Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

3ο Επαναληπτικό

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Κατά τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, με το ίδιο πλάτος Α και συχνότητες f_1 και f_2 δημιουργείται σύνθετη κίνηση, η οποία παρουσιάζει διακροτήματα. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι ίση με:

(δ) $\dfrac{2}{f_1 + f_2}$

Α.2. Η εξίσωση της συνέχειας των ιδανικών ρευστών είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης

(γ) της ύλης.

Α.3. Μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ περιστρέφεται, χωρίς τριβές, έχοντας τα χέρια της σε σύμπτυξη. Όταν η αθλήτρια, κατά την περιστροφή της, απλώσει τα χέρια της σε οριζόντια θέση, τότε:

(γ) η περίοδος περιστροφής της αυξάνεται

Α.4. Σώμα που είναι αναρτημένο σε ελατήριο εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με κατάλληλο μηχανισμό (διεγέρτης). Για δύο διαφορετικές συχνότητες του διεγέρτη f_1 και $f_2 > f_1$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι το ίδιο. Για την ιδιοσυχνότητα f_o του συστήματος ισχύει ότι:

(γ) $f_1 < f_o < f_2$

Α.5.

(α) Σε κάθε εγκάρσιο κύμα δημιουργούνται πυκνώματα και αραιώματα. **Λάθος**

(β) Σε κάθε φθίνουσα ταλάντωση η περίοδος της ταλάντωσης μειώνεται με τον χρόνο. **Λάθος**

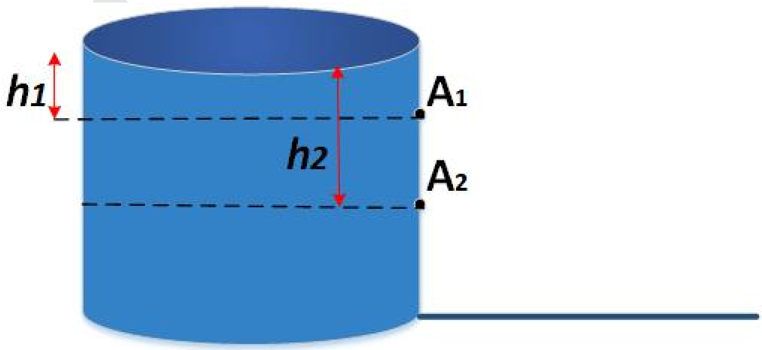
(γ) Η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο ενός ακίνητου υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του. **Λάθος**

(δ) Η ροπή μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς άξονα περιστροφής είναι μηδέν, όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής. **Σωστό**

(ε) Σε όλες τις πλάγιες κρούσεις ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Ένα ανοικτό κυλινδρικό δοχείο με μεγάλο εμβαδό βάσης ακουμπά σε οριζόντια επιφάνεια και περιέχει ιδανικό ρευστό. Στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου και στην ίδια κατακόρυφο ανοίγουμε δύο μικρές οπές σε βάθος h_1 και $h_2 = 4h_1$ αντίστοιχα από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού.



Αν γνωρίζουμε ότι από τις οπές εξέρχεται ίσος όγκος νερού ανά δευτερόλεπτο, ο λόγος των εμβαδών των διατομών των οπών είναι:

(γ) $\dfrac{A_1}{A_2} = 2$

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$$

Εφαρμόζοντας Bernoulli για μια οπή σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού με δεδομένο ότι η ταχύτητα της ελεύθερης επιφάνειας είναι αμελητέα, αφού η διατομή της οπής είναι μικρή σε σχέση με την διατομή του δοχείου, προκύπτει για την ταχύτητα εκροής:

$$P_{atm} + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh}$$

Άρα για τις οπές του προβλήματος έχουμε:

$$A_1\sqrt{2gh_1} = A_2\sqrt{2gh_2} \Rightarrow A_1 = 2A_2$$

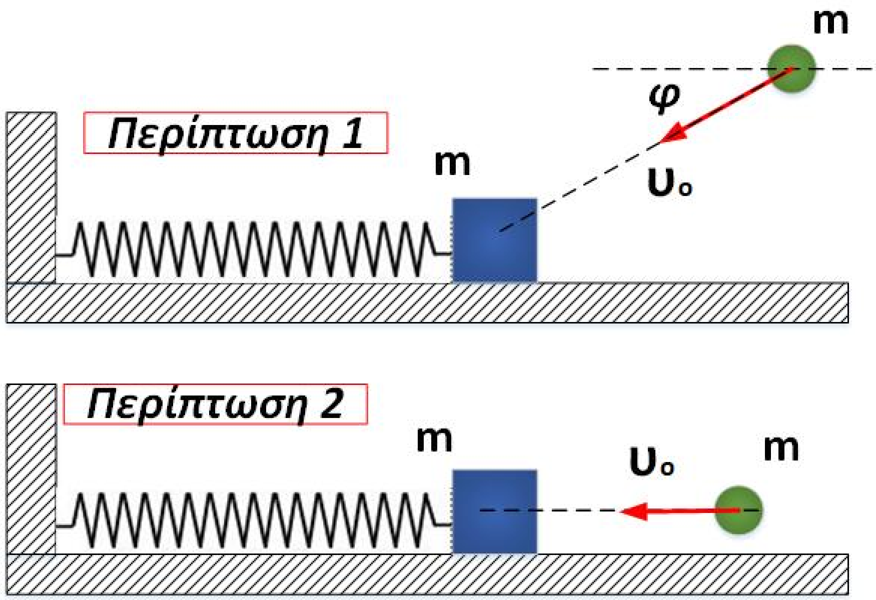
B.2. Ένα ξύλινο κιβώτιο μάζας m ισορροπεί ακλόνητα στερεωμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Εκτοξεύουμε ένα βλήμα ίσης μάζας με το κιβώτιο με ταχύτητα μέτρου υ_o με αποτέλεσμα το συσσωμάτωμα που θα προκύψει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α.

Στην περίπτωση 1 που η ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κιβωτίου και σχηματίζει γωνία $\phi = 60^o$ με το οριζόντιο επίπεδο το πλάτος της ταλάντωσης είναι A_1. Στην περίπτωση 2 που η ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση είναι οριζόντια και στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κιβωτίου το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι A_2.

Για τα πλάτη στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ότι:

$$\textbf{(β)}\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}$$

Και στις δύο περιπτώσεις η κρούση γίνεται στην ΘΙΤ και προκύπτει συσσωμάτωμα ίδιας μάζας δεμένο στο ίδιο ελατήριο, άρα για την ταχύτητα μετά την κρούση θα ισχύει ότι:



$$\upsilon = \omega A = \sqrt{\frac{k}{2m}}A$$

Με την ΑΔΟ στον οριζόντιο άξονα για την 1η περίπτωση προκύπτει ότι:

$$m\upsilon_o \sigma\upsilon\nu\phi = 2m\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\upsilon_o}{4}$$

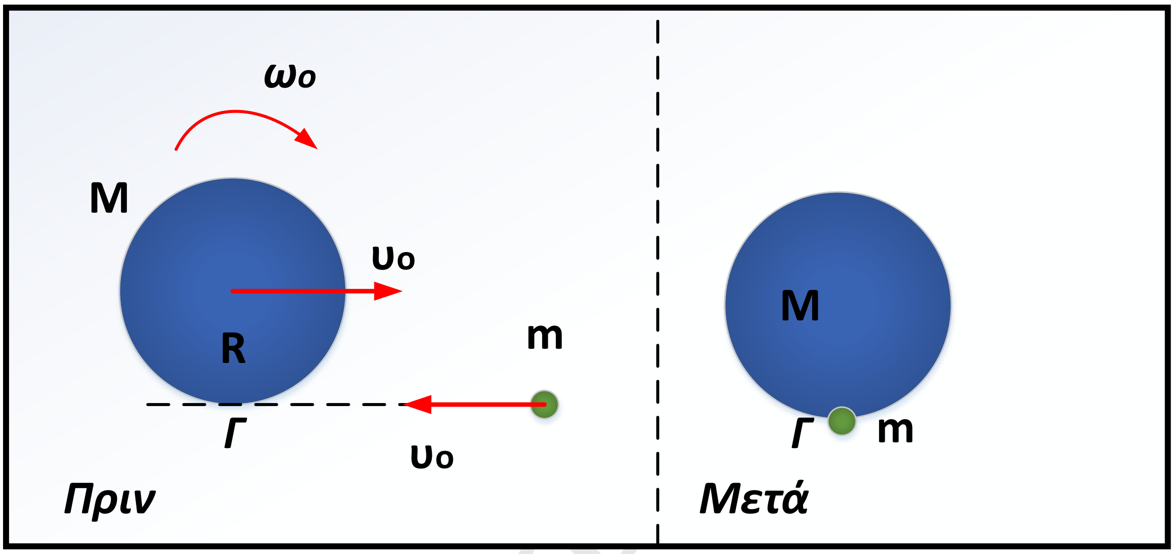
Με την ΑΔΟ για την 2η περίπτωση προκύπτει ότι:

$$m\upsilon_o = 2m\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_o}{2}$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\omega A_1}{\omega A_2} = \frac{1}{2}$$

Β.3. Πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο ένας δίσκος μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_o γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του, ταυτόχρονα το κέντρο του δίσκου μεταφέρεται με ταχύτητα μέτρου υ_o. Ένα σφαιρίδιο μικρών διαστάσεων μάζας $m = \dfrac{M}{5}$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_o, όπως στο σχήμα σφηνώνεται σε ένα σημείο Γ της περιφέρειας του δίσκου, όπως σχηματικά παριστάνεται στην παρακάτω κάτοψη.



Αν σας είναι γνωστό ότι το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Γ του δίσκου, ακριβώς πριν την κρούση είναι $\upsilon_\Gamma = \dfrac{3\upsilon_o}{5}$ και έχει φορά ίδια με της ταχύτητας του κέντρου του δίσκου, τότε η ταχύτητα του σφαιριδίου αμέσως μετά την κρούση θα έχει την ίδια φορά και μέτρο ίσο με:

(γ) $\dfrac{2\upsilon_o}{21}$

Για το σημείο Γ πριν την κρούση εφαρμόζω την αρχή της επαλληλίας:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_o - \omega_o R \Rightarrow \omega_o R = \frac{2\upsilon_o}{5}$$

Μετά την κρούση το συσωμάτωμα θα εκτελεί σύνθετη κίνηση περιστρεφόμενο γύρω απο το κέντρο του δίσκου με ταχύτητα ω και κινούμενο μεταφορικά με ταχύτητα υ_{cm}. Εφαρμόζω ΑΔΟ για το κέντρο μάζας και ΑΔΣ γύρω από το κέντρο μάζας

$$Mv_o - mv_o = (M+m)v_{cm} \Rightarrow v_{cm} = \frac{2v_o}{3}$$

$$I\omega_o + mv_oR = (I+mR^2)\omega \Rightarrow \omega R = \frac{4v_o}{7}$$

**Στην ΑΔΣ αξιοποίησα την σχέση που έχω βρει παραπάνω ανάμεσα στην v_o και την ω_o*

Για την ταχύτητα του Γ μετά την κρούση εφαρμόζω ξανά την αρχή της επαλληλίας:

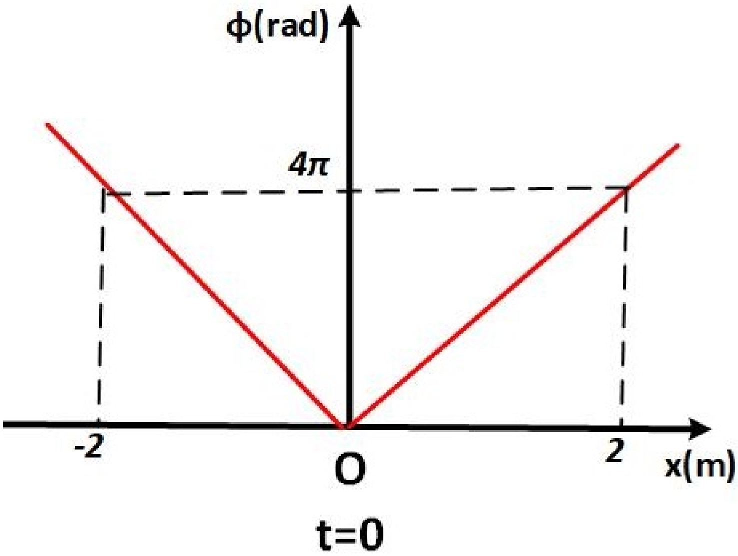
$$v'_\Gamma = v_{cm} - \omega R = \frac{2v_o}{21}$$

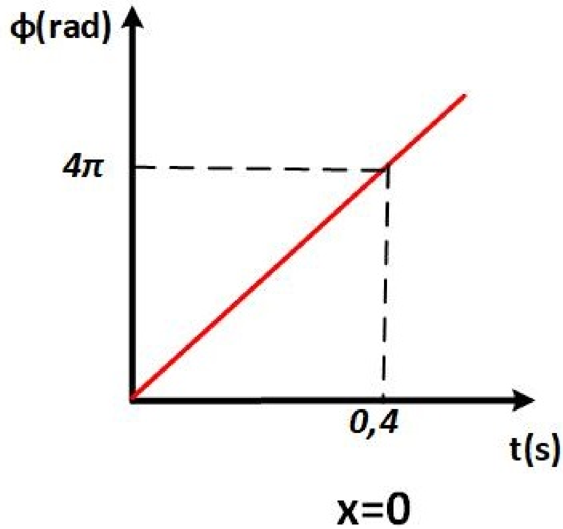
Θέμα Γ

Κατά μήκος μιας μεγάλης χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$ διαδίδονται ταυτόχρονα δύο αρμονικά κύματα που έχουν την ίδια συχνότητα, ίδιο πλάτος και αντίθετες κατευθύνσεις. Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ τα δύο κύματα θα συναντηθούν στο σημείο Ο,που βρίσκεται στην θέση $x = 0$ και θα αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση ταλάντωσης $y = 0,4\eta\mu(\omega t)$ με το y σε m. Παρακάτω σας δίνονται δύο διαγράμματα φάσης. Το $\phi = f(x)$ των ταλαντώσεων των υλικών σημείων της χορδής σε συνάρτηση με την θέση τους πάνω στην χορδή την στιγμή συνάντησης των δύο κυμάτων και το διάγραμμα φάσης $\phi = g(t)$ της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο.

Γ.1 Να υπολογίσετε το πλάτος, μήκος κύματος, συχνότητα και ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων.

Αφού το Ο είναι κοιλία έχω $2A = 0,4 \Rightarrow A = 0,2m$. Από το διάγραμμα φάσης θέσης παρατηρώ ότι την $t_o = 0$ τα σημεία $x = \pm 2m$ έχουν ολοκληρώσει δύο ταλαντώσεις αφού έχουν φάση 4π, άρα $2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1m$ (η απλά έχουν διαφορά φάσης 4π με το Ο). Από το δεύτερο διάγραμμα υπολογίζω την κλίση της ευθείας και βρίσκω ότι $\omega = 10\pi rad/s \Rightarrow f = 5Hz$ (ή παρατηρώ ότι την $t = 0,4s$ το σημείο Ο έχει ολοκληρώσει δύο ταλαντώσεις αφού έχει φάση 4π). Η ταχύτητα διάδοσης θα είναι $v = \lambda f = 5m/s$





Γ.2 Να γραφτούν οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων και η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

Για τα τρέχοντα κύματα στο (S.I.) έχω:

$$y = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - 2\pi x\right)$$

$$y = 0,2\eta\mu\left(10\pi t + 2\pi x\right)$$

Για την περιοχή στην οποία έχει διαμορφωθεί στάσιμο κύμα στο (S.I.) έχω:

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu\left(2\pi x\right)\eta\mu\left(10\pi t\right) \quad -5t \leq x \leq +5t$$

Γ.3 Για ένα υλικό σημείο Ζ για το οποίο $x_Z = \dfrac{5}{12}m$ να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης και η φάση της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο, μετά την συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό.

Μετά την συμβολή των κυμάτων στο σημείο Ζ η εξίσωση ταλάντωσης στο $(S.I.)$ θα είναι:

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{5}{12}\right)\eta\mu\left(10\pi t\right) \Rightarrow y = -0,2\sqrt{3}\eta\mu\left(10\pi t\right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2\sqrt{3}\eta\mu\left(10\pi t + \pi\right)$$

Άρα η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης θα είναι:

$$\upsilon_{max} = \omega A' = 2\sqrt{3}\pi m/s$$

Η συνάρτηση της φάσης στο $(S.I.)$ μετά την συμβολή των κυμάτων στο σημείο Ζ θα είναι:

$$\phi = 10\pi t + \pi$$

** Είναι προφανές ότι η παραπάνω συνάρτηση έχει νόημα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων στο Ζ δηλαδή όταν φτάσει εκεί το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά την $t = \dfrac{x}{\upsilon} = \dfrac{1}{12}s$*

Γ.4 Για ένα υλικό σημείο Θ για το οποίο $x_\Theta = 6,25m$ να υπολογιστεί η επιτάχυνση της ταλάντωσης του την χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Ο έχει εκτελέσει 5 πλήρεις ταλαντώσεις.

Όταν το Ο έχει εκτελέσει 5 πλήρεις ταλαντώσεις το στάσιμο κύμα έχει διαμορφωθεί στην περιοχή $-5m \leq t \leq 5m$ ($t = 5T = 1s$), άρα την ίδια στιγμή το σημείο Θ ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας του τρέχοντος κύματος με διάδοση προς τα αριστερά.

$$a = -\omega^2 y = -\left(10\pi\right)^2 0,2\eta\mu\left(10\pi 1 + 2\pi 6,25\right) \Rightarrow a = -20\pi^2 m/s^2$$

Γ.5 Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων του ελαστικού μέσου που παραμένουν ακίνητα την χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Ο βρίσκεται σε ακραία θέση για 3η φορά μετά την $t = 0$. Την ίδια στιγμή να σχεδιαστεί η μορφή της χορδής (στιγμιότυπο) στην περιοχή $-2,5m \leq x \leq +2,5m$.

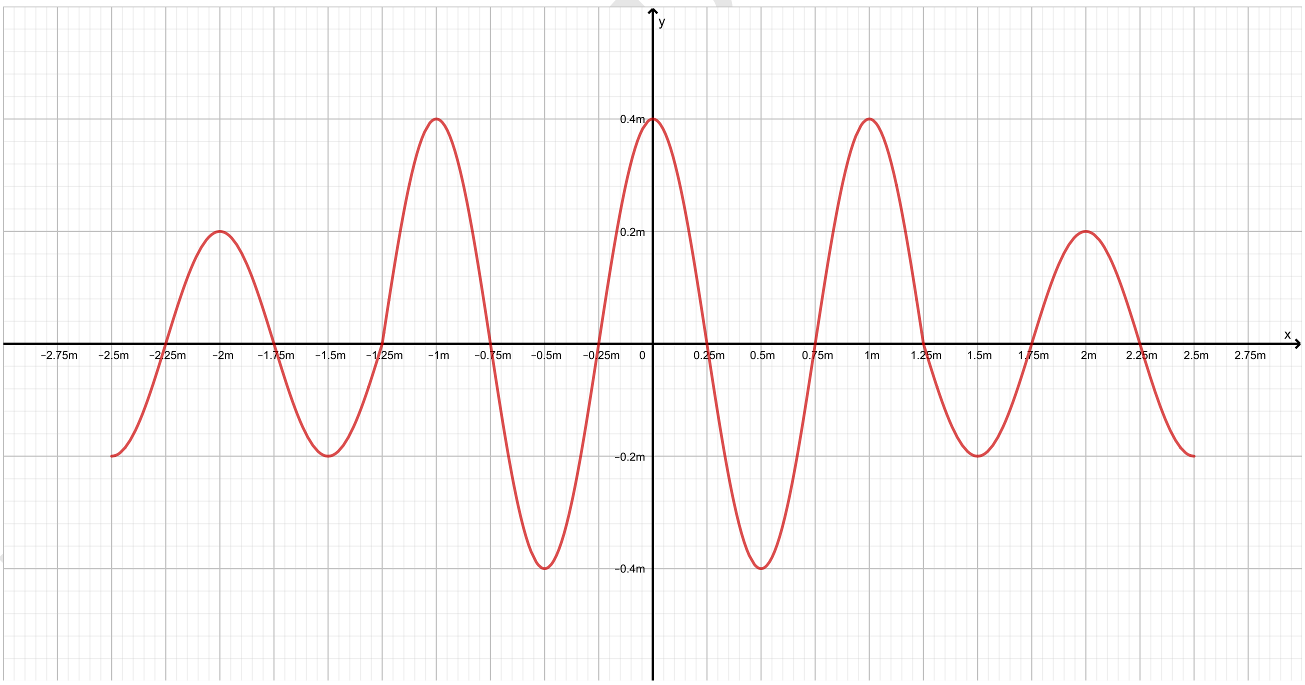
Όταν το O είναι σε ακραία θέση για 3η φορά έχει περάσει χρόνος $T + \dfrac{T}{4}$*,άρα έχει διαμορφωθεί στάσιμο κύμα στην περιοχή* $-1,25m \leq x \leq 1,25m$

Δεσμός υπάρχει στις θέσεις για τις οποίες $x = (2\kappa + 1)\dfrac{\lambda}{4}$ *για* κ *ακέραιο άρα έχω έξι δεσμούς:*

$$-1,25m \leq (2\kappa + 1)\,0,25 \leq 1,25m \Rightarrow \kappa = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

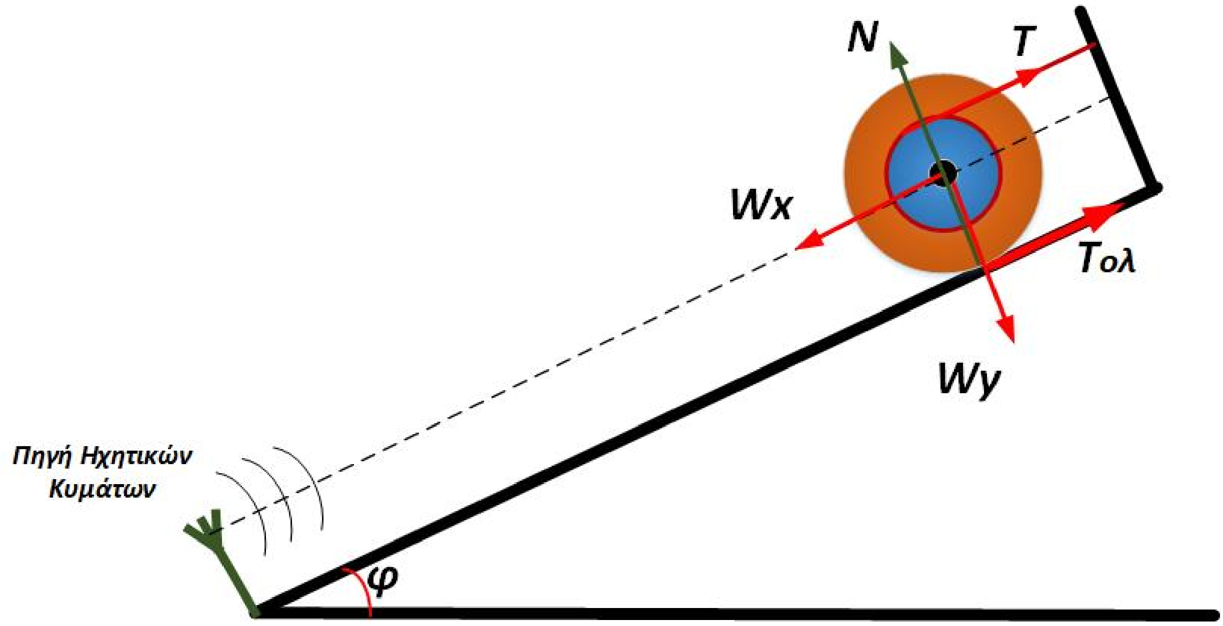
** μπορώ να το κάνω απλούστερα με ένα σχήμα*

Για το ζητούμενο στιγμιότυπο έχουμε:



Θέμα Δ

Ένα στερεό σώμα αποτελείται από δύο ομόκεντρους ομογενείς λεπτούς δίσκους από διαφορετικά υλικά κολλημένους έτσι ώστε τα κέντρα τους να ταυτίζονται. Στο κέντρο του στερεού έχει τοποθετηθεί αβαρής σημειακός ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων. Το στερεό έχει συνολική μάζα $M = 1kg$ και οι ακτίνες των επιμέρους δίσκων είναι $R_1 = R$ και $R_2 = \frac{R}{2}$.



Αρχικά το στερεό ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi = 30^o$, με την βοήθεια ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μεγάλου μήκους που έχει το ένα άκρο του στερεωμένο ακλόνητα στο σημείο Α και είναι τυλιγμένο πολλές φορές στην περιφέρεια του μικρότερου δίσκου όπως στο παραπάνω σχήμα.

Στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου βρίσκεται μια σημειακή πηγή ηχητικών κυμάτων και ο ανιχνευτής καταγράφει απευθείας από την πηγή ήχο με συχνότητα $680Hz$.

Δ.1 Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το νήμα στο σημείο Α κατά την ισορροπία του στερεού σώματος.

Από τις συνθήκες ισορροπίας για το στερεό

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow Mg\eta\mu\phi = T + T_s$$

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_s R_1 = T R_2$$

προκύπτει ότι:

$$T = \frac{Mg}{3} = \frac{10}{3}N$$

Κάποια χρονική στιγμή τοποθετώ πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με κατάλληλο τρόπο λιπαντικό με αποτέλεσμα το στερεό να αρχίσει να κυλίεται κατά μήκος του κεκλιμένου, εμφανίζοντας με αυτό συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{\sqrt{3}}{15}$. Κατά την ολίσθηση του τροχού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς ταυτόχρονα να ολισθαίνει σε σχέση με την περιφέρεια του δίσκου στον οποίο έχει τυλιχθεί, παραμένοντας ακλόνητα στερεωμένο στο σημείο Α σε όλη την διάρκεια της καθόδου, ενώ η πηγή δεν σταματάει να εκπέμπει ήχο. Να θεωρήσετε ως $t_o = 0$ την στιγμή έναρξης της κίνησης του στερεού.

Δ.2 Αφού εξηγήσετε ποια θα είναι η φορά περιστροφής του στερεού γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας κατά την κάθοδο του.

Όταν τοποθετήσουμε λιπαντικό στο κεκλιμένο μειώνεται η τριβή, άρα η τάση θα στρίψει το σώμα στην φορά των δεικτών του ρολογιού και το σώμα θα κατέρχεται προς τα κάτω. Επίσης με δεδομένο ότι όλα τα σημεία του νήματος έχουν ταχύτητα μηδέν και ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, στο σημείο επαφής νήματος - σώματος πρέπει η ταχύτητα να είναι μηδέν. Άρα $\upsilon_{cm} - \omega R_2 = \upsilon_A = 0$, οπότε αναγκαστικά θα στρίψει στην φορά των δεικτών του ρολογιού.

Η τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στο κεκλιμένο και το στερεό θα είναι τριβή ολίσθησης αφού το σημείο επαφής δεν έχει ταχύτητα μηδέν. Άρα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = Mg\sigma\upsilon\nu\phi$$

$$T_{\text{ολ}} = \mu N = 1N$$

– Για την μεταφορική κίνηση

$$Mg\eta\mu\phi - T - T_{\text{ολ}} = Ma_{cm} \tag{1}$$

– Για την περιστροφική κίνηση

$$TR_2 - T_{\text{ολ}}R_1 = Ia_{\text{γων}} \tag{2}$$

– Για την μη ολίσθηση του νήματος

$$\upsilon_{cm} - \omega R_2 = \upsilon_A = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega R_2 \Rightarrow a_{cm} = a_{\text{γων}}R_2 \tag{3}$$

Από (1) , (2) , (3) προκύπτει ότι: $a_{cm} = 1m/s^2$

Δ.3 Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της συχνότητας που καταγράφει ο ανιχνευτής για τα ηχητικά κύματα που λαμβάνει απευθείας από την πηγή, σε συνάρτηση με τον χρόνο στο διάστημα $0 \leq t \leq 4s$.

Αφού αρχικά το στερεό είναι ακίνητο $f_s = 680Hz$ *κατά την κάθοδο του ο ανιχνευτής πραγματοποιεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση άρα προκύπτει:*

$$f = \frac{\upsilon_{\text{ηχ}} + a_{cm}t}{\upsilon_{\text{ηχ}}} f_s = 680 + 2t \quad (S.I.)$$

** το διάγραμμα είναι μια ευθεία θετικής κλίσης που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.*

Δ.4 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Κινητικής ενέργειας του στερεού όταν ο ανιχνευτής καταγράφει συχνότητα $688Hz$.

Ο ανιχνευτής καταγράφει την παραπάνω συχνότητα την $t = 4s$ *που έχει ταχύτητα* $\upsilon_{cm} = 4m/s$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F_x \upsilon_{cm} + \Sigma\tau\omega = ... = 8J/s$$

** Λαμβάνουμε υπόψη ότι* $\Sigma F_x = Ma_{cm}$ *,* $\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu}$ *και τις σχέσεις (3).*

Δ.5 Να υπολογίσετε το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό στα πρώτα $4s$ της κίνησης του.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ :

$$\Sigma W = \Delta K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 16J$$

Δ.6 Να βρεθεί το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του στερεού που έχει μετατραπεί σε θερμότητα στα πρώτα $4s$ της κίνησης του.

Το στερεό στα πρώτα $4s$ έχει κατέβει στο κεκλιμένο κατά

$$x_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 = 8m$$

Άρα η κατακόρυφη μετατόπιση του θα είναι $h = Mg\eta\mu\phi = 4m$

Με επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το σημείο που φτάνει την $t = 4s$ η αρχική του ενέργεια θα είναι $E = U_\beta = Mgh = 40J$

Το έργο της τριβής θα είναι:

$$W = -T_{\text{ολ}}x_{cm} - T_{\text{ολ}}R_1\theta = 24J$$

** Παραπάνω λάβαμε υπόψη ότι σύμφωνα με την σχέση (3) $x_{cm} = R_2\theta$*

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{W_{\text{τριβής}}}{E} \cdot 100\% = 60\%$$