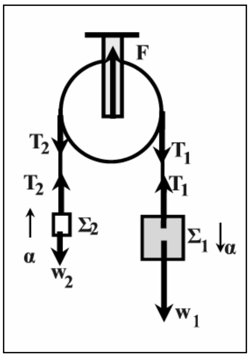
Η τροχαλία δε μεταφέρεται και συνεπώς ισχύει: $\Sigma F=0\rightarrow F-(Mg+T)=0$ (1)
Για το σώμα μάζας m που επιταχύνεται: $\Sigma F=m\alpha\rightarrow mg-T=m\alpha$ (2)
Για την τροχαλία που περιστρέφεται: $\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu}\rightarrow TR=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{\alpha}{R}\rightarrow T=\frac{M\alpha}{2}$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε: $\alpha=\frac{g}{3}$ (4)

Από (3) (4)→T=Mg/6 (5) Από (1) (5)→F=Mg+(Mg/6)→ $\boldsymbol{F=\frac{7Mg}{6}}$ Σωστό είναι το **(γ)**

**Β.27** Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα m και ροπή αδράνειας $I_O=mR^2/2$, ενώ τα δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ έχουν μάζες $m_1=2m$ και $m_2=m$. Η συνολική ροπή που δέχεται η τροχαλία είναι:

α. τ=mRg β. τ=mRg/5 γ. τ=mRg/7




**Απάντηση**

Για το $Σ_1$: $m_1g-T_1=m_1α \rightarrow 2mg-T_1=2mα$ (1)

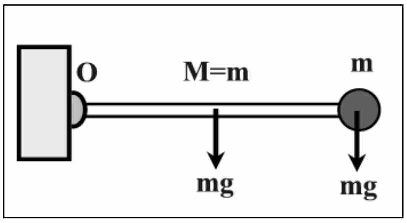
Για το $Σ_2$: $T_2-m_2g=m_2α \rightarrow T_2-mg=mα$ (2)

Για την τροχαλία: $Στ=I\cdot α_{γν} \rightarrow T_1R-T_2R=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{α}{R} \rightarrow T_1-T_2=\frac{mα}{2}$ (3)

Από (1)+(2)+(3)$\rightarrow$ $2mg-mg=\frac{7mα}{2} \rightarrow α=\frac{2g}{7}$ (4)

Η ροπή που δέχεται η τροχαλία είναι: $τ=I\cdot α_{γν}=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{α}{R}= \rightarrow \mathbf{τ=\frac{mgR}{7}}$ Σωστό είναι το **(γ)**

**Β.28** Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας M=m, μήκους d μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Στο άλλο άκρο της είναι στερεωμένο σφαιρίδιο με σημειακή μάζα m. Τη χρονική στιγμή που το σύστημα ράβδου – σφαιριδίου αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί από την οριζόντια θέση




**Ι.** η ροπή που δέχεται η ράβδος είναι

α. $\frac{1}{2}mgd$ β. $\frac{3}{2}mgd$ γ. $\frac{3}{8}mgd$

**ΙΙ.** Η δύναμη που δέχεται το σφαιρίδιο από τη ράβδο έχει μέτρο

α. F=mg β. F=3mg/8 γ. F=mg/8

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O είναι $I_O=Md^2/3$

**Απάντηση**

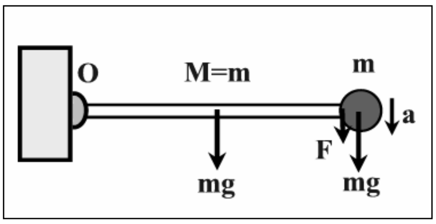
**Ι.** Υπολογίζω την γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος «ράβδος–σφαίρα»

Η ολική ροπή αδράνειας είναι: $I=I_1+I_2 \rightarrow I=\frac{Md^2}{3}+md^2=\frac{4md^2}{3}$

$Στ=Iα_{γν} \rightarrow Mg\frac{d}{2}+mgd=\frac{4md^2}{3}α_{γν} \rightarrow α_{γν}=\frac{9g}{8d}$

Από το 2° νόμο μόνο για τη ράβδο: $τ=I_1α_{γν} \rightarrow τ=\frac{Md^2}{3}\cdot\frac{9g}{8d} \rightarrow \mathbf{τ=\frac{3}{8}mgd}$ Άρα σωστό είναι το **(γ)**

**ΙΙ.** Το σφαιρίδιο δέχεται από τη ράβδο κατακόρυφη δύναμη, F. Τη χρονική στιγμή που η ράβδος αφήνεται ελεύθερη η ω=0 συνεπώς δεν υπάρχει κεντρομόλος δύναμη στον οριζόντιο άξονα. Η γραμμική επιτάχυνση της σημειακής μάζας είναι $a=α_{γν}d=\frac{9g}{8d}\cdot d \rightarrow$ a=9g/8.

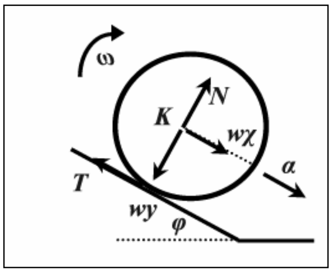



Με τέτοια επιτάχυνση a>g η δύναμη επαφής, F, με τη ράβδο έχει φορά προς τα κάτω. Άρα

$ΣF_y=ma \rightarrow F+mg=ma \rightarrow F=m(9g/8)-mg \rightarrow$ **F= mg/8.** Σωστό είναι το **(γ)**

**B.29** Δύο κύλινδροι ο ένας συμπαγής με ροπή αδράνειας $I_1 = ½\ mR^2$ και ο άλλος κοίλος με $I_2 = mR^2$, ίδιας μάζας και ακτίνας, αφήνονται ταυτόχρονα ελεύθεροι από το ίδιο ύψος του ίδιου κεκλιμένου επιπέδου και κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Ποιος από τους δύο θα φτάσει γρηγορότερα στη βάση;

α. Ο συμπαγής    β. Ο κοίλος    γ. Θα φτάσουν ταυτόχρονα




**Απάντηση**

Έστω I η ροπή αδράνειας του στερεού. Θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση α του κέντρου μάζας συναρτήσει του I.

$\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi - T = m\alpha$   (1)

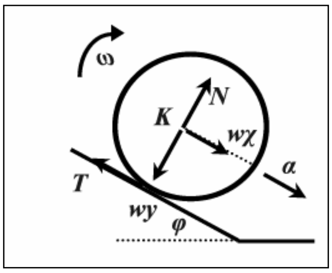
$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR = I\cdot\frac{\alpha}{R} \rightarrow T = \frac{I\alpha}{R^2}$   (2)

Από (1) και (2) → $\alpha = \frac{mg\eta\mu\varphi R^2}{I + mR^2}$   (3)   Από τη (3) φαίνεται ότι για $\mathbf{I_1 < I_2}$ θα έχουμε ότι $\boldsymbol{\alpha_1 > \alpha_2}$.

Άρα ο κύλινδρος με τη μικρότερη ροπή αδράνειας δηλαδή ο συμπαγής κατεβαίνει με μεγαλύτερη επιτάχυνση του κέντρου μάζας και συνεπώς θα φτάσει πιο γρήγορα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Σωστό είναι το **(α).**

**B.30** Ομογενής κύλινδρος με ροπή αδράνειας $I = mR^2/2$ αφήνεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ. Για να είναι δυνατή η κύλιση του κυλίνδρου χωρίς ολίσθηση θα πρέπει ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου να είναι:

α. $\mu_\sigma > \varepsilon\varphi\varphi/3$    β. $\mu_\sigma > \varepsilon\varphi\varphi$    γ. $\mu_\sigma < \varepsilon\varphi\varphi/3$




**Απάντηση:**

$\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi - T = m\alpha$   (1)

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$   (2)

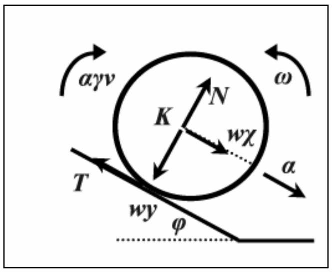
$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR = \frac{MR^2}{2}\cdot\frac{\alpha}{R} \rightarrow T = \frac{M\alpha}{2}$   (3)

Από (1) και (3) → $mg\eta\mu\varphi = \frac{3m\alpha}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2g\eta\mu\varphi}{3}$ (4)   Από (3) και (4) → $T = \frac{mg\eta\mu\varphi}{3}$   (5)

Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει η στατική τριβή να μη φτάνει στην οριακή τιμή της, $\mu_\sigma N$, δηλαδή:

$T < \mu_\sigma N \rightarrow \mu_\sigma > \frac{T}{N} \xrightarrow{(2)\kappa\alpha\iota(5)} \mu_\sigma > \frac{\frac{mg\eta\mu\varphi}{3}}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \rightarrow \boldsymbol{\mu_\sigma > \varepsilon\varphi\varphi/3}$   Σωστό είναι το **(α)**

**B.31** Δύο μικρές ομοιόμορφες σφαίρες 1 και 2 βάλλονται από τη βάση κεκλιμένων επιπέδων ίδιας γωνία κλίσης φ. Το επίπεδο στο οποίο ανέρχεται η σφαίρα 1 είναι λείο, ενώ της σφαίρας 2 είναι τραχύ. Η σφαίρα 2 σε όλη τη διάρκεια της κίνησής της κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Η ροπή αδράνειας της κάθε σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι $I = 2mR^2/5$. Αν $x_1$ και $x_2$ είναι οι αντίστοιχες μέγιστες αποστάσεις που φτάνουν τα κέντρα των σφαιρών από τις αντίστοιχες βάσεις των κεκλιμένων επιπέδων τότε ο λόγος $x_1/x_2$ είναι ίσος με:




α. 7/5    β. 5/7    γ. 1

**Απάντηση**

Για τη σφαίρα (1): Αφού το επίπεδο είναι λείο δεν υπάρχει η στατική τριβή Τ για να παράγει ροπή και συνεπώς η κίνηση είναι μεταφορική ομαλά επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση μέτρου $α_1$:

$ΣF_x=0 \rightarrow mgημφ=mα_1 \rightarrow α_1=gημφ$ (1)

Η μέγιστη μετατόπιση $x_1$ για το κέντρο μάζας μέχρι να σταματήσει υπολογίζεται από τις εξισώσεις κίνησης για την ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με τελική ταχύτητα υ=0

Δηλαδή: $υ=υ_0-α_1t \rightarrow t=\frac{υ_0}{α_1}$ και $x_1=υ_0t-\frac{α_1t^2}{2} \rightarrow \ldots \rightarrow x_1=\frac{υ_0^2}{2α_1}=\frac{υ_0^2}{2gημφ}$ (2)

Για τη σφαίρα (2): Το επίπεδο είναι τραχύ και η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με επιβράδυνση κέντρου μάζας μέτρου, $α_2$.

$ΣF_x=mα_2 \rightarrow mgημφ - T= mα_2$ (3)

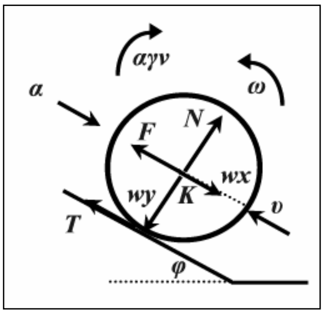
$Στ=Iα_{γν} \rightarrow TR=\frac{2mR^2}{5}\cdot\frac{α_2}{R} \rightarrow T=\frac{2mα_2}{5}$ (4) Από (3)(4)$\rightarrow α_2=\frac{5gημφ}{7}$ (6)

Άρα η μέγιστη μετατόπιση του κέντρου μάζας μέχρι να σταματήσει είναι: $x_2=\frac{υ_0^2}{2α_2} \xrightarrow{(6)} x_2=\frac{7υ_0^2}{10gημφ}$ (7)

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\frac{υ_0^2}{2gημφ}}{\frac{7υ_0^2}{10gημφ}} \rightarrow \mathbf{\frac{x_1}{x_2}=\frac{5}{7}}$ Σωστό είναι το **(β)**

**Β.32** Η κοίλη σφαίρα του σχήματος, έχει βάρος w και ανεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσης $φ=30^0$ υπό την επίδραση σταθερής δύναμης μέτρου F=w/3. Η δύναμη ασκείται στο κέντρο μάζας και είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας είναι $I=2mR^2/3$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας, g. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας έχει μέτρο:

α. g/R β. g/10R γ. g/3R




**Απάντηση**

Κατ' αρχή έχουμε ότι $w_x=mgημ30^0=mg/2$, ενώ F=mg/3. Άρα $F<w_x$ οπότε η σφαίρα ανεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο επιβραδυνόμενη. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας, α, έχει φορά αντίθετη από την ταχύτητα υ του κέντρου μάζας. Αφού η ταχύτητα υ, μειώνεται πρέπει να μειώνεται αντίστοιχα και η γωνιακή ταχύτητα, ω, άρα η γωνιακή επιτάχυνση $α_{γν}$ έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Αυτό σημαίνει ότι η στατική τριβή πρέπει να παράγει την αντίστοιχη ροπή και η φορά της είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

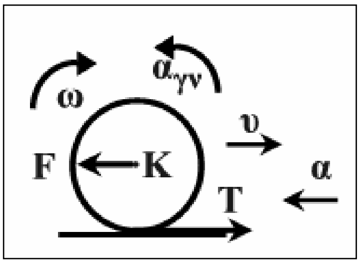
$ΣF_x=F-T-w_x=mα \rightarrow mgημφ-F-T=mα \rightarrow \frac{mg}{2}-\frac{mg}{3}-T=mα \rightarrow \frac{mg}{6}-T=mα$ (1)

$Στ=Iα_{γν} \rightarrow TR=\frac{2mR^2}{3}\cdot\frac{α}{R} \rightarrow T=\frac{2mα}{3}$ (2)

Από (1) και (2)$\rightarrow \frac{mg}{6}-\frac{2mα}{3}=mα \rightarrow α=\frac{g}{10} \rightarrow \mathbf{α_{γν}=\frac{g}{10R}}$ Σωστό είναι το **(β)**

**Β.33** Η στεφάνη του σχήματος μάζας m ακτίνας R και ροπής αδράνειας $I=mR^2$ κινείται στο οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης μέτρου F η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας της. Στο σχήμα φαίνεται η φορά της στατικής τριβής που δέχεται η σφαίρα. Το μέτρο της στατικής τριβής είναι:

α. T= F/2 β. T=F γ. T=2F



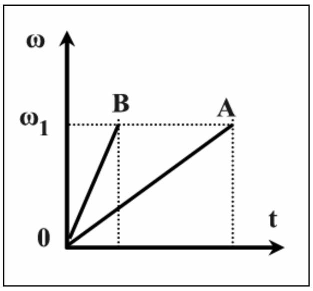

**Απάντηση**

Από το σχήμα φαίνεται ότι η στατική τριβή, Τ, έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά συνεπώς παράγει ροπή που έχει κατεύθυνση κάθετη από τη σελίδα προς τον αναγνώστη . Ίδιας κατεύθυνσης θα είναι και η γωνιακή επιτάχυνση, $\alpha_{\gamma\nu}$ οπότε είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας, ω που δίνεται στο σχήμα . Άρα η στεφάνη επιβραδύνεται. Άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας υ είναι αντίθετη της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας α. Για να επιβραδύνεται όμως και το κέντρο μάζας πρέπει η δύναμη F να έχει κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας του κέντρου μάζας, Κ, δηλαδή προς τα αριστερά.

$\Sigma F=m\alpha \rightarrow F-T=m\alpha$ (1)

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR=mR^2\frac{\alpha}{R} \rightarrow T=m\alpha$ (2) Από (1) και (2)$\rightarrow F=2T\rightarrow$ $\mathbf{T=\frac{F}{2}}$ Σωστό είναι το **(α)**

**Β.34** Δύο σφαίρες ίδιας μάζας και ακτίνας, αλλά διαφορετικής κατανομής μάζας, φτάνουν με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\omega_1$ στην βάση κεκλιμένου επιπέδου κατεβαίνοντας. Η κίνηση των σφαιρών είναι κύλιση χωρίς ολίσθηση και οι μόνες δυνάμεις που δέχονται είναι το βάρος, η στατική τριβή και η κάθετη αντίδραση του κεκλιμένου επιπέδου. Στο σχήμα φαίνεται η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας Α και της σφαίρας, Β σε σχέση με το χρόνο.




**Ι.** Για τις τιμές της γωνιακής τους επιτάχυνσης ισχύει:

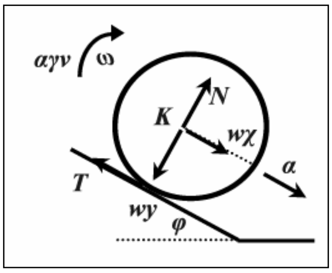
α. $\alpha_{\gamma\nu,A}>\alpha_{\gamma\nu,B}$ β. $\alpha_{\gamma\nu,A}<\alpha_{\gamma\nu,B}$ γ. $\alpha_{\gamma\nu,A}=\alpha_{\gamma\nu,B}$

**ΙΙ.** Για τις ροπές αδράνειας ισχύει:

α. $I_A>I_B$ β. $I_A<I_B$ γ. $I_A=I_B$

**ΙΙΙ.** Για τις περιστροφές, Ν, που κάνουν μέχρι να φτάσουν στη βάση ισχύει:

α. $N_A>N_B$ β. $N_A<N_B$ γ. $N_A=N_B$




**Απάντηση**

**Ι.** Από το διάγραμμα φαίνεται ότι:

$\alpha_{\gamma\nu}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ με $|\Delta\omega|=\omega_1$ και $\Delta t_A>\Delta t_B$ συνεπώς $\mathbf{\alpha_{\gamma\nu A}<\alpha_{\gamma\nu B}}$ Σωστό είναι το **(β)**

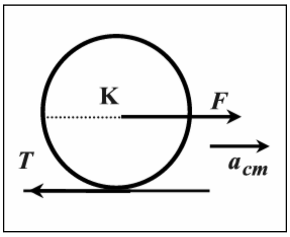
**ΙΙ.** $\Sigma F_x=m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi-T=m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\varphi-T=m\alpha_{\gamma\nu}R$ (1)

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR=I\cdot\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow T=\frac{I\alpha_{\gamma\nu}}{R}$ (2) Από (1) (2) $\rightarrow mg\eta\mu\varphi=\frac{I\alpha_{\gamma\nu}}{R}+m\alpha_{\gamma\nu}R \rightarrow \alpha_{\gamma\nu}=\frac{mgR\eta\mu\varphi}{I+mR^2}$ (3)

Από τη σχέση (3) και με δεδομένο ότι $\alpha_{\gamma\nu A}<\alpha_{\gamma\nu B}$ φαίνεται ότι $\mathbf{I_A>I_B}$. Σωστό είναι **(α).**

**ΙΙΙ.** Οι σφαίρες κατεβαίνουν επιταχυνόμενες. Στο διάγραμμα (ω–t), το εμβαδόν του σχήματος που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων ισούται αλγεβρικά με τη γωνία Δθ που διαγράφει μια επιβατική ακτίνα του στερεού. Από τη σύγκριση των εμβαδών των ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζονται φαίνεται ότι $\Delta\theta_A>\Delta\theta_B$.Το πλήθος Ν των περιστροφών δίνεται από τη σχέση $N=\Delta\theta/2\pi$ συνεπώς $\mathbf{N_A>N_B}$ . Σωστό είναι **(α).**

**Β.35** Κοίλη σφαίρα με $I_{cm}=2mR^2/3$ είναι ακίνητος πάνω στο οριζόντιο έδαφος. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και εδάφους είναι μ. Ασκούμε οριζόντια σταθερή δύναμη F της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει αν η τιμή της δύναμης F είναι:




α. F>μmg β. F<μmg **γ.** F<2,5μmg δ. F>3μmg

**Απάντηση**

Υπολογίζω τη δύναμη F συναρτήσει της στατικής τριβής, T.

$\Sigma F=ma \rightarrow F-T=ma$ (1)

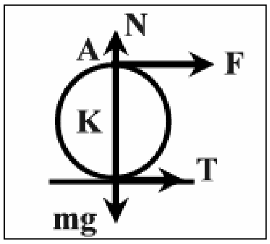
$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow TR=\frac{2mR^2}{3}\cdot\frac{a}{R} \rightarrow ma=\frac{3T}{2}$ (2)

Από (1)(2)$\rightarrow T=\frac{2F}{5}$ (3)

Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει: $T<T_{o\rho} \rightarrow \frac{2F}{5}<\mu mg \rightarrow$ **$F<2,5\mu mg$.**

Σωστό είναι το **(γ)**

**Β.36** Κύλινδρος μάζας m=40kg ακτίνας R=0,5m είναι αρχικά ακίνητος πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή μέγιστης στατικής τριβής $\mu_\sigma=0,2$. Ο συντελεστής $\mu_\sigma$ θεωρείται ίσος με το συντελεστή τριβής ολίσθησης. Ασκούμε στον κύλινδρο σταθερή δύναμη μέτρου F=120N, όπως στο σχήμα και ο κύλινδρος αρχίζει να κινείται. Δίνονται $g=10m/s^2$ και $I_K=mR^2/2$.**Τ**ο είδος της κίνησης του κυλίνδρου είναι:




α. Ολίσθηση β. Κύλιση χωρίς ολίσθηση γ. Περιστροφή και ολίσθηση

**Απάντηση**

Ας υποθέσουμε ότι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και ας αναζητήσουμε για ποιες τιμές του συντελεστή οριακής τριβής είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό με την προϋπόθεση ότι η δύναμη F=120N. Σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\nu}R$ (1)

$\Sigma F=ma_{cm} \rightarrow F+T=ma_{cm}$ (2) $\Sigma F_y=0 \rightarrow N-mg=0 \rightarrow N=mg$ (3)

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow FR-TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{a_{cm}}{R} \rightarrow F-T=\frac{ma_{cm}}{2}$ (4)

(2)+(3)$\rightarrow 2F=\frac{3ma_{cm}}{2} \rightarrow F=\frac{3ma_{cm}}{4}$ (5)

Από (2) (4)$\rightarrow F+T=\frac{4F}{3} \rightarrow T=\frac{F}{3}$ (6)

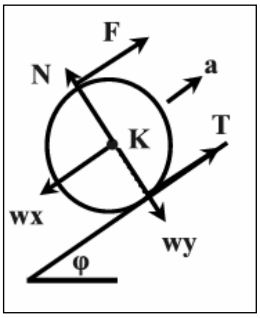
Για να μην ολισθαίνει πρέπει: $T<T_{o\rho} \rightarrow T<\mu_\sigma N \rightarrow \mu_\sigma>\frac{T}{N} \rightarrow \mu_\sigma>\frac{\frac{F}{3}}{mg} \rightarrow \mu_\sigma>\frac{F}{3mg} \rightarrow \mu_\sigma>0,1$

Δίνεται όμως $\mu_\sigma=0,2>0,1$ άρα πράγματι συντρέχουν οι προϋποθέσεις ώστε να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
Σωστό είναι το **(β).**

**Β.37** Στον κύλινδρο του σχήματος ($I=\frac{1}{2}mR^2$) η δύναμη F είναι κατά μέτρο διπλάσια του βάρους mg και η γωνία φ έχει ημφ=0,6, συνφ=0,8. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μ=0,5 και το $g=10m/s^2$.
**Ι.** Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας a του κυλίνδρου με αυτά τα δεδομένα είναι:

α. a=g  β. a=1,6g  γ. a=1,8g  δ. a=2g

**ΙΙ.** Για ποιες τιμές της δύναμης F ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;




**Απάντηση**

**Ι.** Θεωρώ ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να δούμε, είναι αλήθεια; Θα υπολογίσω την στατική τριβή T και θα τη συγκρίνω με την οριακή τιμή της. Αν $T<T_{ορ}$ τότε η υπόθεση θα είναι σωστή. Αν $T \geq T_{ορ}$ τότε ο κύλινδρος ολισθαίνει και τα πράγματα αλλάζουν. Ας δούμε πως;
Έστω κύλιση (ΧΟ):

$\Sigma F_x=ma \rightarrow F+T-mg\cdot ημθ=ma \rightarrow 2mg+T-0,6mg=ma \rightarrow 1,4mg+T=ma$ (1)

$\Sigma τ=Iα_{γν} \rightarrow FR-TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{a}{R} \rightarrow 2mg-T=\frac{ma}{2} \rightarrow 4mg-2T=ma$ (2)

Από (1) και (2) $\rightarrow T=\frac{2,6mg}{3} \rightarrow T=0,866mg$ (3)

Με δεδομένο ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης θεωρείται ίσος με το συντελεστή οριακής τριβής έχουμε:

$T_{ορ}=μmgσυνφ=0,5mg\cdot 0,8 \rightarrow T_{ορ}=0,4mg$ (4)

Από (3) (4)$\rightarrow T>T_{ορ}$ Άρα ο κύλινδρος ολισθαίνει. Δηλαδή λειτουργεί η τριβή ολίσθησης άρα ο νόμος τους Newton γράφεται ως εξής:

$\Sigma F_x=ma \rightarrow F+T_{ορ}-mgημφ=ma \rightarrow 2mg-0,4mg-0,6mg=ma \rightarrow$ **a=1,8g**.

Σωστό είναι το **(γ).**

**ΙΙ.** Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει: $T<T_{ορ} \rightarrow T<μ_σ N \rightarrow T<μ_σ mgσυνθ$ (5)

$\Sigma F_x=ma \rightarrow F+T-mg\cdot ημθ=ma$ (6)

$\Sigma τ=Iα_{γν} \rightarrow FR-TR=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{a}{R} \rightarrow F-T=\frac{ma}{2} \rightarrow ma=2F-2T$ (7)

Από (6)(7)$\rightarrow T=\frac{F+mgημθ}{3}$ (8)

Από (5)(8)$\rightarrow \frac{F+mgημθ}{3}<μ_σ mgσυνθ \rightarrow F<3μ_σ mgσυνθ-mgημθ \rightarrow$ **F<0,6mg**