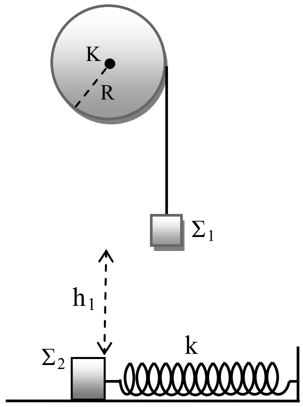
ΑΣΚΗΣΗ

Ομογενής τροχαλία μάζας $M = 4$ kg και ακτίνας $R = 0{,}5$ m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Κ και είναι κάθετος σε αυτή. Αβαρές μη εκτατό νήμα έχει τυλιχθεί στην περιφέρεια της τροχαλίας και στο άλλο άκρο του έχει δεθεί σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 2$ kg. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο και το νήμα τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο όποτε μετά από χρόνο t_1 το σώμα $Σ_1$ έχει κατέβει κατά h_1 και η τροχαλία έχει αποκτήσει στροφορμή μέτρου $L_1 = 2\ \text{kg·m}^2/\text{s}$. Να υπολογίσετε:



α. Την επιτάχυνση του σώματος $Σ_1$.
β. Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
γ. Την κινητική ενέργεια του συστήματος τροχαλία-σώμα $Σ_1$ τη χρονική στιγμή t_1.
δ. Το ύψος h_1.
ε. Το έργο της τάσης του νήματος που δέχεται η τροχαλία από το νήμα, στη χρονική διάρκεια από $t_o = 0$ έως t_1.
ζ. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1.

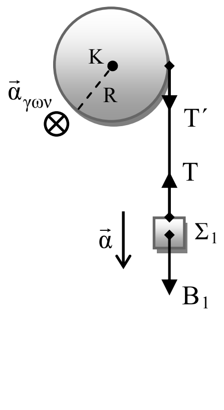
Τη χρονική στιγμή t_1 το νήμα κόβεται ακαριαία και το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται πλαστικά με σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = \frac{m_1}{3}$ που είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα $Σ_2$ πριν την κρούση, εκτελούσε απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο δάπεδο με περίοδο $T = 1$ s και η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσής του ήταν $d = 1$ m. Τη στιγμή της κρούσης το σώμα $Σ_2$ βρισκόταν στη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Να υπολογίσετε:

η. Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
θ. Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
ι. Το χρονικό διάστημα που απαιτείται, ώστε η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος να γίνει τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσής του, για δεύτερη φορά, μετά την κρούση.
κ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση.

Να θεωρήσετε ότι το νήμα δεν γλιστρά πάνω στην τροχαλία κατά τη διάρκεια της περιστροφής της. Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Κατά την κρούση το συσσωμάτωμα που δημιουργείται δεν αναπηδά στο οριζόντιο δάπεδο. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$, $π^2 = 10$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}MR^2$.

ΛΥΣΗ

α. Οι δυνάμεις που είναι υπεύθυνες για την κίνηση του συστήματος τροχαλία-σώμα $Σ_1$, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό ισχύει: $T = T'$.



Για την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης:

$$Στ = I \cdot α_{γων} \Rightarrow T' \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 α_{γων} \overset{T=T'}{\Rightarrow} T = \frac{1}{2}MRα_{γων} \quad ①$$

Για τη μεταφορική κίνηση του σώματος $Σ_1$ εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$ΣF = m_1 \cdot α \Rightarrow B_1 - T = m_1 \cdot α \Rightarrow m_1 g - T = m_1 \cdot α \quad ②$$

Από ① και ② $\Rightarrow m_1 g = \frac{1}{2}MRα_{γων} + m_1 α \quad ③$

Επειδή το νήμα δεν γλιστρά πάνω στην τροχαλία ισχύει: $α = R \cdot α_{γων}$.

Οπότε ③ $\Rightarrow m_1 g = \frac{1}{2}Mα + m_1 α \Rightarrow α = 5\ \text{m/s}^2$.

β. Επειδή $α = R \cdot α_{γων} \Rightarrow α_{γων} = 10\ \text{rad/s}^2$.

γ. Αν $ω_1$ η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1, ισχύει:

$$L_1 = I \cdot ω_1 \Rightarrow L_1 = \frac{1}{2}MR^2 \cdot ω_1 \Rightarrow ω_1 = 4\ \text{rad/s}.$$

Για την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $υ_1 = ω_1 \cdot R \Rightarrow υ_1 = 2$ m/s.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος τροχαλία-σώμα $Σ_1$ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$K = K_{m_1} + K_{τροχ} = \frac{1}{2}m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2}Iω_1^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2 ω_1^2 \Rightarrow K = 8\ \text{J}.$$

δ. Το σώμα $Σ_1$ έως τη στιγμή t_1 εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση οπότε $υ_1 = α \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 0{,}4$ s.

Για το ύψος h_1 ισχύει: $h_1 = \frac{1}{2}αt_1^2 \Rightarrow h_1 = 0{,}4$ m.

ε. Από ① $\Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\alpha_{γων} \Rightarrow T = 10$ N. Οπότε $T' = 10$ N.

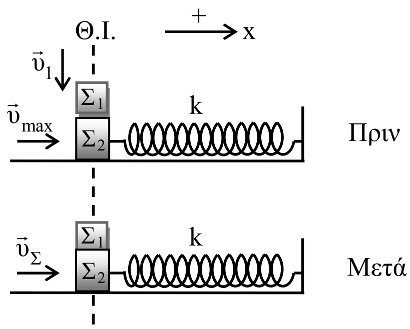
Το έργο της τάσης του νήματος που δέχεται η τροχαλία είναι:

$W_{T'} = T' \cdot R \cdot \Delta\theta \Rightarrow W_{T'} = T' \cdot \Delta S \Rightarrow W_{T'} = T' \cdot h_1 \Rightarrow W_{T'} = 4$ J.

ζ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{Στ}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{Στ \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = Στ \cdot \omega_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = T' \cdot R \cdot \omega_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 20 \text{ J/s}.$$

η. Τη στιγμή της κρούσης το σώμα $Σ_1$ έχει κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $υ_1$ με φορά προς τα κάτω και το σώμα $Σ_2$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του, άρα έχει οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_{max} = \omega_τ \cdot A$.



Για την ταλάντωση του σώματος $Σ_2$ πριν την κρούση γνωρίζουμε ότι:

$\omega_τ = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_τ = 2\pi$ rad/s και $A = \frac{d}{2} \Rightarrow A = 0{,}5$ m

οπότε $υ_{max} = \pi$ m/s.

Κατά την κρούση, το σύστημα των δύο σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι μονωμένο στην οριζόντια διεύθυνση (άξονας x΄x).

Οπότε η ολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή στην οριζόντια διεύθυνση. Δηλαδή

$\vec{p}_{x'x,ολ_{Πριν}} = \vec{p}_{x'x,ολ_{Μετά}} \Rightarrow m_2 υ_{max} = (m_1 + m_2)υ_Σ \Rightarrow υ_Σ = \frac{\pi}{4}$ m/s.

θ. Το νέο ταλαντευόμενο σύστημα συσσωμάτωμα-ελατήριο είναι οριζόντιο άρα έχει θέση ισορροπίας στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου, όπως και το προηγούμενο ταλαντευόμενο σύστημα σώμα $Σ_2$-ελατήριο. Οπότε η ταχύτητα $υ_Σ$ ισούται με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$\omega_Σ = \frac{2\pi}{T_Σ} \Rightarrow \omega_Σ = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \overset{m_1 = 3m_2}{\Rightarrow} \omega_Σ = \sqrt{\frac{k}{4m_2}} \Rightarrow \omega_Σ = \frac{\omega_τ}{2} \Rightarrow \omega_Σ = \pi \text{ rad/s}.$$

Οπότε για το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος ισχύει:

$υ_Σ = \omega_Σ \cdot A_Σ \Rightarrow A_Σ = 0{,}25$ m.

ι. Για την εξίσωση απομάκρυνσης του συσσωματώματος, θεωρώντας ότι η ταλάντωση ξεκινά τη στιγμή $t'_o = 0$ που το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, ισχύει:

$x_Σ = A_Σ \cdot ημ\omega_Σ t' \Rightarrow x_Σ = 0{,}25 \cdot ημ\pi t'$ (S.I.)

$$K = 3U \Rightarrow E - U = 3U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA_Σ^2 = 4\frac{1}{2}Dx_Σ^2 \Rightarrow x_Σ = \pm\frac{A_Σ}{2} \Rightarrow A_Σ ημ\omega_Σ t' = \pm\frac{A_Σ}{2} \Rightarrow ημ\omega_Σ t' = \pm\frac{1}{2}$$

το οποίο συμβαίνει για δεύτερη φορά όταν: $\omega_Σ t' = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t' = \frac{5}{6}$ s.

κ. Το σύστημα των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ αμέσως πριν την κρούση έχει κινητική ενέργεια:

$K_{ολ,Πριν} = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_{max}^2 \Rightarrow K_{ολ,Πριν} = \frac{22}{3}$ J.

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει κινητική ενέργεια:

$K_{ολ,Μετά} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_Σ^2 \Rightarrow K_{ολ,Πριν} = \frac{5}{6}$ J.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

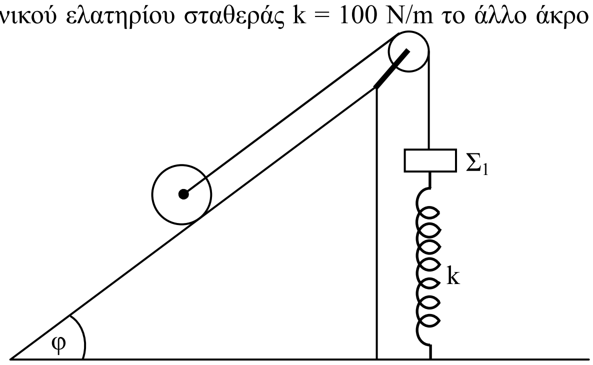
$$Π\% = \frac{K_{ολ,Πριν} - K_{ολ,Μετά}}{K_{ολ,Πριν}}100\% \Rightarrow Π\% \cong 88{,}64\%.$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ

Σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 1kg$ ισορροπεί δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100$ N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Ομογενής και συμπαγής κύλινδρος με μάζα $m_2 = 4kg$ και ακτίνα $R = 20cm$, βρίσκεται τοποθετημένος σε πλάγιο επίπεδο με γωνία κλίσης $φ = 30^o$ και συνδέεται μέσω αβαρούς μη εκτατού νήματος και τροχαλίας με το σώμα $Σ_1$ και όλο το σύστημα ισορροπεί, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Α. i. Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το νήμα στον κύλινδρο στην κατάσταση ισορροπίας.

ii. Να δείξετε ότι στην κατάσταση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί και να υπολογίσετε την επιμήκυνση που έχει υποστεί.

Β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το νήμα κόβεται οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται στο πλάγιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει και ταυτόχρονα το $Σ_1$ πραγματοποιεί Α.Α.Τ.

i. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου και το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος από το πλάγιο επίπεδο.

ii. Να δείξετε ότι η κίνηση του κυλίνδρου στο πλάγιο επίπεδο γίνεται πράγματι χωρίς ολίσθηση.

Γ. Αν για την Α.Α.Τ. του $Σ_1$ θεωρήσουμε ως θετική φορά την κατακόρυφη προς τα κάτω:

i. να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης,

ii. να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος $Σ_1$ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δ. Αν ο κύλινδρος φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου τη στιγμή που το σώμα $Σ_1$ διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για $4^η$ φορά, να υπολογίσετε:

i. το χρόνο κίνησης του κυλίνδρου στο πλάγιο επίπεδο

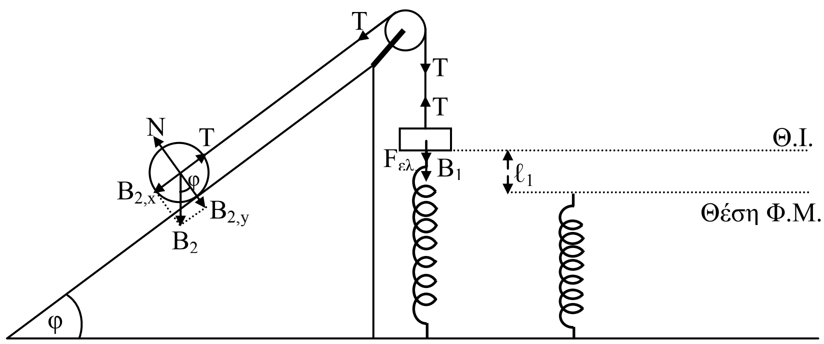
ii. το μέτρο της κατακόρυφης μετατόπισης h του κυλίνδρου

iii. το μήκος της διαδρομής που διανύουν τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\, m/s^2$, η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$, ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του πλάγιου επιπέδου $μ_s = \frac{\sqrt{3}}{4}$ και $π^2 \simeq 10$.

Λ Υ Σ Η

Α. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο και το σώμα $Σ_1$ όταν το σύστημα ισορροπεί:



i. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας για τον κύλινδρο έχουμε:

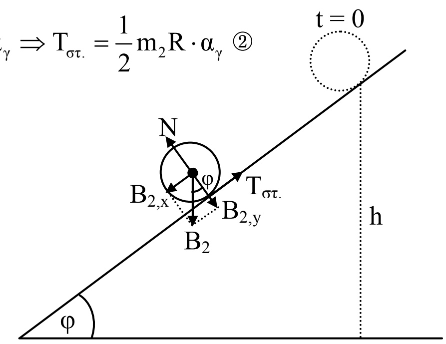
$$\left.\begin{array}{r} ΣF_x = 0 \Rightarrow T = B_{2,x} \\ \text{αλλά ημφ} = \dfrac{B_{2,x}}{B_2} \Rightarrow B_{2,x} = m_2 gημφ \end{array}\right\} \Rightarrow T = m_2 gημφ \Rightarrow \boxed{T = 20N}$$

ii. Παρατηρούμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας του $Σ_1$ η τάση του νήματος έχει μέτρο $T = 20N$ με φορά προς τα πάνω ενώ το βάρος του έχει μέτρο $B_1 = m_1 \cdot g = 10N$ με φορά προς τα κάτω, οπότε για να ισορροπεί το σώμα $Σ_1$ θα πρέπει η δύναμη που δέχεται από το ελατήριο να είναι ομόρροπη με το βάρος του. Άρα το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί.

Τότε: $ΣF = 0 \Rightarrow F_{ελ.} + B_1 = T \Rightarrow k \cdot \ell_1 + B_1 = T \Rightarrow \ell_1 = \dfrac{T - B_1}{k} \Rightarrow \boxed{\ell_1 = 0{,}1m}$

Β. i. Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε: $ΣF_x = m_2 a_{cm} \Rightarrow B_{2,x} - T_{στ.} = m_2 a_{cm} \Rightarrow m_2 gημφ - T_{στ.} = m_2 a_{cm}$ ①

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε: $\Sigma\tau = I_{cm}\cdot\alpha_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau.}\cdot R = \frac{1}{2}m_2R^2\cdot\alpha_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau.} = \frac{1}{2}m_2R\cdot\alpha_\gamma$ ②



Όμως ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει οπότε $a_{cm} = \alpha_\gamma \cdot R$ ③.

Οπότε η ① $\underset{③}{\overset{②}{\Rightarrow}} m_2g\eta\mu\varphi - \frac{1}{2}m_2a_{cm} = m_2a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3}g\eta\mu\varphi \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{10}{3}\,m/s^2}$.

Τότε η ③ $\Rightarrow \boxed{\alpha_\gamma = \frac{50}{3}\,rad/s^2}$.

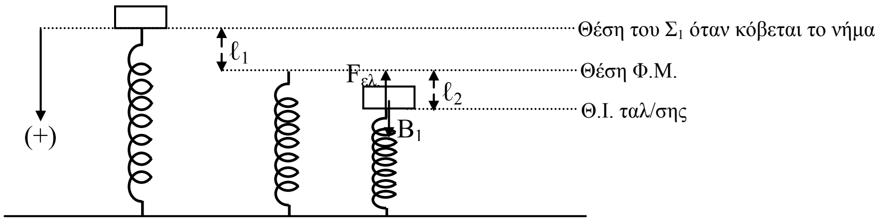
Επίσης η ② $\Rightarrow \boxed{T_{\sigma\tau.} = \frac{20}{3}N}$.

ii. Για να πραγματοποιείται κύλιση του κυλίνδρου χωρίς ολίσθηση θα πρέπει το μέτρο της στατικής τριβής T να είναι μικρότερο ή ίσο της μέγιστης τιμής $T_{\sigma\tau.,max}$, δηλ.

$$\left.\begin{aligned} T_{\sigma\tau.} \le T_{\sigma\tau,max} \Rightarrow T_{\sigma\tau.} \le \mu_s\cdot N \\ \text{Αλλά } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B_{2,y} \Rightarrow N = m_2g\sigma\upsilon\nu\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_{\sigma\tau.} \le \mu_s m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T_{\sigma\tau.} \le 15N.$$

Όμως $T_{\sigma\tau.} = \frac{20}{3}N < 15N$ άρα ο κύλινδρος πράγματι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Γ.



i. Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με $A = \ell_1 + \ell_2$.
Για τη θέση ισορροπίας της Α.Α.Τ. έχουμε:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.} = B_1 \Rightarrow k\cdot\ell_2 = m_1g \Rightarrow \ell_2 = \frac{m_1g}{k} \Rightarrow \boxed{\ell_2 = 0,1m}$ οπότε το πλάτος της Α.Α.Τ. είναι $\boxed{A = 0,2m}$.

ii. Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε μία Α.Α.Τ. είναι: $x = A\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi)$ ④

Αλλά $D = m_1\omega^2 \Rightarrow k = m_1\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \boxed{\omega = 10\,rad/s}$.

Επίσης η ④ $\underset{x=-A}{\overset{t=0}{\Rightarrow}} -A = A\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \eta\mu\varphi = -1 \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{3\pi}{2}}$ οπότε $\boxed{x = 0,2\cdot\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)\text{S.I.}}$

Δ. i. Στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου η απομάκρυνση από τη Θ.Ι. του Σ_1 είναι $x = -\ell_2 = -0,1m$ οπότε από την εξίσωση της απομάκρυνσης έχουμε:

$$-0,1 = 0,2\cdot\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} 10t + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \\ 10t + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi + \frac{11\pi}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} t = \frac{6k\pi - \pi}{30}s \\ t = \frac{6k\pi + \pi}{30}s \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \frac{\pi}{30}s, \frac{5\pi}{30}s, \frac{7\pi}{30}s, \frac{11\pi}{30}s, \ldots \overset{4\eta\ \varphi o\rho\acute{\alpha}}{\Rightarrow} \boxed{t = \frac{11\pi}{30}s}$$

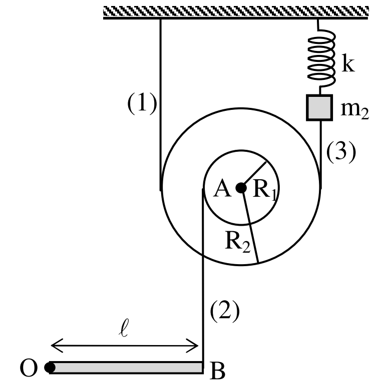
ii. Για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση που πραγματοποιεί το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχουμε:

$x = \frac{1}{2}a_{cm}\cdot t^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{121}{54}m = 2,24m}$. Αλλά $\eta\mu\varphi = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \boxed{h = 1,12m}$.

iii. Για το μήκος της διαδρομής του Σ_2 έχουμε $S_2 = x \Rightarrow \boxed{S_2 = \frac{121}{54}m = 2,24m}$ ενώ για το Σ_1 για $t = 0$ έχουμε $x = -A$ και για $t = \frac{11\pi}{30}s$ έχουμε $x = -\ell_2$ ενώ και $\ell_1 = \ell_2 = \frac{A}{2}$ οπότε για το μήκος της διαδρομής του Σ_1 ισχύει $S_1 = 15\ell_1 \Rightarrow \boxed{S_1 = 1,5m}$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΔΟΥΛΟΥΦΑΚΗ ΦΕΡΕΝΙΚΗ • ΚΩΤΣΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ • ΛΙΑΝΕΡΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΚΗΣ ΜΠΑΜΠΗΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΠΑΡΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ • ΧΑΙΡΕΤΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ



Η διπλή τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο ομόκεντρους δίσκους με ακτίνες $R_1 = 0{,}5$m και $R_2 = 1$m, κολλημένους μεταξύ τους, έτσι ώστε να μπορούν να περιστρέφονται ως ένα σώμα γύρω από το κοινό τους κέντρο Α. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = 0{,}5\text{kg}\cdot\text{m}^2$ και η μάζα της είναι $M = 2$kg. Στο εξωτερικό αυλάκι της τροχαλίας έχουν τυλιχθεί κατακόρυφο αβαρές μη εκτατό νήμα (1) που είναι δεμένο στην οροφή και κατακόρυφο αβαρές μη εκτατό νήμα (3) που είναι δεμένο σε σώμα μάζας $m_2 = 1$kg. Το σώμα μάζας m_2 είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100$N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Στο εσωτερικό αυλάκι της τροχαλίας έχει τυλιχθεί κατακόρυφο αβαρές μη εκτατό νήμα (2) το οποίο καταλήγει στο άκρο Β οριζόντιας ομογενούς ράβδου ΟΒ μήκους $\ell = 0{,}3$m και μάζας $m = 12$kg. Η ράβδος ΟΒ είναι αρθρωμένη στο άλλο άκρο της Ο. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί και όλα τα νήματα βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογίσετε:

α. Την παραμόρφωση του ελατηρίου κατά την ισορροπία του συστήματος.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε ταυτόχρονα τα νήματα (2) και (3), οπότε το σώμα μάζας m_2 ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η ράβδος ΟΒ ξεκινά να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο και η τροχαλία ξεκινά να εκτελεί σύνθετη κίνηση. Να υπολογίσετε:

β. Τη χρονική εξίσωση της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_2 θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω.

γ. Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

δ. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης της τροχαλίας, τη χρονική στιγμή που το σώμα μάζας m_2 διέρχεται για πρώτη φορά κατά την ταλάντωσή του, από τη θέση όπου το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $d_1 = 0{,}025$m.

ε. Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου την στιγμή που αφήνεται ελεύθερη.

στ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου τη στιγμή που έχει περιστραφεί κατά $\varphi = 60^\circ$.

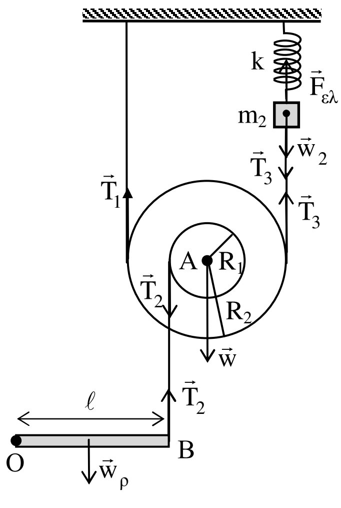
ζ. Την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου την στιγμή που γίνεται κατακόρυφη.

Όταν η ράβδος ΟΒ φτάνει στην κατακόρυφη θέση της για πρώτη φορά συγκρούεται ελαστικά στο κάτω άκρο της Β με αρχικά ακίνητο σώμα μάζας m_1. Αν η ράβδος ακινητοποιείται εξαιτίας της κρούσης, να υπολογίσετε:

η. Τη μάζα m_1 και το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 αμέσως μετά την ελαστική κρούση.

Δίνονται $g = 10\text{m/s}^2$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ



α. Για την ισορροπία της ράβδου ΟΒ ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow w_\rho \cdot \frac{\ell}{2} = T_2 \cdot \ell \Rightarrow T_2 = \frac{mg}{2} \Rightarrow T_2 = 60\text{N}.$$

Για την ισορροπία της τροχαλίας ισχύει:

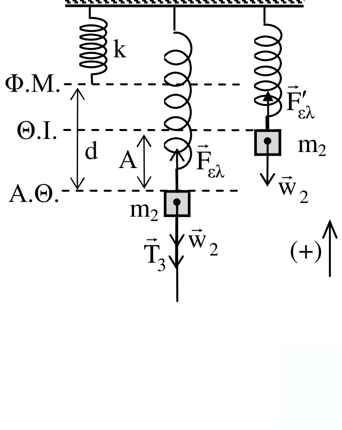
$$\left.\begin{matrix} \Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_3 \cdot R_2 + T_2 \cdot R_1 = T_1 \cdot R_2 \overset{R_2 = 2R_1}{\Rightarrow} T_1 - T_3 = 30\text{N} \\ \text{και} \\ \Sigma F = 0 \Rightarrow T_1 + T_3 = Mg + T_2 \Rightarrow T_1 + T_3 = 80\text{N} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 55\text{N} \\ T_3 = 25\text{N} \end{cases}$$

Για την ισορροπία του σώματος μάζας m_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_2 + T_3 \Rightarrow F_{ελ} = 35\text{N}.$$

Οπότε για την παραμόρφωση του ελατηρίου ισχύει: $F_{ελ} = k \cdot d \Rightarrow \boxed{d = 0{,}35\text{m}}$.

β. Το σώμα μάζας m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση:



$$y = A \cdot ημ(\omega t + \varphi_0)$$

όπου $k = m_2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow \omega = 10\text{rad/s}.$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην θέση $y = -A$, επομένως

$$A \cdot ημ\varphi_0 = -A \Rightarrow ημ\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\text{rad}.$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = w_2 \Rightarrow k \cdot (d - A) = m_2 g \Rightarrow A = 0{,}25\text{m}.$$

Οπότε η εξίσωση ταλάντωσης είναι: $\boxed{y = 0{,}25 \cdot ημ\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})}$.

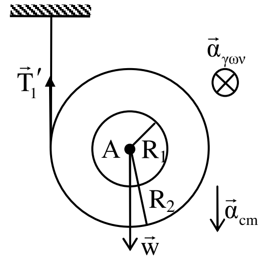
γ. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας:

$$\Sigma\tau_{(A)} = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1'\cdot R_2 = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1' = 0{,}5\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad ①$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση της τροχαλίας:

$$\Sigma F = M\alpha_{cm} \Rightarrow w - T_1' = M\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R_2 \quad ②$$

Από ①, ② $\Rightarrow Mg - 0{,}5\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 8\,\text{rad/s}^2}$.



δ. Τη χρονική στιγμή που το ελατήριο είναι συμπιεσμένο για πρώτη φορά κατά $d_1 = 0{,}025$m, το ταλαντευόμενο σώμα βρίσκεται στη θέση:

$$y_1 = +(d - A + d_1) \Rightarrow y_1 = +0{,}125\text{m} \Rightarrow y_1 = +\frac{A}{2} \text{ με } \upsilon_1 > 0 \text{ για πρώτη φορά.}$$

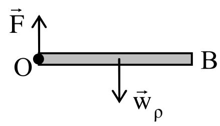
$$\text{Οπότε } y_1 = +\frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) = +\frac{1}{2} \xRightarrow[\text{με } \upsilon_1>0]{\text{1η φορά}} 10t + \frac{3\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{15}\text{s.}$$

Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας λόγω στροφικής κίνησης, την παραπάνω χρονική στιγμή ισχύει:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{\Sigma\tau\cdot d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega_{\tau\rho} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \Rightarrow \boxed{\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{32\pi}{15}\,\text{J/s}}.$$

ε. Με εφαρμογή του θεωρήματος Steiner, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της, είναι:

$$I_{(O)} = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

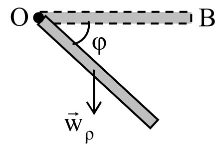


Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση της ράβδου:

$$\Sigma\tau_{(O)} = I_{(O)}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,\rho} \Rightarrow mg\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m\ell^2\alpha_{\gamma\omega\nu,\rho} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,\rho} = \frac{3g}{2\ell} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu,\rho} = 50\,\text{rad/s}^2}.$$

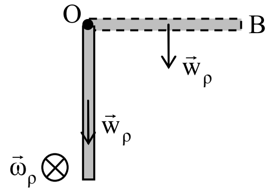
στ. Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο Newton για τη στροφική κίνηση της ράβδου τη στιγμή που έχει περιστραφεί κατά $\varphi = 60^o$, οπότε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{(O)} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = w_\rho\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \frac{dL}{dt} = mg\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = 9\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2}.$$



ζ. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε για τη στροφική κίνηση της ράβδου από την οριζόντια έως την κατακόρυφη θέση.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_\rho} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{(O)}\omega_\rho^2 = mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2\omega_\rho^2 = mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow \omega_\rho = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \Rightarrow \boxed{\omega_\rho = 10\,\text{rad/s}}.$$



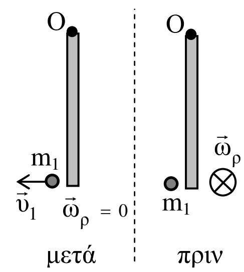
η. Για το σύστημα ράβδος ΟΒ – σώμα μάζας m_1, εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης στροφορμής κατά την κρούση:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow I_{(O)}\cdot\omega_\rho = m_1\upsilon_1\ell \Rightarrow \frac{1}{3}m\ell^2\cdot\omega_\rho = m_1\upsilon_1\ell \Rightarrow m_1\upsilon_1 = 12\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \quad ③$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$K_{O\Lambda_{\pi\rho\iota\nu}} = K_{O\Lambda_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{(O)}\cdot\omega_\rho^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{1}{3}m\ell^2\cdot\omega_\rho^2 = m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow m_1\upsilon_1^2 = 36\text{J} \quad ④$$

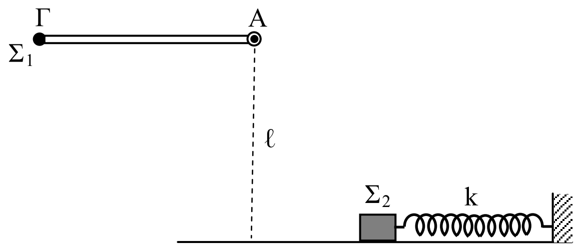
Οπότε ③, ④ $\Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 3\,\text{m/s}}$ και $\boxed{m_1 = 4\text{kg}}$.



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ
ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ



Η ευθύγραμμη ομογενής ράβδος ΑΓ μάζας $M = 3$ kg και μήκους $\ell = 1$ m μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α, είναι κάθετος σ' αυτή και απέχει απόσταση $\ell = 1$ m από το οριζόντιο δάπεδο. Στο άκρο της Γ είναι στερεωμένο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1$ kg αμελητέων διαστάσεων. Το σύστημα ράβδος-σώμα Σ_1 αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί από την οριζόντια θέση. Τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση, μέσω κατάλληλου εκρηκτικού μηχανισμού, το σώμα Σ_1 εκτοξεύεται ακαριαία με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10$ m/s προς τα δεξιά. Το σώμα Σ_1 κινούμενο στο λείο οριζόντιο δάπεδο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με μικρό σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 4$ kg το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}5$ m δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100$ N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά στερεωμένο. Η κρούση συμβαίνει τη στιγμή που το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα αριστερά.

Να υπολογίσετε:

α) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του.
β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο από την οριζόντια θέση.
γ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 αμέσως πριν την έκρηξη.
δ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την έκρηξη.
ε) Τη μηχανική ενέργεια που προσφέρεται μέσω του εκρηκτικού μηχανισμού στο σύστημα.
στ) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως πριν την κρούση.
ζ) Τις ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
η) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 κατά την κρούση.
θ) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 κατά την κρούση.
ι) Τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση.
κ) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2, τη χρονική στιγμή που το ελατήριο έχει υποστεί το μισό της μέγιστης παραμόρφωσής του για πρώτη φορά μετά την κρούση.

Να θεωρήσετε ότι οι απομακρύνσεις των δύο ταλαντώσεων είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου και θετική κατεύθυνση και για τις δύο ταλαντώσεις είναι η κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s^2 και η ροπή αδράνειας μιας λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς άξονα περιστροφής κάθετο σ' αυτή που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

ΛΥΣΗ

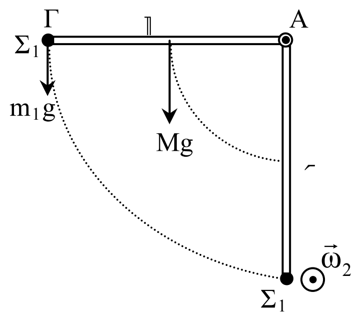
α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$I_{ολ(A)} = I_{\rho,(A)} + I_{\Sigma_1(A)}$.

Λόγω Steiner $I_{\rho,(A)} = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}M\ell^2 \Rightarrow I_{\rho,(A)} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Επίσης $I_{\Sigma_1(A)} = m_1\cdot\ell^2 \Rightarrow I_{\Sigma_1(A)} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Άρα $\boxed{I_{ολ(A)} = 2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$.



β) Σύμφωνα με το 2^o νόμο Newton για τη στροφική κίνηση του συστήματος ράβδος-σώμα Σ_1 στην οριζόντια θέση ισχύει:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{\tau}_{(A)} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = m_1g\ell + Mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = 25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2}.$$

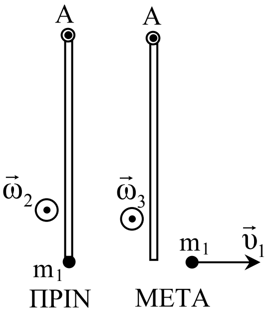
γ) Έστω ω_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας που αποκτά το σύστημα ράβδος-σώμα Σ_1 στην κατακόρυφη θέση. Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας κατά τη μετάβαση του συστήματος από την οριζόντια θέση στην κατακόρυφη θέση ισχύει:

$$K_2 - K_1 = W_{ολ} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{ολ(A)}\omega_2^2 - 0 = m_1g\ell + Mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 5\ \text{rad/s}}.$$

δ) Έστω ω_3 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας που αποκτά η ράβδος αμέσως μετά την έκρηξη. Για το σύστημα ράβδος-σώμα Σ_1 κατά την έκρηξη $\Sigma\vec{\tau}_{εξ} = 0$, οπότε σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής, ισχύει:

$$\vec{L}_{ολ,ΠΡΙΝ} = \vec{L}_{ολ,ΜΕΤΑ} \Rightarrow I_{ολ(A)}\omega_2 = I_{ρ,(A)}\omega_3 + m_1\upsilon_1\ell \Rightarrow \boxed{\omega_3 = 0\ \text{rad/s}}.$$

Δηλαδή η ράβδος ακινητοποιείται αμέσως μετά την έκρηξη.



ε) Η μηχανική ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα μέσω του εκρηκτικού μηχανισμού υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή:

$$\Delta E_{ΜΗΧ} = K_{ολ,ΜΕΤΑ} - K_{ολ,ΠΡΙΝ} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}I_{ολ(A)}\omega_2^2 \Rightarrow \boxed{\Delta E_{ΜΗΧ} = 25\ J}.$$

στ) Αφού η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας της αρχικής α.α.τ. το μέτρο της ταχύτητας υ_2 του σώματος Σ_2 αμέσως πριν την κρούση είναι:

$$|\upsilon_2| = \upsilon_{max} \Rightarrow |\upsilon_2| = \omega \cdot A \Rightarrow |\upsilon_2| = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \cdot A \Rightarrow \boxed{|\upsilon_2| = 2{,}5\ m/s}.$$

ζ) Η κρούση είναι κεντρική ελαστική και τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, οπότε ισχύουν:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 - 2m_2|\upsilon_2|}{m_1 + m_2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_1' = -10\ m/s} \text{ και } \upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1 - (m_2 - m_1)|\upsilon_2|}{m_1 + m_2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = 2{,}5\ m/s}.$$

Δηλαδή αμέσως μετά την ελαστική κρούση τα δύο σώματα αντιστρέφουν τις ταχύτητές τους.

η) Για τη μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 κατά την κρούση ισχύει:

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{1,μετά} - \vec{p}_{1,πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -20\ kg\cdot m/s \Rightarrow \boxed{|\Delta p_1| = 20\ kg\cdot m/s}.$$

θ) Για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 κατά την κρούση ισχύει:

$$\Delta K_2 = K_{2,μετά} - K_{2,πριν} \Rightarrow \Delta K_2 = \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2')^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow \boxed{\Delta K_2 = 0\ J}$$

ι) Το σώμα Σ_2 μετά την ελαστική κρούση έχει την ίδια θέση ισορροπίας και την ίδια γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow \omega = 5\ rad/s$.

Αφού η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας της νέας α.α.τ. για το μέτρο της ταχύτητας υ_2' του σώματος Σ_2 ισχύει: $\upsilon_2' = \upsilon_{max}' \Rightarrow \upsilon_2' = \omega \cdot A' \Rightarrow A' = 0{,}5\ m$.

Άρα η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι $\Delta\ell_{max} = A' \Rightarrow \boxed{\Delta\ell_{max} = 0{,}5\ m}$.

κ) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ταλαντευόμενου σώματος Σ_2 ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -k \cdot x \cdot \upsilon$$

όπου $x = \frac{\Delta\ell_{max}}{2} \Rightarrow x = 0{,}25\ m$ και υ η ταχύτητα ταλάντωσής του στη θέση αυτή.

Για την ταχύτητα υ του σώματος Σ_2 σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης στη θέση $x = 0{,}25$ m, ισχύει:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}k(A')^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \upsilon = \pm 1{,}25\sqrt{3}\ m/s.$$

Όμως για πρώτη φορά μετά την κρούση το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = 0{,}25$ m κινούμενο προς τα δεξιά άρα με θετική ταχύτητα $\upsilon = 1{,}25\sqrt{3}$ m/s.

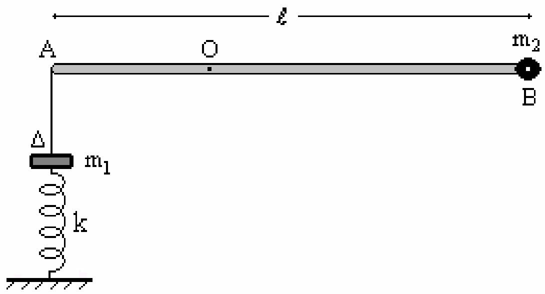
Οπότε: $\boxed{\frac{dK}{dt} = -31{,}25\sqrt{3}\ J/s}$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΑΣΤΑΣΑΚΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ • ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ
ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ

Ομογενής λεπτή ράβδος ΑΒ μήκους ℓ = 3 m και μάζας M = 12 kg μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος σ' αυτή και διέρχεται από το σημείο της Ο, το οποίο απέχει από το άκρο της Α απόσταση ΑΟ = 1 m. Στο άκρο Β της ράβδου υπάρχει σταθερά στερεωμένη σημειακή μάζα m_2 = 2 kg. Στο άκρο της Α η ράβδος συνδέεται μέσω τεντωμένου αβαρούς και μη εκτατού κατακόρυφου νήματος ΑΔ με σώμα μάζας m_1 = 1 kg μικρών διαστάσεων. Το σώμα μάζας m_1 είναι δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατήριου σταθεράς k = 400 N/m το άλλο άκρο του οποίου προσδένεται σταθερά στο έδαφος όπως φαίνεται στο σχήμα.



Α. Όλο το παραπάνω σύστημα βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και ισορροπεί έτσι ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια, το σώμα μάζας m_1 ακίνητο και το ελατήριο με το νήμα κατακόρυφο.
Να υπολογίσετε:
- **α.** Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-μάζα m_2, ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το σημείο Ο της ράβδου.
- **β.** Το μέτρο της τάσης του νήματος που συγκρατεί τη ράβδο και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής κατά τη διάρκεια της ισορροπίας της.

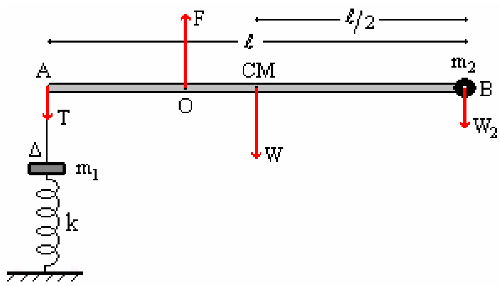
Β. Τη στιγμή t_o = 0 κόβουμε το νήμα που συγκρατεί τη ράβδο οπότε το σώμα μάζας m_1 ξεκινά να ταλαντώνεται, ενώ το σύστημα ράβδος-μάζα m_2 αρχίζει να περιστρέφεται.
Να υπολογίσετε:
- **α.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος-μάζα m_2, ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο Ο, τη στιγμή που κόβεται το νήμα.
- **β.** Τη γωνιακή ταχύτητα που αποκτά το σύστημα ράβδος-μάζα m_2 τη στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.
- **γ.** Την περίοδο και το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_1.
- **δ.** Το λόγο της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης της μάζας m_1 τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}$ s.
- **ε.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης της μάζας m_1 τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}$ s.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2 και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$. Θεωρήστε ότι το σώμα μάζας m_1 μετά το κόψιμο του νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θετική φορά προς τα πάνω.

ΛΥΣΗ

Α. α. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-μάζα m_2, ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το σημείο Ο ισούται με: $I_{ολ(O)} = I_{ράβδου(O)} + I_{m2(O)} \Rightarrow I_{ολ(O)} = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2} - AO\right)^2 + m_2(\ell - AO)^2 \Rightarrow \boxed{I_{ολ(O)} = 20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$.

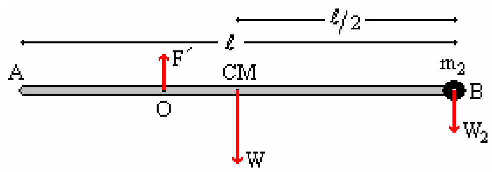
β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος-μάζα m_2 κατά τη διάρκεια της ισορροπίας είναι το βάρος w της ράβδου, το βάρος w_2 της μάζας m_2, η τάση Τ του τεντωμένου νήματος και η δύναμη F που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Για την ισορροπία ισχύει:



$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T\cdot AO = w\cdot\left(\frac{\ell}{2} - AO\right) + w_2\cdot(\ell - AO) \Rightarrow \boxed{T = 100\ \text{N}}.$$

και $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = T + w + w_2 \Rightarrow \boxed{F = 240\ \text{N}}$.

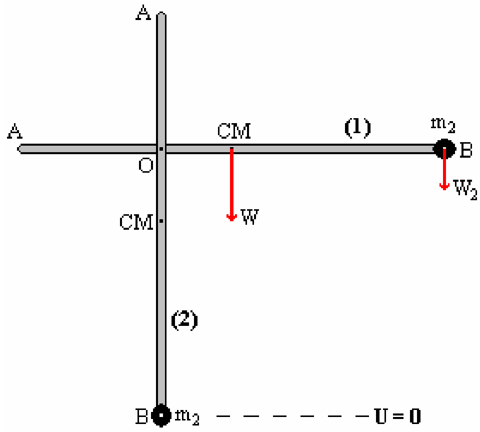
Β. α. Τη στιγμή που κόβεται το νήμα καταργείται η δύναμη Τ και το σύστημα ράβδος-μάζα m_2 δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο Ο, είναι:



$$\frac{dL_{(O)}}{dt} = \Sigma\tau_{(O)} = w\cdot\left(\frac{\ell}{2} - AO\right) + w_2\cdot(\ell - AO) \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{(O)}}{dt} = 100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2}.$$

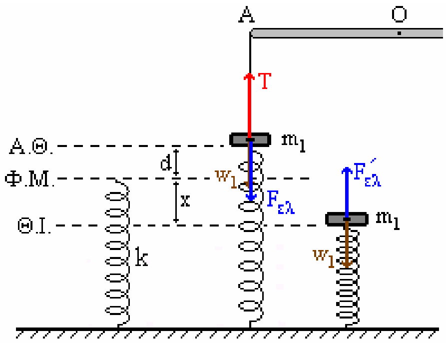
β. Η γωνιακή ταχύτητα ω που αποκτά το σύστημα ράβδος-μάζα m_2 τη στιγμή που κατά την περιστροφή του γύρω από το O διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση, μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) μεταξύ των θέσεων (1) και (2) του διπλανού σχήματος.

Δηλαδή: $K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow 0 + (M + m_2)g\cdot OB =$
$= \frac{1}{2}\cdot I_{ολ(O)}\cdot\omega^2 + Mg\cdot\frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{10}\ \text{rad/s}}$.



γ. Για την περίοδο T_1 αρμονικής ταλάντωσης της μάζας m_1 ισχύει: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \boxed{T_1 = 0{,}1\pi\ \text{s}}$.

Όσο το νήμα είναι δεμένο στη ράβδο, επειδή w1 = m1g = 10 N < T, η τάση T του νήματος είναι μεγαλύτερη του βάρους w1. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το ελατήριο είναι επιμηκυσμένο, οπότε το σώμα μάζας m1 δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Για την ισορροπία του σώματος μάζας m1 στη θέση αυτή ισχύει:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow T = w1 + F\varepsilon\lambda \Rightarrow k\cdot d = T - m1g \Rightarrow d = \frac{9}{40}$ m.

Η θέση αυτή αποτελεί ακραία θέση της α.α.τ. που θα ακολουθήσει αφού τη στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα μάζας m1 είναι ακίνητο.

Για τη θέση ισορροπίας της α.α.τ. ισχύει:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow w1 = F\varepsilon\lambda' \Rightarrow k\cdot x = m1g \Rightarrow x = \frac{1}{40}$ m.

Οπότε το πλάτος της α.α.τ. είναι: $A = d + x \Rightarrow A = 0{,}25$ m.

δ. Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης της μάζας m_1 είναι:

$$\frac{K}{U} = \frac{E - U}{U} = \frac{E}{U} - 1 = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}ky^2} - 1 = \frac{A^2}{A^2\cdot\eta\mu^2(\omega_1 t + \varphi_o)} - 1 = \frac{1}{\eta\mu^2(\omega_1 t + \varphi_o)} - 1$$

όπου $\omega1 = \frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow \omega1 = 20$ rad/s και $\varphi o = \frac{\pi}{2}$ rad, αφού τη στιγμή to = 0 η μάζα m1 βρίσκεται στην ακραία θέση y = +A της ταλάντωσής της.

Για τη χρονική στιγμή $t1 = \frac{\pi}{60}$ s, ο παραπάνω λόγος γίνεται: $\frac{K}{U} = 3$.

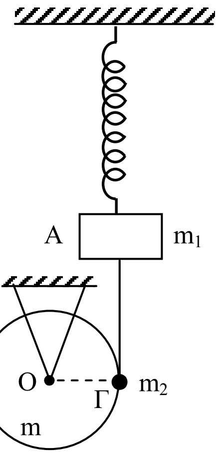
ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης της μάζας m1 είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F\cdot dx}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon = -k\cdot y\cdot\upsilon = -k\cdot A\cdot\eta\mu(\omega1t+\varphi o)\cdot\omega1A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega1t+\varphi o)$$

Για τη χρονική στιγμή $t1 = \frac{\pi}{60}$ s, ο παραπάνω ρυθμός μεταβολής γίνεται: $\boxed{\frac{dK}{dt} = 125\sqrt{3}\ \text{J/s}}$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΚΩΤΣΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ • ΛΙΑΝΕΡΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΚΗΣ ΜΠΑΜΠΗΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΠΑΡΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ



Σώμα Α μάζας m_1 =1kg ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 400N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Κατακόρυφος ομογενής δίσκος μάζας m = 18kg και ακτίνας R = 1m έχει προσκολλημένο σε κάποιο σημείο Γ της περιφέρειάς του μικρό σώμα Β μάζας m_2. Το σύστημα δίσκου – σώματος Β μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα x΄x που διέρχεται από το κέντρο Ο του δίσκου και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

Τα σώματα Α και Β ενώνονται μεταξύ τους με αβαρές, μη εκτατό, κατακόρυφο νήμα το οποίο έχει όριο θραύσης 10Ν, με τρόπο ώστε το τμήμα ΟΓ να είναι οριζόντιο, και όλο το σύστημα ισορροπεί όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Α. α. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή, $m_{2,min}$, της μάζας m_2 του σώματος Β που είναι προσκολλημένο στο δίσκο, ώστε το νήμα να κοπεί.

β. Για την τιμή της μάζας m_2 του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος δίσκος – σώμα Β.

i) τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

ii) όταν το σύστημα έχει στραφεί κατά θ=60° από την αρχική του θέση.

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ του συστήματος δίσκος – σώμα Β, όταν το σώμα Β διέρχεται από το κατώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του.

δ. Όταν το σώμα Β διέρχεται από το κατώτερο σημείο της τροχιάς του, εκτινάσσεται από το δίσκο με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ χωρίς να αλλάξει κατεύθυνση και κινητική ενέργεια ίση με το $\frac{1}{5}$ της κινητικής ενέργειας του συστήματος δίσκος – σώμα Β.

Να υπολογίσετε:

i) το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ του σώματος Β αμέσως μετά την αποκόλληση

ii) το μέτρο $\vec{\omega}_\delta$ της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου αμέσως μετά την αποκόλληση του σώματος Β (δίνεται $\sqrt{2} = 1,4$).

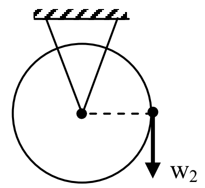
Β. Για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί η μάζα m_1, από τη στιγμή που κόβεται το νήμα (t = 0), να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο. Ως θετική φορά να θεωρήσετε τη φορά προς τα πάνω.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10m/s² και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος σ' αυτόν $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$

ΛΥΣΗ

Α. α. Για να κοπεί το νήμα θα πρέπει η δύναμη που δέχεται σε κάθε άκρο του να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το όριο θραύσης του νήματος δηλαδή θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση: $w_2 \geq F_{\theta\rho} \Rightarrow m_2 g \geq F_{\theta\rho} \Rightarrow m_2 \geq \frac{F_{\theta\rho}}{g} \Rightarrow \boxed{m_{2,min} = 1kg}$

β. i) Από όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δίσκος – σώμα Β η μόνη που προκαλεί ροπή είναι το βάρος w_2 του σώματος Β. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης γι' αυτό το σύστημα έχουμε:



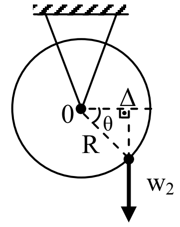
$$\Sigma\tau = I_{o\lambda,(o)} \cdot \alpha_{\gamma(1)} \Rightarrow \alpha_{\gamma(1)} = \frac{\Sigma\tau}{I_{o\lambda,(o)}} \qquad (1)$$

Αλλά $\Sigma\tau = \tau_{w_2} = w_2 \cdot R = m_2 gR$ και

$$I_{o\lambda,(o)} = I_{\delta\iota\sigma\kappa o\upsilon(o)} + I_{m_2(o)} = \frac{1}{2}mR^2 + m_2 \cdot R^2 \Rightarrow I_{o\lambda,(o)} = 10kg \cdot m^2$$

Οπότε η (1) $\Rightarrow \alpha_{\gamma(1)} = \frac{m_2 gR}{I_{o\lambda(o)}} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma(1)} = 1rad/s^2}$

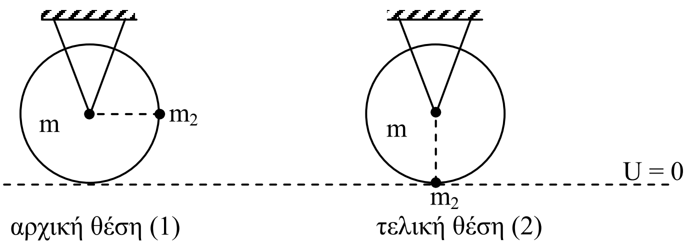
ii) Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τη νέα θέση έχουμε:



$$\Sigma\tau = I_{o\lambda,(o)} \cdot \alpha_{\gamma(2)} \Rightarrow w_2 \cdot (O\Delta) = I_{o\lambda(o)} \cdot \alpha_{\gamma(2)}$$

Αλλά $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(O\Delta)}{R} \Rightarrow (O\Delta) = R \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ οπότε $\alpha_{\gamma(2)} = \frac{m_2 g \cdot R \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{I_{o\lambda(o)}} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma(2)} = 0,5rad/s^2}$

γ. Ορίζουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την κατώτερη θέση του σώματος Β και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος από τη θέση (1) στη θέση (2):



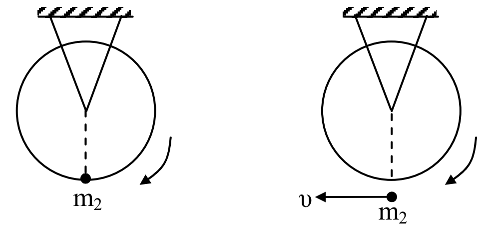
$$K_{(1)} + U_{(1)} = K_{(2)} + U_{(2)} \Rightarrow 0 + mgR + m_2gR = \frac{1}{2} I_{ολ(o)} \cdot \omega^2 + mgR \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2m_2gR}{I_{ολ,(o)}}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{2} rad/s}$$

δ. i) Η κινητική ενέργεια του συστήματος δίσκος – σώμα Β λίγο πριν την αποκόλληση του σώματος Β είναι:

$K = \frac{1}{2} I_{ολ,(o)} \cdot \omega^2 \Rightarrow K = 10J$.

Η κινητική ενέργεια του σώματος Β μετά την αποκόλληση είναι:

$K_B = \frac{1}{5} K \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2 = \frac{1}{5} K \Rightarrow \boxed{\upsilon = 2\, m/s}$



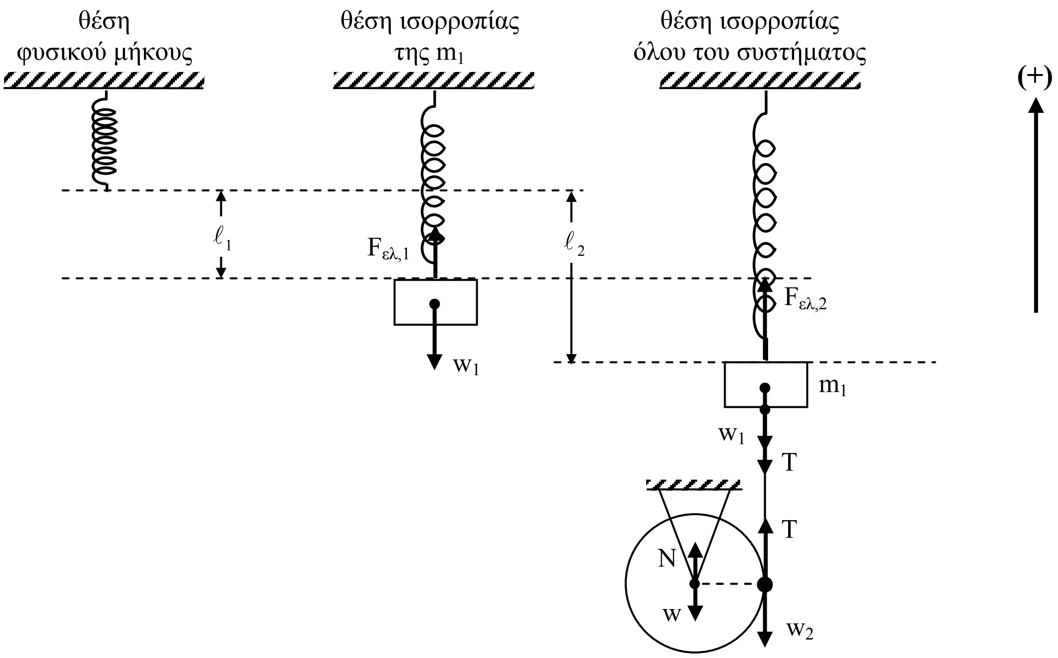
Λίγο πριν την αποκόλληση

Αμέσως μετά την αποκόλληση

ii) Τη στιγμή της αποκόλλησης του σώματος Β από το δίσκο, στο σύστημα δίσκος – σώμα Β δεν ενεργούν εξωτερικές ροπές οπότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Επομένως ισχύει:

$$\vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετά} \Rightarrow I_{ολ,(o)} \cdot \omega = m_2 \cdot \upsilon \cdot R + I_{δίσκου(o)} \cdot \omega_\delta \Rightarrow \boxed{\omega_\delta = \frac{4}{3} rad/s}$$

Β.



Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της απλής αρμονικής ταλάντωσης που πραγματοποιεί το σύστημα ελατήριο – σώμα Α είναι: $y = A \cdot ημ(\omega t + \varphi)$ ②

Αλλά $T = 2\pi\sqrt{m_1/k} \Rightarrow T = \frac{\pi}{10} s$ οπότε $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{\omega = 20\, rad/s}$.

Για τη θέση ισορροπίας της m_1 έχουμε: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,1} = w_1 \Rightarrow k \cdot \ell_1 = m_1 g \Rightarrow \ell_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \ell_1 = \frac{1}{40} m.$

Για όσο χρόνο το σώμα Α ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο του ελατηρίου και ταυτόχρονα δεμένο στο νήμα ισχύει:

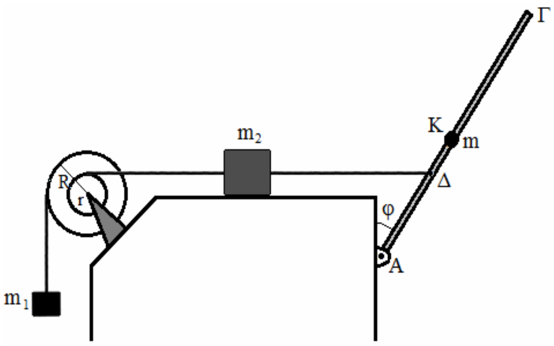
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,2} = w_1 + T \overset{T=w_2}{\Rightarrow} k \cdot \ell_2 = m_1 g + m_2 g \Rightarrow \ell_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow \ell_2 = \frac{1}{20} m.$$ Οπότε $A = \ell_2 - \ell_1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{40} m}$.

Όμως για t = 0 έχουμε y = –A οπότε η ② $\Rightarrow -A = A \cdot ημ\varphi \Rightarrow ημ\varphi = -1 \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{3\pi}{2}}$. Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι: $\boxed{y = \frac{1}{40} ημ\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΔΟΥΛΟΥΦΑΚΗ ΦΕΡΕΝΙΚΗ • ΚΩΤΣΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ • ΛΙΑΝΕΡΗΣ ΜΑΡΙΝΟΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΚΗΣ ΜΠΑΜΠΗΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΠΑΡΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ • ΧΑΙΡΕΤΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ



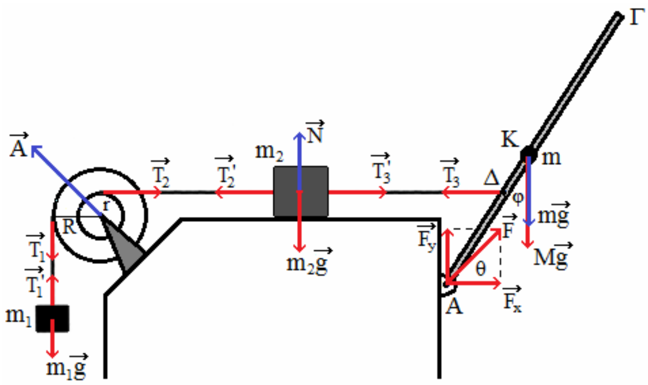
Το σύστημα του διπλανού σχήματος ισορροπεί. Η λεπτή ομογενής ευθύγραμμη ράβδος ΑΓ μάζας $M = 3$ kg και μήκους $\ell = 2$ m έχει στο μέσο της Κ ακλόνητα στερεωμένο σφαιρίδιο μάζας $m = 1$ kg, αμελητέων διαστάσεων. Η ράβδος στηρίζεται μέσω άρθρωσης στο άκρο της Α και συγκρατείται με τη βοήθεια οριζόντιου αβαρούς, μη εκτατού, νήματος στο σημείο της Δ, όπου $ΑΔ = \ell/3$, έτσι ώστε η ράβδος να σχηματίζει γωνία φ (όπου συνφ = 0,6 και ημφ = 0,8) με την κατακόρυφο.
Το νήμα συνδέεται με σώμα μάζας $m_2 = 1$ kg το οποίο ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο με τη βοήθεια δεύτερου οριζόντιου αβαρούς, μη εκτατού, νήματος που είναι τυλιγμένο στο εσωτερικό αυλάκι ακτίνας $r = 0{,}1$ m διπλής τροχαλίας με ακτίνες r και $R > r$ της οποίας το κέντρο μάζας βρίσκεται στο γεωμετρικό της κέντρο. Στο εξωτερικό αυλάκι ακτίνας R της διπλής τροχαλίας είναι τυλιγμένο αβαρές, μη εκτατό, νήμα το οποίο είναι κατακόρυφο και συγκρατεί το σώμα μάζας $m_1 = 4$ kg. Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_τ = 0{,}63\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.
Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα περιστροφής κάθετο σ' αυτή που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{M\ell^2}{12}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$. Θεωρήστε ότι τα νήματα και η ράβδος βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και η τριβή στον άξονα περιστροφής της τροχαλίας και της ράβδου είναι αμελητέα.

Α. Κατά τη διάρκεια της ισορροπίας του συστήματος, να υπολογίσετε:
- **α)** Το μέτρο της τάσης του νήματος που συγκρατεί τη ράβδο.
- **β)** Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.
- **γ)** Την εξωτερική ακτίνα R της διπλής τροχαλίας.

Β. Τη χρονική στιγμή t = 0 κόβουμε το οριζόντιο νήμα που συγκρατεί τη ράβδο στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε:
- **δ)** Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη στιγμή που κόβεται το νήμα.
- **ε)** Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σφαιριδίου μάζας m, τη στιγμή που η ράβδος διέρχεται από την οριζόντια θέση.
- **στ)** Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος μάζας m_1 κατά την διάρκεια της κίνησής του.

Γ. Τη χρονική στιγμή που το σώμα μάζας m_1 έχει κατεβεί κατά h = 1 m, να υπολογίσετε:
- **ζ)** Την ταχύτητα και το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1.
- **η)** Το μέτρο της ορμής του σώματος μάζας m_2.
- **θ)** Το πλήθος των περιστροφών της τροχαλίας.
- **ι)** Το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας και το ρυθμό μεταβολής της κινητικής της ενέργειας.

ΛΥΣΗ



Α. α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αναλύουμε σε δύο συνιστώσες τη δύναμη F που δέχεται ράβδος από την άρθρωση.
Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τη συνισταμένη των ροπών που ασκούνται στη ράβδο, θεωρώντας άξονα περιστροφής τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετος στη ράβδο και θετική φορά περιστροφής την αντιωρολόγια:

$$Στ_{(Α)} = 0 \Rightarrow T_3\frac{\ell}{3}συνφ - Mg\frac{\ell}{2}ημφ - mg\frac{\ell}{2}ημφ = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{T_3 = 80\ \text{N}}.$$

β) Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο:

$$ΣF_x = 0 \Rightarrow T_3 - F_x = 0 \Rightarrow F_x = 80\ \text{N} \quad \text{και} \quad ΣF_y = 0 \Rightarrow F_y - Mg - mg = 0 \Rightarrow F_y = 40\ \text{N}$$

Επομένως, το μέτρο της δύναμης F είναι $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow \boxed{F = 40\sqrt{5}\ \text{N}}$.

γ) Επειδή τα νήματα είναι αβαρή ισχύει: $T_3 = T_3' = 80\ \text{N}$, $T_2 = T_2'$ και $T_1 = T_1'$.

Για την ισορροπία του σώματος μάζας m_2 ισχύει: $ΣF_x = 0 \Rightarrow T_2' = T_3' \Rightarrow T_2' = 80\ \text{N}$ άρα $T_2 = 80\ \text{N}$.

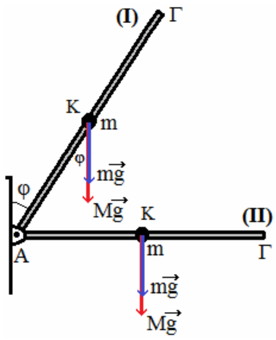
Για την ισορροπία του σώματος μάζας m_1 ισχύει: $ΣF_y = 0 \Rightarrow T_1' = m_1 g \Rightarrow T_1' = 40\ \text{N}$ άρα $T_1 = 40\ \text{N}$.

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τη συνισταμένη των ροπών που ασκούνται στη διπλή τροχαλία, θεωρώντας άξονα περιστροφής τον οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της και θετική φορά περιστροφής την αντιωρολόγια:

$$Στ_{(τ)} = 0 \Rightarrow T_1 R - T_2 r = 0 \Rightarrow \boxed{R = 0{,}2\ \text{m}}.$$

Β. δ) Το σύστημα ράβδος – σφαιρίδιο θα εκτελέσει στροφική κίνηση γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετος στη ράβδο. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$I_{(A)} = I_{ράβδου(A)} + I_{m(A)} \Rightarrow I_{(A)} = I_{cm} + M(AK)^2 + I_{m(A)} \Rightarrow I_A = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{(A)} = 5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$



Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για το σύστημα τη στιγμή που κόβεται το νήμα, θέση (Ι), θεωρώντας θετική φορά περιστροφής την ωρολόγια:

$$\Sigma\tau_{(A)} = I_{(A)}\alpha_{γων} \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2}ημφ + mg\frac{\ell}{2}ημφ = I_{(A)}\alpha_{γων} \Rightarrow \boxed{\alpha_{γων} = 6{,}4\ \text{rad/s}^2}.$$

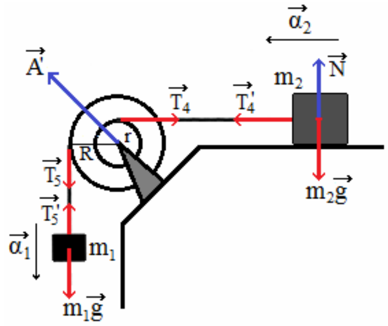
ε) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την περιστροφή του συστήματος ράβδου – σφαιριδίου από την αρχική θέση (Ι) έως την οριζόντια θέση (ΙΙ), για να υπολογίσουμε την γωνιακή ταχύτητα ω του συστήματος στην οριζόντια θέση (ΙΙ):

$$K_{(II)} - K_{(I)} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}I_{(A)}\omega^2 = Mg\cdot\frac{\ell}{2}συνφ + mg\cdot\frac{\ell}{2}συνφ \Rightarrow \omega = \sqrt{9{,}6}\ \text{rad/s}.$$

Επομένως, το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνση του σφαιριδίου στη θέση (ΙΙ) είναι:

$$\alpha_κ = \omega^2\frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_κ = 9{,}6\ \text{m/s}^2}.$$

στ) Τα σώματα μάζας m_1 και m_2 εκτελούν μεταφορική κίνηση και η τροχαλία στροφική. Έστω α_1 και α_2 τα μέτρα των επιταχύνσεων των σωμάτων μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα και $\alpha_{γ(τ)}$ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας. Τότε επειδή τα νήματα είναι μη εκτατά και τυλιγμένα στα αυλάκια της τροχαλίας, ισχύει $\alpha_1 = \alpha_{γ(τ)}\cdot R$ και $\alpha_2 = \alpha_{γ(τ)}\cdot r$.



Για τη μεταφορική κίνηση του σώματος μάζας m_1 εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma F_y = m_1\alpha_1 \Rightarrow m_1g - T'_5 = m_1\alpha_{γ(τ)}R \Rightarrow T'_5 = m_1g - m_1\alpha_{γ(τ)}R \quad (1)$$

Για τη μεταφορική κίνηση του σώματος μάζας m_2 εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην οριζόντια διεύθυνση:

$$\Sigma F_x = m_2\alpha_2 \Rightarrow T'_4 = m_2\alpha_{γ(τ)}r \quad (2)$$

Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης, θεωρώντας θετική φορά περιστροφής την αντιωρολόγια**:**

$$\Sigma\tau_{(τ)} = I_τ\cdot\alpha_{γ(τ)} \Rightarrow T_5\cdot R - T_4\cdot r = I_τ\alpha_{γ(τ)} \quad (3)$$

Επειδή τα νήματα είναι αβαρή ισχύει: $T_4 = T'_4$ (4) και $T_5 = T'_5$ (5)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) και (5) προκύπτει: $\alpha_{γ(τ)} = \dfrac{m_1gR}{m_1R^2 + m_2r^2 + I_τ} \Rightarrow \alpha_{γ(τ)} = 10\ \text{rad/s}^2$.

Επομένως, $\alpha_2 = 1\ \text{m/s}^2$, $T_5 = T'_5 = 32\ \text{N}$, $T_4 = T'_4 = 1\ \text{N}$ και το μέτρο της επιτάχυνσης α_1 είναι: $\boxed{\alpha_1 = 2\ \text{m/s}^2}$.

Γ. ζ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος μάζας m_1 κατά h = 1 m:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1g\cdot h - T'_5\cdot h \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 2\ \text{m/s}}.$$

Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 ισχύει:

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F\cdot dx}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon_1 = m_1\alpha_1\upsilon_1 \Rightarrow \boxed{\frac{dK_1}{dt} = 16\ \text{J/s}}.$$

η) Το σώμα μάζας m_1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Άρα: $h = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \Rightarrow t = 1\ \text{s}$, όπου t ο κοινός χρόνος κίνησης των δύο σωμάτων μάζας m_1, m_2 και της τροχαλίας.

Για την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση του σώματος μάζας m_2 ισχύει: $\upsilon_2 = \alpha_2 t$.

Επομένως το μέτρο της ορμής του είναι: $p_2 = m_2\upsilon_2 = m_2\alpha_2 t \Rightarrow \boxed{p_2 = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}$.

θ) Η τροχαλία εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση. Άρα: $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{γ(τ)}t^2 \Rightarrow \Delta\theta = 5\ \text{rad}$.

Το πλήθος των περιστροφών της τροχαλίας είναι $N = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow \boxed{N = \dfrac{2{,}5}{\pi}\ \text{περιστροφές}}$.

ι) Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι: $\omega_τ = \alpha_{γ(τ)}t \Rightarrow \omega_τ = 10\ \text{rad/s}$.

Άρα το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας είναι: $L = I_τ\cdot\omega_τ \Rightarrow \boxed{L = 6{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας είναι:

$$\frac{dK_τ}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = \frac{\Sigma\tau_{(τ)}\cdot d\theta}{dt} = \Sigma\tau_{(τ)}\cdot\omega_τ = I_τ\alpha_{γ(τ)}\omega_τ \Rightarrow \boxed{\frac{dK_τ}{dt} = 63\ \text{J/s}}.$$

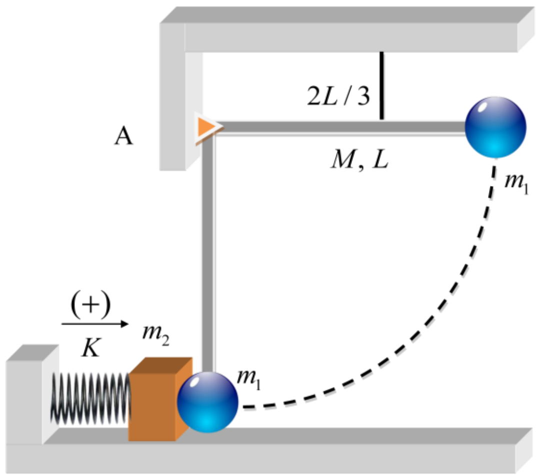
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ

ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

Θέμα:

Ράβδος μάζας $M = 2Kg$ και μήκους $L = 6m$ ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια νήματος που είναι δεμένο στη ράβδο και σε απόσταση $\dfrac{2L}{3}$ από την άρθρωση που βρίσκεται στο ένα άκρο της, γύρω από την οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Στο άκρο Γ της ράβδου βρίσκεται κολλημένο σώμα μάζας $m_1 = 1Kg$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \dfrac{ML^2}{12}$.



Α. Να βρείτε την τάση του νήματος.

Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα οπότε η ράβδος κατέρχεται.

Β. Να βρεθούν:

i. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος - m_1 όταν σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 60^o.

ii. Η γωνιακή ταχύτητα ω_1 του συστήματος στην κατακόρυφη θέση.

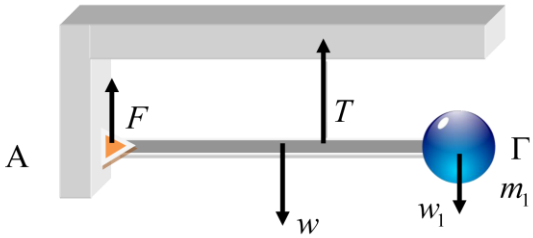
Γ. Στην κατακόρυφη θέση συγκρούεται ελαστικά με σώμα μάζας $m_2 = 5Kg$ που είναι προσδεμένο σε ελατήριο σταθεράς K η άλλη άκρη του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένη. Το σύστημα ελατήριο - m_2 βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα m_2 εκτελεί Α.Α.Τ. με $X = \sqrt{3}\cdot \eta\mu 2t\,(S.I.)$. Τη στιγμή της κρούσης η κινητική ενέργεια της m_2 είναι τριπλάσια της δυναμικής, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς της είναι αρνητικός και αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή. Ως θετική φορά λαμβάνουμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση. Αν αμέσως μετά την κρούση η ράβδος ακινητοποιείται και κατόπιν αφαιρείται, να βρείτε

i. Την ταχύτητα της m_2 τη στιγμή της κρούσης.

ii. Το πλάτος της νέας ταλάντωσης της m_2.

Λύση:

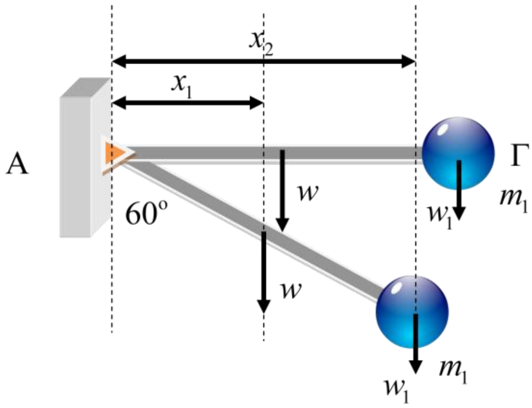
Α.



$$\Sigma\vec{\tau}_{(A)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_{w_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \tau_T = \tau_w + \tau_{w_1} \Leftrightarrow$$

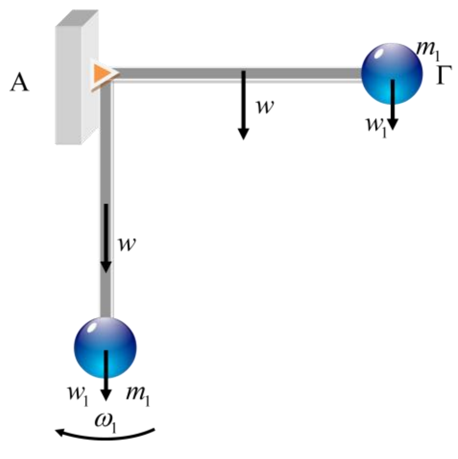
$$\Leftrightarrow T\cdot\frac{2L}{3} = Mg\frac{L}{2} + m_1 gL \Leftrightarrow T = 30N$$

Β. i.



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{\tau} = \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{w_1}$$

$$\Sigma\tau = Mgx_1 + m_1 g x_2 = Mg\sigma\upsilon\nu 30^o\frac{L}{2} + m_1 g\sigma\upsilon\nu 30^o L = 60\sqrt{3}N\cdot m$$



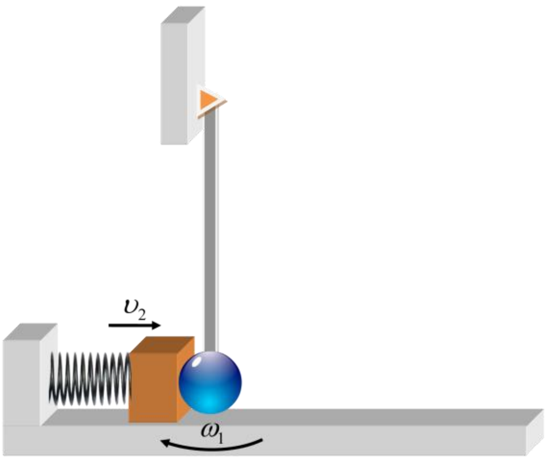
ii. <u>ΘΜΚΕ:</u>

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega_1^2 - 0 = W_w + W_{w_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega_1^2 = Mg\frac{L}{2} + m_1 gL$$

Όπου $I_{o\lambda} = m_1 L^2 + \left[\frac{M \cdot L^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] = 60 Kg \cdot m^2$.

Άρα $\omega_1 = 2 rad/s$



Γ. **i.** Από <u>ΑΔΜΕ:</u>

$$\left.\begin{array}{l} E_{o\lambda} = K + U \\ K = 3U \end{array}\right| \Leftrightarrow E_{o\lambda} = 4U \Leftrightarrow \frac{1}{2} D A^2 = 4\frac{1}{2} D x^2$$

$$x = \pm \frac{A}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} m.$$

$\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = a = -\omega^2 x$ αφού $a < 0$, είναι $x = +\frac{\sqrt{3}}{2} m$ και θα κινηθεί προς τα δεξιά αφού αυξάνει κατ' απόλυτη τιμή.

Χρησιμοποιώντας την ΑΔΜΕ:

$E_{o\lambda} = K + U \Leftrightarrow \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 + \frac{1}{2} K x^2 \Rightarrow \upsilon_2 = \pm 3 m/s$ όπου $K = m_2 \omega^2$

Πρέπει: $\upsilon_2 > 0$ γιατί πριν την κρούση κινείται προς τη θετική κατεύθυνση, άρα $\upsilon_2 = +3 m/s$.

ii. Για την κρούση εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής.

$$\vec{L}_{\Pi P I N} = \vec{L}_{META}$$

$$m_2 \upsilon_2 L - I_{o\lambda} \omega_1 = m_2 \upsilon_2' L + 0 \Leftrightarrow \upsilon_2' = -1 m/s$$

Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ για τη νέα ταλάντωση:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 + \frac{1}{2} K x^2 = 0 + \frac{1}{2} K A'^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 A'^2$$

Άρα $A' = 1m$.

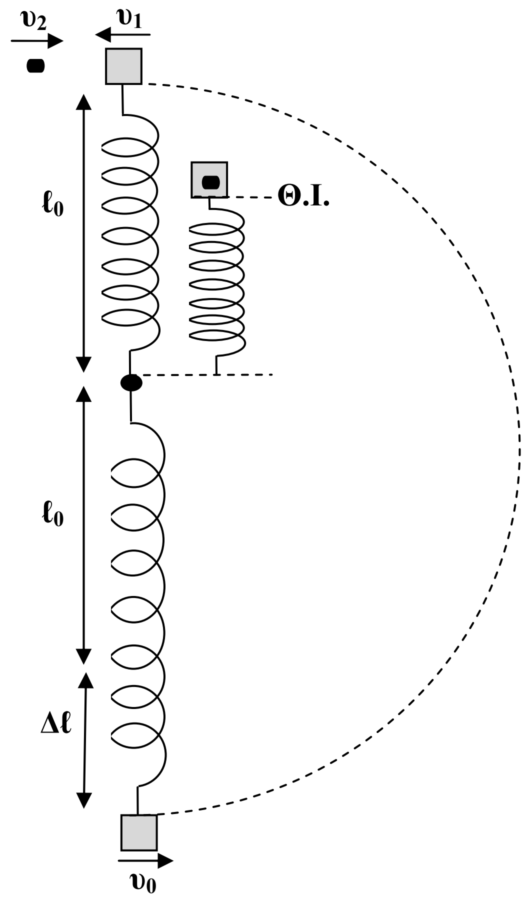
Φυσική θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Θέμα:

Ένα σώμα μάζας m_1, κρέμεται από το ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου φυσικού μήκους l_0, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο σε στήριγμα και ηρεμεί,όπως φαίνεται στο σχήμα.

Προσδίδουμε στο σώμα οριζόντια αρχική ταχύτητα u_0, έτσι ώστε ,όταν το ελατήριο ξαναγίνεται κατακόρυφο για πρώτη φορά, έχει αποκτήσει το φυσικό του μήκος.

Μόλις φτάσει το σώμα σε αυτή τη θέση συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με δεύτερο σώμα μάζας m_2,το οποίο κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα u_2.Αμέσως μετά την κρούση,η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται.



Να υπολογίσετε:

Α) Την αρχική ταχύτητα u_0.

Β) Την ταχύτητα u_2 του δεύτερου σώματος αμέσως πριν την κρούση.

Γ) Την εξίσωση της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δ) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος όταν η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική για δεύτερη φορά.

Δίνονται:

$l_0 = 0.3m, K = 100\, N/m, m_1 = 1kg, m_2 = 1.5kg$

(Θεωρήστε θετική φορά την προς τα πάνω.)

Λύση:

Α) Επειδή στην ανώτερη θέση του, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, θα πρέπει η δύναμη του ελατηρίου να είναι ίση με μηδέν.

Επομένως από τη συνθήκη της κεντρομόλου δύναμης έχουμε:

$$\sum F = F_k \Leftrightarrow m_1 g = \frac{m_1 u_1^2}{l_0} \Leftrightarrow u_1 = \sqrt{g l_0} \Leftrightarrow u_1 = \sqrt{3}\, m/s$$

Επίσης, από τη συνθήκη ισορροπίας του ελατηρίου στην κάτω θέση προκύπτει:

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow K \cdot \Delta l = m_1 g \Leftrightarrow \Delta l = 0.1m$$

Εφαρμόζοντας τώρα Α.Δ.Μ.Ε. για την κατώτερη και την ανώτερη θέση του συστήματος ελατήριο-σώμα συμπεραίνουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{arx} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{tel} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{K}\Delta l^2 + \frac{1}{2} m_1 u_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + m_1 g\left(2l_0 + \Delta l\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_0 = 4\, m/s$$

Β) Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο.

$$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow m_1 u_1 - m_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} m/s$$

Γ) Η εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου προσδιορίζεται από την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς, δηλαδή:

$$F_{επαν} = -Kx \Leftrightarrow F_{ελ} - (m_1 + m_2)g = -Kx \Leftrightarrow F_{ελ} = -KA\eta\mu(\omega t + \varphi_0) + (m_1 + m_2)g$$

Για να υπολογίσουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης,βρίσκουμε την απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του,αμέσως μετά την κρούση.
Από το σχήμα φαίνεται ότι το συσσωμάτωμα ξεκινάει την ταλάντωσή του από τη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, η οποία ισούται με την απόσταση της θέσης ισορροπίας του από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.Επομένως:

$$+A = A\eta\mu\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη συνθήκη ισορροπίας για το συσσωμάτωμα, έχουμε:

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} = (m_1 + m_2)g \Leftrightarrow K\Delta l_2 = (m_1 + m_2)g \Leftrightarrow \Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{K} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta l_2 = 0.25m$$

Επομένως $A = 0.25m$.
Για τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$K = (m_1 + m_2)\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{10} rad/s$$

Τελικά: $F_{ελ} = -25\eta\mu\left(2\sqrt{10}\cdot t + \frac{\pi}{2}\right) + 25$ (S.I)

Δ) $\frac{\Delta K}{\Delta t} = P =$ ΙΣΧΥΣ επομένως $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \overrightarrow{\Sigma F}\cdot\vec{u} = -Kx\cdot u$

Για να βρω το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας,θα πρέπει να υπολογίσω την απομάκρυνση του συσσωματώματος, καθώς και την ταχύτητα του, τη χρονική στιγμή που μας ζητείται.
Από την Α.Δ.Μ.Ε ταλάντωσης

$$K + U = E \Leftrightarrow 2U = E \Leftrightarrow 2\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} \text{ m}$$

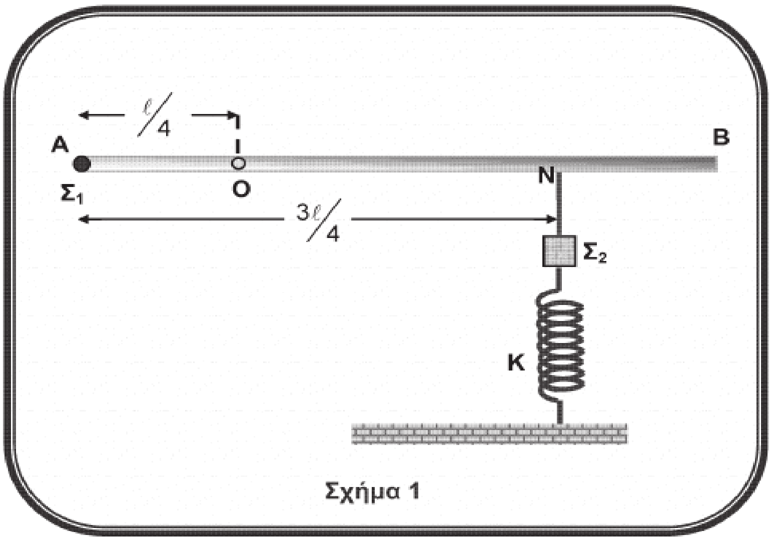
Και από τον ίδιο τύπο: $K + U = E \Leftrightarrow 2K = E \Leftrightarrow u^2 = \omega^2\frac{A^2}{2} \Leftrightarrow u = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ m/s

Για δεύτερη φορά η κινητική ενέργεια ισούται με τη δυναμική, όταν η απομάκρυνση και η ταχύτητα έχουν αρνητικό πρόσημο.Επομένως ο ρυθμός μεταβολής ισούται με:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -Kx\cdot u \Leftrightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = -100\cdot\left(-\frac{0.25}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -6.25\sqrt{10} J/s$$

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ & ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Μια λεπτή και αβαρής ράβδος ΑΒ έχει μήκος $\ell = 6$m και ισορροπεί σε οριζόντια θέση όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Στο άκρο Α της ράβδου βρίσκεται στερεωμένο σφαιρίδιο Σ_1 μάζας m = 2Kg. Η ράβδος μπορεί να περιστραφεί, χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο σημείο Ο που απέχει απόσταση $\frac{\ell}{4}$ από το άκρο Α. Ένα αβαρές, τεντωμένο νήμα συνδέει το σημείο Ν της ράβδου με σώμα Σ_2 μικρών διαστάσεων και μάζας Μ = 5Kg το οποίο είναι στερεωμένο σε ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθερά Κ = 80N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο ενώ το νήμα και ο άξονας το ελατηρίου βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Το σημείο Ν απέχει από το άκρο Α απόσταση $\frac{3\ell}{4}$.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται στη ράβδο και την δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο.

Τη χρονική στιγμή t = 0 κόβουμε το νήμα και ταυτόχρονα στο σημείο Ν της ράβδου ασκούμε μεταβλητού μέτρου δύναμη $\vec{F}$ που δρα συνεχώς κάθετα στη ράβδο. Το σώμα Σ_2 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η ράβδος να στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{γων} = 4\text{rad/s}^2$ με φορά αντίθετη της φοράς κίνησης των δειχτών του ρολογιού.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το Σ_2 και την απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του όταν η ράβδος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = \frac{3\pi}{2}$ rad/s.

γ) Να γράψετε και να παραστήσετε γραφικά τη σχέση της (αλγεβρικής) τιμής της δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με τη γωνία θ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση για $0 \le \theta \le 90^o$.

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου όταν F = 0.

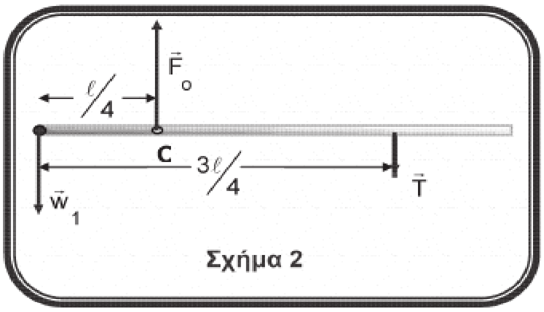
Θεωρήστε πως όλες οι κινήσεις πραγματοποιούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Δίνεται: $συν\frac{3\pi}{10} = 0{,}6$ και $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Στο σύστημα ράβδου – σώματος Σ_1 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος του Σ_1 $\vec{w}_1 = m\vec{g}$
- Η τάση $\vec{T}$ του νήματος
- Η δύναμη $\vec{F}_O$ από τον άξονα περιστροφής.



Σχήμα 2

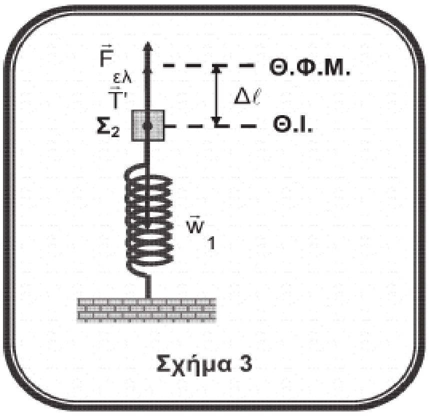
Από τις συνθήκες ισορροπίας για το σύστημα προκύπτει:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{mg(O)} + \tau_{T(O)} + \tau_{F_O(O)} = 0$ ή

$mg\frac{\ell}{4} = T\left(\frac{3\ell}{4} - \frac{\ell}{4}\right)$ ή $T = \frac{mg}{2}$ ή T = 10N

Στο σώμα Σ_2 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος του Σ_2: $\vec{w}_2 = M\vec{g}$ (με $w_2 = Mg = 50N$)
- Η τάση $\vec{T}'$ του νήματος με T' = T = 10N
- Η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ του ελατηρίου η οποία έχει φορά κατακόρυφη προς τα πάνω αφού το Σ_2 ισορροπεί και $T' = 10N < 50N = w_2$.



Σχήμα 3

Από τον 1ο νόμο του Newton για την ισορροπία του Σ_2 προκύπτει:

$\Sigma F = 0$ ή $T' + F_{ελ} = w_2$ ή $T' + K\Delta\ell = w_2$ ή $\Delta\ell = \frac{w_2 - T'}{K}$ ή $\Delta\ell = 0{,}5$m

Επομένως η αποθηκευμένη ενέργεια στο ελατήριο είναι:

$U_{ελ} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2$ ή $U_{ελ} = 10$ J β) Μετά το κόψιμο του νήματος, η θέση που ισορροπούσε το σώμα $Σ_2$ (Θ.Ι.) γίνεται ακραία θέση της ταλάντωσης του η οποία πραγματοποιείται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.) όπου $F'_{ελ} = w_2$ ή $KΔ\ell' = w_2$ ή

$Δ\ell' = \frac{w_2}{K}$ ή $Δ\ell' = 0{,}625m$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του $Σ_2$ είναι: $A = Δ\ell' - Δ\ell$ ή $A = 0{,}125m$

Η ράβδος αρχίζει να εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα με $α_{γων} = 4rad/s^2$ και θα αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $ω = \frac{3π}{2}$ rad/s τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ισχύει: $ω = α_{γων}t_1$ ή

$t_1 = \frac{ω}{α_{γων}}$ ή $t_1 = \frac{3π}{8}$ s.

Η περίοδος της ταλάντωσης του $Σ_2$ είναι: $T = 2π\sqrt{\frac{M}{K}}$ ή $T = \frac{π}{2}$ s.

Παρατηρούμε πως $t_1 = \frac{3T}{4}$. Αφού το $Σ_2$ αρχίζει να ταλαντώνεται από ακραία θέση, τη χρονική στιγμή t_1 θα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας για $2^η$ φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης. Άρα την στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση x = 0.

γ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου – σώματος $Σ_1$ ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση:

$I_{(O)} = m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$

Στο σύστημα ράβδου – σώματος $Σ_1$ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

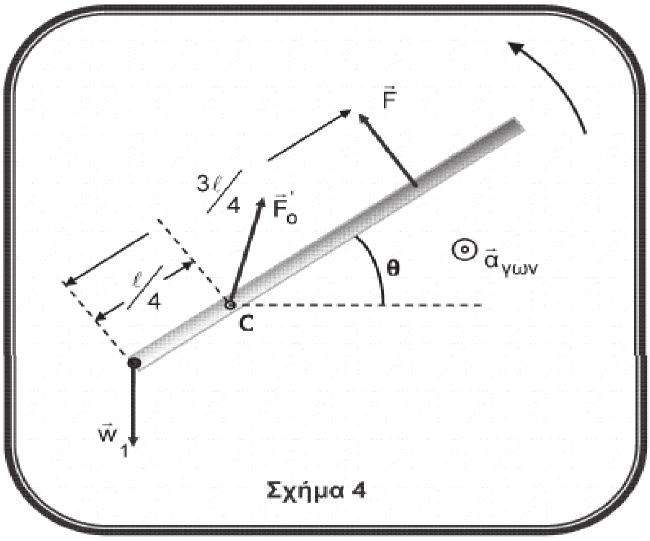
- Το βάρος του $Σ_1$ $\vec{w}_1 = m\vec{g}$
- Η μεταβλητή δύναμη $\vec{F}$.
- Η δύναμη $\vec{F}'_o$ από τον άξονα περιστροφής.

Από το νόμο της στροφικής κίνησης ισχύει:

$Στ_{(O)} = I_{(O)}α_{γων}$ ή $mg\frac{\ell}{4}συνθ - F\frac{\ell}{2} = m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 α_{γων}$ ή $8F =$

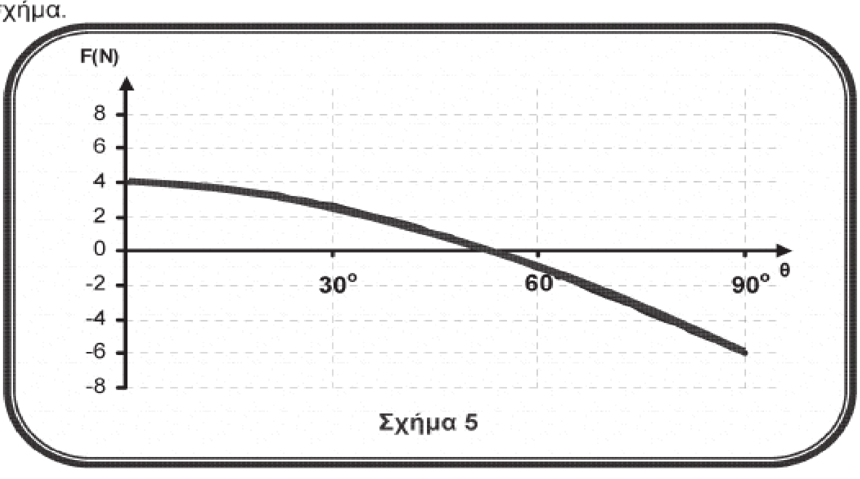
$4mgσυνθ - m\ell α_{γων}$ ή $F = \frac{mg}{2}συνθ - \frac{m\ell}{8}α_{γων}$ ή

$F = 10συνθ – 6$ (S.I.) (1)



Σχήμα 4

Η γραφική παράσταση της τιμής της δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με τη γωνία θ ($0≤θ≤90^o$) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5

δ) Όταν F = 0 η ράβδος θα έχει περιστραφεί κατά γωνία θ'. Από τη σχέση (1) για τη γωνία θ' ισχύει:

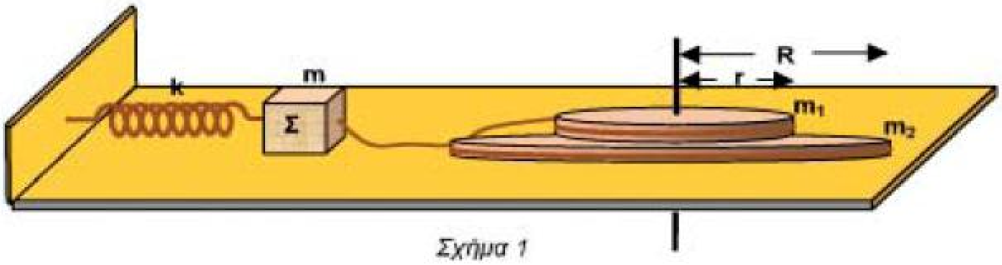
$10συνθ' – 6 = 0$ ή $συνθ' = 0{,}6$ ή $θ' = \frac{3π}{10}$ rad. Τότε προκύπτει: $θ' = \frac{1}{2}α_{γων}t^2$ ή $t = \sqrt{\frac{2θ'}{α_{γων}}}$ ή $t = \sqrt{\frac{3π}{20}}$ s

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου τότε είναι:

$$\frac{dK}{dt} = Στ_{(O)}ω \text{ ή } \frac{dK}{dt} = I_{(O)}α_{γων}α_{γων}t \text{ ή } \frac{dK}{dt} = I_{(O)}α^2_{γων}t \text{ ή } \frac{dK}{dt} = m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 α^2_{γων}t \text{ ή } \frac{dK}{dt} = 72\sqrt{\frac{3π}{20}}\frac{J}{s}$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ - ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Η διπλή τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο ομόκεντρους οριζόντιους ομογενείς δίσκους με ακτίνες r και $R = 0,2m$ ($R>r$) και μάζες $m_1 = 2Kg$ και $m_2 = 2,5Kg$, αντίστοιχα. Οι δύο δίσκοι μπορούν να περιστραφούν ως ένα σώμα, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον προηγούμενο άξονα είναι $I = 0,06Kg{\cdot}m^2$. Γύρω από τους δίσκους έχουν τυλιχθεί ανθεκτικά, μη ελαστικά αβαρή νήματα.



Σχήμα 1

Ο μικρότερος δίσκος μέσω του αρχικά χαλαρού νήματος συνδέεται με σώμα Σ μάζας $m = 2Kg$ που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και εξαρτάται από οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 200N/m$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ελατήριο αρχικά έχει το φυσικό του μήκος. Ακαριαία δίνουμε γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_o = \frac{80}{3}$ rad/s στην τροχαλία που αρχίζει να περιστρέφεται έτσι ώστε το χαλαρό νήμα να τεντώνεται.

Να υπολογίσετε

α) την ακτίνα r του μικρότερου δίσκου της τροχαλίας

β) τη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας αμέσως μετά το τέντωμα του νήματος.

Αμέσως μετά το τέντωμα του νήματος ασκούμε στο άκρο του τεντωμένου νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω από το μεγαλύτερο δίσκο οριζόντια μεταβλητή δύναμη $\vec{F}$ με διεύθυνση κάθετη στον άξονα του ελατηρίου έτσι ώστε η τροχαλία να συνεχίσει να στρέφεται με τη γωνιακή ταχύτητα που απέκτησε μετά το τέντωμα του νήματος.

Όταν η τροχαλία έχει περιστραφεί κατά $\Delta\varphi = 2\sqrt{3}$ rad κόβουμε το νήμα μεταξύ σώματος Σ και τροχαλίας και σταματάμε να ασκούμε τη δύναμη $\vec{F}$. Να βρείτε

γ) το μέτρο i. της δύναμης $\vec{F}$ και ii. της οριζόντιας δύναμης $\vec{A}$ που ασκείται στην τροχαλία από τον άξονα ελάχιστα πριν κόψουμε το νήμα

δ) το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ

ε) το πλήθος των περιστροφών της τροχαλίας τη στιγμή που το σώμα Σ έχει ολοκληρώσει μία ταλάντωση.

Θεωρήστε πως τα νήματα δεν ολισθαίνουν πάνω στους δίσκους και πως το πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ είναι τέτοιο ώστε να μην προσκρούει πάνω στην τροχαλία.

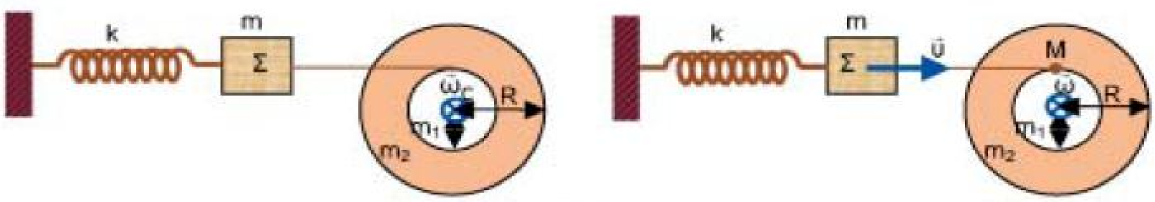
Δίνεται: η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

ΛΥΣΗ

α) Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό της που διέρχεται από το κέντρο της είναι: $I = \frac{1}{2}m_1r^2 + \frac{1}{2}m_2R^2$ ή $2{\cdot}I = m_1r^2 + m_2R^2$ ή $r = \sqrt{\frac{2\cdot I - m_2R^2}{m_1}}$ ή $r = 0,1m$.

β) Επειδή ο χρόνος που διαρκεί το τέντωμα του νήματος είναι πολύ μικρός μπορούμε να ισχυριστούμε πως η στροφορμή του συστήματος της τροχαλίας με το σώμα Σ παραμένει σταθερή, δηλαδή ισχύει:

$\vec{L}_{συσ,αρχ} = \vec{L}_{συσ,τελ}$ ή $I{\cdot}\omega_o = m{\cdot}\upsilon{\cdot}r + I{\cdot}\omega$ (1)



Σχήμα 2

Όμως το σημείο Μ του μικρού δίσκου έχει την ίδια γραμμική ταχύτητα με το σώμα Σ αφού το νήμα είναι συνεχώς τεντωμένο. Επομένως: $\upsilon = \omega{\cdot}r$ ή $\omega = \frac{\upsilon}{r}$ (2)

Η σχέση (1) με τη βοήθεια της σχέσης (2) γίνεται: ή $I\cdot\omega_o = m\cdot\upsilon\cdot r + I\frac{\upsilon}{r}$ ή $I\cdot\omega_o\cdot r = m\cdot\upsilon\cdot r^2 + I\upsilon$ ή $\upsilon = \frac{I\cdot\omega_o\cdot r}{m\cdot r^2 + I}$ ή

$\upsilon = 2m/s$

Συνεπώς, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ με την οποία περιστρέφεται η τροχαλία μετά το τέντωμα του νήματος είναι:

$\omega = \frac{\upsilon}{r}$ ή $\omega = 20rad/s$

γ) Η τροχαλία στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται σε αυτή είναι:

- οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$
- η δύναμη $\vec{A}$ από τον άξονα

Για την κίνηση της τροχαλίας ισχύει:

$\Sigma\tau_{(o)} = 0$ ή $T_2R = T_1r$ (3)

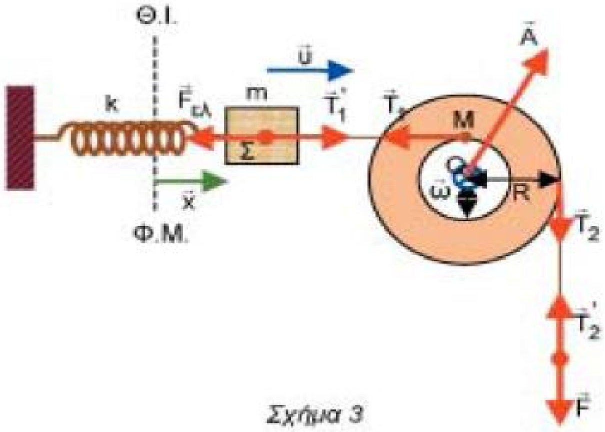
Στο σώμα Σ ασκούνται οι εξής οριζόντιες δυνάμεις:

- η τάση του νήματος $\vec{T}_1'$ και
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$

Το σώμα Σ κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 2m/s$.

Από τον 1° νόμο του Newton για την κίνηση του σώματος Σ παίρνουμε: $\Sigma F_x = 0$ ή $T_1' = F_{\varepsilon\lambda}$ ή $T_1' = k\cdot x$ (4), όπου x η επιμήκυνση του ελατηρίου.

Αφού τα νήματα είναι αβαρή ισχύει: $T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2 = F$ (5)



Σχήμα 3

Οι σχέσεις (3) και (4) μέσω των σχέσεων (5) γίνονται: $F\cdot R = T_1\cdot r$ και $T_1 = k\cdot x$ και τελικά:

$F\cdot R = k\cdot x\cdot r$ ή $F = \frac{k\cdot x\cdot r}{R}$ (6)

Ελάχιστα πριν κόψουμε το νήμα το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί τόσο όσο είναι το μήκος του νήματος που έχει τυλιχθεί επιπλέον στο μικρό δίσκο, δηλαδή $x = \upsilon\cdot\Delta t = \omega\cdot r\cdot\Delta t = r\cdot\Delta\varphi$ (7), όπου Δφ η γωνιακή μετατόπιση της τροχαλίας.

Επομένως η σχέση (6) μέσω της σχέσης (7) γίνεται: $F = \frac{K\cdot\Delta\varphi\cdot r^2}{R}$ ή $F = 20\sqrt{3}$ N.

Την ίδια χρονική στιγμή το μέτρο της $\vec{T}_1$ είναι: $T_1 = T_1' = k\cdot x$ ή $T_1 = k\cdot r\cdot\Delta\varphi$ ή

$T_1 = 40\sqrt{3}$ N ενώ της $\vec{T}_2$ είναι: $T_2 = F$ ή $T_2 = 20\sqrt{3}$ N.

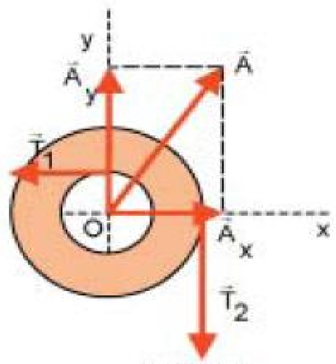
Αφού το κέντρο μάζας της τροχαλίας δεν κινείται ($\upsilon_{cm} = 0$) ισχύει:

$\Sigma F_x = 0$ ή $A_x = T_1$ ή $A_x = 40\sqrt{3}$ N και

$\Sigma F_y = 0$ ή $A_y = T_2$ ή $A_y = 20\sqrt{3}$ N.

Επομένως για το μέτρο της δύναμης $\vec{A}$ παίρνουμε:

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ή $A = 20\sqrt{15}$ N



Σχήμα 4

δ) Τη στιγμή που κόβεται το νήμα η απομάκρυνση του σώματος Σ είναι $x = r\cdot\Delta\varphi$ ή $x = 0{,}2\sqrt{3}$ m και η ταχύτητα του $\upsilon = 2m/s$.

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε:

$K + U = E$ ή $\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $A = \sqrt{x^2 + \frac{mu^2}{k}}$ ή $A = 0{,}4m$.

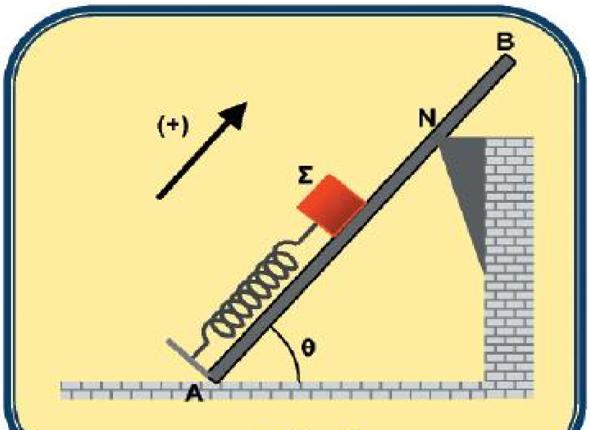
ε) Το σώμα Σ θα ολοκληρώσει μία ταλάντωση σε χρόνο $\Delta t = T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ή $\Delta t = 0{,}2\pi$ s.

Σε αυτό το χρονικό διάστημα η τροχαλία θα έχει περιστραφεί κατά $\Delta\varphi' = \omega\cdot\Delta t$ ή $\Delta\varphi' = 4\pi$ rad

Το πλήθος των περιστροφών της υπολογίζεται από τη σχέση: $N = \frac{\Delta\varphi'}{2\pi}$ ή $N = 2$.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Μια λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους ℓ = 2m και μάζας M = 4Kg ισορροπεί στηριζόμενη σε λείο, οριζόντιο επίπεδο σχηματίζοντας γωνία θ με αυτό και σε άρθρωση που βρίσκεται σε σημείο της Ν με (ΑΝ) = $\frac{3}{4}\ell$. Η ράβδος μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το Ν και είναι κάθετος στη ράβδο. Στο άκρο Α της ράβδου βρίσκεται αβαρές στέλεχος όπου συνδέεται ακλόνητα, ιδανικό ελατήριο σταθεράς K = 200N/m. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου ισορροπεί σώμα Σ πολύ μικρών διαστάσεων και μάζας m = 5Kg. Ο άξονας του ελατηρίου είναι παράλληλος με τη ράβδο και η θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) του σώματος Σ απέχει απόσταση $\frac{\ell}{2}$ από το άκρο Α.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε το φυσικό μήκος ℓ_o του ελατηρίου.

Συσπειρώνουμε επιπλέον το ελατήριο κατά d και την χρονική στιγμή t = 0s αφήνουμε το σώμα να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη χημική ενέργεια που μπορεί να προσφερθεί στο σύστημα ελατηρίου – σώματος Σ ώστε η ράβδος μόλις που να μην ανατρέπεται.

γ) Για την παραπάνω τιμή της χημικής ενέργειας, να γράψετε την χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. της απλής αρμονικής ταλάντωσης και να απεικονίσετε γραφικά το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το οριζόντιο επίπεδο σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν η κάθετη αντίδραση $\vec{N}_A$ που ασκείται στη ράβδο από το οριζόντιο επίπεδο αποκτήσει μέτρο N_A = 30N.

Δίνονται: ημθ =0,8, g = 10m/s^2, $\sqrt{10}$ = π.

Θεωρήστε πως η ταλάντωση πραγματοποιείται χωρίς τριβές και θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση

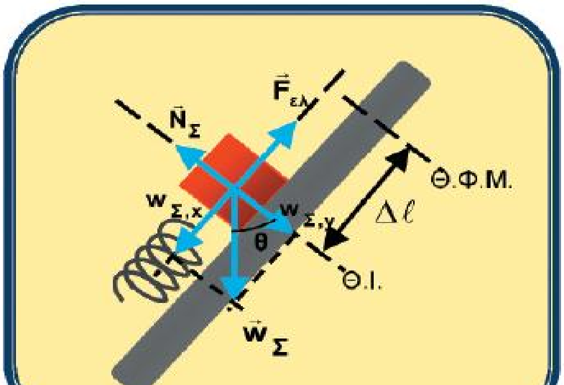
α) Όταν το σώμα Σ είναι ακίνητο του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_\Sigma = m\vec{g}$ που αναλύεται σε δύο συνιστώσες: $w_{\Sigma,x}$ = mgημθ και $w_{\Sigma,y}$ = mgσυνθ
- Η κάθετη αντίδραση $\vec{N}_\Sigma$ από τη ράβδο και
- Η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$.

Στη Θ.Ι. σύμφωνα με τον 1^o νόμο του Newton, ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } F_{ελ} = w_{\Sigma,x} \text{ ή } K\cdot\Delta\ell = mgημθ \text{ ή } \Delta\ell = \frac{mgημθ}{K} \text{ ή}$$

$$\Delta\ell = 0{,}2\text{m}$$

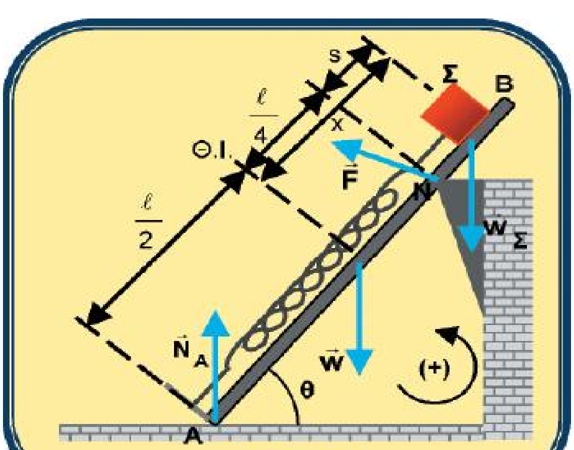


Σχήμα 2

Αφού η θέση ισορροπίας του σώματος Σ απέχει απόσταση $\frac{\ell}{2}$ από το άκρο Α, η θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ) απέχει από το άκρο Α απόσταση $\ell_o = \frac{\ell}{2} + \Delta\ell$ ή $\boldsymbol{\ell_o = 1{,}2}$**m**

β) Στο σύστημα ράβδου – σώματος Σ ασκούνται οι εξής (εξωτερικές) δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w} = M\vec{g}$ που αναλύεται σε δύο συνιστώσες: w_x = Mgημθ και w_y = Mgσυνθ
- Η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση
- Η κάθετη αντίδραση $\vec{N}_A$ από το οριζόντιο επίπεδο και
- Το βάρος $\vec{w}_\Sigma$ του σώματος Σ



Σχήμα 3

Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ και ενώ αυτό βρίσκεται σε μια τυχαία θέση μετατοπισμένο κατά s από το σημείο Ν λόγω της ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο Ν είναι μηδέν. Επομένως ισχύει: $\Sigma\tau_{(N)} = 0$ ή

$\tau_{N_A(N)} + \tau_{W(N)} + \tau_{F(N)} + \tau_{W_\Sigma(N)} = 0$ ή $w\dfrac{\ell}{4}$ συνθ – $w_\Sigma s$συνθ – $N_A\dfrac{3\ell}{4}$ συνθ = 0 ή

$Mg\ell - 4mgs - 3N_A\ell = 0$ ή $N_A = \dfrac{g}{3\ell}(M\ell - 4ms)$ (1)

Για την τιμή της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}_A$, ισχύει:

$N_A \geq 0$ ή $M\ell - 4ms \geq 0$ ή $s \leq \dfrac{M}{4m}\ell$

Άρα η μέγιστη (αλγεβρική) τιμή της μετατόπισης s είναι: $s_{max} = \dfrac{M}{4m}\ell$ ή $s_{max} = 0{,}4m$

Αφού το σώμα αφήνεται (υ = 0m/s) έχοντας συσπειρώσει επιπλέον το ελατήριο κατά d, το πλάτος Α της ταλάντωσης ισούται με την επιπλέον συσπείρωση d του ελατηρίου.
Για να μην ανατρέπεται μόλις η ράβδος, το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να είναι:

$A = d = \dfrac{\ell}{4} + s_{max}$ ή d = A = 0,9m.

Άρα η χημική ενέργεια που προσφέρθηκε είναι: $E_{χημ} = \dfrac{1}{2}Kd^2$ ή $\mathbf{E_{χημ} = 81J}$

γ) Για την ταλάντωση του σώματος Σ η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = 2\sqrt{10}\ rad/s = 2\pi$ rad/s και για τη χρονική στιγμή t = 0s ισχύει: x = -d = –A (και υ = 0m/s).
Από τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ για τη χρονική στιγμή t = 0s παίρνουμε:

$-A = A\eta\mu\varphi_o$ ή $\eta\mu\varphi_o = -1$ ή $\varphi_o = \dfrac{3\pi}{2}$ rad.

Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας προκύπτει: $x = 0{,}9\eta\mu\left(2\pi t + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ (S.I.)

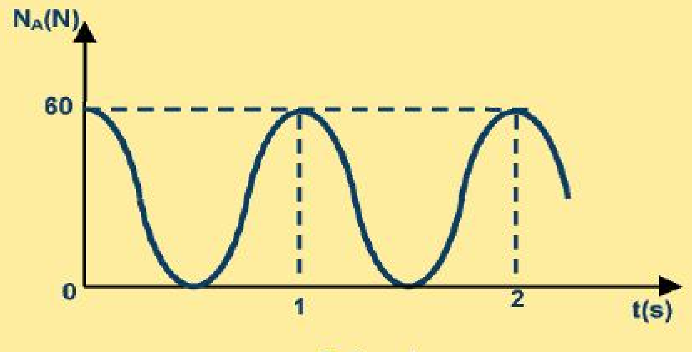
Ισχύει: $x = \dfrac{\ell}{4} + s$ ή $s = x - \dfrac{\ell}{4}$.

Επομένως η σχέση (1) γίνεται: $N_A = \dfrac{g}{3\ell}\left[M\ell - 4m\left(x - \dfrac{\ell}{4}\right)\right]$ ή $N_A = \dfrac{g}{3\ell}\left[(M+m)\ell - 4mx\right]$ ή

$N_A = 30 - \dfrac{100}{3}x$ (2) ή $N_A = 30 - \dfrac{100}{3}0{,}9\eta\mu\left(2\pi t + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ή $\mathbf{N_A = 30 - 30\eta\mu\left(2\pi t + \dfrac{3\pi}{2}\right)}$ (S.I.)

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ή $T = \dfrac{2\pi}{2\pi}$ s ή T = 1s.

Η γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης $\vec{N}_A$ σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4

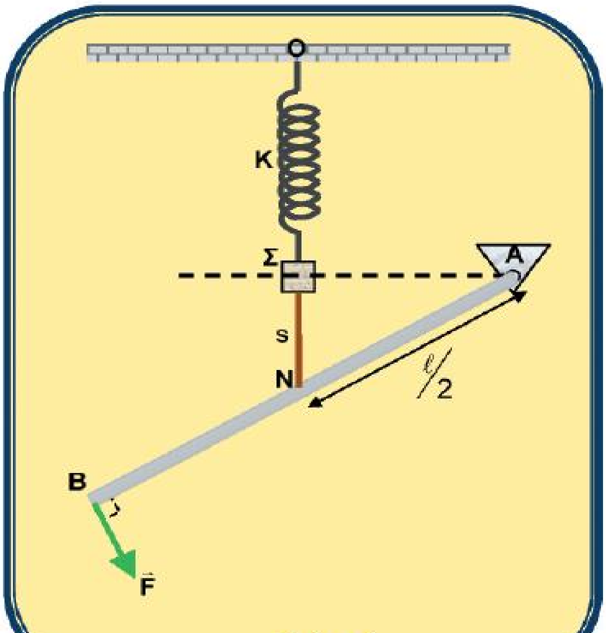
δ) Όταν N_A = 30N από τη σχέση (2) ισχύει: $30 = 30 - \dfrac{100}{3}x$ ή x = 0m.

Επομένως το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell = 0{,}2m$.

Η αποθηκευμένη ενέργεια στο ελατήριο προκύπτει: $U_{ελ} = \dfrac{1}{2}K(\Delta\ell)^2$ ή $\mathbf{U_{ελ} = 4J}$

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ένα σώμα Σ μάζας m = 2Kg αναρτάται σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K = 500N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο Ο της οροφής. Το σώμα Σ συνδέεται μέσω κατακόρυφου, αβαρούς και μη ελαστικού νήματος μήκους $s = 0{,}25\sqrt{3}$ m με το μέσο Ν λεπτής και ομογενούς ράβδου ΑΒ, μήκους ℓ = 1m και μάζας M = 1Kg που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στη διεύθυνση της που διέρχεται από το άκρο της Α. Στο άκρο Β ασκείται δύναμη $\vec{F}$, κάθετα στη διεύθυνση της ράβδου (σχήμα 1). Η δύναμη $\vec{F}$ και η ράβδος βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Έτσι το ελατήριο εμφανίζει επιμήκυνση $\Delta\ell$ = 0,1m ενώ το σώμα Σ βρίσκεται στο ίδιο ύψος από το έδαφος με το άκρο Α της ράβδου. Τα σώματα της διάταξης του σχήματος 1 ισορροπούν.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

β) Να βρείτε τη δύναμη $\vec{F}_A$ που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής.

Κόβουμε το νήμα οπότε το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η ράβδος να περιστρέφεται.

γ) Να βρείτε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ.

δ) Να απεικονίσετε γραφικά το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου σε συνάρτηση με τη γωνία που σχηματίζει με την κατακόρυφο μέχρι να βρεθεί σε κατακόρυφη θέση.

Θεωρήστε πως το τεντωμένο νήμα και ο άξονας του ελατηρίου βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο και πως η δύναμη $\vec{F}$ δρά συνεχώς κάθετα στη ράβδο.

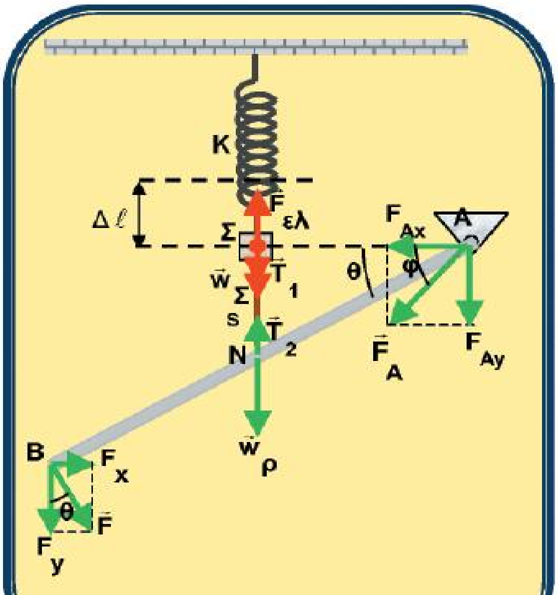
Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας ($g = 10 m/s^2$), η ροπή αδράνεια της ράβδου ως προς το άκρο Α ($I_{ραβ(A)} = \frac{1}{3}M\ell^2$.

Λύση

α) Ισχύει: $ημθ = \frac{s}{\ell/2}$ ή $ημθ = \frac{2s}{\ell}$ ή $ημθ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $θ = 60^o$

Όταν το σώμα Σ είναι ακίνητο του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_Σ = m\vec{g}$
- Η τάση $\vec{T}_1$ του νήματος
- Η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$.



Σχήμα 2

Λόγω της ισορροπίας, σύμφωνα με τον 1° νόμο του Newton, ισχύει:

$ΣF_Σ = 0$ ή $F_{ελ} = mg + T_1$ ή $T_1 = F_{ελ} - mg$ ή $T_1 = KΔ\ell - mg$ (1)

Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Η δύναμη $\vec{F}$ που αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες $\left(F_x, F_y\right)$
- Το βάρος $\vec{w}_ρ = M\vec{g}$
- Η τάση $\vec{T}_2$ του νήματος
- Η δύναμη $\vec{F}_A$ από τον άξονα περιστροφής που αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες $\left(F_{Ax}, F_{Ay}\right)$.

Από τις συνθήκες ισορροπίας για τη ράβδο προκύπτει:

$ΣF_x = 0$ ή $F_{Ax} = F_x = Fημθ$ ή $F_{Ax} = F\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2)

$ΣF_y = 0$ ή $F_y + Mg + F_{Ay} = T_2$ ή $Fσυνθ + Mg + F_{Ay} = T_2$ (3)

Αφού το νήμα είναι αβαρές, ισχύει: $T_1 = T_2 = T$ (4)

Η σχέση (3) μέσω των σχέσεων (1) και (4) γίνεται: $F συνθ + Mg + F_{Ay} = K\Delta\ell - mg$ ή
$F_{Ay} = K\Delta\ell - F συνθ - (m+M)g$ (5)

Ακόμα $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_{F(A)} + \tau_{w_\rho(A)} + \tau_{T_2(A)} + \tau_{F_A(A)} = 0$ ή $F\ell + w_\rho συνθ\dfrac{\ell}{2} - T_2 συνθ\dfrac{\ell}{2} = 0$ ή $2F = (T_2 - Mg)συνθ$ ή

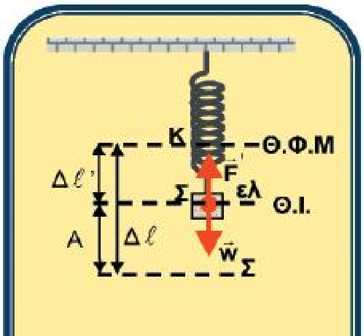
(μέσω των σχέσεων 1 και 4) $F = \dfrac{T - Mg}{2}συνθ$ ή $F = \dfrac{K\Delta\ell - (m+M)g}{2}συνθ$ ή $\mathbf{F = 5N}$

β) Οι συνιστώσες της δύναμης $\vec{F}_A$ προκύπτουν:

- ✓ Από τη σχέση (2), $F_{Ax} = 2{,}5\sqrt{3}$ N
- ✓ Από τη σχέση (5), $F_{Ay} = 17{,}5$N

Το μέτρο της $\vec{F}_A$ είναι: $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$ ή $\mathbf{F_A = 5\sqrt{13}\ N}$

ενώ για την διεύθυνσή της, ισχύει: $εφφ = \dfrac{F_{Ay}}{F_{Ax}}$ ή $\mathbf{εφφ = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$



Σχήμα 3

γ) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι: $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$ ή

$\omega = 5\sqrt{10}$ rad/s

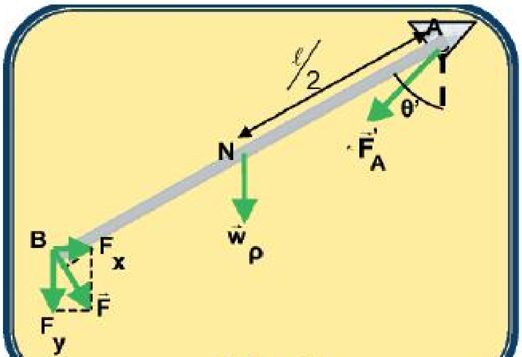
Μετά το κόψιμο του νήματος η θέση όπου το ελατήριο ήταν επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$ γίνεται ακραία θέση της ταλάντωσης και στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) του σώματος Σ το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$.

Στη θέση ισορροπίας ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή $F'_{ελ} = w_\Sigma$ ή $K\Delta\ell' = mg$ ή $\Delta\ell' = \dfrac{mg}{K}$

ή $\Delta\ell' = 0{,}04$m

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι: $A = \Delta\ell - \Delta\ell'$ ή
$A = 0{,}06$m

Έτσι το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος Σ προκύπτει: $υ_{max} = \omega A$ ή $\mathbf{υ_{max} = 0{,}3\sqrt{10}\ m/s}$



Σχήμα 4

δ) Μετά το κόψιμο του νήματος θεωρούμε τη ράβδο σε μια τυχαία θέση που σχηματίζει γωνίας θ' με την κατακόρυφο. Της ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Η δύναμη $\vec{F}$
- Το βάρος $\vec{w}_\rho = M\vec{g}$
- Η δύναμη $\vec{F}'_A$ από τον άξονα περιστροφής

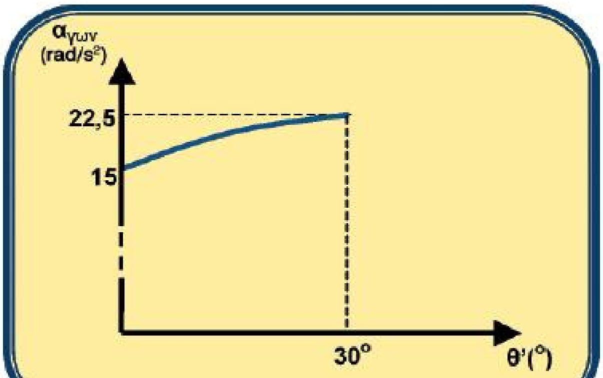
Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει:

$\Sigma\tau_{(A)} = I_{ραβ(A)}\alpha_{γων}$ ή ή $F\ell + w_\rho\dfrac{\ell}{2}ημθ' = \dfrac{1}{3}M\ell^2\alpha_{γων}$ ή

$\alpha_{γων} = \dfrac{3F}{M\ell} + \dfrac{3g}{2\ell}ημθ'$ ή

$\mathbf{\alpha_{γων} = 15 + 15ημθ'}$ (S.I.)

όπου θ' η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο με $0 \le θ' \le 30^o$.

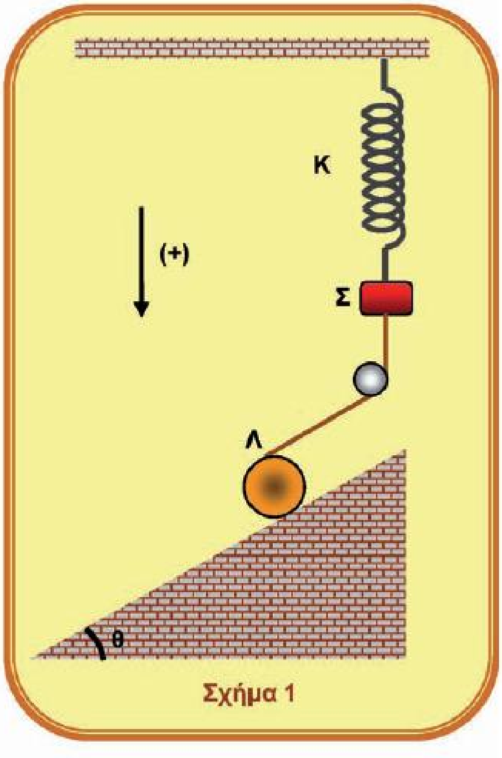


Σχήμα 5

Η γραφική παράσταση το μέτρου της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου σε συνάρτηση με τη γωνία θ΄ μέχρι να βρεθεί στην κατακόρυφη θέση φαίνεται στο σχήμα 5.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΚΥΛΙΣΗ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ

Η διάταξη του σχήματος περιλαμβάνει ένα λεπτό, ομογενή δίσκο μάζας $m = 8Kg$ και ακτίνας R ο οποίος βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ, ένα σώμα Σ μάζας $M = 4Kg$ αναρτημένο σε ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K = 100N/m$ το πάνω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο της οροφής και μία αβαρή τροχαλία. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο λεπτό, αβαρές νήμα. Το ένα άκρο του νήματος είναι στερεωμένο στο ανώτερο σημείο (σημείο Λ) του δίσκου ενώ το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στο σώμα Σ. Το τμήμα του νήματος μεταξύ της τροχαλίας και του δίσκου είναι παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο ενώ εκείνο μεταξύ της τροχαλίας και του σώματος Σ είναι κατακόρυφο. Αρχικά όλα τα σώματα ισορροπούν ακίνητα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε ταυτόχρονα τα νήματα μεταξύ τροχαλίας – δίσκου και τροχαλίας – σώματος Σ. Ο δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή επιτάχυνση και το σώμα Σ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ η μέγιστη δύναμη επαναφοράς που του ασκείται έχει μέτρο $F_{max} = 20N$.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε το πλάτος Α της ταλάντωσης του σώματος Σ και τη φάση της τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{\pi}{20}$ s.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής που ασκείται στο δίσκο πριν κόψουμε τα νήματα.

Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης ο δίσκος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_2 = 2\pi$ rad/s.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου και την ακτίνα του.

Όταν το σώμα Σ έχει διανύσει διάστημα $s = 1m$, να υπολογίσετε:

δ) την κινητική ενέργεια του δίσκου

ε) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου λόγω στροφικής κίνησης

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του που διέρχεται από το κέντρο του $I_{cm} = \dfrac{1}{2}mR^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, $\pi^2 = 10$.

Θεωρήστε πως το επίπεδο του δίσκου είναι κατακόρυφο σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου και θετική φορά τη φορά προς τα κάτω.

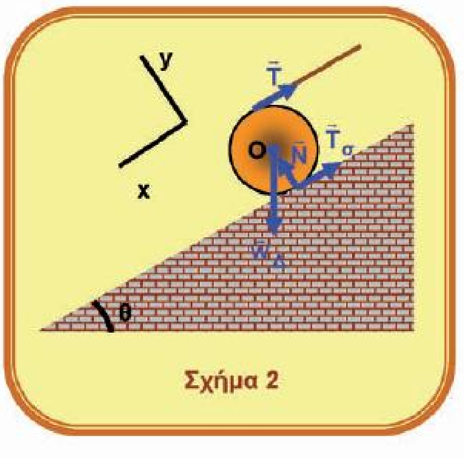
<u>**Λύση**</u>

α) Για το σύστημα ελατηρίου – σώματος Σ η σταθερά επαναφοράς είναι $D = K$. Το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς είναι: $F_{max} = DA$. Άρα $A = \dfrac{F_{max}}{D}$ ή $A = 0{,}2m$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κατά την οποία κόβουμε τα νήματα, το σώμα Σ δεν έχει ταχύτητα. Επομένως η θέση όπου βρίσκεται τότε αποτελεί ακραία θέση της ταλάντωσης του ($x = +A$).

Για $t = 0$, $x = +A$ από τη χρονική εξίσωση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, προκύπτει: $\eta\mu\varphi_o = +1$ ή $\varphi_o = \dfrac{\pi}{2}$ rad. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{M}}$ ή $\omega = 5$rad/s.

Επομένως η φάση φ_1 της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = t_1$ προκύπτει: $\varphi_1 = \omega t_1 + \varphi_o$ ή $\varphi_1 = \dfrac{3\pi}{4}$ rad.



Σχήμα 2

β) Στο δίσκο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος του δίσκου $\vec{w}_\Delta \left(w_\Delta = mg\right)$
  Το βάρος αναλύεται σε δύο συνιστώσες:
  $w_{\Delta,x} = w_\Delta\eta\mu\theta = mg\eta\mu\theta$ και $w_{\Delta,y} = w_\Delta\sigma\upsilon\nu\theta = mg\sigma\upsilon\nu\theta$
- Η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$
- Η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από το επίπεδο
- Η τάση του νήματος $\vec{T}$

Από τη συνθήκη της στροφικής ισορροπίας του δίσκου ισχύει:

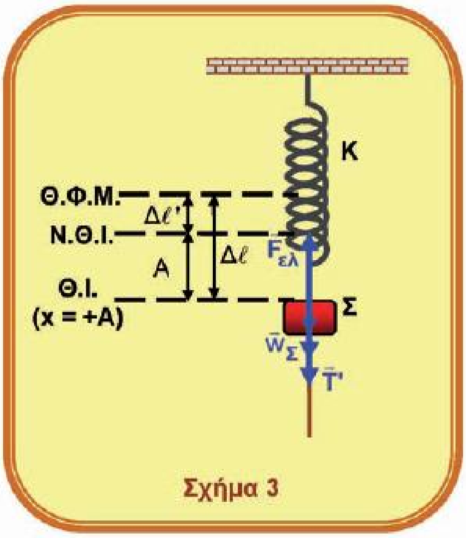
$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $T_\sigma R - TR = 0$ ή $T_\sigma = T\,(1)$

Από τη συνθήκη της μεταφορικής ισορροπίας του δίσκου ισχύει:

$\Sigma F_x = 0$ ή $T_\sigma + T = mg\eta\mu\theta\,(2)$

Στο σώμα Σ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_\Sigma\ (w_\Sigma = Mg)$
- Η τάση $\vec{T}'$ του νήματος (με T' = T αφού το νήμα και η τροχαλία είναι αβαρείς)
- Η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}\ (F_{\varepsilon\lambda} = K\Delta\ell)$



Σχήμα 3

Μετά το κόψιμο των νημάτων, η ταλάντωση του σώματος Σ πραγματοποιείται γύρω από νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.). Στη Ν.Θ.Ι. το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$ και ισχύει:

$F'_{\varepsilon\lambda} = Mg$ ή $K\Delta\ell' = Mg$ ή $\Delta\ell' = \frac{Mg}{K}$ ή $\Delta\ell' = 0{,}4\text{m}$.

Ισχύει: $\Delta\ell = A + \Delta\ell'$ ή $\Delta\ell = 0{,}6\text{m}$

Για την ισορροπία του σώματος Σ στη Θ.Ι., ισχύει:

$\Sigma F = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = T + Mg$ ή $K\Delta\ell = T + Mg\,(3)$

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει:

$K\Delta\ell = T_\sigma + Mg$ ή $T_\sigma = K\Delta\ell - Mg$ ή $T_\sigma = 20\text{N}$

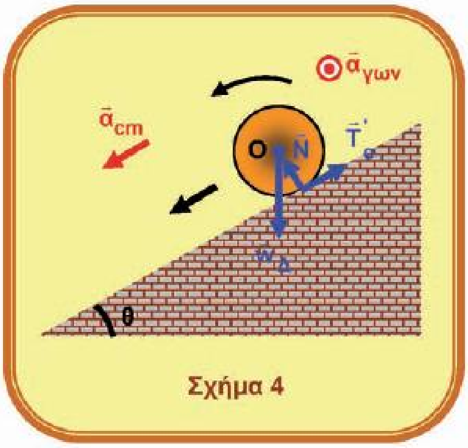
γ) Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ μηδενίζεται κάθε φορά που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (Ν.Θ.Ι.). Για 2^η φορά συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{3T}{4}$ ή $t_2 = \frac{3\pi}{2\omega}$ ή $t_2 = 0{,}3\pi$ s.

Αφού ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα για τη γωνιακή ταχύτητα του ισχύει:

$\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_2}{t_2}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{20}{3}\ \text{rad/s}^2$.

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$\eta\mu\theta = \frac{T_\sigma + T}{mg}$ ή $\eta\mu\theta = 0{,}5$.



Σχήμα 4

Μετά το κόψιμο του νήματος για την κίνηση του δίσκου

- από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει:

  $\Sigma\tau_{(O)} = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $T'_\sigma R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $T'_\sigma = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu}\ (4)$

- από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, προκύπτει:

  $\Sigma F = m\alpha_{cm}$ ή $mg\eta\mu\theta - T'_\sigma = m\alpha_{cm}$ ή $mg\eta\mu\theta - T'_\sigma = mR\alpha_{\gamma\omega\nu}\ (5)$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$mg\eta\mu\theta - \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu} = mR\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $mg\eta\mu\theta = \frac{3}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή

$R = \frac{2g\eta\mu\theta}{3\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ ή $R = 0{,}5\text{m}$

δ) Σε κάθε ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ διανύει απόσταση 4A = 0,8m. Όταν έχει διανύσει διάστημα s = 1m έχει εκτελέσει $N = \frac{s}{4A} = 1{,}25$ ταλαντώσεις και έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα $\Delta t = NT = N\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ s.

Η κινητική ενέργεια του δίσκου τότε είναι:

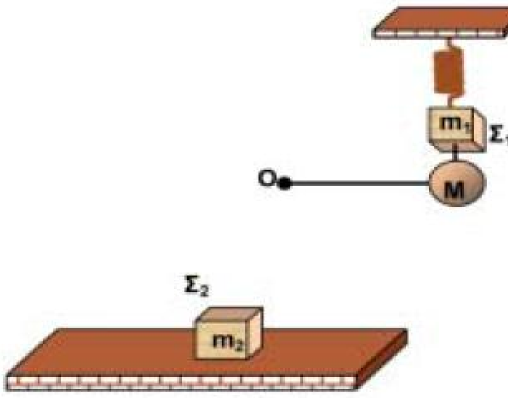
$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ ή $K = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{4}m\omega^2R^2$ ή $K = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$ ή $K = \frac{3}{4}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}^2 t^2$

Για $t = \Delta t = \frac{\pi}{2}$ s, προκύπτει: $K = \frac{500}{3}$ J.

ε) Είναι: $\frac{dK_\sigma}{dt} = \Sigma\tau_{(o)}\omega$ ή $\frac{dK_\sigma}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\alpha^2_{\gamma\omega\nu}t$ ή $\frac{dK_\sigma}{dt} = \frac{200\pi}{9}$ J / s.

ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Μία σφαίρα μάζας M = 1Kg ισορροπεί με τη βοήθεια δύο αβαρών και μη εκτατών νημάτων που είναι προσδεδεμένα σε ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 = 1Kg το πρώτο και σε ακλόνητο σημείο Ο το δεύτερο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Το νήμα μεταξύ της σφαίρας και του σημείου Ο έχει μήκος ℓ =1,25m, αρχικά είναι οριζόντιο και δεν ασκεί τάση στη σφαίρα ενώ το σώμα $Σ_1$ είναι συνδεδεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου το πάνω άκρο του οποίου συνδέεται σε ακλόνητο σημείο της οροφής. Το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $Δ\ell$ = 20cm. Κόβουμε το νήμα μεταξύ της σφαίρας και του σώματος $Σ_1$ οπότε το σώμα $Σ_1$ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η σφαίρα να κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από το σημείο Ο.



Σχήμα 1

α) Να βρεθεί το πλάτος και η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$.

Όταν η σφαίρα διέρχεται από την κατώτερη θέση της τροχιάς της συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 = 3Kg που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο.

β) Να υπολογίσετε της ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση και το ύψος που θα φθάσει

γ) Να βρείτε το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που μεταβιβάστηκε στο σώμα $Σ_2$ από τη σφαίρα κατά την κρούση τους

δ) Αν το χρονικό διάστημα που κινείται το σώμα $Σ_2$ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει είναι π φορές το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας του σώματος $Σ_1$ κατά την ταλάντωση του, να βρείτε i. το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ οριζοντίου επιπέδου και σώματος $Σ_2$ και ii. την απόσταση που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει.

Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, $π^2 = 10$. Θεωρήστε αμελητέα τη διάρκεια της κρούσης.

ΛΥΣΗ

α) Όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $Δ\ell$ και τα σώματα ισορροπούν στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$
- το βάρος $\vec{w}_1$
- η τάση του νήματος $\vec{T}$

ενώ στη σφαίρα οι:

- το βάρος $\vec{w}$
- η τάση του νήματος $\vec{T}'$

Από τις συνθήκες ισορροπίας για το σώμα $Σ_1$ παίρνουμε:

$ΣF = 0$ ή $F_{ελ} = T + w_1$ ή $K{\cdot}Δ\ell = T + m_1g$ (1)

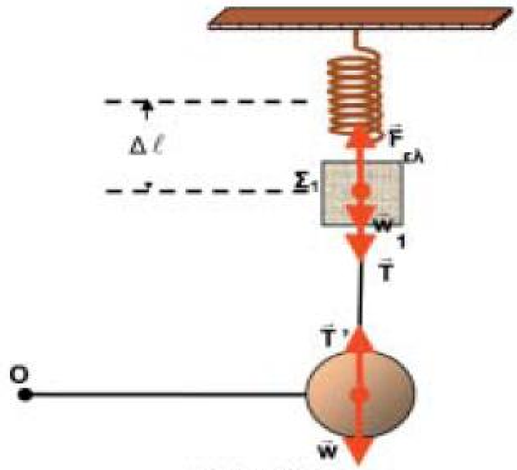
ενώ από τις συνθήκες ισορροπίας για τη σφαίρα παίρνουμε:

$ΣF = 0$ ή $T' = w$ ή $T' = Mg$ (2)

Όμως αφού το νήμα είναι αβαρές ισχύει: $T = T'$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$K{\cdot}Δ\ell = Mg + m_1g$ ή $K = \dfrac{M + m_1}{Δ\ell}g$ ή K = 100N/m

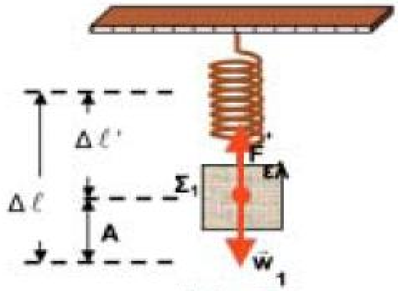


Σχήμα 2

Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα $Σ_1$ ισορροπεί σε νέα θέση ισορροπίας (σχήμα 3) όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $Δ\ell'$. Από τις συνθήκες ισορροπίας στη νέα θέση ισορροπίας του σώματος $Σ_1$ όπου του ασκούνται η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}'_{ελ}$ και το βάρος $\vec{w}_1$ παίρνουμε:

$ΣF = 0$ ή $F_{ελ} = w_1$ ή $K{\cdot}Δ\ell' = m_1g$ ή $Δ\ell' = \dfrac{m_1}{K}g$ ή $Δ\ell'$ = 0,1m

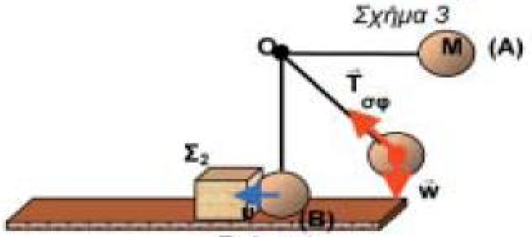
Επομένως το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ είναι $A = Δ\ell - Δ\ell'$ ή A = 0,1m και η περίοδος της $T = 2π\sqrt{\dfrac{m_1}{K}}$ ή T = 0,2π s



Σχήμα 3

β) Μετά το κόψιμο του νήματος η σφαίρα κινείται σε κυκλική τροχιά από τη θέση Α στη θέση Β (σχήμα 4) και λίγο προτού συγκρουστεί με το σώμα $Σ_2$ έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου υ.

Από θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας από τη θέση Α στη Β παίρνουμε:



Σχήμα 4

$\Delta K = W_{ολικ.}$ ή $K_{B.} - K_{A.} = W_w$ ή $\frac{1}{2}Mυ^2 = Mg\ell$ ή $υ = \sqrt{2g\ell}$ ή υ = 5m/s.

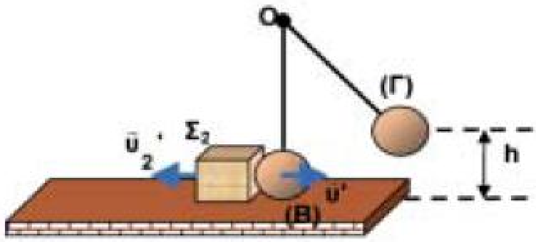
Αφού η σφαίρα και το σώμα $Σ_2$ που αρχικά είναι ακίνητο συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, για τις ταχύτητες τους μετά την κρούση ισχύει αντίστοιχα: $υ' = \frac{M - m_2}{M + m_2}υ$ ή υ' = -2,5m/s (Η σφαίρα λοιπόν κινείται προς τα πίσω με ταχύτητα μέτρου 2,5 $\frac{m}{s}$) και $υ_2' = \frac{2M}{M + m_2}υ$ ή $υ_2'$ = 2,5m/s

Μετά την κρούση η σφαίρα κινείται σε κυκλική τροχιά από τη θέση Β στη θέση Γ που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το οριζόντιο επίπεδο.

Από θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας από τη θέση Β στη Γ παίρνουμε:

$\Delta K = W_{ολικ.}$ ή $K_{Γ.} - K_{B.} = W_w$ ή $-\frac{1}{2}M(υ')^2 = -Mgh$ ή

$h = \frac{(υ')^2}{2g}$ ή h = 0,3125m.



Σχήμα 5

γ) Το ζητούμενο κλάσμα της ενέργειας που μεταβιβάστηκε από τη σφαίρα στο σώμα $Σ_2$ είναι: $x\% = \frac{K_2'}{K}100\%$ ή

$$x\% = \frac{\frac{1}{2}m_2(υ')^2}{\frac{1}{2}Mυ^2}100\% \text{ ή } x\% = 75\%$$

δ) i. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σώμα $Σ_1$ να βρεθεί από μια θέση μηδενικής ταχύτητας στην αμέσως επόμενη αντίστοιχη θέση είναι: $\Delta t = \frac{T}{2}$. Επομένως, το σώμα $Σ_2$ κινείται στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει για χρονικό διάστημα $t_2 = π\Delta t$ ή $t_2 = π\frac{T}{2}$ ή $t_2 = π\ \frac{0{,}2π}{2}$ s ή t_2 = 1 s.

Δηλαδή το σώμα $Σ_2$ σταματά ($υ_2$ = 0m/s) αφού επιβραδύνεται ομαλά για χρονικό διάστημα t_2 = 1 s. Συνεπώς από το νόμο της ταχύτητας για την κίνηση αυτή παίρνουμε:

$υ_2 = υ_2' - α\cdot t$ ή $0 = υ_2' - α\cdot t_2$ ή $α = \frac{υ_2'}{t_2}$ ή $α = 2{,}5\ \frac{m}{s^2}$

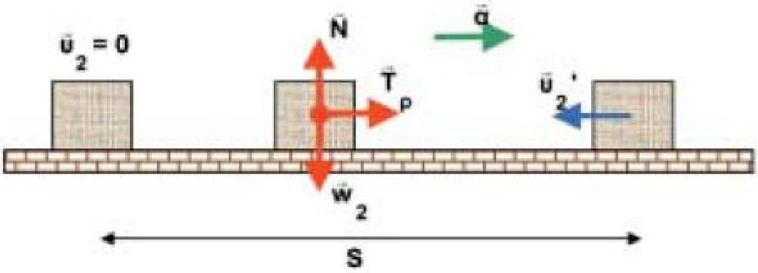
Κατά την κίνηση του σώματος $Σ_2$ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_2$
- η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_ρ$
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$

Για την κίνηση του σώματος $Σ_2$ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο από δεύτερο νόμο του Newton παίρνουμε:

$ΣF_y = 0$ ή $N = w_2$ ή $N = m_2g$ (4)

και $ΣF_x = mα$ ή $T_ρ = m_2α$ (5)



Σχήμα 6

Ακόμα ισχύει: $T_ρ = μN$ ή μέσω της σχέσης (4) $T_ρ = μm_2g$ (6)

Από τις σχέσεις (5) και (6) παίρνουμε: $m_2α = μm_2g$ ή $μ = \frac{α}{g}$ ή μ = 0,25

ii. Η απόσταση S που διανύει το σώμα $Σ_2$ μέχρι να σταματήσει υπολογίζεται από τη σχέση:

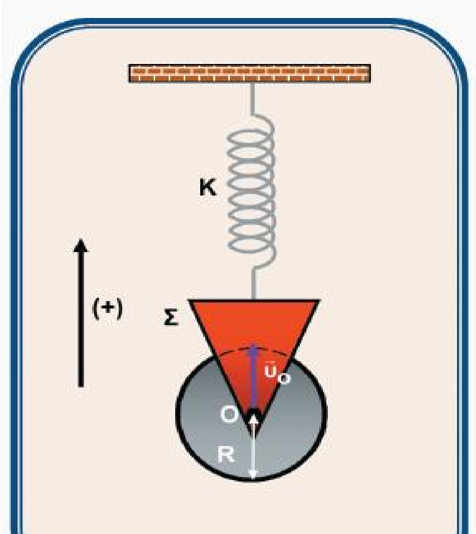
$S = υ_2' t_2 - \frac{1}{2}αt_2^2$ ή S = 1,25m

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η διάταξη του σχήματος 1 αποτελείται από ιδανικό, κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς Κ = 50N/m, αβαρές σώμα Σ και λεπτό, ομογενή δίσκο ακτίνας R = 0,1m. Από το σημείο Ο του σώματος Σ διέρχεται οριζόντιος αβαρής άξονας γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές ο δίσκος. Ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Όταν τα σώματα της διάταξης είναι ακίνητα η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο είναι $U_{ελ} = 4J$.

α) Να υπολογίστε τη μάζα m του δίσκου.

Τη χρονική στιγμή t = 0s προσδίδουμε κατακόρυφη ταχύτητα $\vec{υ}_O$ με φορά προς τα πάνω στο κέντρο του δίσκου (σχήμα 1) και γωνιακή ταχύτητα $\vec{ω}_O$ μέτρου $ω_ο$ = 5rad/s στο δίσκο. Ο δίσκος περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού και το κέντρο του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α = 0,2m.



Σχήμα 1

β) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του κέντρου Ο του δίσκου από τη θέση ισορροπίας του.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου Κ του δίσκου την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{π}{15}$ s.

δ) Να παραστήσετε γραφικά την ταχύτητα του σημείου Ζ της περιφέρειας του δίσκου που βρίσκεται κάθε στιγμή στο ίδιο ύψος με το κέντρο του δίσκου και δεξιά αυτού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα του σημείου Ζ μηδενίζεται για πρώτη φορά;

Δίνεται: $g = 10m/s^2$.

Θεωρήστε θετική την κατακόρυφη φορά προς τα επάνω.

Λύση

α) Όταν ο δίσκος είναι ακίνητος του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $m\vec{g}$
- Η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από τον άξονα που λόγω του $3^{ου}$ νόμου του Newton είναι ίση με τη δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$ που ασκείται στο σώμα Σ.

Σύμφωνα με τον $1^ο$ νόμο του Newton, ισχύει:

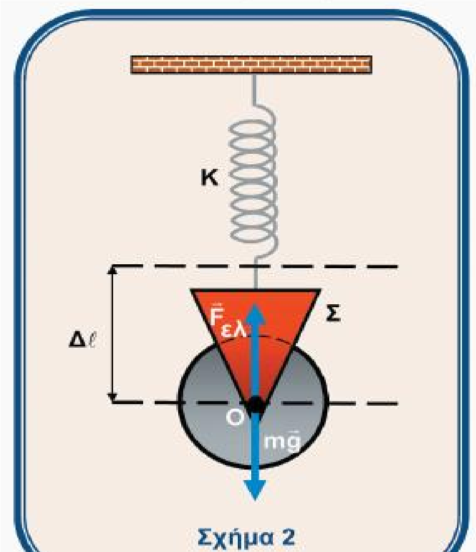
$$\Sigma\vec{F} = 0 \text{ ή } F_{ελ} = mg \text{ ή } K\cdot\Delta\ell = mg \text{ ή } \Delta\ell = \frac{mg}{K} \quad (1)$$

Για τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τότε προκύπτει:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 \quad (2)$$

Η σχέση (2) μέσω της σχέσης (1) γίνεται:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}K\left(\frac{mg}{K}\right)^2 \text{ ή } U_{ελ} = \frac{m^2g^2}{2K} \text{ ή } m = \frac{\sqrt{2KU_{ελ}}}{g} \text{ ή } \mathbf{m = 2Kg}$$



Σχήμα 2

β) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης Ο του κέντρου του δίσκου είναι:

$$ω = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ ή } ω = 5\,rad/s \quad \text{και η περίοδος: } T = \frac{2π}{ω} \text{ ή } T = 0{,}4π\,s.$$

Για τη χρονική στιγμή t = 0s κατά την οποία προσδίδουμε στο κέντρο του δίσκου την ταχύτητα $\vec{υ}_O$ (με $υ_{t=0} = υ_ο > 0$) ισχύει y = 0. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης: $y = Aημ(ωt + φ_ο)$ προκύπτει:

$$0 = Aημφ_ο \text{ ή } ημφ_ο = 0 \text{ ή } \begin{cases} φ_O = 0\,rad \\ φ_O = π\,rad \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας ταλάντωσης ισούται με το μέτρο της ταχύτητας $\vec{υ}_O$, δηλ. $υ_ο = ωA$ ή $υ_ο$ = 1m/s.

Από τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης: $υ = υ_ο συν(ωt + φ_ο)$ για t = 0s προκύπτει:

$υ_{t=0} = υ_ο συνφ_ο$

Για $φ_ο$ = 0 rad έχουμε: $υ_{t=0} = υ_ο συν0 = υ_ο$

Για $φ_ο$ = π rad έχουμε: $υ_{t=0} = υ_ο συνπ = -υ_ο$

Άρα $φ_ο$ = 0 rad

Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του κέντρου Ο του δίσκου από τη θέση ισορροπίας του είναι:

y = 0,2ημ(5t) (S.I.)

γ) Ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση, μεταφορική λόγω της ταλάντωσης και στροφική.

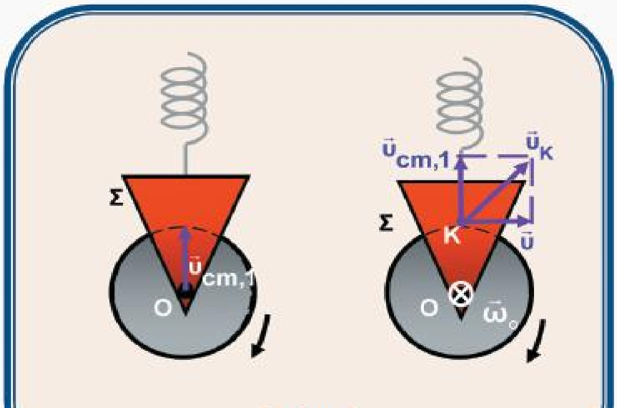
Η στροφική κίνηση του δίσκου πραγματοποιείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_O$ αφού καμία από τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο δεν δημιουργεί ροπή ως προς το κέντρο του.

Η ταχύτητα κάθε σημείου του δίσκου ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ταχυτήτων, της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{cm}$ του κέντρου και της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ λόγω της στροφικής του κίνησης.

Η ταχύτητα ταλάντωσης του κέντρου του δίσκου δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_{cm} = \upsilon_o συν(\omega t + \varphi_o)$ ή

$\upsilon = 1συν(5t)$ (S.I.)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{\pi}{15}$ s η ταχύτητα του κέντρου του δίσκου είναι: $\upsilon_{cm,1} = 1συν\left(5\dfrac{\pi}{15}\right)$ m/s ή



Σχήμα 3

$\upsilon_{cm,1} = 0{,}5$m/s

Έτσι για το ανώτερο σημείο K του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$\vec{\upsilon}_K = \vec{\upsilon}_{cm,1} + \vec{\upsilon}$

Για το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_K$ έχουμε :

$\upsilon_K = \sqrt{(\upsilon_{cm,1})^2 + \upsilon^2}$ ή

$\upsilon_K = \sqrt{(\upsilon_{cm,1})^2 + (\omega_O R)^2}$ ή $\mathbf{\upsilon_K = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,m/s}$

δ) Ομοίως για την ταχύτητα του σημείου Z της περιφέρειας του δίσκου ισχύει: $\vec{\upsilon}_Z = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}'$

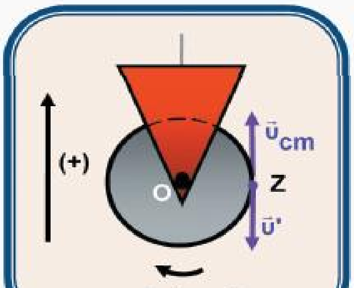
Η ταχύτητα επομένως του σημείου Z μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$\upsilon_Z = \upsilon_{cm} - \upsilon'$ ή

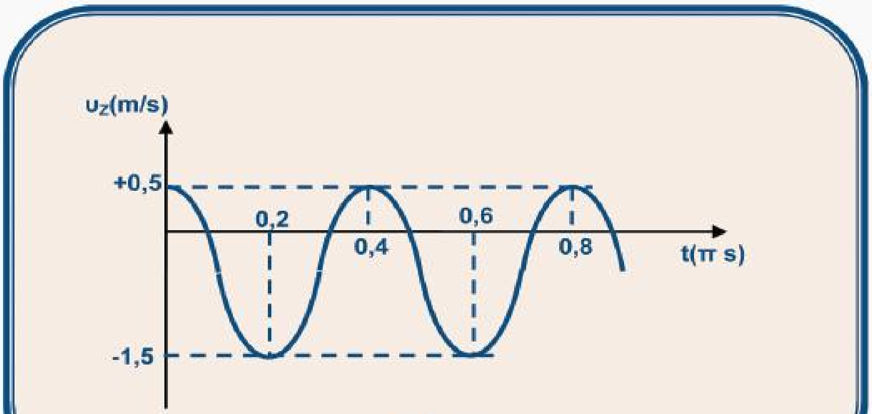
$\upsilon_Z = \upsilon_o συν(\omega t + \varphi_O) - \omega_o R$ ή

$\mathbf{\upsilon_Z = 1συν(5t) - 0{,}5}$ (S.I)

Η ζητούμενη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σημείου Z σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 5.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

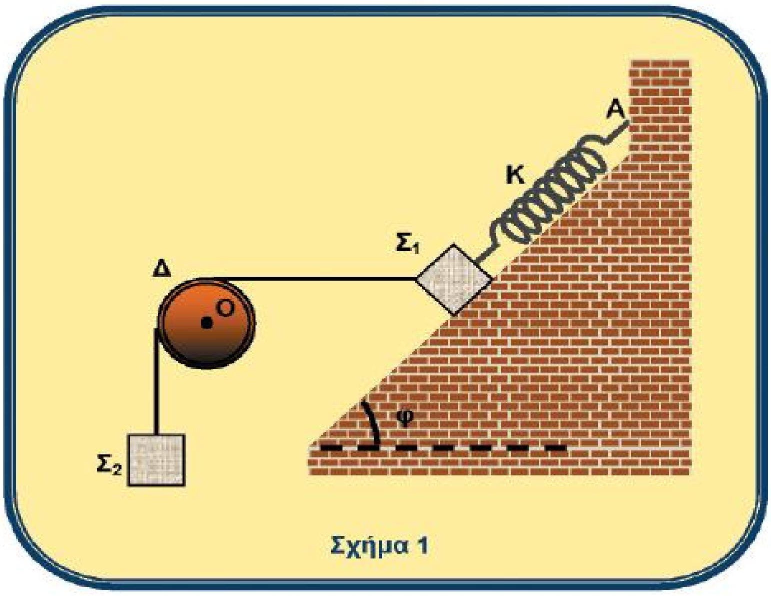
Όταν μηδενίζεται η ταχύτητα του σημείου Z ισχύει:

$\upsilon_Z = 0$ ή $1συν(5t) - 0{,}5 = 0$ ή $συν(5t) = 0{,}5$ ή $συν(5t) = συν\dfrac{\pi}{3}$ ή $5t = 2κ\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ ή $t = \left(\dfrac{2κ\pi}{5} \pm \dfrac{\pi}{15}\right)$s, $κ \in \mathbb{Z}$

Για κ = 0 (και t > 0s) η πρώτη φορά που $\upsilon_Z = 0$ προκύπτει: $\mathbf{t = \dfrac{\pi}{15}\,s}$.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Η διάταξη του σχήματος 1 αποτελείται από σώμα $Σ_1$ μάζας m = 1Kg που ισορροπεί σε λείο, κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ, λεπτό και ομογενή δίσκο Δ μάζας M = 2Kg και ακτίνας R που μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του O, σώμα $Σ_2$ ίσης μάζας με το $Σ_1$, ιδανικό ελατήριο σταθεράς K = 25N/m και αβαρές , μη ελαστικό νήμα. Το $Σ_1$ ισορροπεί στο κεκλιμένο επίπεδο αναρτημένο στο ελατήριο το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο A. Το $Σ_1$ σε αυτή τη θέση μόλις που εφάπτεται στο επίπεδο. Ο άξονας του ελατηρίου είναι παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο ενώ το νήμα είναι τυλιγμένο πολλές φορές γύρω από το δίσκο και τα ελεύθερα άκρα του είναι συνδεδεμένα με τα σώματα $Σ_1$, $Σ_2$.



Σχήμα 1

Να υπολογίσετε:

α) την τιμή της γωνίας φ

Τη χρονική στιγμή t = 0s κόβουμε το νήμα που συνδέει το δίσκο με το $Σ_1$.

β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος $Σ_2$.

γ) Να βρείτε το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης της απλής αρμονικής ταλάντωσης του $Σ_1$ και την ενέργεια της.

Τη χρονική στιγμή t_1 = 0,8s ο δίσκος Δ έχει πραγματοποιήσει 2 πλήρεις περιστροφές.

δ) Να βρείτε το μήκος s του νήματος που έχει ξετυλιχτεί έως τη στιγμή t_1 και την ακτίνα R του δίσκου.

ε) Να παραστήσετε γραφικά τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο.

Ο δίσκος και ο άξονας του ελατηρίου βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και η διεύθυνση του νήματος που συνδέεται ο δίσκος με το $Σ_1$ είναι οριζόντια.

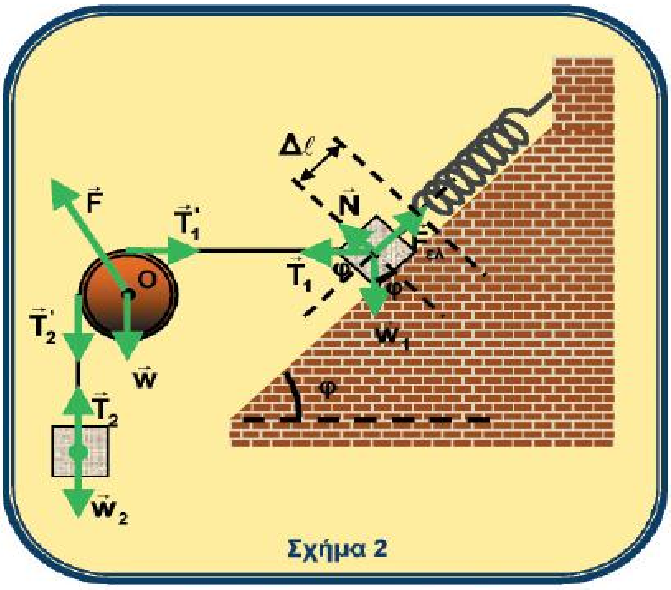
Θεωρήστε πως το νήμα δεν ολισθαίνει στο δίσκο.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της που διέρχεται από το κέντρο του O: $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α) Όταν το σώμα $Σ_1$ είναι ακίνητο του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_1 = m\vec{g}$ που αναλύεται σε δύο συνιστώσες: w_x = mgημφ και w_y = mgσυνφ
- Η τάση $\vec{T}_1$ του νήματος που αναλύεται σε δύο συνιστώσες: $T_{1x} = T_1$συνφ και $T_{1y} = T_1$ημφ
- Η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$
- Η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$.



Σχήμα 2

Σύμφωνα με τον 1^o νόμο του Newton, ισχύει:

$ΣF_x = 0$ ή $F_{ελ} = mgημφ + T_1συνφ$ ή

$KΔ\ell = mgημφ + T_1συνφ$ (1)

$ΣF_y = 0$ ή $mgσυνφ = N + T_1ημφ$ ή

$N = mgσυνφ - T_1ημφ$ (2)

Όταν το σώμα $Σ_2$ είναι ακίνητο του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_2 = \vec{w}_1 = m\vec{g}$
- Η τάση $\vec{T}_2$ του νήματος

Σύμφωνα με τον 1^o νόμο του Newton, ισχύει: $ΣF = 0$ ή $mg = T_2$ (3)

Στο δίσκο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Η δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα περιστροφής
- Το βάρος $\vec{w} = M\vec{g}$
- Οι τάσεις $\vec{T}_1', \vec{T}_2'$ του νήματος

Αφού το νήμα είναι αβαρές ισχύει: $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$ (4)

Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας προκύπτει:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{T'_{1(O)}} + \tau_{T'_{2(O)}} + \tau_{w(O)} + \tau_{F(O)} = 0$ ή (μέσω των σχέσεων 3, 4) $T_1R = mgR$ ή $T_1 = mg$ (5)

Επομένως η σχέση (2) γίνεται: $N = mg(\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi)$

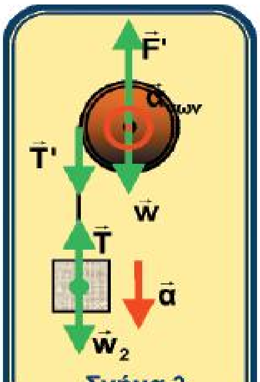
Αφού το σώμα Σ_1 είναι έτοιμο να χάσει την επαφή του με το επίπεδο, ισχύει: N = 0 ή συνφ – ημφ = 0 ή **φ = 45°**

β) Μετά το κόψιμο του νήματος που συνδέει το σώμα Σ_1 με το δίσκο, το Σ_2 αρχίζει να κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ και ο δίσκος να στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$.

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στο δίσκο, η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\varepsilon$ των σημείων της περιφέρειας του δίσκου έχει ίσο μέτρο με το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ του σώματος Σ_2.
Δηλαδή, ισχύει: $\alpha = \alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$.
Για τις τάσεις των νημάτων, ισχύει: T = T'.
Για την κίνηση του Σ_2 ισχύει: $\Sigma F = m\alpha$ ή $mg - T = m\alpha$ (6)

ενώ για την κίνηση του δίσκου: $TR = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $T = \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2}M\alpha$ (7)

Από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει: $mg - \frac{1}{2}M\alpha = m\alpha$ ή $\alpha = \frac{2m}{2m+M}g$ ή $\boldsymbol{\alpha = 5m/s^2}$.



Σχήμα 3

γ) Από τις σχέσεις (1) και (5) προκύπτει:

$\Delta\ell = \frac{mg}{K}(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi)$ ή $\boldsymbol{\Delta\ell = 0,4\sqrt{2}m}$

Μετά το κόψιμο ο νήματος, στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης του Σ_1 το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$ και ισχύει: $\Delta\ell' = \frac{mg}{K}\eta\mu\varphi$ ή $\Delta\ell' = 0,2\sqrt{2}m$

Επομένως το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell - \Delta\ell'$ ή

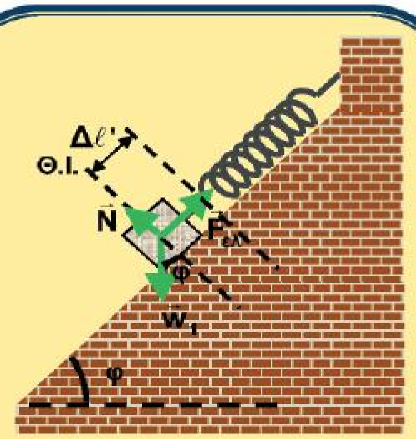
$A = 0,2\sqrt{2}m$ και η περίοδος της: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ή $T = 0,4\pi$ s

Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης της ταλάντωσης προκύπτει:

$\alpha_{max} = \omega^2 A$ ή $\alpha_{max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$ ή $\boldsymbol{\alpha_{max} = 5\sqrt{2}\ m/s^2}$.

Η ενέργεια της ταλάντωσης προκύπτει: $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ ή

$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2$ ή **E = 1J**



Σχήμα 4

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 το νήμα που έχει ξετυλιχθεί ισούται με την μετατόπιση του σώματος Σ_2.

Δηλαδή: $s = \frac{1}{2}\alpha t_1^2$ ή s = 1,6m. Ο δίσκος τότε έχει περιστραφεί κατά φ = 2·2π rad ή φ = 4π rad.

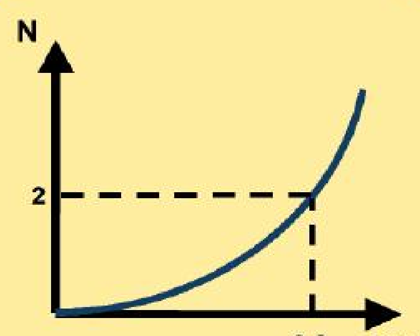
Ισχύει: $s = R\varphi$ ή $R = \frac{s}{\varphi}$ ή $R = \frac{1,6}{4\pi}m$ ή $R = \frac{0,4}{\pi}m$

ε) Ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου δίνεται από τη σχέση:

$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2}{2\pi} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu}}{4\pi}t^2$ ή $N = \frac{\alpha}{4R\pi}t^2$ ή

$\boldsymbol{N = 3,125t^2}$ (S.I.)

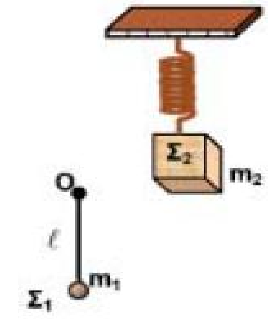
Η γραφική παράσταση του αριθμού των περιστροφών του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5

ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Ένα σώμα $Σ_1$ μικρών διαστάσεων και μάζας m_1 = 1Kg είναι δεμένο στο ένα άκρο, αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους ℓ =0,35m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο Ο όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Το σώμα $Σ_1$ αρχικά ισορροπεί ενώ, το νήμα είναι κατακόρυφο. Εκτοξεύουμε οριζόντια το σώμα $Σ_1$ με ταχύτητα μέτρου $υ_ο$ = 4m/s οπότε αυτό αρχίζει να διαγράφει κυκλική τροχιά γύρω από το Ο και να ανυψώνεται.



Σχήμα 1

α) Να βρείτε το μέτρο της στροφορμής του σώματος $Σ_1$ ως προς το Ο τη στιγμή της εκτόξευσης.

Τη στιγμή t = 0s που το νήμα γίνεται οριζόντιο, το κόβουμε και αμέσως το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με δεύτερο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 = 2Kg που ισορροπεί αναρτημένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς Κ = 100N/m. Το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της στροφορμής του σώματος $Σ_1$ ως προς το Ο από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι ελάχιστα πριν κόψουμε το νήμα.

γ) Να βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά τη διάρκεια της.

δ) Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα και το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος

ε) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας αμέσως μετά την κρούση και να γράψετε τη χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης .

Θεωρήστε αμελητέα τη διάρκεια της κρούσης και θετική φορά την αρχική φορά κίνησης του συσσωματώματος.
Δίνεται : $g = 10m/s^2$.

ΛΥΣΗ

α) Τη στιγμή της εκτόξευσης του σώματος $Σ_1$ η στροφορμή του ως προς το Ο έχει μέτρο:
$L_o = m_1 υ_o \ell$ ή $L_o = 1,40\ Kg\cdot m^2/s$

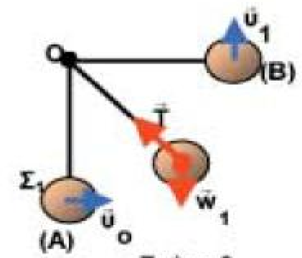
β) Κατά την κυκλική κίνηση του σώματος $Σ_1$ από τη θέση (Α) που το νήμα είναι κατακόρυφο μέχρι τη θέση (Β) που είναι οριζόντιο ασκούνται σε αυτό οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_1$
- η τάση του νήματος $\vec{T}$

Αν $υ_1$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $Σ_1$ στη θέση (Β), εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση αυτή παίρνουμε:

$$ΔK = W_{ολικ.} \text{ ή } K_{B.} - K_{A.} = W_{w_1} \text{ ή } \frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1υ_o^2 = -m_1 g\ell \text{ ή }$$

$$υ_1 = \sqrt{υ_o^2 - 2g\ell} \text{ ή } υ_1 = 3m/s.$$



Σχήμα 2

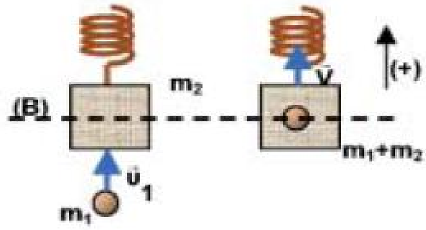
Ελάχιστα πριν κοπεί το νήμα, το σώμα $Σ_1$ έχει στροφορμή μέτρου:
$L_1 = m_1 υ_1 \ell$ ή $L_1 = 1,05\ Kg\cdot m^2/s$

Οι στροφορμές $\vec{L}_1$, $\vec{L}_0$ είναι ομόρροπες (κάθετες στο επίπεδο με φορά προς τα επάνω). Επομένως, για τη μεταβολή $Δ\vec{L}$ της στροφορμής του σώματος $Σ_1$ ως προς το Ο παίρνουμε:

$$Δ\vec{L} = \vec{L}_1 - \vec{L}_o \text{ ή } ΔL = L_1 - L_o \text{ ή } ΔL = -0,35\ Kg\cdot m^2/s$$

γ) Για την πλαστική κρούση του σώματος $Σ_1$ και $Σ_2$ (σχήμα 3) εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος τους παίρνουμε:

$$\vec{P}_{ολ,αρχ} = \vec{P}_{ολ,τελ} \text{ ή } m_1υ_1 = (m_1 + m_2)V \text{ ή } V = \frac{m_1 υ_1}{m_1 + m_2} \text{ ή } V = 1m/s$$



Σχήμα 3

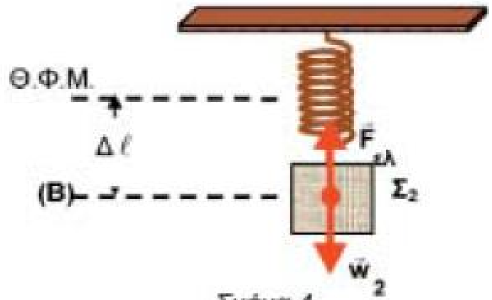
Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κρούση είναι:

$$x\% = \frac{\left|K_{ολ,τελ} - K_{ολ,αρχ}\right|}{K_{ολ,αρχ}} 100\% \text{ ή }$$

$$x\% = \frac{\left|\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2\right|}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2} 100\% \text{ ή } x\% = \frac{200}{3}\%$$

δ) Πριν την πλαστική κρούση το σώμα $Σ_2$ ισορροπεί στη θέση (Β) όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $Δ\ell$ και σε αυτό ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_2$
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$



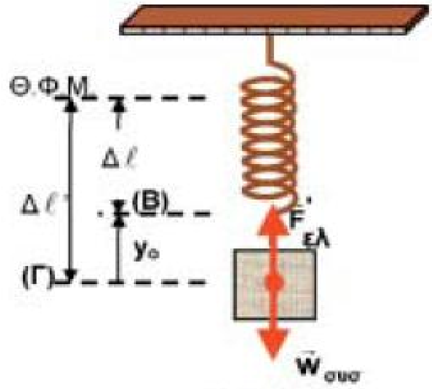
Σχήμα 4

Από τις συνθήκες ισορροπίας για το σώμα $Σ_2$ παίρνουμε:

$ΣF = 0$ ή $F_{ελ} = w_2$ ή $K \cdot Δ\ell = m_2 g$ ή $Δ\ell = \frac{m_2}{K} g$ ή $Δ\ell = 0{,}2m$

Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται ισορροπεί στη θέση (Γ) όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $Δ\ell'$ και του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_{συσ}$
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}'_{ελ}$



Σχήμα 5

Από τις συνθήκες ισορροπίας για το συσσωμάτωμα παίρνουμε:

$ΣF = 0$ ή $F'_{ελ} = w_{συσ}$ ή $K \cdot Δ\ell' = (m_1 + m_2)g$ ή $Δ\ell' = \frac{m_1 + m_2}{K} g$ ή

$Δ\ell' = 0{,}3m$

Επομένως, τη στιγμή $t = 0s$ η αρχική απομάκρυνση του συσσωματώματος είναι $y_o = Δ\ell' - Δ\ell$ ή $y_o = 0{,}1m$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα είναι: $ω = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}}$ ή $ω = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ rad/s

Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης παίρνουμε:

$K + U = E$ ή $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}Dy_o^2 = \frac{1}{2}DA^2$ ή $(m_1 + m_2)V^2 + (m_1 + m_2)ω^2 y_o^2 = (m_1 + m_2)ω^2 A^2$ ή

$A = \sqrt{\frac{V^2}{ω^2} + y_o^2}$ ή $A = 0{,}2m$

ε) Τη στιγμή της κρούσης ($t = 0s$) το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση (Β) με $y = y_o = +0{,}1m$ και ταχύτητα $υ_{t=0} = V = +1m/s > 0$. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι: $\frac{dK}{dt} = F \cdot υ = -K \cdot y \cdot υ$

Για τη χρονική στιγμή $t = 0s$ από την παραπάνω σχέση παίρνουμε: $\left(\frac{dK}{dt}\right)_{t=0} = -K \cdot y_o \cdot V$ ή $\left(\frac{dK}{dt}\right)_{t=0} = -10J/s$

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης $y = Aημ(ωt + φ_o)$ για $t = 0$ παίρνουμε: $0{,}1 = 0{,}2ημφ_o$ ή $ημφ_o = \frac{1}{2}$

Επομένως, ισχύει: $φ_o = 2κπ + \frac{π}{6}$ με $κ \in \mathbb{Z}$ ή $φ_o = 2κπ + \frac{5π}{6}$ με $κ \in \mathbb{Z}$

Για $κ = 0$ παίρνουμε: $φ_o = \frac{π}{6}$ ή $φ_o = \frac{5π}{6}$

Από την εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης $υ = υ_{max}συν(ωt + φ_o)$ για $t = 0$ παίρνουμε: $υ_{t=0} = υ_{max}συνφ_o$

Για $φ_o = \frac{π}{6}$ προκύπτει: $υ_{t=0} = υ_{max}συν\frac{π}{6} > 0$ ενώ για $φ_o = \frac{5π}{6}$ προκύπτει: $υ_{t=0} = υ_{max}συν\frac{5π}{6} < 0$

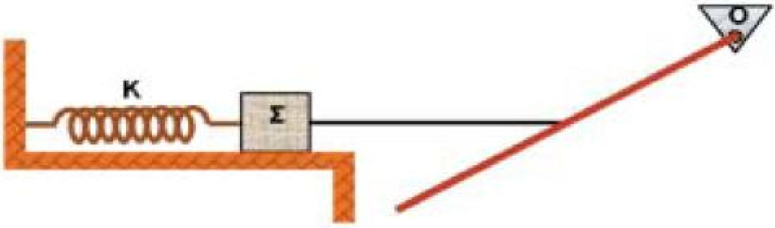
Τελικά καταλήγουμε πως: $φ_o = \frac{π}{6}$

Και η εξίσωση της απομάκρυνσης στο S.I. είναι η: $y = 0{,}2ημ(\frac{10\sqrt{3}}{3}t + \frac{π}{6})$

Η δύναμη επαναφοράς υπολογίζεται από τη σχέση: $F = -Dy$ ή $F = -(m_1 + m_2)ω^2 y$ ή $F = -20ημ(\frac{10\sqrt{3}}{3}t + \frac{π}{6})$ (S.I.)

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ & ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Η διάταξη του σχήματος αποτελείται από ένα οριζόντιο ελατήριο σταθεράς Κ, ένα σώμα Σ μάζας m_1 = 6Kg που μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι προσδεδεμένο στο ένα άκρο του ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο, αβαρές νήμα και λεπτή ομογενή ράβδο μάζας m_2 = 3Kg και μήκους ℓ που μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο. Το οριζόντιο νήμα είναι προσδεδεμένο στο μέσο της ράβδου και στο σώμα Σ ενώ η ράβδος σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την κατακόρυφο. Τα σώματα του σχήματος αρχικά ισορροπούν.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής

Κόβουμε το νήμα οπότε το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 5\sqrt{3}$ cm και η ράβδος να περιστρέφεται.

β) Να βρείτε τη συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος Σ

Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι $\frac{dL}{dt} = 4{,}5\sqrt{3}\ Kg\cdot m^2/s^2$.

Όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη, ένα βλήμα μάζας m = 18g που κινείται με ταχύτητα μέτρου υ = 200m/s, οριζόντια και αντίθετα με τη φορά κίνησης της ράβδου σφηνώνεται σε αυτή σε τέτοιο σημείο ώστε η θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση να είναι η μέγιστη δυνατή. Να βρείτε:

γ) τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος

δ) την απόσταση του σημείου της ράβδου που σφηνώνεται το βλήμα από το άκρο Ο

Δίνεται: η ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}m_2\ell^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$. Θεωρήστε αμελητέα τη διάρκεια της κρούσης.

ΛΥΣΗ

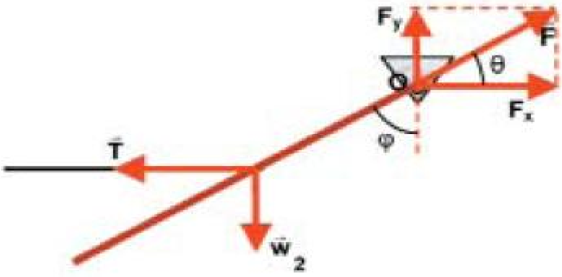
α) Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- η τάση του νήματος $\vec{T}$ και
- το βάρος $\vec{w}_2$
- η δύναμη $\vec{F}$ του άξονα που αναλύεται σε δύο συνιστώσες (F_x και F_y).

Από τις συνθήκες ισορροπίας για τη ράβδο παίρνουμε: $\Sigma F_x = 0$ ή $F_x = T$ (1)

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_y = w_2$ ή $F_y = m_2 g$ ή $F_y = 30N$ και

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{F(O)} + \tau_{w_2(O)} + \tau_{T(O)} = 0$ ή $m_2 g\frac{\ell}{2}ημφ - T\frac{\ell}{2}συνφ = 0$ ή $T = m_2 g\cdot εφφ$ ή $T = 30\sqrt{3}$ N



Σχήμα 2

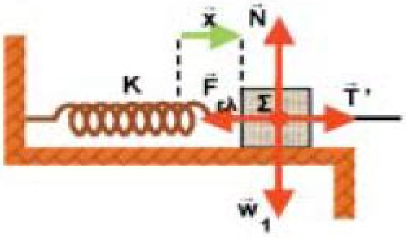
Από τη σχέση (1) παίρνουμε: $F_x = 30\sqrt{3}$ N

Τελικά για το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ισχύει: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή F = 60N και

για την κατεύθυνσης της $εφθ = \frac{F_y}{F_x}$ ή $εφθ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $θ = 30^\circ$

β) Το σώμα Σ αρχικά είναι ακίνητο και του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- η τάση του νήματος $\vec{T}'$ και
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$
- το βάρος $\vec{w}_1$



Σχήμα 3

Από τον 1^o νόμο του Newton για το σώμα Σ παίρνουμε: $\Sigma F_x = 0$ ή

$T' = F_{ελ}$ ή $T' = k\cdot x$ (2), όπου x η επιμήκυνση του ελατηρίου.

Αφού το νήμα είναι αβαρές ισχύει: $T' = T$

Το σώμα Σ μετά το κόψιμο του νήματος αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A = x.

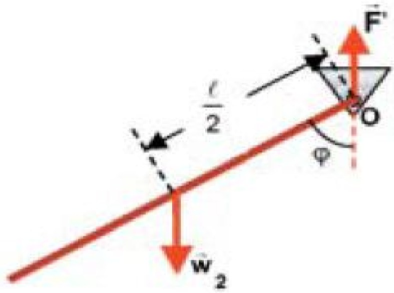
Από τη σχέση (2) παίρνουμε: $T' = K\cdot A$ ή $K = \dfrac{T'}{A}$ ή $K = \dfrac{T}{A}$ ή $K = 600N/m$.

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m_1}}$ ή $f = \dfrac{5}{\pi}Hz$.

γ) Μετά το κόψιμο του νήματος στη ράβδο ασκούνται οι: δύναμη $\vec{F}'$ και το βάρος $\vec{w}_2$ όπως φαίνονται στο σχήμα 4.

Ισχύει: $\dfrac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{(O)}$ ή $\dfrac{dL}{dt} = \tau_{w_2(O)}$ (αφού $\tau_{F'(O)} = 0$) ή

$\dfrac{dL}{dt} = m_2 g\dfrac{\ell}{2}\eta\mu\varphi$ ή $\ell = \dfrac{2\dfrac{dL}{dt}}{m_2 g\cdot\eta\mu\varphi}$ ή $\ell = 0{,}6m$.



Σχήμα 4

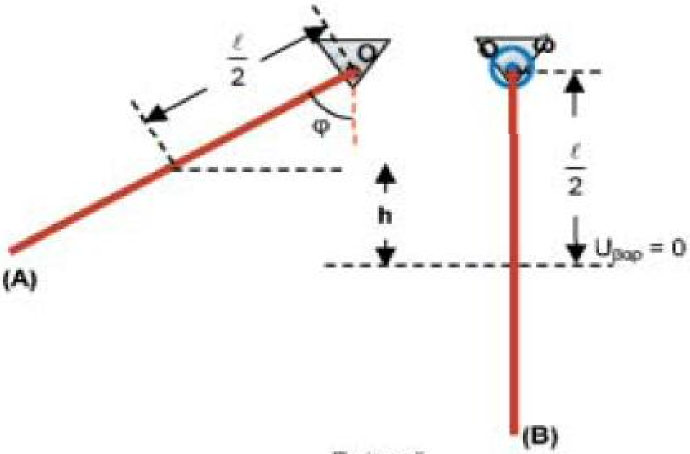
Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το άκρο της O και είναι κάθετος σε αυτήν είναι: $I_{(O)} = I_{cm} + m_2\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2$ ή

$I_{(O)} = \dfrac{1}{12}m_2\ell^2 + m_2\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2$ ή $I_{(O)} = \dfrac{1}{3}m_2\ell^2$

Από το νόμο της στροφικής κίνησης παίρνουμε: $\Sigma\tau_{(O)} = I_{(O)}\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $m_2 g\dfrac{\ell}{2}\eta\mu\varphi = \dfrac{1}{3}m_2\ell^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{3g}{2\ell}\eta\mu\varphi$ ή

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 12{,}5\sqrt{3}\ rad/s^2$.

δ) Όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επιλέγοντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας το επίπεδο που διέρχεται από το μέσο της ράβδου όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση (Β) και εφαρμόζοντας της αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της ράβδου από τη θέση (Α) στη θέση (Β) παίρνουμε:



Σχήμα 5

$K_A + U_A = K_B + U_B$ ή $m_2 gh = \dfrac{1}{2}I_{(O)}\omega^2$ ή

$m_2 g\dfrac{\ell}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}m_2\ell^2\omega^2$ ή

$\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{\ell}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)}$ ή $\omega = 5rad/s$

Για την κρούση (σχήμα 6) της ράβδου με το βλήμα εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα ράβδου-βλήματος και παίρνουμε:

$\vec{L}_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$ ή $I_{(O)}\omega - m\cdot\upsilon\cdot s = I'_{(O)}\omega'$ (3),

όπου $I'_{(O)}$ η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου – βλήματος, ω' η γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Η θερμότητα που απελευθερώνεται κατά την κρούση είναι:

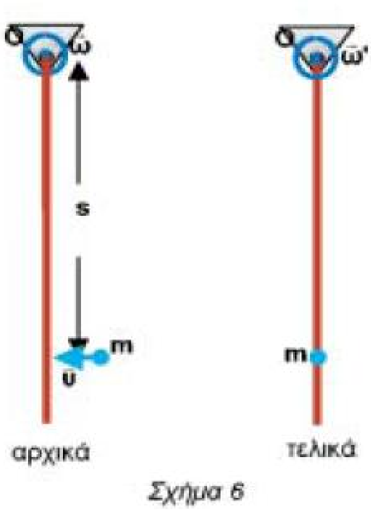
$Q = K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} - K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$ ή $Q = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 + \dfrac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 - \dfrac{1}{2}I'_{(O)}\left(\omega'\right)^2$.

Η θερμότητα παίρνει τη μέγιστη δυνατή της τιμή όταν $\dfrac{1}{2}I'_{(O)}\left(\omega'\right)^2 = 0$ ή

$\omega' = 0rad/s$.

Επομένως για τη σχέση (3) ισχύει: $I_{(O)}\omega - m\cdot\upsilon\cdot s = 0$ ή

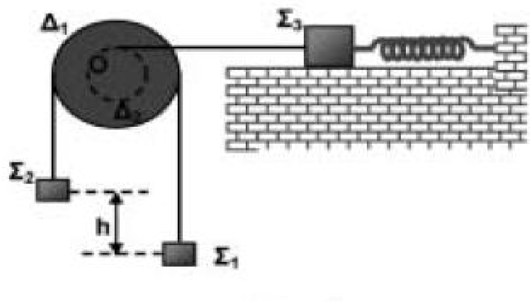
$\dfrac{1}{3}m_2\ell^2\omega = m\cdot\upsilon\cdot s$ ή $s = \dfrac{m_2\ell^2\omega}{3m\cdot\upsilon}$ ή $s = 0{,}5m$.



Σχήμα 6

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΣΩΜΑΤΩΝ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Η διπλή τροχαλία του συστήματος που φαίνεται στο διπλανό σχήμα αποτελείται από δύο ομόκεντρους, ομογενείς δίσκους $Δ_1$ και $Δ_2$ με ακτίνες $R_1 = 0{,}5m$ και $R_2 = 0{,}25m$, αντίστοιχα. Οι δύο δίσκοι συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να περιστρέφονται ως ένα σώμα, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό τους.



Σχήμα 1

Στα δύο αυλάκια των δίσκων της τροχαλίας είναι τυλιγμένα αβαρή, μη εκτατά νήματα. Από τα ελεύθερα άκρα του νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω από το δίσκο $Δ_1$ κρέμονται δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες m_1 και $m_2>m_1$, αντίστοιχα. Η συνολική μάζα των $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι 10Kg. Στο ελεύθερο άκρο του τεντωμένου, οριζόντιου νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω από το δίσκο $Δ_2$ είναι δεμένο σώμα $Σ_3$, μάζας $m_3 = 2Kg$ το οποίο είναι προσδεδεμένο σε ελατήριο σταθεράς $K = 200N/m$. Ο άξονας του ελατηρίου είναι οριζόντιος και το οριζόντιο επίπεδο που μπορεί να κινηθεί το $Σ_3$ είναι λείο. Τα σώματα του συστήματος αρχικά είναι ακίνητα. Τότε, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{ελ} = 16J$ και οι θέσεις των $Σ_1$ και $Σ_2$ διαφέρουν υψομετρικά κατά $h = 1m$.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα $Σ_3$,

β) τις μάζες των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$.

Τη χρονική στιγμή t = 0s κόβουμε το νήμα που συνδέει την τροχαλία με το σώμα $Σ_3$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας,

δ) Να βρείτε το μέτρο των ταχυτήτων των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ όταν βρεθούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο,

ε) Να βρείτε τις χρονικές εξισώσεις του αριθμού των περιστροφών της τροχαλίας ($N_{τρ}$) και των ταλαντώσεων του σώματος $Σ_3$ (N_3). Ποια χρονική στιγμή η διαφορά $N' = N_3 - N_{τρ}$ γίνεται μέγιστη; Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή;

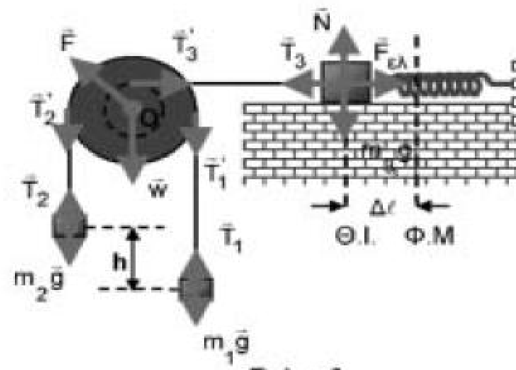
Δίνεται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της που διέρχεται από το κέντρο της $I = 7{,}5Kg{\cdot}m^2$.

Θεωρήστε πως τα νήματα δεν ολισθαίνουν στα αυλάκια της τροχαλίας και πως το μήκος τους είναι αρκετό, ώστε τα σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ να μην συγκρούονται με την τροχαλία.

ΛΥΣΗ

α) Όταν το σώμα $Σ_3$ είναι ακίνητο, το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $Δ\ell$ και ισχύει:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}K(Δ\ell)^2 \text{ ή } Δ\ell = \sqrt{\frac{2U_{ελ}}{K}} \text{ ή } Δ\ell = 0{,}4m.$$



Σχήμα 2

Στο σώμα $Σ_3$ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $m_3\vec{g}$,
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$,
- η τάση του νήματος $\vec{T}_3$,
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$.

Για τη δύναμη του ελατηρίου ισχύει: $F_{ελ} = K\cdot Δ\ell$ ή $F_{ελ} = 80N$

β) Εφαρμόζοντας τον 1^o νόμο του Newton για το σώμα $Σ_3$ προκύπτει:

$T_3 = F_{ελ}$ ή $T_3 = 80N$

Στα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ ασκούνται, αντίστοιχα:

- τα βάρη $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$,
- οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$.

Από τον 1^o νόμο του Newton για τα σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ προκύπτει αντίστοιχα:

$T_1 = m_1g$ (1) και $T_2 = m_2g$ (2)

Στην τροχαλία ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}$,
- οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2'$ και $\vec{T}_3'$ (αφού τα νήματα είναι αβαρή ισχύει $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$, $T_3' = T_3$),
- η δύναμη στήριξης $\vec{F}$ από τον άξονα.

Από τη συνθήκη ισορροπίας για την τροχαλία προκύπτει:

$Στ_{(o)} = 0$ ή $T_3'R_2 + T_1'R_1 - T_2'R_1 = 0$ ή $T_3R_2 + T_1R_1 - T_2R_1 = 0$ (3)

Η σχέση (3) μέσω των σχέσεων (1) και (2) γίνεται: $T_3R_2 + m_1gR_1 - m_2gR_1 = 0$ ή

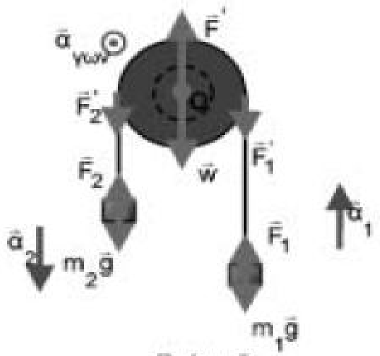
$$m_2 - m_1 = \frac{T_3 R_2}{g R_1} \text{ ή } m_2 - m_1 = 4 \text{ (S.I.) (4)} \qquad \text{Όμως ισχύει: } m_2 + m_1 = 10 \text{ (S.I.) (5)}$$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (4) και (5) προκύπτει: $m_1 = 3Kg$ και $m_2 = 7Kg$.

γ) Μετά το κόψιμο του νήματος που συνδέει την τροχαλία και το σώμα $Σ_3$, η τροχαλία εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $α_{γων}$, ενώ τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ εκτελούν ομαλά επιταχυνόμενες μεταφορικές κινήσεις.

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας, η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{α}_ε$ των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας έχει ίσο μέτρο με τα μέτρα των επιταχύνσεων $\vec{α}_1$ και $\vec{α}_2$ των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$, αντίστοιχα. Δηλαδή, ισχύει: $α_1 = α_2 = α = α_ε = α_{γων}R_1$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος τροχαλία – $Σ_1$ – $Σ_2$ φαίνονται στο σχήμα 3. Όμοια για τις τάσεις των νημάτων ισχύει: $F_1' = F_1$, $F_2' = F_2$.



Σχήμα 3

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση των $Σ_1$ και $Σ_2$ παίρνουμε, αντίστοιχα:

$m_2g - F_2 = m_2α$ ή $F_2 = m_2g - m_2α$ (6) και

$F_1 - m_1g = m_1α$ ή $F_1 = m_1g + m_1α$ (7).

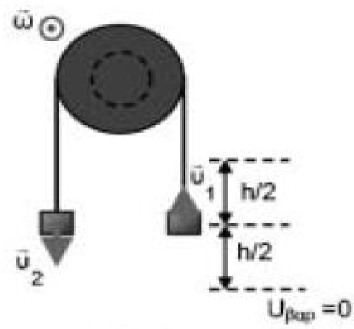
Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την κίνηση της τροχαλίας, παίρνουμε:

$Στ_{(o)} = I \cdot α_{γων}$ ή $F_2R_1 - F_1R_1 = Iα_{γων}$. Μέσω των σχέσεων (6) και (7), προκύπτει:

$$m_2g - m_2α - m_1α - m_1g = I\frac{α_{γων}}{R_1} \text{ ή } α = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R_1^2}} g \text{ ή } α = 1m/s^2.$$

δ) Αφού τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ ξεκινούν ταυτόχρονα και κινούνται με επιταχύνσεις ίδιου μέτρου έχουν κάθε χρονική στιγμή ταχύτητες και μετατοπίσεις ίδιου μέτρου. Επομένως θα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, όταν το $Σ_2$ έχει κατέβει κατά h/2 (αντίστοιχα, το $Σ_1$ θα έχει ανέβει κατά h/2).

Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που βρίσκεται το $Σ_1$ την t=0s και εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για το σύστημα τροχαλία – $Σ_1$ – $Σ_2$.



Σχήμα 4

$$E_{M,αρχ} = E_{M,τελ} \text{ ή } m_2gh = \frac{1}{2}m_1υ^2 + \frac{1}{2}m_2υ^2 + \frac{1}{2}Iω^2 + m_1g\frac{h}{2} + m_2g\frac{h}{2}$$

Όμως ισχύει: $υ = ω \cdot R_1$ και συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1υ^2 + \frac{1}{2}m_2υ^2 + \frac{1}{2}I\frac{υ^2}{R_1^2} + m_1g\frac{h}{2} + m_2g\frac{h}{2} \text{ ή}$$

$$υ = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R_1^2}} gh} \text{ ή } υ = 1m/s.$$

ε) Ο αριθμός των περιστροφών της τροχαλίας σε σχέση με το χρόνο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N_{τρ} = \frac{Δφ}{2π} = \frac{α_{γων}t^2}{4π} \text{ ή } N_{τρ} = \frac{Δφ}{2π} = \frac{αt^2}{4πR_1} \text{ ή } N_{τρ} = \frac{1}{2π}t^2 \text{ (S.I.)}$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων του σώματος $Σ_3$ σε σχέση με το χρόνο υπολογίζεται από τη σχέση:

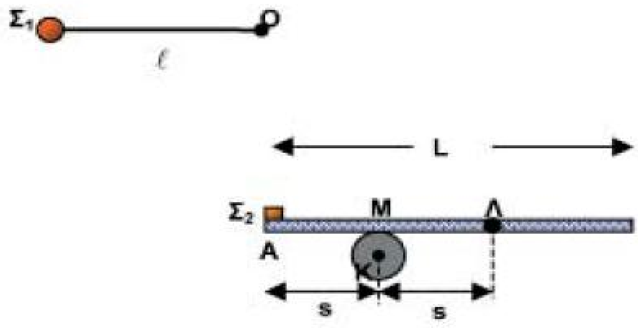
$$N_3 = \frac{t}{T_3} = \frac{t}{2π\sqrt{\frac{m_3}{K}}} \text{ ή } N_3 = \frac{10}{2π}t \text{ (S.I.)}$$

$$\text{Έτσι } N' = N_3 - N_{τρ} = \frac{10}{2π}t - \frac{1}{2π}t^2 \text{ ή } 2πN' = 10t - t^2 \text{ ή } t^2 - 10t + 2πN' = 0$$

$$\text{Ισχύει } Δ \geq 0 \text{ ή } 100 - 2πN' \geq 0 \text{ ή } N' \leq \frac{100}{8π} \text{ ή } N'_{max} = \frac{100}{8π} = \frac{12,5}{π}$$

$$\text{Για } N' = N'_{max} \text{ ή } \frac{10}{2π}t - \frac{1}{2π}t^2 = \frac{12,5}{π} \text{ ή } t = 5s.$$

ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



Σχήμα 1

Ένα σώμα Σ_1 μάζας m_1 = 3Kg είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς νήματος μήκους ℓ = 5m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο Ο. Αρχικά το νήμα είναι οριζόντιο και το Σ_1 αφήνεται ελεύθερο. Όταν το νήμα γίνεται κατακόρυφο, το Σ_1 συγκρούεται ανελαστικά με σώμα Σ_2 μάζας m_2 = 1kg που βρίσκεται ακίνητο στο άκρο Α λεπτής, ομογενούς και οριζόντιας ράβδου μήκους L = 7m και μάζας M = 4Kg. Μετά την κρούση, το Σ_1 συνεχίζει να κινείται προς την ίδια κατεύθυνση και σταματά στιγμιαία όταν το νήμα σχηματίζει γωνία φ = 60° με την κατακόρυφο, ενώ το Σ_2 αρχίζει να κινείται πάνω στη ράβδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του Σ_2 και της ράβδου είναι μ = 0,3. Η ράβδος στηρίζεται σε σταθερό σημείο Λ, γύρω από το οποίο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές και σε σημείο Μ της περιφέρειας ακίνητου κατακόρυφου δίσκου μάζας m_3 = 4Kg και ακτίνας R = 0,5m που μπορεί να περιστραφεί γύρω από το κέντρου του Κ. Για τις αποστάσεις (ΑΜ) και (ΜΛ) ισχύει: (ΑΜ) = (ΜΛ) = s = 2m. Τη στιγμή της κρούσης των Σ_1 και Σ_2 (t = 0s), ασκείται σε σημείο της περιφέρειας του δίσκου δύναμη $\vec{F}$, εφαπτομενικής διεύθυνσης και ο δίσκος αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{γων}$ = 10rad/s^2.

Να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των ταχυτήτων των Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση τους,

β) το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του Σ_1 που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση,

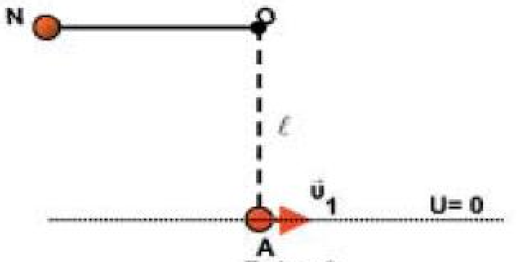
γ) το μέτρο της μετατόπισης και της ταχύτητας του Σ_2 ελάχιστα πριν την ανατροπή της ράβδου,

δ) το μέτρο της στροφορμής και το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου τη στιγμή της ανατροπής.

Θεωρήστε πως δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ ράβδου και δίσκου και πως η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα.

Δίνεται: η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}m_3R^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2, $\sqrt{2} = 1{,}4$, $\sqrt{5}$ = 2,2.

ΛΥΣΗ



Σχήμα 2

α) Για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Ν στη θέση Α θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που βρίσκεται η θέση Α. Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας και προκύπτει:

$$E_{M,N} = E_{M,A} \text{ ή } K_N + U_N = K_A + U_A \text{ ή } m_1 g \ell = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\ell} \text{ ή } \upsilon_1 = 10\text{m/s}$$

Αμέσως μετά την κρούση τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αρχίζουν να κινούνται με ταχύτητες μέτρων υ_1' και υ_2', αντίστοιχα.

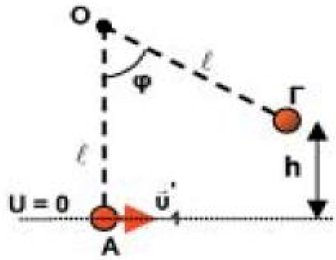
Σχήμα 3

Για την κρούση στη θέση Α εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 και παίρνουμε:

$$\vec{P}_{ολ,αρχ} = \vec{P}_{ολ,τελ} \text{ ή } m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \text{ ή } \upsilon_2' = \frac{m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1')}{m_2} \quad (1)$$

Για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Α στη θέση Γ όπου σταματά στιγμιαία, εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας και

$$E_{M,A} = E_{M,\Gamma} \text{ ή } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \text{ ή } \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2 = m_1 gh \text{ ή } \upsilon_1' = \sqrt{2gh} \quad (2)$$



Σχήμα 4

Όμως ισχύει $h = \ell - \ell\,συνφ = \ell(1 - συνφ)$ (3)

Η σχέση (2) μέσω της σχέσης (3) γίνεται:

$$\upsilon_1' = \sqrt{2g\ell(1-συνφ)} \text{ ή } \upsilon_1' = 5\sqrt{2} = 7\text{m/s}$$

Επομένως από τη σχέση (1) παίρνουμε: υ_2' = 9m/s.

β) Η θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση είναι

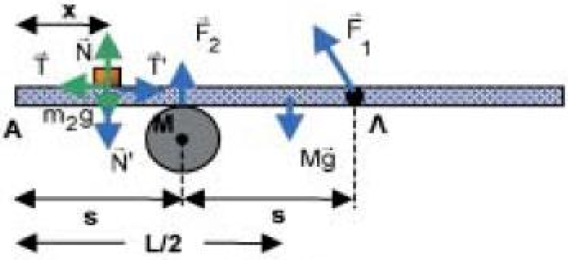
$$Q = K_{ολ,αρχ} - K_{ολ,τελ} \text{ ή } Q = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2 - \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2')^2 \text{ ή } Q = 36\text{J}$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{Q}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2}100\% = \frac{36}{\frac{1}{2}3\cdot 7^2}100\% \approx 49\%$$

γ) Στο σώμα $Σ_2$ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος του $m_2\vec{g}$,
- Η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από τη ράβδο και
- Η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.



Σχήμα 5

Για την κίνηση του $Σ_2$ μέχρι να ανατραπεί η ράβδος ισχύει: $ΣF_y = 0$ ή $N = m_2 g$ και $|α| = \frac{ΣF_x}{m_2} = \frac{T}{m_2} = \frac{μN}{m_2}$

$|α| = \frac{μm_2 g}{m_2}$ ή $|α| = μg$ ή $|α| = 3m/s$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο μετά την κρούση είναι οι εξής:

- Το βάρος της $M\vec{g}$,
- Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ στα σημεία Λ και Μ, αντίστοιχα,
- Η δύναμη $\vec{N}'$ (αντίδραση της $\vec{N}$ που ασκείται στο $Σ_2$ από τη ράβδο με $N' = N$) και
- Η τριβή ολίσθησης $\vec{T}'$ (αντίδραση της $\vec{T}$ που ασκείται στο $Σ_2$ με $T' = T$).

Έστω ότι το σώμα $Σ_2$ έχει μετατοπιστεί κατά x χωρίς να έχει ανατραπεί η ράβδος. Για τη ράβδο από τις συνθήκες ισορροπίας, ισχύει:

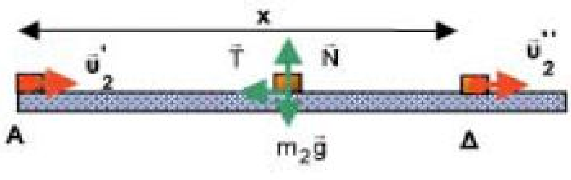
$Στ_{(Λ)} = 0$ ή $τ_{M\vec{g}} + τ_{\vec{F}_1} + τ_{\vec{F}_2} + τ_{\vec{T}'} = 0$ ή $Mg(2s - \frac{L}{2}) + N'(2s - x) - F_2 s = 0$ ή

$Mg(2s - \frac{L}{2}) + N(2s - x) - F_2 s = 0$ ή $Mg(2s - \frac{L}{2}) + m_2 g(2s - x) - F_2 s = 0$ ή

$F_2 = Mg(2 - \frac{L}{2s}) + m_2 g(2 - \frac{x}{s})$ ή $F_2 = 30 - 5x$ (S.I.)

Τη στιγμή της ανατροπής, η ράβδος χάνει την επαφή με το σημείο Μ της περιφέρειας του δίσκου. Τότε ισχύει: $F_2 = 0$ ή $30 - 5x = 0$ ή $x = 6m$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για την κίνηση του $Σ_2$ από τη θέση Α έως της θέση Δ όπου ανατρέπεται η ράβδος και παίρνουμε:



Σχήμα 6

$K_Δ - K_A = W_{m_2\vec{g}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{T}}$ ή

$\frac{1}{2}m_2(u_2'')^2 - \frac{1}{2}m_2(u_2')^2 = -Tx$ ή $\frac{1}{2}m_2(u_2'')^2 - \frac{1}{2}m_2(u_2')^2 =$

$-μm_2 gx$ ή $u_2'' = \sqrt{(u_2')^2 - 2μ\cdot g\cdot x}$ ή $u_2'' = \sqrt{45}m/s$ ή

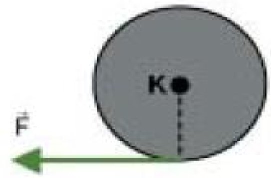
$u_2'' = 3\sqrt{5}m/s$ ή $u_2'' = 6{,}6m/s$

δ) Το σώμα $Σ_2$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι τη χρονική στιγμή t που ανατρέπεται η ράβδος. Τότε ισχύει: $u_{Σ_2} = u_2''$ ή $u_2' - |α|t = u_2''$ ή $t = \frac{u_2' - u_2''}{|α|}$ ή $t = 0{,}8s$

Τη χρονική στιγμή t = 0,8s, ο δίσκος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $ω = α_{γων}t$ ή $ω = 8rad/s$.

Το μέτρο της στροφορμής του δίσκου τη στιγμή t = 0,8s είναι:

$L = I_{cm}\cdot ω$ ή $L = \frac{1}{2}m_3 R^2\cdot ω$ ή $L = 4kg\cdot m^2/s$.



Σχήμα 7

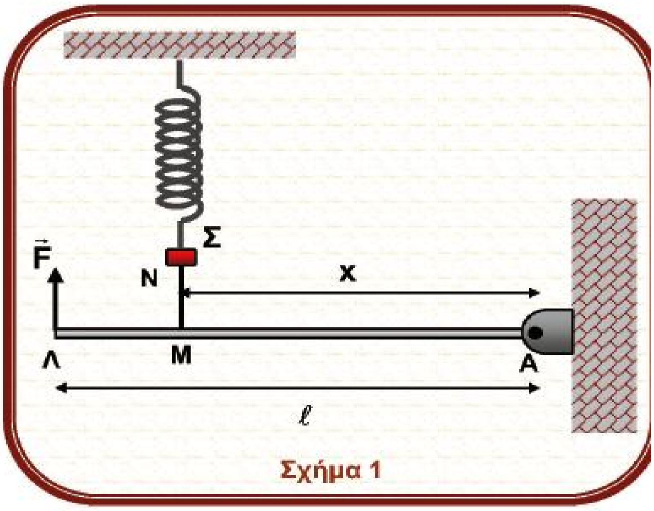
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου τότε είναι:

$\frac{dK_π}{dt} = Στ\cdot ω$ ή $\frac{dK_π}{dt} = I_{cm}\cdot α_{γων}\cdot ω$ ή $\frac{dK_π}{dt} = \frac{1}{2}m_3 R^2\cdot α_{γων}\cdot ω$ ή

$\frac{dK_π}{dt} = 40J/s$.

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Μια ομογενής, άκαμπτη ράβδος ΑΛ μήκους ℓ = 2m, μάζας Μ = 3Kg ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Στο άκρο της Α υπάρχει άρθρωση γύρω από την οποία η ράβδος ΑΛ μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, ενώ στο άλλο άκρο της Λ ασκείται δύναμη $\vec{F}$ με σταθερό μέτρο F = 7,5N, διεύθυνση κάθετη στη ράβδο και φορά προς τα πάνω. Ένα αβαρές, τεντωμένο και κατακόρυφο νήμα ΜΝ συνδέει το σημείο Μ της ράβδου με ένα σώμα Σ μάζας m = 1Kg, το οποίο είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου, ιδανικού ελατηρίου σταθεράς Κ = 50N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο της οροφής. Η απόσταση των σημείων Α,Μ είναι ίση με x = 1,5m .



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται στη ράβδο.

Τη χρονική στιγμή t = 0 κόβουμε το νήμα. Το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ενώ η ράβδος να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το άκρο Α. Κατά την περιστροφή της ράβδου η δύναμη $\vec{F}$ παραμένει συνεχώς κάθετη στη ράβδο. Να υπολογίσετε:

β) τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ.

γ) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη χρονική στιγμή t = 0.

δ) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς το σημείο Α όταν φθάσει στην κατακόρυφη θέση.

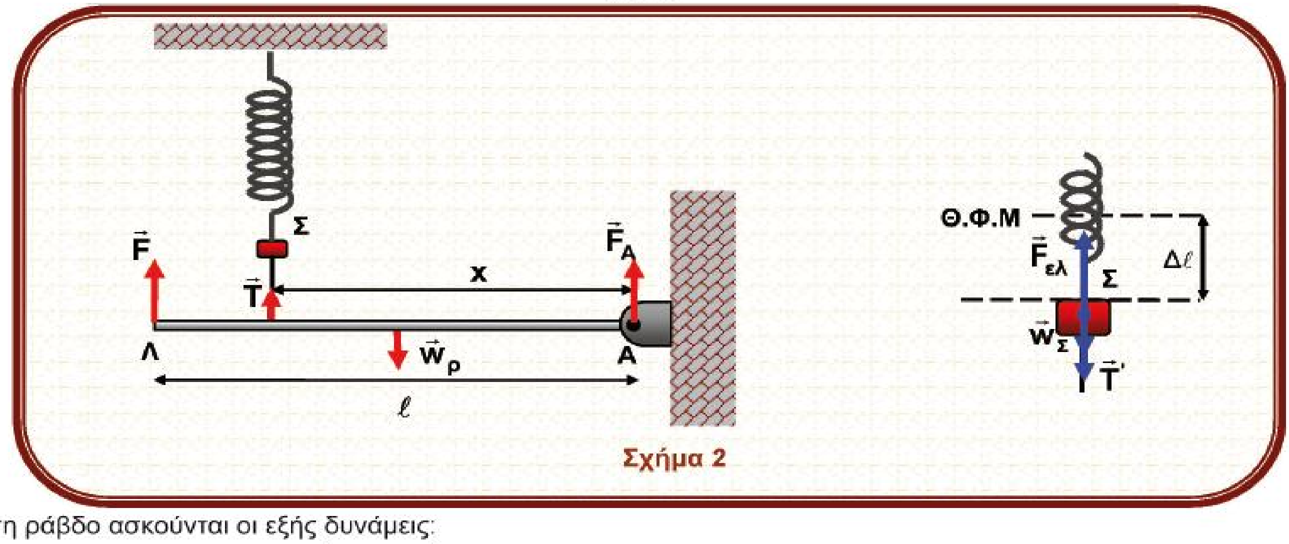
ε) τη μέγιστη κινητική ενέργεια της ράβδου.

Θεωρήστε πως η δύναμη $\vec{F}$ όπως και όλη η διάταξη βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, στο οποίο εκτελούνται και όλες οι κινήσεις.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10m/s^2, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο περιστροφής της που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$, $\frac{\pi}{3} = 1,05$, $\sqrt{3} = 1,7$.

<u>**Λύση**</u>

α)



Σχήμα 2

Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος της ράβδου $\vec{w}_\rho \left(w_\rho = Mg\right)$
- Η τάση $\vec{T}$ του νήματος
- Η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση
- Η δύναμη $\vec{F}$

Για την ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή } \tau_{T(A)} + \tau_{w_\rho(A)} + \tau_{F(A)} + \tau_{F_A(A)} = 0 \text{ ή } Tx + F\ell - Mg\frac{\ell}{2} = 0 \text{ ή } T = \frac{\left(Mg - 2F\right)\ell}{2x} \text{ ή } \mathbf{T = 10N}$$

β) Στο σώμα Σ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_\Sigma \left(w_\Sigma = mg\right)$

- Η τάση $\vec{T}'$ του νήματος $(T' = T)$
- Η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$ $(F_{ελ} = K\Delta\ell)$

Σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton ισχύει:

$$\Sigma F_{(\Sigma)} = 0 \text{ ή } T' + w_{\Sigma} = F_{ελ} \text{ ή } T + mg = K \cdot \Delta\ell \text{ ή } \Delta\ell = \frac{T+mg}{K} \text{ ή } \Delta\ell = 0,4\text{m}.$$

Αφού κόψουμε το νήμα η θέση όπου ισορροπούσε το σώμα Σ γίνεται ακραία θέση για την ταλάντωση που ξεκινά και η θέση ισορροπίας του πλέον βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά του $\Delta\ell'$ με $\Delta\ell' < \Delta\ell$.

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος Σ ισχύει: $w_{\Sigma} = F'_{ελ}$ ή $mg = K \cdot \Delta\ell'$ ή $\Delta\ell' = \frac{mg}{K}$ ή $\Delta\ell' = 0,2\text{m}$

Επομένως η ταλάντωση του σώματος Σ έχει πλάτος Α ίσο με: $A = \Delta\ell - \Delta\ell'$ ή $A = 0,2\text{m}$.

και κυκλική συχνότητα ω ίση με: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ή $\omega = 5\sqrt{2}\text{rad/s}$.

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $U_{max} = \frac{1}{2}DA^2$ ή

$U_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ ή $\mathbf{U_{max} = 1J}$.

γ) Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στη διεύθυνση της που διέρχεται από το άκρο Α προκύπτει: $I_A = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ ή $I_A = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2$ ή $I_A = \frac{1}{3}M\ell^2$.

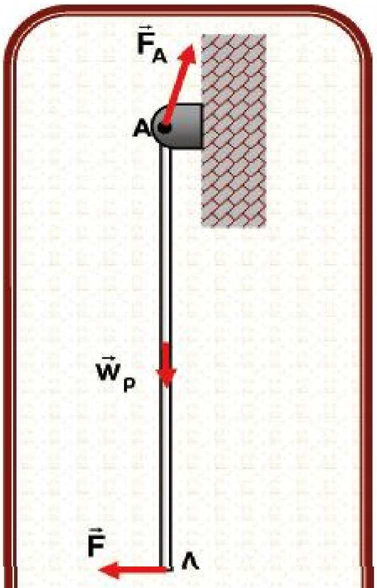
Για τη χρονική στιγμή t = 0, από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(A)} = I_A\alpha_{γων} \text{ ή } Mg\frac{\ell}{2} - F\ell = \frac{1}{3}M\ell^2\alpha_{γων} \text{ ή } \alpha_{γων} = \frac{3(Mg-2F)}{2M\ell} \text{ ή }$$

$\mathbf{\alpha_{γων} = 3,75\ rad/s^2}$.

δ) Όταν η ράβδος φθάσει στην κατακόρυφη θέση (σχήμα 3) για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ως προς το σημείο Α, ισχύει:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \text{ ή } \frac{dL}{dt} = -F\ell \text{ ή } \left|\frac{dL}{dt}\right| = F\ell \text{ ή } \left|\frac{\mathbf{dL}}{\mathbf{dt}}\right| = \mathbf{15Kg \cdot m^2/s^2}.$$



Σχήμα 3

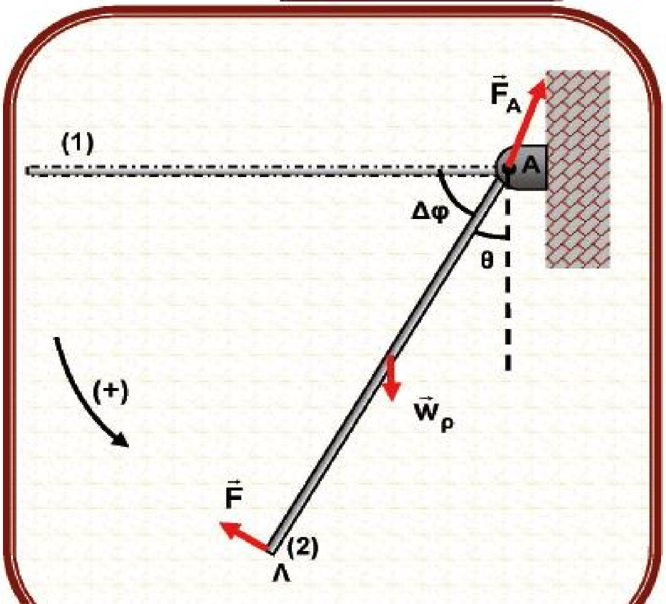
ε) Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος ισχύει: $\tau_{w_ρ(A)} > \left|\tau_{F(A)}\right|$. Επομένως η ράβδος αρχίζει να στρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, επιταχυνόμενη. Η κινητική ενέργεια της ράβδου αυξάνεται. Καθώς όμως στρέφεται, το μέτρο της ροπής του βάρους μειώνεται και συνεπώς το ίδιο συμβαίνει και με τη συνολική ροπή. Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου μειώνεται. Όταν η συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο μηδενιστεί, η ράβδος θα αποκτήσει τη μέγιστη κινητική της ενέργεια. Στη συνέχεια, το μέτρο της ροπής του βάρους γίνεται μικρότερο από το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ και η ράβδος αρχίζει να επιβραδύνεται.

Όταν η συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο μηδενιστεί, ισχύει: $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $Mg\frac{\ell}{2}ημθ - F\ell = 0$ ή

$ημθ = \frac{2F}{Mg}$ ή $ημθ = 0,5$ ή $θ = \frac{\pi}{6}\text{rad}$

Η γωνιακή μετατόπιση Δφ της ράβδου τότε είναι:

$Δφ = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\text{rad}$.



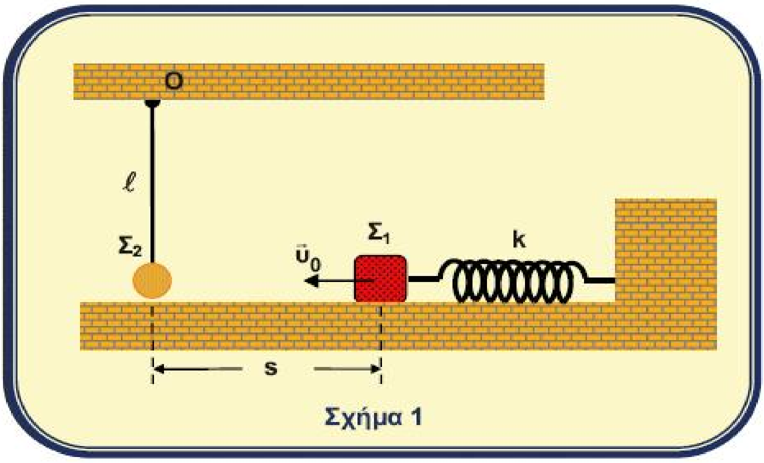
Σχήμα 4

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου –ενέργειας για την κίνηση της ράβδου από την οριζόντια θέση (1) έως τη θέση (2) όπου έχει μετατοπιστεί γωνιακά κατά $Δφ = \frac{\pi}{3}\text{rad}$ προκύπτει:

$$K_{(2)} - K_{(1)} = W_{\tau_{Mg}} + W_{\tau_F} + W_{\tau_{F_A}} \text{ ή } K_{max} = Mg\frac{\ell}{2}συνθ - F\ell Δφ \text{ ή } K_{max} = 15\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)\text{J ή } \mathbf{K_{max} = 9,75J}.$$

Κρούση & απλή αρμονική ταλάντωση

Το ιδανικό ελατήριο του διπλανού σχήματος έχει σταθερά k = 100N/m και το ένα άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ένα σώμα $Σ_1$ αμελητέων διαστάσεων και μάζας m_1 = 1Kg, το οποίο αρχικά ισορροπεί. Το σώμα $Σ_1$ μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα $Σ_1$ εκτοξεύεται με ταχύτητα $\vec{υ}_0$, παράλληλης διεύθυνσης με το επίπεδο και με φορά προς τα αριστερά όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το σώμα $Σ_1$ έχει διανύσει διάστημα $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m συγκρούεται μετωπικά με σώμα $Σ_2$ αμελητέων διαστάσεων και μάζας m_2 = 2Kg. Το σώμα $Σ_2$ ισορροπεί προσδεδεμένο στο άκρο μη εκτατού, αβαρούς νήματος μήκους ℓ = 31,25cm το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο Ο της οροφής. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα $Σ_2$ αποκτά ταχύτητα $\vec{υ}_2$ οριζόντιας διεύθυνσης, αρχίζει να κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από το σημείο Ο και ακινητοποιείται στιγμιαία όταν το νήμα γίνει οριζόντιο. Το σώμα $Σ_1$ αρχίζει να εκτελεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο απλή αρμονική ταλάντωση και αποκτά για πρώτη φορά ταχύτητα μέγιστου μέτρου $\frac{π}{20}$s μετά την κρούση.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{υ}_2$ του σώματος $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης $\vec{υ}_0$.

γ) Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική. Αν είναι ανελαστική, να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση.

δ) Να παραστήσετε γραφικά την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος $Σ_1$ από τη θέση ισορροπίας από τη χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{3T}{4}$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.
Η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Θεωρήστε ως θετική φορά για την ταλάντωση του σώματος $Σ_1$ τη φορά προς τα αριστερά και πως κατά τη διάρκεια του φαινομένου το νήμα παραμένει τεντωμένο.

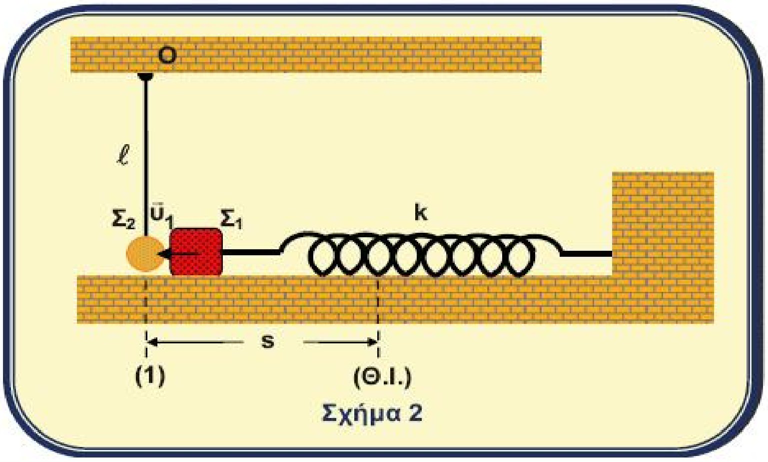
Λύση

α) Το σώμα $Σ_1$ τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης (t = 0) βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του (Θ.Ι., x = 0). Ελάχιστα πριν από την κρούση των δύο σωμάτων, το σώμα $Σ_1$ έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $υ_1$. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας (Α.Δ.Ε.) για την ταλάντωση, από τη θέση ισορροπίας έως της θέση (1) όπου τα δύο σώματα συγκρούονται, προκύπτει:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}m_1υ_0^2 = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}ks^2 \text{ ή}$$

$$m_1υ_0^2 = m_1υ_1^2 + ks^2 \text{ ή}$$

$$υ_0 = \sqrt{υ_1^2 + \frac{k}{m_1}s^2} \quad (1)$$



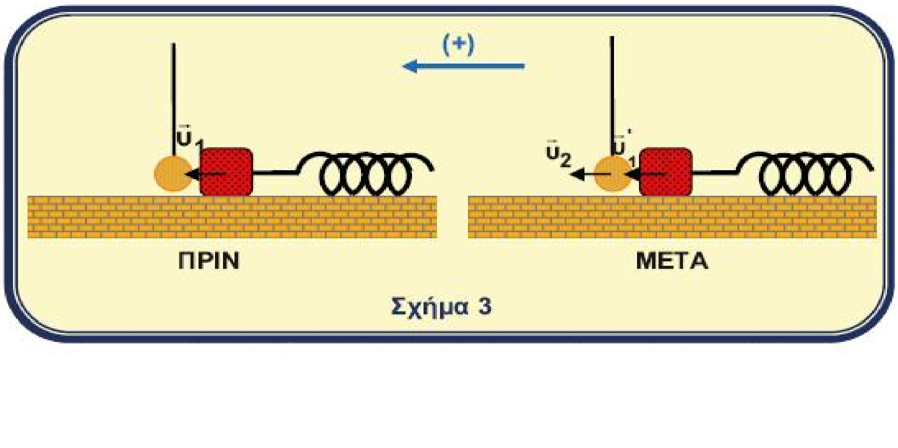
Σχήμα 2

Για την μετωπική κρούση των σωμάτων, εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής του συστήματος τους και προκύπτει:

$$\vec{p}_{ολ,Πριν} = \vec{p}_{ολ,Μετά} \text{ ή}$$

$$p_{ολ,Πριν} = p_{ολ,Μετά} \text{ ή}$$

$$m_1υ_1 = m_1υ_1' + m_2υ_2 \quad (2)$$



Σχήμα 3

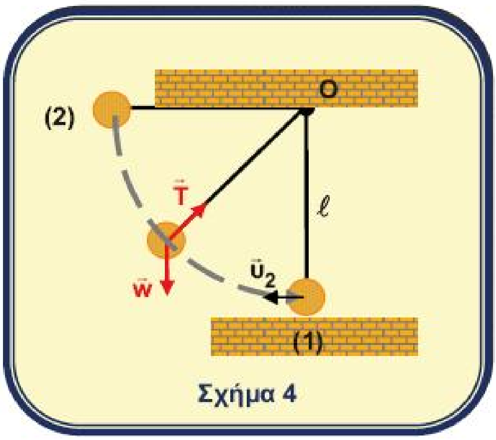
Το σώμα $Σ_2$, προσδεδεμένο στο

νήμα αρχίζει να κινείται προς τα πάνω.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – ενέργειας για την κίνηση του σώματος $Σ_2$ από τη θέση (1) έως της θέση (2) προκύπτει:

$$K_{(2)} - K_{(1)} = W_T + W_w \text{ ή } -\frac{1}{2}m_2 υ_2^2 = -m_2 g \ell \text{ ή}$$

$$υ_2 = \sqrt{2g\ell} \text{ ή } \mathbf{υ_2 = 2,5m/s}$$



Σχήμα 4

β) Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ είναι:

$$T = 2π\sqrt{\frac{m_1}{k}} \text{ ή } T = \frac{π}{5}s.$$

Παρατηρούμε πως $\frac{T}{4} = \frac{π}{20}s$. Αφού το σώμα $Σ_1$ αποκτά για πρώτη φορά ταχύτητα μέγιστου μέτρου μετά από χρονικό διάστημα $\frac{T}{4}$ από τη στιγμή της κρούσης, αμέσως μετά την κρούση βρισκόταν σε ακραία θέση της ταλάντωσης του. Επομένως $A_2 = s$ ή $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m και $υ_1' = 0$.

Από τη σχέση (2) προκύπτει: $υ_1 = \frac{m_1υ_1' + m_2υ_2}{m_1}$ ή $υ_1 = \frac{m_2υ_2}{m_1}$ ή $υ_1 = 5m/s$

Επομένως από τη σχέση (1) προκύπτει: $\mathbf{υ_0 = 10m/s}$.

γ) Για τις κινητικές ενέργειες $K_{Πριν}$, $K_{Μετά}$ του συστήματος των σωμάτων $Σ_1$,$Σ_2$, ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση αντίστοιχα, ισχύει:

$$K_{Πριν} = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 \text{ ή } K_{Πριν} = 12,5J$$

$$K_{Μετά} = \frac{1}{2}m_2υ_2^2 \text{ ή } K_{Μετά} = 6,25J$$

Αφού είναι $K_{Πριν} > K_{Μετά}$ η κρούση των σωμάτων είναι **ανελαστική**.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι: $π\% = \frac{Q}{K_{Πριν}}100\%$ ή $π\% = \frac{K_{Πριν} - K_{Μετά}}{K_{Πριν}}100\%$ ή **π% = 50%**.

δ) Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ (πριν και μετά την κρούση) είναι $ω = \frac{2π}{T}$ ή ω = 10rad/s

Για την ταλάντωση του σώματος $Σ_1$ πριν από την κρούση

- το πλάτος είναι: $A_1 = \frac{υ_0}{ω}$ ή A_1 = 1m
- η αρχική φάση είναι: $φ_o$ = 0rad αφού η ταλάντωση ξεκινά τη χρονική στιγμή t = 0 από τη Θ.Ι. κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. είναι: $x = A_1ημ(ωt)$ ή x = 1ημ(10t) (S.I.)

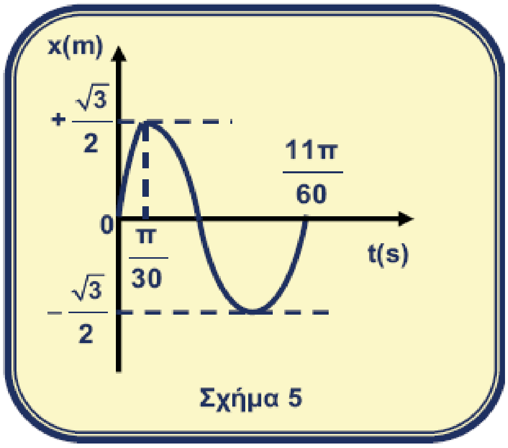
Τα σώματα $Σ_1$,$Σ_2$ συγκρούονται τη χρονική στιγμή t_1 για την οποία ισχύει: x = s ή $1ημ(10t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή

$$10t_1 = \frac{π}{3} \text{ ή } t_1 = \frac{π}{30}s.$$

Για την ταλάντωση του σώματος $Σ_1$ μετά την κρούση

- το πλάτος είναι: $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m
- η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. είναι:
  $$x = A_2ημ\left[ω\left(t - t_1\right) + \frac{π}{2}\right] \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{2}ημ\left[10\left(t - \frac{π}{30}\right) + \frac{π}{2}\right]$$
  (S.I.) αφού η ταλάντωση ξεκινά τη χρονική στιγμή t = t_1 από την ακραία θετική θέση (x = +A_2).

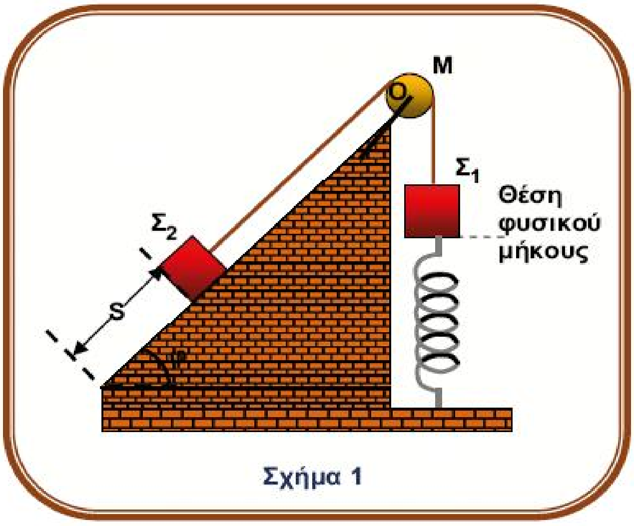
Η ζητούμενη γραφική παράσταση από τη χρονική στιγμή t = 0 έως την $t_2 = t_1 + \frac{3T}{4} = \frac{11π}{60}$ s, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχήμα 5

ΚΙΝΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ & ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Μια ομογενής τροχαλία ακτίνας R = 0,4m και μάζας M = 4Kg μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Η τροχαλία είναι τοποθετημένη στην κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο πολλές φορές αβαρές, μη εκτατό νήμα. Στο ένα άκρο του νήματος είναι δεμένο σώμα $Σ_1$ μάζας m_1, ενώ στο άλλο άκρο, απ' την πλευρά του κεκλιμένου επιπέδου, σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 = 2Kg. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα το σώμα $Σ_1$ είναι στερεωμένο στο επάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και το σώμα $Σ_2$ απέχει απόσταση S = 0,5m από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Το σύστημα των σωμάτων και της τροχαλίας ισορροπεί και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε τη μάζα του σώματος $Σ_1$.

Την χρονική στιγμή t = 0 κόβουμε το νήμα που συνδέει το σώμα $Σ_1$ με την τροχαλία. Το σώμα $Σ_1$ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία θα κινηθεί το σώμα $Σ_2$ και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το σώμα $Σ_2$ φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ γίνεται μέγιστη κατά απόλυτη τιμή για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης του.

γ) Να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου.

δ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας για την ταλάντωση του σώματος $Σ_1$.

ε) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία η κινητική ενέργεια του σώματος $Σ_1$ είναι ίση με την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης για πρώτη φορά..

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, $π^2 = 10$, ημφ = 0,8 και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της που διέρχεται από το κέντρο της: $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία. Για την ταλάντωση θεωρήστε ως θετική φορά, τη φορά προς τα επάνω.

Λύση

α) Στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

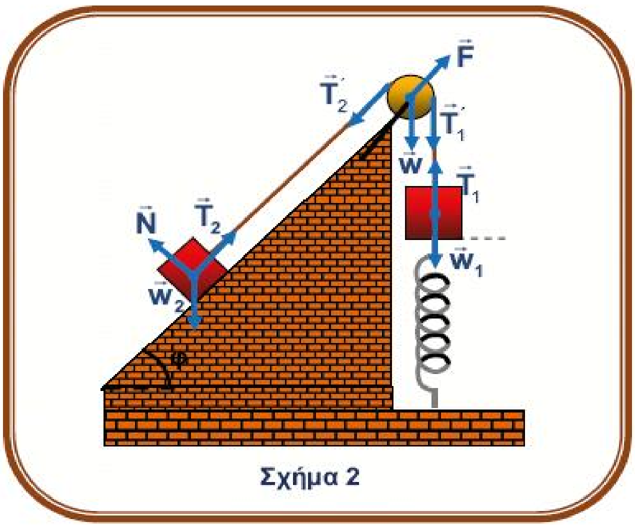
- το βάρος του $\vec{w}_1$ (με $w_1 = m_1 g$)
- η τάση του νήματος $\vec{T}_1$ και

Στο σώμα $Σ_2$ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος του $\vec{w}_2$ (με $w_2 = m_2 g$) που αναλύεται σε δύο συνιστώσες w_{2x}, w_{2y}
- η τάση του νήματος $\vec{T}_2$ και
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο

Στην τροχαλία ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος της $\vec{w}$ (με $w = Mg$)
- οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_2'$, $\vec{T}_1'$ (με $T_2' = T_2$, $T_1' = T_1$) αφού το νήμα είναι αβαρές και
- η δύναμη στήριξης $\vec{F}$ από τον άξονα περιστροφής



Σχήμα 2

Από τον 1^o νόμο του Newton για την ισορροπία των σωμάτων του συστήματος προκύπτει:

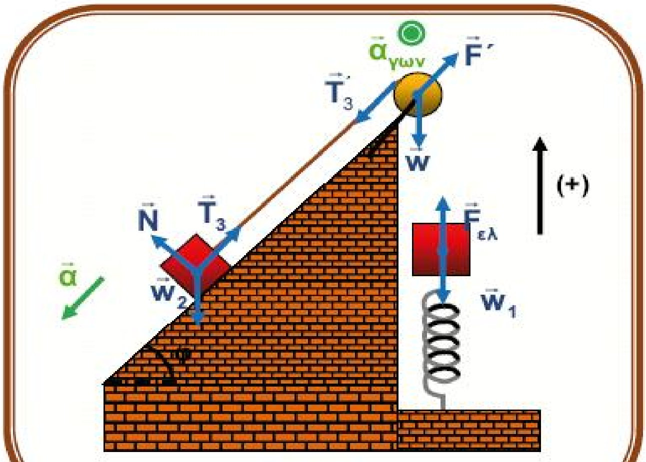
- για το σώμα $Σ_1$: $T_1 = m_1 g$ (1)
- για το σώμα $Σ_2$: $T_2 = w_{2x} = m_2 gημφ$ (2)
- για την τροχαλία: $T_2' R = T_1' R$ ή $T_2 R = T_1 R$ ή μέσω των σχέσεων (1) και (2)

$m_1 g = m_2 gημφ$ ή $m_1 = m_2 ημφ$ ή $\mathbf{m_1 = 1,6Kg}$.

β) Αφού κόψουμε το νήμα στο σώμα $Σ_2$ και στην τροχαλία οι τάσεις γίνονται $\vec{T}_3$, $\vec{T}_3'$ (με $T_3' = T_3$) αντίστοιχα.

- για την μεταφορική κίνηση του σώματος $Σ_2$ εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής προκύπτει: $m_2 gημφ - T_3 = m_2 α$ (3)
- για την στροφική κίνηση της τροχαλίας εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει: $T_3 R = \frac{1}{2} MR^2 α_{γων}$ ή

  $T_3 = \frac{1}{2} Mα$ (4) αφού $α = α_{γων} R$.



Σχήμα 3

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$m_2 gημφ - \frac{1}{2} Mα = m_2 α$ ή $α = \frac{2m_2 gημφ}{2m_2 + M}$ ή $\mathbf{α = 4m/s^2}$.

Επομένως η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας έχει μέτρο: $α_{γων} = \frac{α}{R}$ ή $\mathbf{α_{γων} = 10rad / s^2}$.

γ) Όταν το σώμα $Σ_2$ φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου ισχύει:

$S = \frac{1}{2} α t_1^2$ ή $t_1 = \sqrt{\frac{2S}{α}}$ ή $t_1 = 0,5s$.

Τη χρονική στιγμή t = 0 κατά την οποία κόβουμε το νήμα, η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ είναι μηδενική. Επομένως η ταλάντωση του αρχίζει από την θετική ακραία θέση.

Η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ γίνεται μέγιστη κατά απόλυτη τιμή όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του. Έτσι ισχύει: $t_1 = \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$. Έτσι

$$t_1 = \frac{T}{4} \text{ ή } t_1 = \frac{2π\sqrt{\frac{m_1}{k}}}{4} \text{ ή } t_1 = \frac{π\sqrt{\frac{m_1}{k}}}{2} \text{ ή } 4t_1^2 = π^2 \frac{m_1}{k} \text{ ή } k = π^2 \frac{m_1}{4t_1^2} \text{ ή } \mathbf{k = 16N / m}$$

δ) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ είναι: $ω = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ ή $ω = \sqrt{10}$ rad/s = π rad/s

Το πλάτος A της ταλάντωσης ισούται με την απόσταση της θέσης του φυσικού μήκους (η οποία αποτελεί την ακραία θετική θέση της ταλάντωσης) από τη θέση ισορροπίας Θ.Ι. της ταλάντωσης.

Στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης, στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$.

Για τη Θ.Ι. ισχύει: F = 0 ή $F_{ελ} = m_1 g$ ή $kA = m_1 g$ ή $A = \frac{m_1 g}{k}$ ή A = 1m.

Η αρχική φάση $φ_ο$ της ταλάντωσης είναι: $φ_ο = \frac{π}{2}$ αφού για t = 0 είναι x=+A.

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι: $x = 1ημ\left(πt + \frac{π}{2}\right)$ (S.I.)

ε) Όταν ισχύει: K = U εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης ισχύει:

$E = K + U$ ή $E = 2U$ ή $\frac{1}{2} DA^2 = 2\frac{1}{2} Dx^2$ ή $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} A$ ή $x = \pm 0,5\sqrt{2}$ m

Την πρώτη φορά που ισχύει K = U η απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$ από τη θέση ισορροπίας του είναι θετική. Επομένως είναι: $x = +0,5\sqrt{2}$ m.

Για τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει: $0,5\sqrt{2} = 1ημ\left(πt_2 + \frac{π}{2}\right)$ ή $ημ\left(πt_2 + \frac{π}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $t_2 = \begin{cases} 2κ - \frac{1}{4} \\ 2κ + \frac{1}{4} \end{cases}, κ = 0, \pm 1, ...$

Για κ = 0 και αφού $t_2 > 0$ προκύπτει: $t_2 = \frac{1}{4}$ s

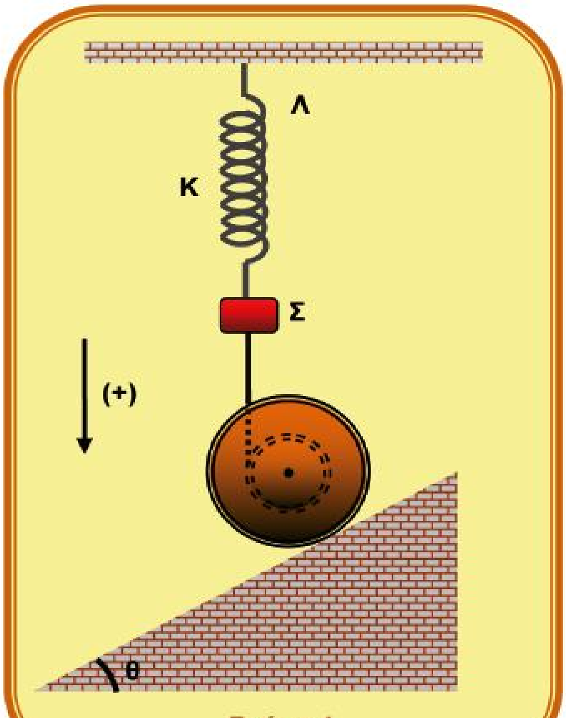
Τότε γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τροχαλίας έχει μέτρο: $ω = α_{γων} t_2$ ή ω = 2,5rad/s.

Η στροφορμή της τροχαλίας έχει μέτρο: $L = Iω = \frac{1}{2} MR^2 ω$ ή $\mathbf{L = 0,8Kg \cdot m^2 / s}$

Απλή αρμονική ταλάντωση
κύλιση χωρίς ολίσθηση

Η διάταξη του σχήματος 1 περιλαμβάνει ένα καρούλι το οποίο αποτελείται από ένα κύλινδρο μάζας M_1 = 1Kg και ακτίνας R_1 = 0,1m και από δύο ίδιους δίσκους μάζας M_2 = 0,5Kg και ακτίνας R_2 = 0,2m ο καθένας, ένα σώμα Σ μάζας M = 4Kg αναρτημένο σε ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k = 100N/m το πάνω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα σε σημείο της οροφής. Γύρω από τον κύλινδρο του καρουλιού έχουμε τυλίξει πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους το ένα άκρο του οποίου είναι συνδεδεμένο με το σώμα Σ. Το νήμα μεταξύ σώματος Σ και κυλίνδρου είναι τεντωμένο και κατακόρυφο. Το καρούλι βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ. Αρχικά το καρούλι και το σώμα Σ είναι ακίνητα.

Τη χρονική στιγμή t = 0 κόβουμε το νήμα μεταξύ κυλίνδρου και σώματος Σ. Το καρούλι αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή επιτάχυνση και το σώμα Σ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A = 10cm.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε τη φάση της ταλάντωσης του σώματος Σ και την ταχύτητα του τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{4}$ s.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής που ασκείται στο καρούλι πριν κόψουμε το νήμα.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του καρουλιού.

Όταν το σώμα Σ έχει διανύσει διάστημα s = 0,5m, να υπολογίσετε:

δ) την κινητική ενέργεια του καρουλιού.

ε) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του καρουλιού λόγω στροφικής κίνησης.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας δίσκου (και κυλίνδρου) μάζας m και ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}mR^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$ και $\pi^2 = 10$.

Θεωρήστε πως το επίπεδο των δίσκων είναι κατακόρυφο σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου και θετική φορά τη φορά προς τα κάτω.

<u>Λύση</u>

α) Τη χρονική στιγμή t = 0 κατά την οποία κόβουμε το νήμα, η ταχύτητα του σώματος Σ είναι μηδενική. Επομένως η θέση όπου βρίσκεται τότε αποτελεί ακραία θέση της ταλάντωσης του (y = +A).

Για t = 0, y = +A από τη χρονική εξίσωση $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, προκύπτει: $\eta\mu\varphi_o = +1$ ή $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

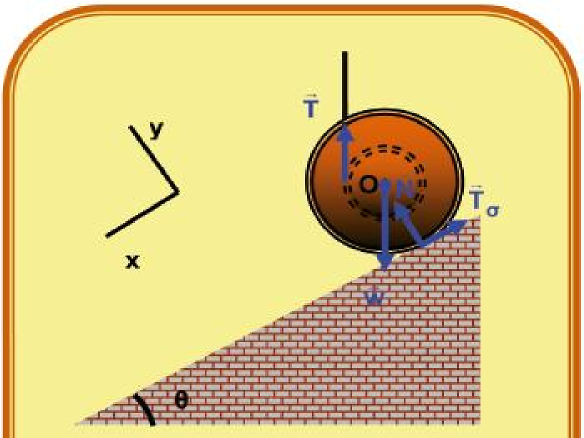
$\omega = \sqrt{\frac{D}{M}} = \sqrt{\frac{k}{M}}$ ή ω = 5rad/s.

Επομένως η φάση φ_1 της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = t_1$ προκύπτει: $\varphi_1 = \omega t_1 + \varphi_o$ ή $\varphi_1 = \frac{7\pi}{4}$ rad.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ είναι:

$\upsilon_\Sigma = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)$ ή $\upsilon_\Sigma = 0{,}5\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)

Για $t = t_1$ προκύπτει: $\upsilon_\Sigma = 0{,}5\sigma\upsilon\nu\varphi_1$ ή $\upsilon_\Sigma = 0{,}25\sqrt{2}$ m/s



Σχήμα 2

β) Πριν κόψουμε το νήμα, στο καρούλι ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος του καρουλιού $\vec{w}\left(w = \left(M_1 + 2M_2\right)g\right)$ το οποίο αναλύεται σε δύο συνιστώσες: $w_x = w\eta\mu\theta$ και $w_y = w\sigma\upsilon\nu\theta$
- η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο
- η τάση του νήματος $\vec{T}$

Από τη συνθήκη της στροφικής ισορροπίας του καρουλιού προκύπτει:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $T_\sigma R_2 - TR_1 = 0$ ή $T = \dfrac{T_\sigma R_2}{R_1}$ (1)

Από τη συνθήκη της μεταφορικής ισορροπίας του καρουλιού ισχύει: $\Sigma F_x = 0$ ή $T_\sigma + T\eta\mu\theta = (M_1 + 2M_2)g\eta\mu\theta$ (2)

Στο σώμα Σ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_\Sigma$ $(w_\Sigma = Mg)$
- η τάση $\vec{T}'$ του νήματος (με T' = T αφού το νήμα είναι αβαρές)
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ $(F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell)$

Αφού κόψουμε το νήμα, η ταλάντωση του σώματος Σ πραγματοποιείται γύρω από νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.). Στη Ν.Θ.Ι. το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$ και ισχύει:

$F'_{\varepsilon\lambda} = Mg$ ή $k\Delta\ell' = Mg$ ή $\Delta\ell' = \dfrac{Mg}{k}$ ή $\Delta\ell' = 0{,}4m$.

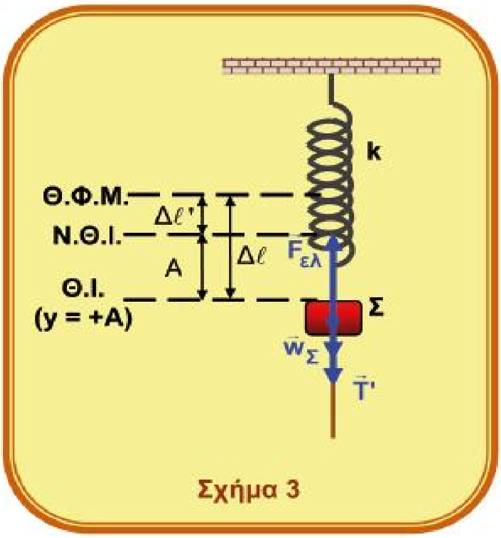
Ισχύει: $\Delta\ell = A + \Delta\ell'$ ή $\Delta\ell = 0{,}5m$

Για την ισορροπία του σώματος Σ στη Θ.Ι., ισχύει:

$\Sigma F = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = T + Mg$ ή $k\Delta\ell = T + Mg$ (3)

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει:

$k\Delta\ell = \dfrac{T_\sigma R_2}{R_1} + Mg$ ή $T_\sigma = \dfrac{R_1}{R_2}(k\Delta\ell - Mg)$ ή $\mathbf{T_\sigma = 5N}$



Σχήμα 3

γ) Από τη σχέση (1) προκύπτει: T = 10N.

Έτσι από τη σχέση (2) για τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου προκύπτει: $\eta\mu\theta = \dfrac{T_\sigma}{(M_1 + 2M_2)g - T}$ ή $\eta\mu\theta = 0{,}5$.

Η ροπή αδράνειας του καρουλιού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$I = \dfrac{1}{2}M_1R_1^2 + 2\dfrac{1}{2}M_2R_2^2$ ή $I = 25\cdot10^{-3}kgm^2$.

Αφού κόψουμε το νήμα για την κίνηση του καρουλιού

- από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει:

$\Sigma\tau_{(O)} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $T'_\sigma R_2 = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $T'_\sigma = \dfrac{I\alpha_{\gamma\omega\nu}}{R_2}$ (4)

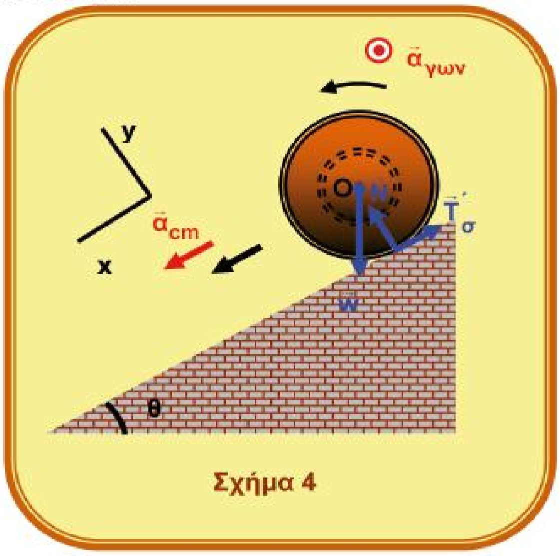
- από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, προκύπτει:

$\Sigma F = \dfrac{w}{g}\alpha_{cm}$ ή $w\eta\mu\theta - T'_\sigma = \dfrac{w}{g}\alpha_{cm}$ ή $w\eta\mu\theta - T'_\sigma = \dfrac{w}{g}R_2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (5)

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$w\eta\mu\theta - \dfrac{I\alpha_{\gamma\omega\nu}}{R_2} = \dfrac{w}{g}R_2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{wgR_2\eta\mu\theta}{wR_2^2 + Ig}$ ή

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{(M_1 + 2M_2)gR_2\eta\mu\theta}{(M_1 + 2M_2)R_2^2 + I}$ ή $\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{2000}{105} rad/s^2}$



Σχήμα 4

δ) Σε κάθε ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ διανύει απόσταση 4Α = 0,4m. Όταν έχει διανύσει διάστημα s = 0,5m έχει εκτελέσει $N = \dfrac{s}{4A}$ = 1,25 ταλαντώσεις και έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα $\Delta t = t = NT_{\tau\alpha\lambda} = N\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{2}$ s.

Η κινητική ενέργεια του καρουλιού τότε είναι:

$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\sigma\tau\rho} = \dfrac{1}{2}(M_1 + 2M_2)u_{cm}^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2$ ή $K = \dfrac{1}{2}(M_1 + 2M_2)\omega^2R_2^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2$ ή $K = \dfrac{1}{2}\left[(M_1 + 2M_2)R_2^2 + I\right]\omega^2$ ή

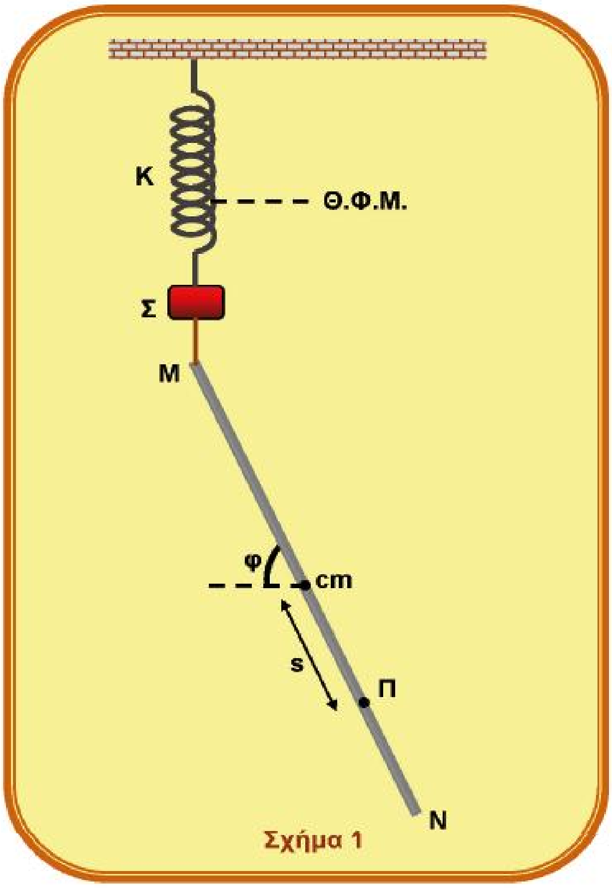
$K = \dfrac{1}{2}\left[(M_1 + 2M_2)R_2^2 + I\right]\alpha_{\gamma\omega\nu}^2 t^2$ ή $\mathbf{K = \dfrac{5000}{105} J}$

ε) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του καρουλιού λόγω της στροφικής του κίνησης είναι:

$\dfrac{dK_\sigma}{dt} = \Sigma\tau_{(o)}\omega$ ή $\dfrac{dK_\sigma}{dt} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}^2 t$ ή $\boldsymbol{\dfrac{dK_\sigma}{dt} = 4{,}54\pi\ J/s}$.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΚΙΝΗΣΗ ΡΑΒΔΟΥ

Η λεπτή ομογενής ράβδος ΜΝ, μάζας M = 3Kg και μήκους ℓ του σχήματος ισορροπεί ακίνητη, σχηματίζοντας γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση. Η ράβδος μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από σημείο της Π το οποίο απέχει απόσταση $s = \frac{\ell}{4}$ από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν. Στο άκρο Μ της ράβδου είναι συνδεδεμένο αβαρές, κατακόρυφο νήμα το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σώμα Σ. Το τελευταίο είναι αναρτημένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K = 100N/m.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης στήριξης που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής της.

Κόβουμε το νήμα οπότε το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η ράβδος να περιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ.

Το μέτρο της μέγιστης δύναμης του ελατηρίου που ασκείται σε αυτό κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του είναι: $F_{ελ,max} = 20N$.

γ) Να υπολογίσετε τη μάζα m του σώματος Σ.

δ) Αν ο λόγος της μέγιστης κινητικής ενέργειας $K_{max,ρ}$ της ράβδου προς τη μέγιστη κινητική ενέργεια $K_{max,Σ}$ του σώματος Σ είναι $\frac{K_{max,ρ}}{K_{max,Σ}} = 13,5$, να υπολογίσετε το μήκος ℓ της ράβδου.

ε) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου όταν γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10m/s^2$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$ και ημφ = 0,8.

<u>**Λύση**</u>

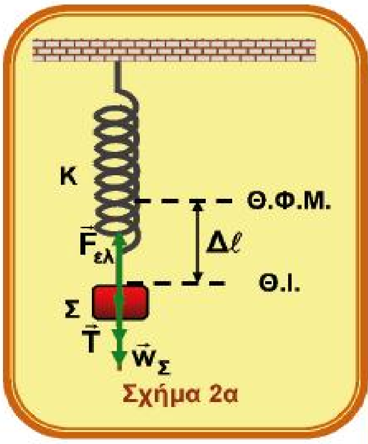
α) Στο σώμα Σ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_Σ$ ($w_Σ = mg$)
- η τάση του νήματος $\vec{T}$
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$

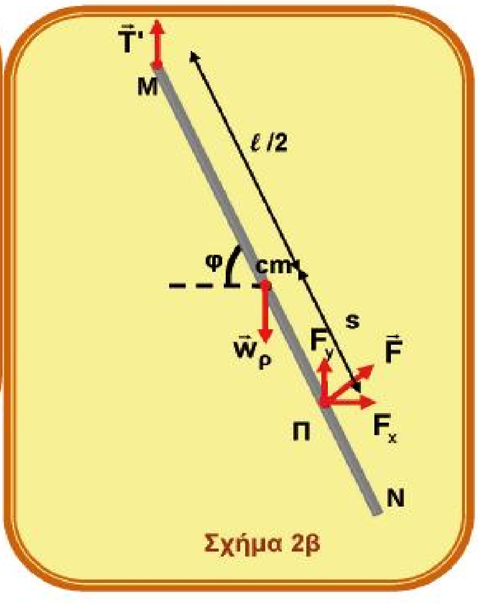
Λόγω ισορροπίας, από τον 1° νόμο του Newton προκύπτει: $ΣF_{(Σ)} = 0$ ή $w_Σ + T = F_{ελ}$ ή $mg + T = K \cdot Δ\ell$ (1)

Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_ρ$ ($w_ρ = Mg$)
- η τάση του νήματος $\vec{T}'$ $(T' = T)$
- η δύναμη στήριξης $\vec{F}$ από τον άξονα περιστροφής (με συνιστώσες F_x, F_y)



Σχήμα 2α



Σχήμα 2β

Λόγω ισορροπίας, προκύπτει:

$ΣF_{(ρ)x} = 0$ ή $F_x = 0$

$ΣF_{(ρ)y} = 0$ ή $T' + F_y = w_ρ$ ή

$T + F_y = Mg$ (2) και

$$Στ_{(Π)} = 0 \text{ ή } τ_{T'(Π)} + τ_{F(Π)} + τ_{w_ρ(Π)} = 0 \text{ ή } T'\left(\frac{\ell}{2} + s\right)συνφ = w_ρ s συνφ \text{ ή } T\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4}\right) = Mg\frac{\ell}{4} \text{ ή } T = \frac{Mg}{3} \text{ (3) ή } T = 10N$$

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει:

$\frac{Mg}{3}+F_y=Mg$ ή $F_y=\frac{2Mg}{3}$ ή $F_y=20N$

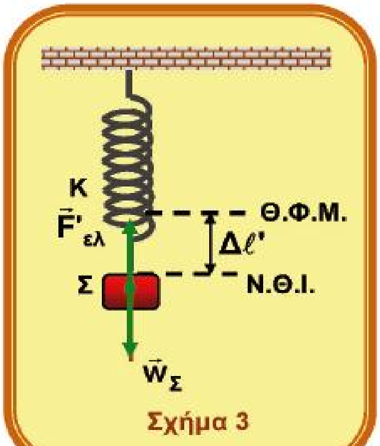
Συνεπώς το μέτρο της δύναμης στήριξης $\vec{F}$ είναι: $\mathbf{F = F_y = 20N}$

β) Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\Delta\ell=\frac{mg+T}{K}$ ή $\Delta\ell=\frac{g}{K}\left(m+\frac{M}{3}\right)$ (4)

Μετά το κόψιμο του νήματος η θέση όπου ισορροπούσε το σώμα Σ αποτελεί ακραία θέση για την ταλάντωση του. Το σώμα Σ πλέον ισορροπεί στη θέση όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$.

Στη (νέα) θέση ισορροπίας, ισχύει:

$mg=K\cdot\Delta\ell'$ ή $\Delta\ell'=\frac{mg}{K}$ (5)



Σχήμα 3

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$A=\Delta\ell-\Delta\ell'$ ή μέσω των σχέσεων (4) και (5) $A=\frac{g}{K}\left(m+\frac{M}{3}\right)-\frac{mg}{K}$ ή $A=\frac{Mg}{3K}$ ή

$\mathbf{A = 0,1m}$.

Η δύναμη του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα Σ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του έχει μέγιστο μέτρο όταν το σώμα βρεθεί στην κατώτατη θέση της τροχιάς του. Εκεί η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι μέγιστη και ίση με: $\Delta\ell_{max}=\Delta\ell'+A$ ή $\Delta\ell_{max}=\frac{g}{K}\left(m+\frac{M}{3}\right)$.

Επομένως είναι: $F_{\varepsilon\lambda,max}=K\Delta\ell_{max}=g\left(m+\frac{M}{3}\right)$ ή $m=\frac{F_{\varepsilon\lambda,max}}{g}-\frac{M}{3}$ ή $\mathbf{m = 1Kg}$.

δ) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος Σ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του είναι:

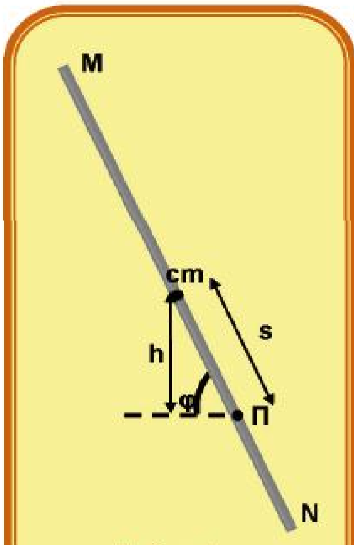
$K_{max,\Sigma}=\frac{1}{2}KA^2$ ή $K_{max,\Sigma}=0,5J$.

Άρα προκύπτει: $\frac{K_{max,\rho}}{K_{max,\Sigma}}=13,5$ ή $K_{max,\rho}=13,5K_{max,\Sigma}$ ή

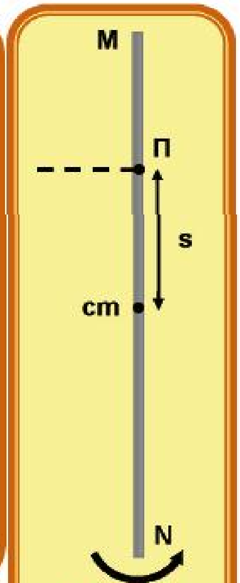
$K_{max,\rho}=6,75J$.

Τη στιγμή που κόβεται το νήμα, η ράβδος δεν έχει κινητική ενέργεια. Καθώς αρχίζει να περιστρέφεται κινούμενη προς τα κάτω, η κινητική της ενέργεια αυξάνεται ενώ η δυναμική βαρυτική της ενέργεια μειώνεται. Η ράβδος θα αποκτήσει τη μέγιστη κινητική της ενέργεια όταν βρεθεί στην κατώτερη θέση της κίνησης της.

Για την κίνηση της ράβδου από τη θέση όπου βρίσκεται όταν κόβουμε το νήμα (σχήμα 4α) έως την κατώτερη θέση της (σχήμα 4β), ισχύει:



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β

$\Delta K=-\Delta U$ ή $K_{max,\rho}=Mg\left(h+\frac{\ell}{4}\right)$ (6)

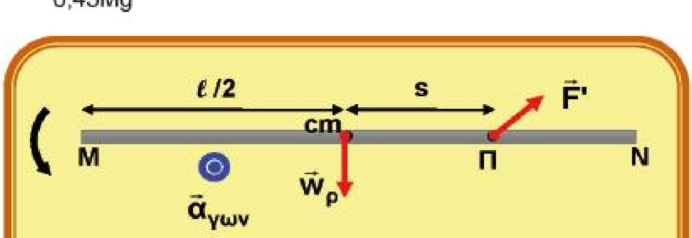
Όμως είναι: $h=\frac{\ell}{4}\eta\mu\varphi$ (7)

Από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει:

$K_{max,\rho}=Mg\left(\frac{\ell}{4}\eta\mu\varphi+\frac{\ell}{4}\right)=Mg\ell\left(\frac{\eta\mu\varphi}{4}+\frac{1}{4}\right)=0,45Mg\ell$ ή $\ell=\frac{K_{max,\rho}}{0,45Mg}$ ή $\boldsymbol{\ell = 0,5m}$.

ε) Σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$I_\Pi=I_{cm}+Ms^2$ ή $I_\Pi=\frac{1}{12}M\ell^2+M\left(\frac{\ell}{4}\right)^2=\frac{7}{48}M\ell^2$



Σχήμα 5

Στη ράβδο κατά την περιστροφή της ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

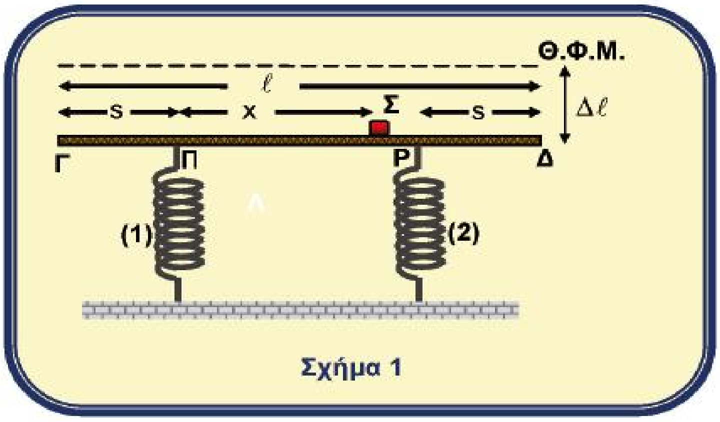
- το βάρος $\vec{w}_\rho$ ($w_\rho=Mg$)
- η δύναμη στήριξης $\vec{F}'$ από τον άξονα περιστροφής

Όταν η ράβδος γίνει οριζόντια από το νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει:

$\Sigma\tau_{(\Pi)}=I_\Pi\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $w_\rho\frac{\ell}{4}=\frac{7}{48}M\ell^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $Mg\frac{\ell}{4}=\frac{7}{48}M\ell^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{12g}{7\ell}$ ή $\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{240}{7}}$ **rad/s²**.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Μια λεπτή, ομογενής δοκός ΓΔ μάζας $M = 2Kg$ και μήκους $\ell = 2m$ ισορροπεί οριζόντια, στερεωμένη στα πάνω άκρα δύο κατακόρυφων ιδανικών ελατηρίων (1) και (2) με σταθερές $K_1 = 50N/m$ και K_2 αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το φυσικό μήκος των δύο ελατηρίων είναι το ίδιο και τα κάτω άκρα τους είναι στερεωμένα στο έδαφος. Τα σημεία Π και Ρ όπου τα ελατήρια έχουν στερεωθεί στη δοκό απέχουν απόσταση $s = 0{,}5m$ από τα άκρα Γ και Δ αντίστοιχα. Πάνω στη δοκό έχει τοποθετηθεί σε απόσταση x από το σημείο Π ένα σώμα Σ πολύ μικρών διαστάσεων, μάζας $m = 1Kg$. Τα ελατήρια είναι συσπειρωμένα κατά $\Delta\ell = 0{,}3m$. Να υπολογίσετε:



Σχήμα 1

α) τη σταθερά K_2 του ελατηρίου (2)
β) την απόσταση x

Εκτρέπουμε κατακόρυφα προς τα κάτω κατά d το σύστημα δοκού – σώματος Σ ώστε η δοκός να παραμείνει οριζόντια και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Το σώμα Σ μόλις που δεν χάνει την επαφή του με τη δοκό.

γ) Να υπολογίσετε την ενέργεια που καταναλώθηκε για να εκτραπεί το σύστημα κατά d.

δ) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$ που δέχεται το σώμα Σ από τη δοκό σε συνάρτηση με το χρόνο.

Να θεωρήσετε ως θετική φορά τη φορά της αρχικής εκτροπής.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10m/s^2$.

<u>**Λύση**</u>

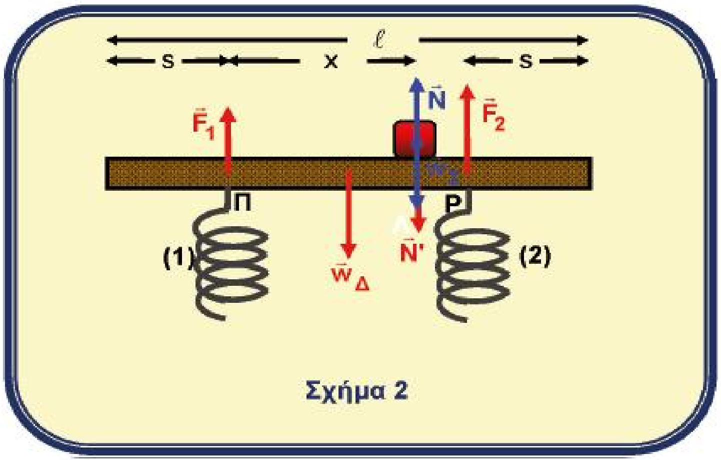
α) Στο σώμα Σ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_\Sigma$ ($w_\Sigma = mg$)
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από τη δοκό

Για το σώμα Σ από τον 1° νόμο του Newton προκύπτει:
$N = w_\Sigma$ ή $N = mg$ (1)

Στη δοκό ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_\Delta$ ($w_\Delta = Mg$)
- οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ από τα ελατήρια (1) και (2) αντίστοιχα ($F_1 = K_1\Delta\ell, F_2 = K_2\Delta\ell$)
- η αντίδραση $\vec{N}'$ από το σώμα Σ ($N' = N$)



Σχήμα 2

Από τον 1° νόμο του Newton για την ισορροπία της δοκού προκύπτει:
$F_1 + F_2 = N' + w_\Delta$ ή $K_1\Delta\ell + K_2\Delta\ell = N + Mg$ ή $(K_1 + K_2)\Delta\ell = N + Mg$ (2)
Η σχέση (2) μέσω της σχέσης (1) γίνεται:

$$(K_1 + K_2)\Delta\ell = mg + Mg \text{ ή } K_2 = \frac{m+M}{\Delta\ell}g - K_1 \text{ ή } \mathbf{K_2 = 50N/m}$$

β) Ακόμα για την ισορροπία της δοκού ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(\Pi)} = 0 \text{ ή } \tau_{F_1(\Pi)} + \tau_{F_2(\Pi)} + \tau_{N'(\Pi)} + \tau_{w_\Delta(\Pi)} = 0 \text{ ή}$$

$$F_2(\ell - 2s) - N'x - w_\Delta\left(\frac{\ell}{2} - s\right) = 0 \text{ ή } K_2\Delta\ell(\ell - 2s) - Nx - Mg\left(\frac{\ell}{2} - s\right) = 0 \quad (3)$$

Η σχέση (3) μέσω της σχέσης (1) γίνεται:

$$K_2\Delta\ell(\ell - 2s) - mgx - Mg\left(\frac{\ell}{2} - s\right) = 0 \text{ ή}$$

$$x = \frac{(2K_2\Delta\ell - Mg)(\ell - 2s)}{2mg} \text{ ή } \mathbf{x = 0{,}5m}$$

Δηλαδή, το σώμα Σ ισορροπεί στο μέσο μεταξύ των σημείων στήριξης Π και Ρ.

γ) Εκτρέπουμε κατακόρυφα προς τα κάτω το σύστημα δοκού – σώματος Σ κατά $\vec{y}$. Στη θέση αυτή στο σύστημα ασκούνται οι εξής (εξωτερικές) δυνάμεις:

- τα βάρη $\vec{w}_\Delta$ ($w_\Delta = Mg$), $\vec{w}_\Sigma$ ($w_\Sigma = mg$)
- οι δυνάμεις $\vec{F}_1', \vec{F}_2'$ από τα ελατήρια (1) και (2) αντίστοιχα ($F_1' = K_1(\Delta\ell + y), F_2' = K_2(\Delta\ell + y)$)

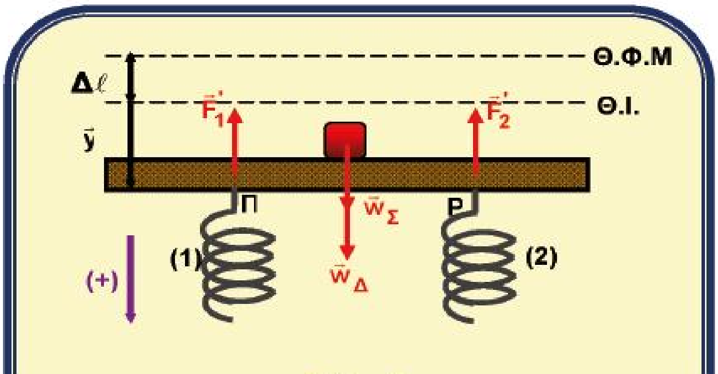
Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι:

$F = w_\Sigma + w_\Delta - F_1' - F_2'$ ή

$F = mg + Mg - K_1(\Delta\ell + y) - K_2(\Delta\ell + y)$ ή

$F = -(K_1 + K_2)y$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά: $D = K_1 + K_2$ ή $D = 100N/m$



Σχήμα 3

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος είναι: $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{M+m}}$ ή $\omega = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ rad/s

Η σταθερά της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι:

$D_1 = m\omega^2$ ή $D_1 = \dfrac{100}{3}$ N/m

και για την συνολική δύναμη που δέχεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του ισχύει:
$F_\Sigma = -D_1 y$ ή $w_\Sigma - N = -D_1 y$ ή

$$N = w_\Sigma + D_1 y \quad (4)$$

Τη στιγμή t = 0 κατά την οποία το σώμα Σ αφήνεται η ταχύτητα του είναι μηδέν. Συνεπώς η θέση όπου αφήνεται αποτελεί την ακραία (θετική) θέση της ταλάντωσης του, δηλαδή: $y = +A$ ή $A = d$.

Το σώμα Σ βρίσκεται σε επαφή με τη δοκό όταν: $N \geq 0$ ή $w_\Sigma + D_1 y \geq 0$ ή $y \geq -\dfrac{w_\Sigma}{D_1}$

Αφού το σώμα Σ μόλις που δεν χάνει την επαφή του με τη δοκό, για την ακραία (αρνητική) θέση της ταλάντωσης του ισχύει: $-A = y_{min}$ ή $-d = -\dfrac{w_\Sigma}{D_1}$ ή $d = \dfrac{w_\Sigma}{D_1} = \dfrac{mg}{D_1}$ ή **d = 0,3m.**

Σχόλιο: Η θέση όπου τα ελατήρια αποκτούν το φυσικό τους μήκος (Θ.Φ.Μ.) αποτελούν την ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσης του συστήματος δοκού – σώματος Σ.

Η ζητούμενη ενέργεια που καταναλώθηκε είναι: $E = \dfrac{1}{2}DA^2 = \dfrac{1}{2}Dd^2$ ή **E = 4,5J**

δ) Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συστήματος από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής:
$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$

Για τη χρονική στιγμή t = 0 είναι: $y = +A (\upsilon = 0)$ και προκύπτει: $\eta\mu\varphi_o = 1$ ή $\varphi_o = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

Τελικά η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης γράφεται:

$$y = 0{,}3\eta\mu\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

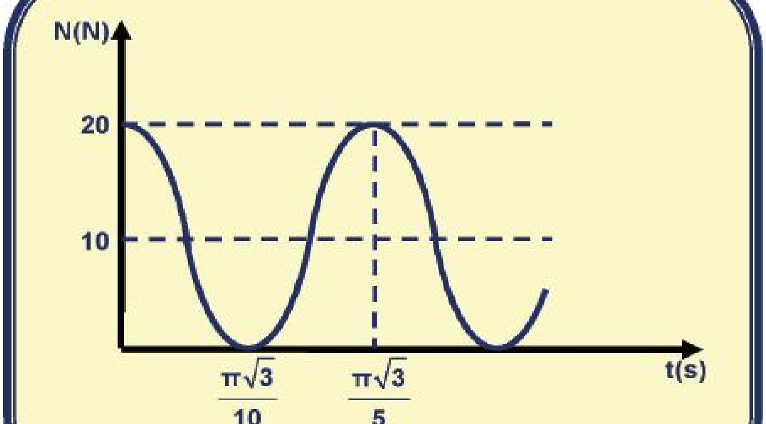
Από τη σχέση (4) για το μέτρο της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$ έχουμε:
$N = w_\Sigma + D_1 y$ ή $N = mg + D_1 A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ ή

$$\mathbf{N = 10 + 10\eta\mu\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)} \text{ (S.I.)}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

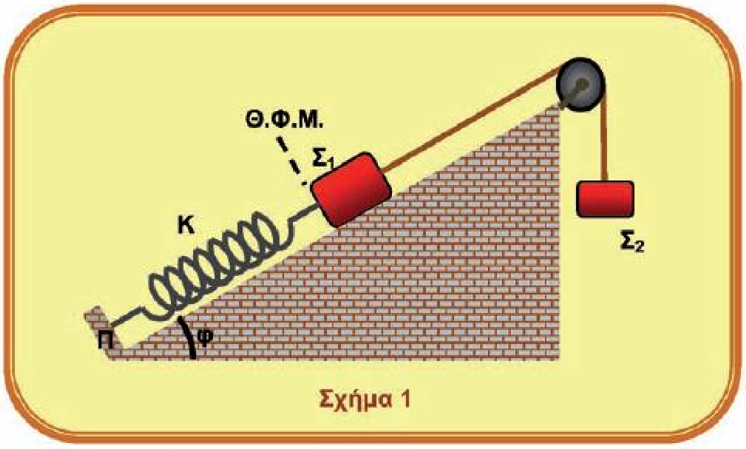
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ή $T = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{5}$ s

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Σχήμα 4

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Σχήμα 1

Η διάταξη του διπλανού σχήματος περιλαμβάνει δύο αρχικά ακίνητα σώματα Σ_1, Σ_2 με μάζες $m_1 = 2Kg$ και m_2 αντίστοιχα, ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K = 50N/m$ και μια ομογενή τροχαλία μάζας $M = 2Kg$ και ακτίνας $R = 0,25m$ που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Το σώμα Σ_1 βρίσκεται πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^o$, είναι στερεωμένο στο πάνω άκρο του ελατηρίου και είναι συνδεδεμένο μέσω αβαρούς νήματος το οποίο έχει τυλιχθεί πολλές φορές στην περιφέρεια της τροχαλίας με το σώμα Σ_2. Το ελατήριο της διάταξης έχει το φυσικό του μήκος, ο άξονας του είναι παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο και το κάτω άκρο του είναι στερεωμένο ακλόνητα σε σημείο Π.

α) Να υπολογίσετε τη μάζα m_2 του σώματος Σ_2.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, κόβουμε το νήμα μεταξύ τροχαλίας και σώματος Σ_1. Το σώμα Σ_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ενώ το σώμα Σ_2 και η τροχαλία αρχίζουν να επιταχύνονται ομαλά.

β) Να υπολογίστε τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

γ) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το σώμα Σ_1 σε συνάρτηση με το χρόνο.

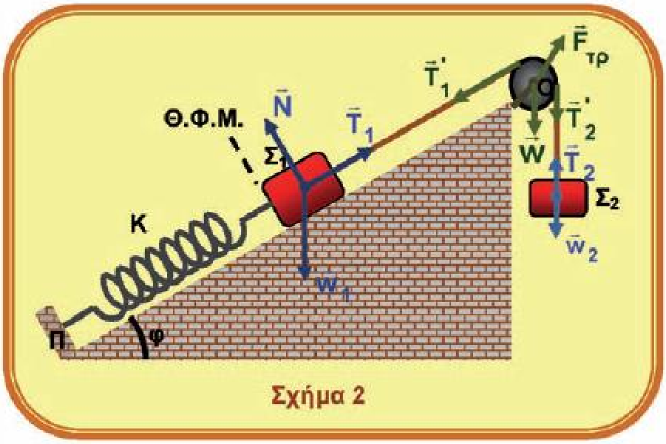
δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας τη χρονική στιγμή κατά την οποία το διάστημα που έχει μετακινηθεί το σώμα Σ_1 είναι $s = 0,4m$.

ε) Να υπολογίσετε το μέτρο της ορμής του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή κατά της οποία η τροχαλία έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια $K_{\tau\rho} = (\pi^2/8)$ J.

Θεωρήστε πως η τροχαλία περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο και θετική φορά τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της που διέρχεται από το κέντρο της: $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση



Σχήμα 2

α) Στο σώμα Σ_2 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_2$ ($w_2 = m_2g$)
- η τάση του νήματος $\vec{T}_2$

Λόγω ισορροπίας, από τον 1^o νόμο του Newton προκύπτει: $\Sigma F_{(2)} = 0$ ή
$T_2 = m_2g$ (1)

Στο σώμα Σ_1 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}_1$ ($w_1 = m_1g$)
- η τάση του νήματος $\vec{T}_1$
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο

Λόγω ισορροπίας, από τον 1^o νόμο του Newton προκύπτει: $\Sigma F_{(1)} = 0$ ή $T_1 = m_1g\eta\mu\varphi$ (2)

Στη τροχαλία ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}$
- οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1', \vec{T}_2'$ $\left(T_1' = T_1, T_2' = T_2\right)$
- η δύναμη στήριξης $\vec{F}_{\tau\rho}$ από τον άξονα

Για την τροχαλία λόγω ισορροπίας, προκύπτει: $\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{T_1'(O)} + \tau_{T_2'(O)} = 0$ ή $T_1'R = T_2'R$ ή $T_1' = T_2'$ ή $T_1 = T_2$ (3)

Η σχέση (3) μέσω των σχέσεων (1) και (2) γίνεται: $m_2g = m_1g\eta\mu\varphi$ ή $m_2 = m_1\eta\mu\varphi$ ή $\mathbf{m_2 = 1Kg}$

β) Μετά το κόψιμο του νήματος οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 είναι:

- το βάρος $\vec{w}_2$ ($w_2 = m_2g$)
- η τάση του νήματος $\vec{T}$

Για την κίνηση του σώματος Σ_2 ισχύει: $w_2 - T = m_2\alpha$ ή $m_2g - T = m_2\alpha$ (4)

Στην τροχαλία ασκούνται:

- το βάρος $\vec{w}$
- η δύναμη στήριξης $\vec{F}'_{τρ}$ από τον άξονα
- η τάση του νήματος $\vec{T}'$ $\left(T' = T\right)$

Από το νόμο της στροφικής κίνησης για την κίνηση της τροχαλίας προκύπτει:

$Στ_{(O)} = Iα_{γων}$ ή $TR = \frac{1}{2}MR^2α_{γων}$ ή $T = \frac{1}{2}Mα$ (5) (αφού $α = α_ε = α_{γων}R$)

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει: $α = \frac{2m_2 g}{M + 2m_2}$ ή $α = 5m/s^2$ και $α_{γων} = \frac{α}{R}$ ή $\mathbf{α_{γων} = 20rad/s^2}$

γ) Η θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, μετά το κόψιμο του νήματος γίνεται ακραία θέση για την ταλάντωση του σώματος $Σ_1$.

Η ταλάντωση πραγματοποιείται γύρω από νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.) όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $Δ\ell$ και στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

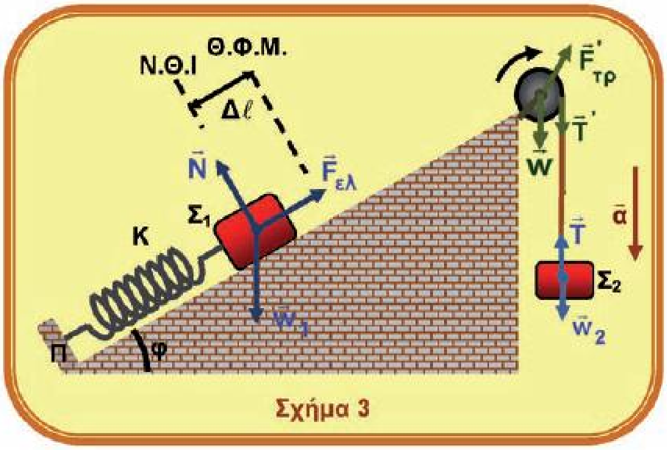
- η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ από το ελατήριο
- η αντίδραση $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο
- το βάρος $\vec{w}_1$ ($w_1 = m_1 g$)

Στη Ν.Θ.Ι. από τον 1ο νόμο του Newton προκύπτει:

$w_1ημφ = F_{ελ}$ ή $m_1gημφ = K{\cdot}Δ\ell$ ή $Δ\ell = \frac{m_1gημφ}{K}$

ή $Δ\ell = 0{,}2m$

Επομένως το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ είναι: $A = Δ\ell = 0{,}2m$



Σχήμα 3

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ είναι: $T = 2π\sqrt{\frac{m_1}{K}}$ ή $T = \frac{2π}{5}s$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης του ($x = +A = +0{,}2m$).

Από τη σχέση $x = Aημ(ωt + φ_o)$ για $t = 0$, $x = +A$ προκύπτει: $ημφ_o = 1$ ή $φ_o = \frac{π}{2}rad$

Για τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης ισχύει:

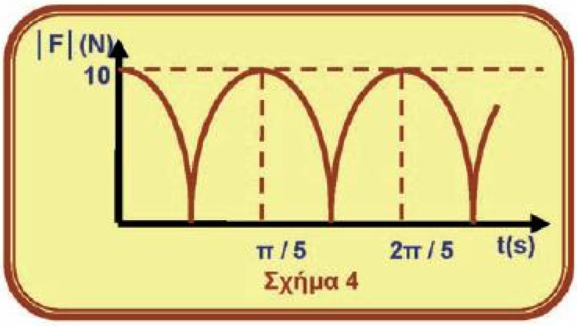
$ω = \frac{2π}{T}$ ή $ω = 5rad/s$

Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας είναι: $x = 0{,}2\,ημ\left(5t + \frac{π}{2}\right)$ (S.I.)

Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι:

$|F| = K|x|$ ή $|F| = KA\left|ημ\left(ωt + φ_o\right)\right|$ ή

$|F| = 10\left|ημ\left(5t + \frac{π}{2}\right)\right|$ (S.I.)



Σχήμα 4

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

δ) Όταν το σώμα έχει διανύσει διάστημα $s = 0{,}4m$ ($= 2A$) το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης του (αφού ξεκίνησε από την άλλη ακραία θέση).

Επομένως έχει κινηθεί για χρονικό διάστημα: $Δt = \frac{T}{2}$ ή $Δt = \frac{π}{5}s$

Η τροχαλία τότε έχει στροφορμή μέτρου $L = Iω$ ή $L = \frac{1}{2}MR^2α_{γων}Δt$ ή $\mathbf{L = \frac{π}{4}\,Kg{\cdot}m^2/s}$

ε) Για την κινητική ενέργεια της τροχαλίας ισχύει:

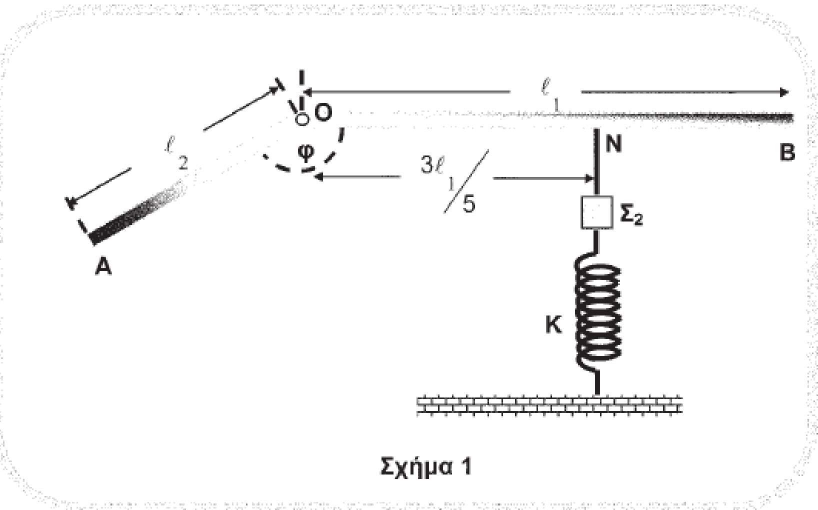
$K_{τρ} = \frac{1}{2}Iω^2$ ή $K_{τρ} = \frac{1}{2}MR^2α_{γων}^2t^2$ ή $t = \frac{1}{α_{γων}R}\sqrt{\frac{4K_{τρ}}{M}}$ ή $t = \frac{π}{10}s$. Παρατηρούμε πως $t = \frac{π}{10}s = \frac{T}{4}$.

Συνεπώς το σώμα $Σ_1$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{π}{10}s$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του με ταχύτητα μέγιστου μέτρου.

Η ορμή του τότε έχει (μέγιστο) μέτρο: $p = m_1υ_{max}$ ή $p = m_1ωA$ ή $\mathbf{p = 2Kg{\cdot}m/s}$

Ισορροπία και κίνηση στερεού σώματος
Απλή αρμονική ταλάντωση

Δύο λεπτές, ισοπαχείς ράβδοι ΟΑ, ΟΒ είναι ακλόνητα συνδεδεμένες στο κοινό τους άκρο έτσι ώστε να σχηματίζουν γωνία $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad μεταξύ τους. Η ράβδος ΟΒ είναι αβαρής, έχει μήκος $\ell_1 = 5\text{m}$ και βρίσκεται σε οριζόντια θέση όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Η ράβδος ΟΑ είναι ομογενής, έχει μάζα Μ = 6Kg και μήκος $\ell_2 = 2\text{m}$. Το σύστημα των δύο ράβδων μπορεί να περιστραφεί, χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο του συστήματος. Ένα αβαρές, τεντωμένο νήμα συνδέει το σημείο Ν της ράβδου ΟΒ με σώμα Σ μικρών διαστάσεων και μάζας m = 2kg το οποίο είναι στερεωμένο σε ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθερά Κ = 50N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Το νήμα και ο άξονας το ελατηρίου βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Το σημείο Ν απέχει από το άκρο Ο απόσταση $3\frac{\ell_1}{5}$. Το σύστημα των δύο ράβδων και το σώμα Σ είναι ακίνητα.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται στη ράβδο και την δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο.

Τη χρονική στιγμή t = 0 κόβουμε το νήμα. Το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και το σύστημα των δύο ράβδων να στρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο με φορά περιστροφής αντίθετη της φοράς περιστροφής των δειχτών του ρολογιού.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος, την περίοδο της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ και την απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{20}$ s.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος των δύο ράβδων τη χρονική στιγμή t = 0.

δ) Να υπολογίσετε την ισχύ της δύναμης του βάρους της ράβδου ΟΑ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σύστημα έχει περιστραφεί κατά $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad.

Θεωρήστε πως όλες οι κινήσεις πραγματοποιούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και για την ταλάντωση, θετική φορά τη φορά προς τα επάνω.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ΟΑ ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο περιστροφής της που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell_2^2$, συν$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Λύση

α) Στο σύστημα των δύο ράβδων ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_2$ της ράβδου ΟΑ ($w_2 = Mg$)
- Η τάση $\vec{T}$ του νήματος
- Η δύναμη $\vec{F}_O$ από τον άξονα περιστροφής.

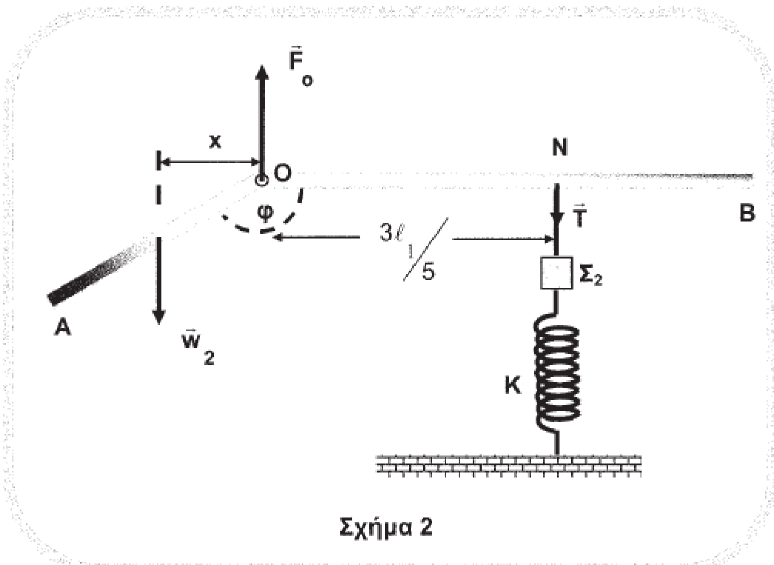
Από τη συνθήκη ισορροπίας για τη ράβδο προκύπτει:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{Mg(O)} + \tau_{T(O)} + \tau_{F_O(O)} = 0$ ή

$Mgx = T\frac{3\ell_1}{5}$ ή

$Mg\frac{\ell_2}{2}\,\text{συν}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = T\frac{3\ell_1}{5}$ ή

$T = \frac{5Mg\ell_2}{12\ell_1}$ ή **T = 10N.**



Σχήμα 2

Στο σώμα Σ ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

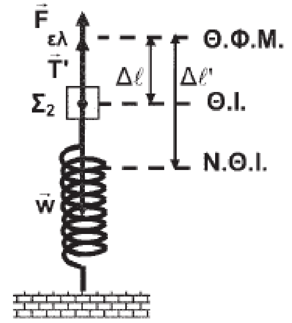
- Το βάρος του: $\vec{w} = m\vec{g}$ (w = mg = 20N)
- Η τάση $\vec{T}'$ του νήματος με T' = T = 10N
- Η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ του ελατηρίου

Η φορά της $\vec{F}_{ελ}$ είναι κατακόρυφη προς τα επάνω αφού το σώμα Σ ισορροπεί και ισχύει: T' = 10N < 20N = w.

Από τον 1° νόμο του Newton για την ισορροπία του σώματος Σ προκύπτει:

$\Sigma F = 0$ ή $T' + F_{ελ} = w$ ή $T' + K\Delta\ell = w$ ή $\Delta\ell = \dfrac{w - T'}{K}$ ή $\Delta\ell = 0{,}2m$.

Επομένως η αποθηκευμένη ενέργεια στο ελατήριο είναι: $U_{ελ} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2$ ή $\mathbf{U_{ελ} = 1\,J}$.



Σχήμα 3

β) Αφού κόψουμε το νήμα, η θέση όπου ισορροπούσε το σώμα Σ (Θ.Ι.) αποτελεί ακραία θέση (y = +A) της ταλάντωσης του. Η ταλάντωση πραγματοποιείται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.) όπου

$F'_{ελ} = w$ ή $K\Delta\ell' = w$ ή $\Delta\ell' = \dfrac{w}{K}$ ή $\Delta\ell' = 0{,}4m$.

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι: $A = \Delta\ell' - \Delta\ell$ ή A = 0,2m.

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι: $\mathbf{T_{ταλ}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ ή

$\mathbf{T_{ταλ}} = \dfrac{2\pi}{5}$ s.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι: $\omega = \dfrac{2\pi}{T_{ταλ}}$ ή

ω = 5rad/s.

Εφόσον η ταλάντωση του σώματος Σ αρχίζει να πραγματοποιείται από την ακραία, θετική θέση της η αρχική της φάση είναι: $\varphi_o = \dfrac{\pi}{2}$ rad. Συνεπώς η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (Ν.Θ.Ι.) είναι: $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ ή $y = 0{,}2\eta\mu\left(5t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

Επομένως για $t = t_1$ προκύπτει:

$y_1 = 0{,}2\eta\mu\left(5t_1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ή $y_1 = 0{,}2\eta\mu\left(5\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{2}\right)$m ή $y_1 = 0{,}2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$m ή $\mathbf{y_1 = 0{,}1\sqrt{2}\ m}$.

γ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς το σημείο Ο δίνεται από τη σχέση:

$I_{(O)} = I_{cm} + M\left(\dfrac{\ell_2}{2}\right)^2$ ή $I_{(O)} = \dfrac{1}{3}M\ell_2^2$

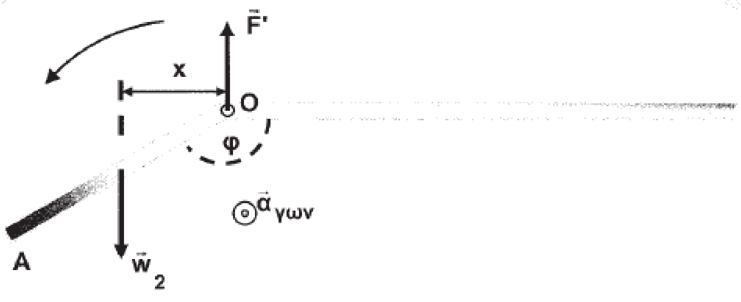
Στο σύστημα των δύο ράβδων ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_2$ της ράβδου ΟΑ
- Η δύναμη $\vec{F}'$ από τον άξονα περιστροφής.

Από το νόμο της στροφικής κίνησης ισχύει:

$\Sigma\tau_{(O)} = I_{(O)}\alpha_{γων}$ ή $Mgx = \dfrac{1}{3}M\ell_2^2\,\alpha_{γων}$ ή

$\alpha_{γων} = \dfrac{3g}{4\ell_2}$ ή $\mathbf{\alpha_{γων} = 3{,}75rad/s^2}$.



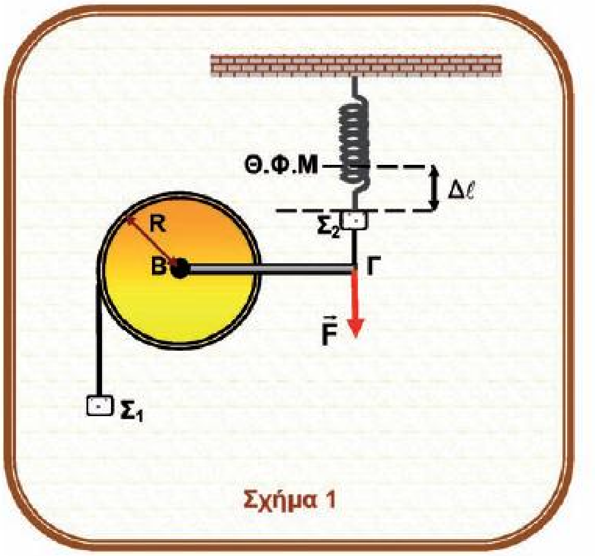
Σχήμα 4

δ) Όταν το σύστημα των δύο ράβδων έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, η διεύθυνση της ράβδου ΟΑ είναι κατακόρυφη. Τότε καμιά από τις δυνάμεις που τις ασκούνται δεν έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του συστήματος των δύο ράβδων. Επομένως ισχύει: $\tau_{Mg(O)} = 0$ και τελικά η ζητούμενη ισχύς προκύπτει:

$P = \tau_{Mg(O)}\omega = 0$ ή $\mathbf{P = 0}$.

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Η διάταξη του σχήματος 1 περιλαμβάνει δύο σώματα Σ_1, Σ_2 μάζας m το καθένα, ομογενή δίσκο μάζας M = 4,6Kg και ακτίνας R = 0,2m, λεπτή αβαρή ράβδο ΒΓ μήκους ℓ και ιδανικό ελατήριο σταθεράς K = 200N/m. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο νήματος μεγάλου μήκους το οποίο είναι τυλιγμένο γύρω από το δίσκο. Η ράβδος είναι στερεωμένη πάνω στο δίσκο σε οριζόντια θέση. Το σύστημα ράβδου – δίσκου μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδό τους ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του δίσκου και το άκρο Β της ράβδου. Μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ μέτρου F = 28,8N ασκείται στο άκρο Γ της ράβδου όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο της οροφής ενώ στο κάτω άκρο του είναι αναρτημένο το σώμα Σ_2. Τα ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$ = 15cm και το σώμα Σ_2 συνδέεται μέσω κατακόρυφου, τεντωμένου νήματος με το άκρο Γ της ράβδου. Το σύστημα ελατηρίου – σώματος Σ_2 μπορεί να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T = 0,2s.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε τη μάζα m και το μήκος ℓ.

Τη χρονική στιγμή t = 0 κόβουμε το νήμα μεταξύ σώματος Σ_2 και ράβδου. Το σύστημα δίσκου – ράβδου αρχίζει να περιστρέφεται, το σώμα Σ_1 να κινείται σε κατακόρυφη διεύθυνση και το σώμα Σ_2 να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η δύναμη $\vec{F}$ δρά συνεχώς κάθετα στη ράβδο, στο σημείο Γ.

β) Να προσδιορίσετε την φορά περιστροφής του συστήματος δίσκου – ράβδου και να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνση που αποκτά το σώμα Σ_1.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σύστημα δίσκου – ράβδου έχει περιστραφεί κατά φ = 0,7rad.

δ) Να υπολογίστε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή κατά την οποία η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 γίνεται μέγιστη για $3^η$ φορά από την έναρξη της ταλάντωσης του.

Θεωρήστε πως τα νήματα είναι αβαρή και πως το νήμα δεν ολισθαίνει στο δίσκο.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του που διέρχεται από το κέντρο του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$ και $\pi^2 = 10$.

<u>Λύση</u>

α) Ισχύει: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ή $m = \frac{KT^2}{4\pi^2}$ ή $\mathbf{m = 0,2Kg}$.

Στο σώμα Σ_1 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

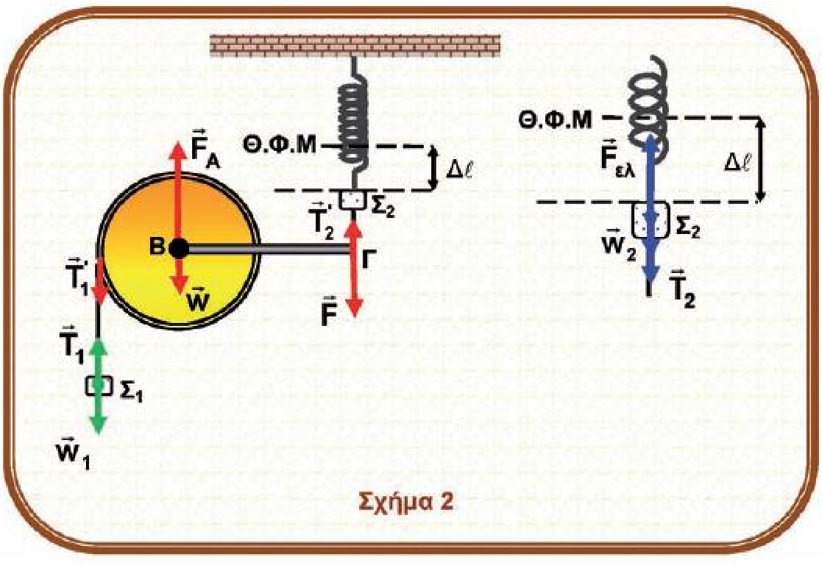
- Το βάρος $\vec{w}_1 \left(w_1 = mg\right)$
- Η τάση $\vec{T}_1$ του νήματος

Σύμφωνα με τον 1° νόμο του Newton ισχύει:

$\Sigma F_{(\Sigma_1)} = 0$ ή $T_1 = w_1 = mg$ (1)

Στο σώμα Σ_2 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος $\vec{w}_2 \left(w_2 = mg\right)$
- Η τάση $\vec{T}_2$ του νήματος
- Η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ} \left(F_{ελ} = K\Delta\ell = 30N\right)$



Σχήμα 2

Σύμφωνα με τον 1° νόμο του Newton ισχύει:

$\Sigma F_{(\Sigma_2)} = 0$ ή $F_{ελ} = T_2 + mg$ ή $T_2 = F_{ελ} - mg$ (2)

Στο σύστημα δίσκου – ράβδου ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Το βάρος του δίσκου $\vec{w} \left(w = Mg\right)$
- Οι τάσεις $\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2'$ των νημάτων $\left(T_1' = T_1,\ T_2' = T_2\right)$

- Η δύναμη $\vec{F}_A$ από τον άξονα περιστροφής
- Η δύναμη $\vec{F}$

Για την ισορροπία του συστήματος δίσκου – ράβδου ισχύει: $\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή $T_1R + T_2\ell = F\ell$ ή $\ell = \frac{T_1R}{F-T_2}$ (3)

Η σχέση (3) μέσω των σχέσεων (1) και (2) γίνεται: $\ell = \frac{mgR}{F - F_{\varepsilon\lambda} + mg}$ ή ℓ **= 0,5m**.

β) Αφού έχουμε κόψει το νήμα μεταξύ σώματος Σ_2 και ράβδου οι ροπές ως προς το σημείο Γ των εξωτερικών δυνάμεων (δηλαδή των $\vec{w}_1, \vec{F}$) του συστήματος δίσκου – ράβδου έχουν μέτρα:

$\tau_{w_1(B)} = mgR$ ή $\tau_{w_1(B)} = 0,4Nm$ και $\tau_{F(B)} = F\ell$ ή $\tau_{F(B)} = 14,4Nm$.

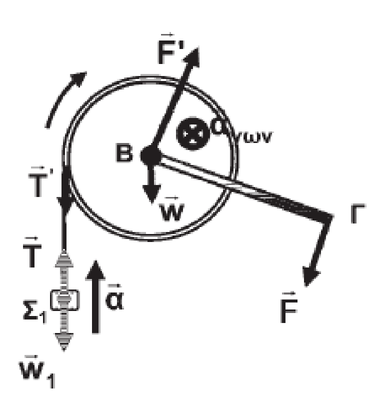
Αφού $\tau_{F(B)} > \tau_{w_1(B)}$ το σύστημα περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στο δίσκο, η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\varepsilon$ των σημείων της περιφέρειας του έχει ίσο μέτρο με το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ του σώματος Σ_1. Δηλαδή, ισχύει: $\alpha = \alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$. Για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ_1 ισχύει: $T - mg = m\alpha$ ή $T = m\alpha + mg$ (4)

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την κίνηση του συστήματος δίσκου – ράβδου, προκύπτει:

$\Sigma\tau_{(B)} = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $F\ell - TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $F\ell - TR = \frac{1}{2}MR\alpha$ (5)

Η σχέση (5) από τη σχέση (4) γίνεται:

$F\ell - mR\alpha - mgR = \frac{1}{2}MR\alpha$ ή $\alpha = \frac{2\left(F\frac{\ell}{R} - mg\right)}{2m+M}$ ή **$\alpha = 28m/s^2$** .



Σχήμα 3

γ) Για τη γωνία που έχει περιστραφεί το σύστημα δίσκου – ράβδου ισχύει:

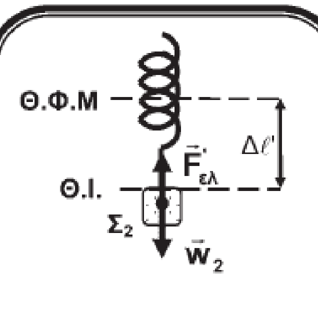
$\varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$ ή $\varphi = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{R}t^2$ ή $t = \sqrt{\frac{2R\varphi}{\alpha}}$ ή $t = 0,1s = \frac{T}{2}$

Αφού τη χρονική στιγμή t = 0 που κόβουμε το νήμα η ταχύτητα του σώματος Σ_2 είναι μηδενική, το Σ_2 βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης που αρχίζει να εκτελεί. Επομένως τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{2}$ βρίσκεται στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσης του όπου το μέτρο της επιτάχυνσης του $\vec{\alpha}_\Sigma$ είναι μέγιστο.

Μετά το κόψιμο του νήματος, στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) του σώματος Σ_2 ισχύει: $F'_{\varepsilon\lambda} = w_2$ ή $K\Delta\ell' = mg$ ή $\Delta\ell' = \frac{mg}{K}$ ή $\Delta\ell' = 0,01m$.

Το πλάτος της ταλάντωσης του Σ_2 είναι: $A = \Delta\ell - \Delta\ell' = 0,14m$.

Έτσι προκύπτει: $\left|\alpha_\Sigma\right| = \alpha_{max} = \omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$ ή **$\left|\alpha_\Sigma\right| = 140m/s^2$**.



Σχήμα 4

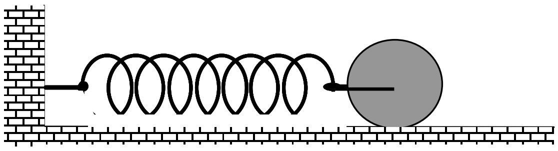
5) Το σώμα Σ_2 αποκτά για πρώτη φορά μέγιστη κινητική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{4}$. Η μεγιστοποίηση της κινητικής του ενέργειας συμβαίνει κάθε $\frac{T}{2}$ (κάθε φορά που το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του).

Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 μεγιστοποιείται για $3^η$ φορά τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 2\frac{T}{2}$ ή $t_2 = \frac{5T}{4}$ ή $t_2 = 0,25s$. Τότε το σύστημα δίσκου – ράβδου έχει στραφεί κατά: $\varphi' = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_2^2$ ή $\varphi' = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{R}t_2^2$ ή $\varphi' = 4,375rad$

Το ζητούμενο έργο είναι: $W_{\vec{F}} = \tau_{\vec{F}(B)}\varphi'$ ή $W_{\vec{F}} = F\ell\varphi'$ ή **$W_{\vec{F}} = 63J$**.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

$1^η$ Άσκηση

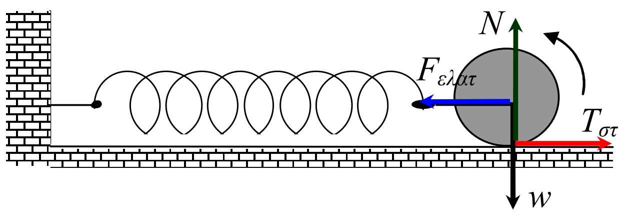


Ομογενής και συμπαγής κύλινδρος, μάζας M=200g και ακτίνας R=4cm, ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Το στερεό είναι συνδεδεμένο με ιδανικό οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k=30N/m μέσω του κυρίου άξονα συμμετρίας του (ο άξονας ο οποίος είναι κάθετος στη βάση του κυλίνδρου και διέρχεται από το κέντρο μάζας του). Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονα συμμετρίας του χωρίς τριβές.
Το ελατήριο αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση ελευθέρου μήκους και στη συνέχεια εκτρέπουμε τον κύλινδρο οριζόντια κατά απόσταση A=8cm και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Θεωρείστε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του ο κύλινδρος κυλίεται στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει.
i. Να δείξετε ότι το σύστημα ελατηρίου-κυλίνδρου θα εκτελέσει μεταφορικά απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A και να υπολογίσετε την σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης.
ii. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης-χρόνου της ταλάντωσης του συστήματος.
iii. Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.
iv. Δίνεται ότι ο συντελεστής οριακής τριβής κυλίνδρου-επιπέδου είναι $\mu_s=0,6$. Να βρείτε το άνω όριο του μεγίστου δυνατού πλάτους ταλάντωσης A_{max} του συστήματος για το οποίο δεν παρατηρείται ολίσθηση του στερεού στο οριζόντιο επίπεδο.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2 και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από τον άξονα περιστροφής του $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$.

Λύση:

i. Στην θέση ισορροπίας του συστήματος, η οποία ταυτίζεται και με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, ασκούνται:

- Το βάρος του κυλίνδρου w=mg
- Η κάθετη αντίδραση του δαπέδου N



Ο κύλινδρος ξεκινά από την ηρεμία στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης A και κινείται προς τ' αριστερά. Στην θέση τυχαίας απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας στον κύλινδρο ασκούνται:

- Το βάρος w=mg
- Η κάθετη αντίδραση του δαπέδου N
- Η δύναμη της στατικής τριβής $T_{στ}$, η οποία έχει κατεύθυνση προς τ' αριστερά, διότι ο κύλινδρος κυλίεται αριστερόστροφα και η δύναμη της στατικής τριβής είναι η μοναδική που μπορεί να δημιουργήσει αυτή την αριστερόστροφη ροπή
- Η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελατ}$ με φορά προς τ' αριστερά, αφού τείνει να επαναφέρει τον κύλινδρο προς την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Θεωρώντας θετικές απομακρύνσεις προς τα δεξιά, οπότε θετικές τις ροπές τις δεξιόστροφές, ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης και ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής γράφονται:

$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}$ (1)

$\Sigma F = M \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_{\sigma\tau} - F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = M\alpha cm \Rightarrow T_{\sigma\tau} - kx = M\alpha_{cm}$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε: $-kx = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = -\frac{2k}{3M}x$ (3)

Έτσι, η συνισταμένη των δυνάμεων στη τυχαία θέση απομάκρυνση x από την Θ.Ι. έχουμε:

$\Sigma F = M \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \Sigma F = -M\frac{2k}{3M}x \Rightarrow \Sigma F = -\frac{2k}{3}x$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = \frac{2k}{3} \Rightarrow$

D=20N/m

ii. Ο κύλινδρος την χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στην θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης(x=+A) οπότε η ταλάντωσή του έχει αρχική φάση $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$rad.

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,2}} \Rightarrow \omega = 10 rad/s$$

Επομένως, η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης θα είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \mathbf{x = 0,08\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

iii. Ο κύλινδρος αποκτά τη μέγιστη μεταφορική ταχύτητά του στη θέση ισορροπίας και υπολογίζεται από τον τύπο: $u_{cm,max} = \omega A$.
Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει: $u_{cm} = \omega R$.
Επομένως, η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι:

$$\omega_{\max} = \frac{u_{cm,\max}}{R} = \frac{\omega A}{R} = \frac{10 \cdot 0,08}{0,04} \Rightarrow \mathbf{\omega_{max} = 20 rad/s}$$

iv. Το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και δαπέδου από τις σχέσεις (1),(2) και (3) είναι:

$$T_{\sigma\tau} = -\frac{1}{2}M\alpha_{cm} = -\frac{1}{2}M\left(-\frac{2k}{3M}\right)x \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{1}{3}kx$$

Το μέτρο της οριακής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και δαπέδου είναι:

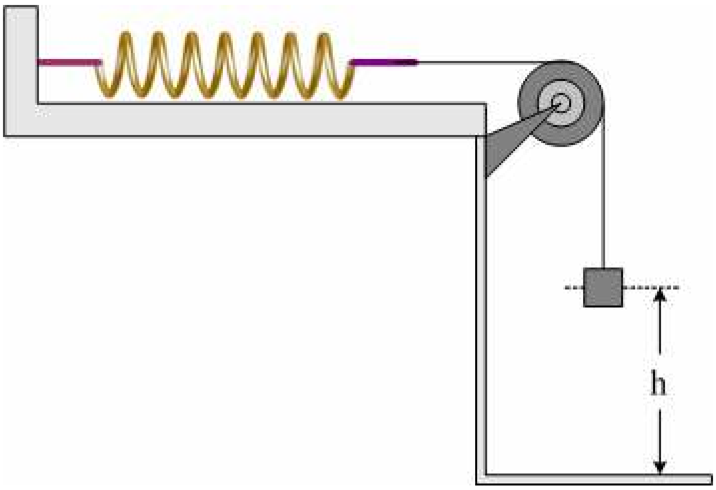
$$T_{o\rho} = \mu N = \mu Mg = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 10 = 1,2N$$

Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει εφόσον η στατική τριβή είναι μικρότερη ή ίση από την οριακή τριβή:

$$T_{\sigma\tau} \le T_{o\rho} \Rightarrow \frac{1}{3}kx \le T_{o\rho} \Rightarrow x \le \frac{3T_{o\rho}}{k} \Rightarrow A_{\max} = \frac{3T_{o\rho}}{k} \Rightarrow \mathbf{A = 0,12m = 12cm}$$

Πέτρος Καραπέτρος

$2^η$ Άσκηση



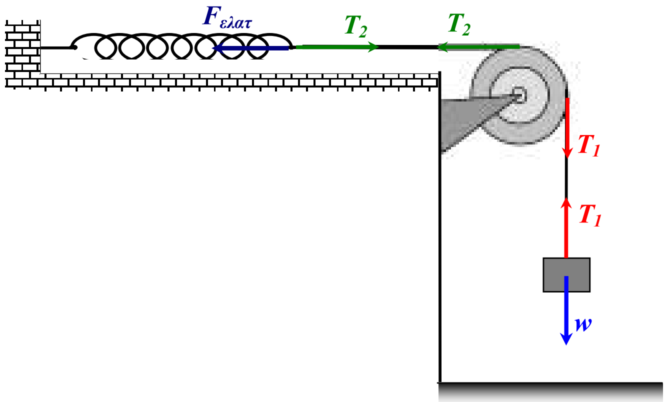
Στο διπλανό σχήμα το ελατήριο δεν έχει μάζα, η σταθερά του ισούται με k=100N/m και το ένα του άκρο είναι δεμένο με αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο διέρχεται από το αυλάκι τροχαλίας μάζας M=4kg και ακτίνας R=0,15m. Στο άλλο άκρο του νήματος έχουμε δέσει ένα μικρό σώμα μάζας m=2kg το οποίο βρίσκεται σε ύψος h=1m από το έδαφος. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα αυτό υπολογίζεται από τον τύπο: $I=\frac{1}{2}MR^2$. Αρχικά κρατάμε ακίνητο το σώμα, ενώ το ελατήριο βρίσκεται στην κατάσταση φυσικού του μήκους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σώμα να κινηθεί.

i. Να αποδειχθεί ότι το σύστημα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης.

ii. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος Σ όταν αυτό βρίσκεται σε ύψος h_1=80cm από το έδαφος.

iii. Να υπολογιστεί το μικρότερο ύψος από το έδαφος, στο οποίο θα κατέβει το σώμα Σ.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$.

Λύση:



i. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα θέση ισορροπίας του συστήματος(διπλανό σχήμα) και έχουμε:

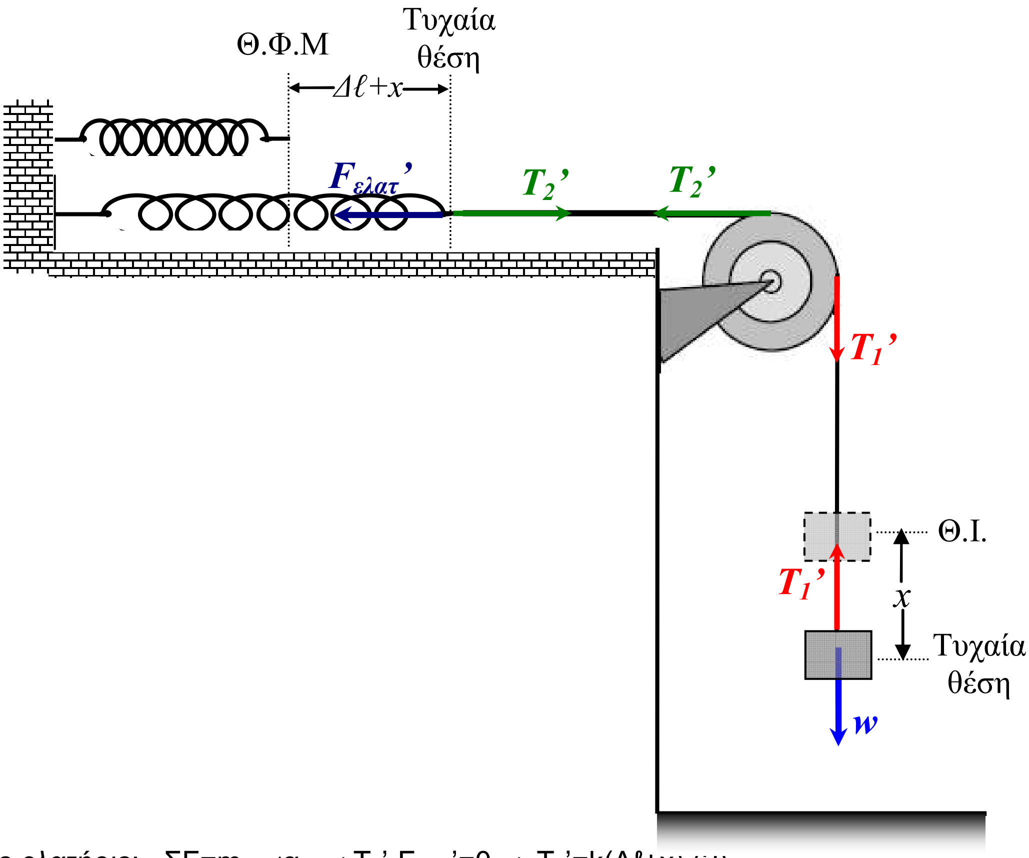
Για το σώμα: $ΣF=0 \Rightarrow w-T_1=0 \Rightarrow w=T_1$

Για την τροχαλία: $Στ=0 \Rightarrow T_1R-T_2R=0 \Rightarrow T_1=T_2$

Για το ελατήριο: $ΣF=0 \Rightarrow F_{ελατ}=T_2 \Rightarrow T_2=k\cdot Δ\ell$

Άρα $w=kΔ\ell$ (1)

Για την θέση τυχαίας απομάκρυνσης x κάτω από την θέση ισορροπίας έχουμε:



Για το ελατήριο: $\Sigma F=m_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow T_2'-F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}'=0 \Rightarrow T_2'=k(\Delta\ell+x)$ (2)

Για την τροχαλία: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1'R-T_2'R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$

και επειδή η επιτρόχια (εφαπτομενική) επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας ι-σούται με την επιτάχυνση του σώματος Σ θα είναι $\alpha_{cm}=\alpha_\varepsilon=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ οπότε:

$$T_1'-T_2'=\frac{1}{2}M\alpha_{cm} \quad (3)$$

Για το σώμα: $\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow w-T_1'=m\alpha_{cm}$ (4)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) έχουμε:

$$T_1'-T_2'+w-T_1'=\left(\frac{1}{2}M+m\right)\alpha_{cm} \Rightarrow w-T_2'=\left(\frac{M+2m}{2}\right)\alpha_{cm}$$

και λόγω της σχέσης (2)

$$w-k(\Delta\ell+x)=\left(\frac{M+2m}{2}\right)\alpha_{cm} \Rightarrow w-k\Delta\ell-kx=\left(\frac{M+2m}{2}\right)\alpha_{cm}$$

και λόγω της (1)

$$\alpha_{cm} = -\frac{2k}{M+2m}x$$

Επομένως για την συνισταμένη των δυνάμεων στη θέση τυχαίας απομάκρυνσης x ισχύει:

$$\Sigma F = w - T_1' = m\alpha_{cm} = -m\frac{2k}{M+2m}x \Rightarrow \Sigma F = -\frac{2km}{M+2m}x = -Dx$$

Άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς

$$D = \frac{2km}{M+2m} = \frac{2\cdot 100\cdot 2}{4+2\cdot 2} = 50N/m$$

Η περίοδος ταλάντωσης θα είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{50}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}s \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}4\pi s}$$

ii. Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. από την αρχική κατάσταση όπου το σώμα βρίσκεται σε ύψος h=1m μέχρι την χρονική στιγμή που απέχει από το έδαφος h_1=80cm.

$$E_{αρχ} = E_{τελ}$$

$$\Rightarrow K_{μετ,αρχ} + K_{περ,αρχ} + U_{ελατ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ} = K_{μετ,αρχ} + K_{περ,αρχ} + U_{ελατ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad mgh \quad = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(h-h_1)^2 + mgh_1$$

$$\Rightarrow \quad mg(h-h_1) - \frac{1}{2}k(h-h_1)^2 = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad mg(h-h_1) - \frac{1}{2}k(h-h_1)^2 = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{4}Mu_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad mg(h-h_1) - \frac{1}{2}k(h-h_1)^2 = \frac{1}{2}2u_{cm}^2 + \frac{1}{4}4u_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot 10\cdot(1-0{,}8) - \frac{1}{2}\cdot 100\cdot(1-0{,}8)^2 = 2\cdot u_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad 4 - 2 = 2u_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{u_{cm} = 1m/s}$$

iii. Στην θέση όπου το σώμα απέχει την μικρότερη απόσταση από το έδαφος η ταχύτητά του στιγμιαία μηδενίζεται (ουσιαστικά πρόκειται για την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα). Έστω h_2 το ελάχιστο ύψος του σώματος από το έδαφος. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε.

$$E_{αρχ} = E_{τελ}$$

$$\Rightarrow K_{μετ,αρχ} + K_{περ,αρχ} + U_{ελατ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ} = K_{μετ,αρχ} + K_{περ,αρχ} + U_{ελατ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ}$$

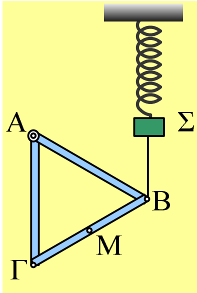
$$\Rightarrow 0 + 0 + 0 + mgh = 0 + 0 + \frac{1}{2}k(h - h_2)^2 + mgh_2$$

$$\Rightarrow mg(h - h_2) = \frac{1}{2}k(h - h_2)^2 \Rightarrow h - h_2 = \frac{2mg}{k} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10}{100} \Rightarrow 1 - h_2 = 0{,}4$$

$$\Rightarrow \mathbf{h_2 = 0{,}6m}$$

Πέτρος Καραπέτρος

Ακροβατώντας μεταξύ ενιαίου στερεού και ράβδων.



Διαθέτουμε τρεις όμοιες ομογενείς ράβδους μάζας m=3kg και μήκους ℓ=4/3m η καθεμιά. Τις ενώνουμε στα άκρα, σχηματίζοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (στερεό S). Το στερεό S, μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από την κορυφή Α, ισορροπεί δε σε θέση όπου η πλευρά ΑΓ είναι κατακόρυφη, δεμένο με κατακόρυφο νήμα στην κορυφή Β. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο στο υλικό σημείο Σ, το οποίο ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m, όπως στο σχήμα.

i) Να βρεθεί η τάση του νήματος μεταξύ της κορυφής Β και σώματος Σ.

Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα.

ii) Να υπολογίστε τη ροπή αδράνειας του στερεού S ως προς τον άξονα περιστροφής του.

iii) Να υπολογίστε τις αρχικές επιταχύνσεις της κορυφής Β και του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ. Να σχεδιάστε στο σχήμα τις παραπάνω επιταχύνσεις.

iv) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής των ράβδων ΑΓ και ΒΓ, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος.

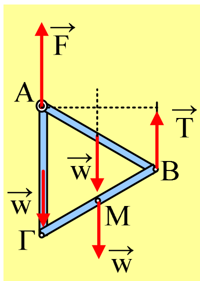
v) Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια του στερεού S.

vi) Να υπολογιστεί η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος Σ.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm}=\frac{1}{12}m\ell^2$ και g=10m/s^2.

Απάντηση:

Θα μπορούσαμε να βρούμε το βάρος του στερεού S (το οποίο ασκείται στο βαρύκεντρο του τριγώνου) και να δουλέψουμε κατά βάση με τη στροφική κίνηση του S. Εδώ θα δουλέψουμε εν μέρει με το στερεό S, αλλά θα αναφερόμαστε συνήθως και στις επιμέρους ράβδους.



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στις τρεις ράβδους (όχι τις δυνάμεις που ασκεί η μια ράβδος στην άλλη). Αφού το στερεό S ισορροπεί ΣF=0 και Στ$_A$=0 →

$$T\cdot\ell\cdot\eta\mu 60^o - mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 60^o - mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 60^o + mg\cdot 0 + F\cdot 0 = 0 \;\rightarrow$$

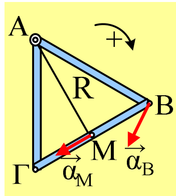
$$T = mg = 30N$$

ii) Η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τον άξονα που περνά από την κορυφή Α είναι:

$$I_s = I_{AB} + I_{B\Gamma} + I_{\Gamma A} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m(AM)^2\right) + \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) \rightarrow$$

$$I_s = 2\cdot\frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}m\ell^2 \rightarrow I_s = 8kg\cdot m^2.$$

iii) Μόλις κόψουμε το νήμα, το στερεό στρέφεται γύρω από τον άξονα στο A, με φορά ίδια με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\Sigma\tau = I_A\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 60^o + mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 60^o = \frac{3}{2}m\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2g\cdot\eta\mu 60^o}{3\ell} = \frac{2\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\cdot\frac{4}{3}} rad/s^2 = 2{,}5\sqrt{3} rad/s^2$$

Αλλά τότε το σημείο B έχει επιτάχυνση (κάθετη στην ακτίνα AB) μέτρου $\alpha_B = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell = \frac{10\sqrt{3}}{3} m/s^2$

και το M: $a_M = a_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, όπου R το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου, μήκους:

$$R = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}m, \text{ οπότε } a_M = a_{\gamma\omega\nu}\cdot R = 2{,}5\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}m/s^2 = 5m/s^2$$

κάθετη στην ακτίνα R, όπως στο σχήμα.

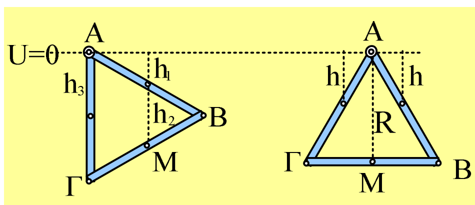
iv) Για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε:

$$\frac{dL_{A\Gamma}}{dt} = \Sigma\tau = I_{A\Gamma}\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{3}m\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{3}3\cdot\frac{16}{9}\cdot 2{,}5\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2 = \frac{40}{9}\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2$$

$$\frac{dL_{B\Gamma}}{dt} = \Sigma\tau = I_{B\Gamma}\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + mR^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\frac{dL_{B\Gamma}}{dt} = \frac{5}{6}m\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{5}{6}3\cdot\frac{16}{9}\cdot 2{,}5\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2 = \frac{100}{9}\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2$$

v) Το στερεό S επιταχύνεται στροφικά μέχρι η πλευρά ΒΓ να γίνει οριζόντια, όπου Στ=0, ενώ στη συνέχεια η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει αντίθετη φορά και το στερεό θα επιβραδύνεται. Κατά συνέπεια η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι στην θέση όπου Στ=0. Αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος (συντηρητική δύναμη) η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή:

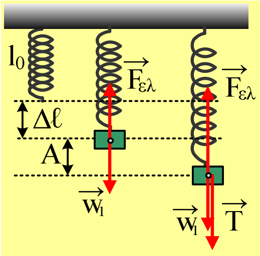


$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow 0 - mgh_1 - mgh_2 - mgh_3 = -2mgh - mgR + \tfrac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow$$

$$K_{\max} = 2mg\frac{\ell}{2}\eta\mu 60^o + mg\frac{\ell\sqrt{3}}{2} - mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu 60^o - mg\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu 60^o\right) - mg\frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mg\ell(2\sqrt{3} - 3) = \frac{2}{2}3\cdot 10\cdot\frac{4}{3}\left(2\sqrt{3} - 3\right)J \approx 9{,}3J$$

vi) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το φυσικό μήκος του ελατηρίου, η θέση ισορροπίας και η αρχική θέση τη στιγμή που συνδέεται με το στερεό.



Πριν να κοπεί το νήμα, το σώμα ισορροπεί:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}-w_1-T=0 \rightarrow k(\Delta\ell+A)=mg+T \quad (α)$$

Αν πάρουμε το σώμα στη Θ.Ι. της ταλάντωσής του:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}-w_1=0 \rightarrow k\Delta\ell=mg \quad (β)$$

$$\text{Από (α) και (β) } kA=T \rightarrow A=\frac{T}{k}=\frac{30}{100}m=0{,}3m$$

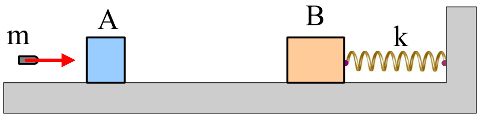
Συνεπώς η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος είναι:

$$K_{max}=U_{max}=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}100\cdot 0{,}3^2\,J=4{,}5J$$

dmargaris@sch.gr

Είναι ελαστική η κρούση;

Σε ένα οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα Α και Β με μάζες m_1=0,95kg και m_2=2kg, όπου το Β είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k=10N/m, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Τα σώματα παρουσιάζουν με το επίπεδο συντελεστή τριβής μ=0,5 και η απόσταση μεταξύ τους είναι d=2m. Σε μια στιγμή ένα βλήμα μάζας m=50g το οποίο κινείται οριζόντια πάνω στην ευθεία που συμπίπτει με τον άξονα του ελατηρίου, με ταχύτητα υ=120m/s σφηνώνεται στο σώμα Α.



i) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος Α μετά την κρούση.

ii) Με ποια ταχύτητα το Α σώμα φτάνει στο σώμα Β;

iii) Αν τελικά το σώμα Α, μετά τη δεύτερη κρούση, σταματήσει αφού μετακινηθεί κατά 10cm προς τα αριστερά, να εξετασθεί αν η κρούση μεταξύ των σωμάτων Α και Β ήταν ελαστική και να υπολογιστεί η τελική απόσταση μεταξύ των σωμάτων, μετά την ακινητοποίησή τους.

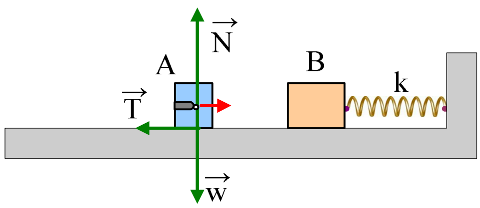
Απάντηση:

i) Για την πλαστική κρούση μεταξύ βλήματος και σώματος Α εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο.

$$\vec{P}_{\pi\rho} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow m\upsilon=(m_1+m)\cdot\upsilon_\kappa \rightarrow$$

$$\upsilon_\kappa=\frac{m\upsilon}{m_1+m}=\frac{0,05\cdot 120}{1}m/s=6m/s$$

ii) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο συσσωμάτωμα (ας το ονομάζουμε σώμα Α, αφού απλώς έχει σφηνωθεί μια μικρή σφαίρα μέσα του…). Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα από την θέση αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη θέση πριν την κρούση του με το σώμα Β:



$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_w+W_N+W_T \text{ ή}$$

$$½\,(m_1+m)\upsilon_1^2 - ½\,(m_1+m)\upsilon_\kappa^2 = -\mu(m_1+m)g\cdot d \rightarrow$$

$$\upsilon_1=\sqrt{\upsilon_\kappa^2-2\mu g d}=\sqrt{36-20}m/s=4m/s$$

iii) Αφού το σώμα Α διένυσε απόσταση x = 10cm κινούμενο προς τα αριστερά, μετά την κρούση είχε ταχύτητα υ_1' το μέτρο της οποίας θα υπολογίσουμε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}= W_w+W_N+W_T \text{ ή}$$

$$0- ½\,(m_1+m)\upsilon_1'^2 = -\mu(m_1+m)g\cdot x \rightarrow$$

$$\upsilon_1'=\sqrt{2\mu g x}=\sqrt{2\cdot 0,5\cdot 10\cdot 10\cdot 10^{-2}}m/s=1m/s$$

Αν η κρούση ήταν ελαστική, το Α σώμα θα αποκτούσε ταχύτητα:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1+m-m_2}{m_1+m+m_2}\upsilon_1=\frac{1-2}{1+2}4m/s=-\frac{4}{3}m/s$$

ενώ η ταχύτητά του μετά την κρούση ήταν $\upsilon_1' = -1m/s$, συνεπώς η κρούση δεν ήταν ελαστική.

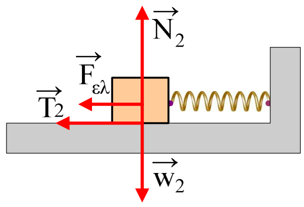
Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την δεύτερη κρούση και έχουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow$$

$$(m_1+m)\cdot\upsilon_1 = (m_1+m)\cdot\upsilon_1'+m_2\upsilon_2' \text{ ή}$$

$$\upsilon_2' = \frac{(m_1+m)(\upsilon_1-\upsilon_1')}{m_2} = \frac{1(4-(-1))}{2} m/s = 2{,}5m/s$$

Το σώμα Β κινείται προς τα δεξιά και έστω ότι σταματά αφού διανύσει απόσταση s. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την κρούση και στη θέση που μηδενίζεται η ταχύτητά του και έχουμε:



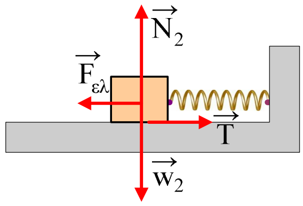
$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}= W_w+W_N+W_{T2} +W_{F\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$0- ½\, m_2\upsilon_2'^2 = -\mu m_2g\cdot s +(0- ½\, ks^2) \rightarrow$$

$$ks^2 +2\mu m_2gs - m_2\upsilon_2'^2 =0 \text{ ή}$$

$$10s^2 +20s-12{,}5 =0 \rightarrow s=0{,}5m.$$

Το ερώτημα είναι τι θα κάνει το σώμα Β μετά το μηδενισμό της ταχύτητάς του; Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου $F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot s= 10\cdot 0{,}5N=5N$, ενώ η τριβή ολίσθησης έχει τιμή $T_{2o\lambda}= \mu m_2g=$ 10N. Προφανώς η ασκούμενη τριβή είναι στατική τριβή, με μέτρο $T_{\sigma\tau}=5N$ και το σώμα θα ισορροπήσει.

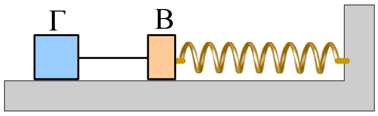


Συνεπώς η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι x+s=60cm.

dmargaris@sch.gr

Η τάση του νήματος πριν την κρούση.

Το σύστημα των σωμάτων Β και Γ, με μάζες m_1=1kg και m_2=3kg αντίστοιχα ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα, όπου το ελατήριο έχει σταθερά k=400N/m και το νήμα μήκος d. Τραβάμε το σώμα Γ προς τα αριστερά επιμηκύνοντας το ελατήριο κατά 0,4m και για t=0, αφήνουμε το σύστημα να εκτελέσει ΑΑΤ.



Α) Να βρεθεί η τάση του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Β) Αν τα δυο σώματα συγκρούονται πλαστικά και δημιουργείται συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{3\pi}{40}s$,

να βρεθούν:

i) Το μήκος του νήματος που συνδέει τα δυο σώματα.

ii) Η ενέργεια ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές:

α) $\frac{3\pi}{80}s$, β) $\frac{5\pi}{80}s$, γ) $\frac{7\pi}{80}s$

iii) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση.

Απάντηση:

Α) Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος Α=0,4m και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση σαν θετική, ξεκινά την ταλάντωσή του από την αρνητική ακραία θέση της ταλάντωσής του, συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής:

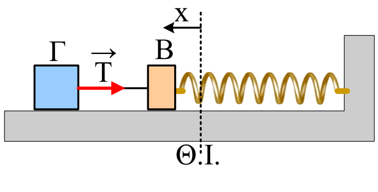
$$x=A\cdot ημ(ωt+φ_0),\ \text{όπου}\ ω=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}=\sqrt{\frac{400}{1+3}}rad/s=10rad/s,$$

$$\text{ενώ για t=0 έχουμε:}\quad -A=A\cdot ημφ_0 \rightarrow ημφ_0=-1 \rightarrow φ_0=\frac{3\pi}{2}$$

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης παίρνει τη μορφή: $x=0{,}4\cdot ημ\left(10t+\frac{3\pi}{2}\right)$ (S.I.)

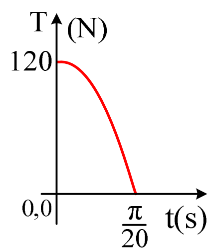
Την ταλάντωση όμως αυτή εκτελεί και το σώμα Γ, συνεπώς[1]:

$$ΣF_Γ=m_2\cdot α = m_2\cdot(-Aω^2\cdot ημ\left(10t+\frac{3\pi}{2}\right))\ \text{ή}$$



$$T=-m_2ω^2A\cdot ημ\left(10t+\frac{3\pi}{2}\right)=-120\cdot ημ\left(10t+\frac{3\pi}{2}\right)\ \text{(S.I.)}$$

Η ζητούμενη λοιπόν γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος.



Β) Προφανώς μόλις το σώμα Γ φτάσει στην θέση ισορροπίας, τη στιγμή t= ¼ T= π/20s, η τάση του νήματος μηδενίζεται και ενώ το σώμα Β επιβραδύνεται αφού συμπιέζει το ελατήριο, το σώμα Γ κινείται πλέον με σταθερή ταχύτητα και το νήμα δεν τεντώνεται πλέον. Τα δυο σώματα φτάνουν στη θέση ισορροπίας με ταχύτητα $υ_{max}=A\cdot ω$ =

4m/s.

i) Μόλις το σώμα Β περάσει τη θέση ισορροπίας αρχίζει να συσπειρώνει το ελατήριο και ξεκινά μια νέα ταλάντωση με περίοδο:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{400}}s=\frac{\pi}{10}s$$

Πού βρίσκεται το σώμα Β τη στιγμή $t_1=\frac{3\pi}{40}s$; Εκτελεί την δεύτερη ταλάντωσή του για χρονικό διάστημα $\Delta t=\frac{3\pi}{40}s-\frac{\pi}{20}s=\frac{\pi}{40}s=\frac{T_1}{4}$ συνεπώς βρίσκεται στην ακραία θετική απομάκρυνσή του και έχει μηδενική ταχύτητα. Για το νέο πλάτος ταλάντωσης έχουμε:

$$\upsilon_{max}=A_1\cdot\omega_1 \rightarrow A_1=\frac{\upsilon_{max}}{\frac{2\pi}{T_1}}=\frac{\upsilon_{max}T_1}{2\pi}=\frac{\upsilon_{max}}{20}=0{,}2m$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα $\Delta t=\frac{\pi}{40}s$ το σώμα Γ κινείται με σταθερή ταχύτητα, συνεπώς:

$$d+A_1=\upsilon_{max}\cdot\Delta t \rightarrow d=\upsilon_{max}\cdot\Delta t-A_1=4m/s\cdot\frac{\pi}{40}s-0{,}2m=0{,}114m$$

ii) Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση βρίσκουμε:

$$\vec{P}_{πριν}=\vec{P}_{μετά} \text{ ή } m_2\cdot\upsilon_{max}=(m_1+m_2)\cdot\upsilon_\kappa \text{ ή}$$

$$\upsilon_\kappa=\frac{m_2\upsilon_{max}}{m_1+m_2}=\frac{3\cdot 4}{1+3}m/s=3m/s$$

Έτσι για τις ενέργειες ταλάντωσης έχουμε:

α) Τη στιγμή $\frac{3\pi}{80}s<\frac{\pi}{20}s$ $E_1=½kA^2=32J$

β) Τη στιγμή $\frac{5\pi}{80}s>\frac{\pi}{20}s$ αλλά πριν την κρούση $E_2=½kA_1^2=8J$

γ) Τη στιγμή $\frac{7\pi}{80}s>\frac{3\pi}{40}s$ $E_3=½kA_2^2=½kA_1^2+½(m_1+m_2)\upsilon_\kappa^2=27J$.

iii) Στο συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση ασκείται η δύναμη του ελατηρίου με φορά προς τ΄ αριστερά και μέτρο $F=kA_1=80N$. Έτσι:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dW}{dt}=F\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=80\cdot3\cdot(-1)\text{J/s}=-240\text{J/s}$$

$$\frac{dU}{dt}=\frac{-dW_{F\varepsilon\pi}}{dt}=-F\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=-80\cdot3\cdot(-1)\text{J/s}=240\text{J/s}$$

Σχόλια:

2) Για την τάση του νήματος συνήθως γράφεται: $T=-D_2x=-m_2\omega^2\cdot x$, όπου D_2 ονομάζεται σταθερά επαναφοράς του σώματος Γ.

3) Την ταχύτητα του σώματος Β τη στιγμή $\frac{3\pi}{40}s$, θα μπορούσαμε να την υπολογίζουμε παίρνοντας την εξίσωση της ταχύτητάς του, για την δεύτερη ταλάντωση που κάνει:

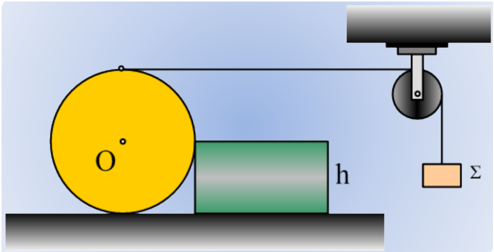
$$\upsilon=\upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega_1(t-t') \text{ όπου } \omega_1=20rad/s \text{ και } t'=\frac{\pi}{20}s.$$

Εδώ βέβαια με βάση τα δεδομένα το σώμα βρισκόταν σε θέση πλάτους και δεν χρειαζόταν να μπλέξουμε με εξίσωση κίνησης, σε άλλη περίπτωση όμως θα είμαστε υποχρεωμένοι να δουλέψουμε με εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας.

dmargaris@sch.gr

Μια ισορροπία κυλίνδρου με εμπόδιο

Γύρω από ένα κύλινδρο ακτίνας R=0,4m και μάζας M=10kg τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, το οποίο αφού περάσουμε από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο άκρο του δένουμε ένα σώμα Σ μάζας m_1=1kg.



Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο και το σύστημα ισορροπεί, αφού ο κύλινδρος εμποδίζεται να κινηθεί, από ένα εμπόδιο ύψους h=R. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και εδάφους είναι $\mu_s=\mu=0,2$, ενώ δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ κυλίνδρου και εμποδίου. Το νήμα μεταξύ κυλίνδρου και τροχαλίας είναι οριζόντιο, $g=10m/s^2$, ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I=\frac{1}{2}MR^2$.

i) Να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.

ii) Αντικαθιστούμε το σώμα Σ με άλλο Σ΄ μάζας m_2=3kg και παρατηρούμε ότι κινείται προς τα κάτω.

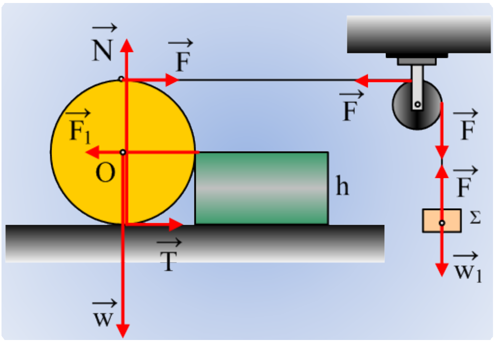
α) Να βρεθεί η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα Σ΄.

β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του;

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου μετά από 2s από τη στιγμή που άρχισε να στρέφεται.

Απάντηση:

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κύλινδρο και σώμα Σ, όπου F η τάση του νήματος και F_1 η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το εμπόδιο, κάθετη στην επιφάνεια επαφής, συνεπώς οριζόντια.



i) Το σώμα Σ ισορροπεί άρα ΣF=0 → $F=w_1=m_1g=10N$

Αλλά και ο κύλινδρος ισορροπεί συνεπώς:

$$\Sigma\vec{F}=0 \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow F+T-F_1=0 \quad (1) \\ \Sigma F_y=0 \rightarrow N=w=Mg=100N \end{cases}$$

$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow T\cdot R- F\cdot R=0 \rightarrow T=F=10N$

Και με βάση την (1) F_1=F+T=2F=20N

ii) Οι δυνάμεις είναι ξανά, όπως στο παραπάνω σχήμα, όπου η τάση του νήματος F είναι η ίδια δεξιά και αριστερά της τροχαλίας, αφού αυτή θεωρείται αβαρής, ενώ η τριβή είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο:

$$T=\mu\cdot N=\mu Mg= 20N$$

α) Για το Σώμα Σ: $\Sigma F=m_2\cdot \alpha \rightarrow m_2 g-F=m_2\cdot \alpha$ (1)

Για τον κύλινδρο: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και θεωρώντας θετική την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε: $F\cdot R-T\cdot R= ½ MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F-T= ½ M\cdot R\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά όλα τα σημεία του νήματος έχουν κάθε στιγμή την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα, συνεπώς και η γραμμική ταχύτητα του ανώτερου σημείου του κυλίνδρου είναι κατά μέτρο ίση με την ταχύτητα του Σ΄.

$$\upsilon_{\Sigma'}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R \rightarrow \frac{d\upsilon}{d\tau}=\frac{d\omega}{d\tau}R \rightarrow \alpha=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$$, οπότε η (2) δίνει $F-T= ½ M\cdot\alpha$ (3)

Με πρόσθεση των (1) και (3) έχουμε:

$$m_2 g -T=(m_2+ ½ M)\cdot\alpha \rightarrow$$

$$a=\frac{m_2 g-T}{m_2+M/2}=\frac{30-20}{3+5}m/s^2=1,25m/s^2$$

β) Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε $F=m_2(g-\alpha) = 3\cdot(10-1,25)N=26,25N$.

Για τον κύλινδρο λοιπόν έχουμε:

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=FR-TR=(F-T)R=(26,25-20)\cdot 0,4kgm^2/s^2=2,5kgm^2/s^2$$

γ) Η ταχύτητα του Σ΄τη στιγμή t=2s έχει μέτρο $\upsilon=\alpha\cdot t= 1,25\cdot 2m/s=2,5m/s=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R \rightarrow$

$$\omega=\frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{R}=\frac{2,5}{0,4}rad/s=6,25rad/s$$

Αλλά τότε ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι :

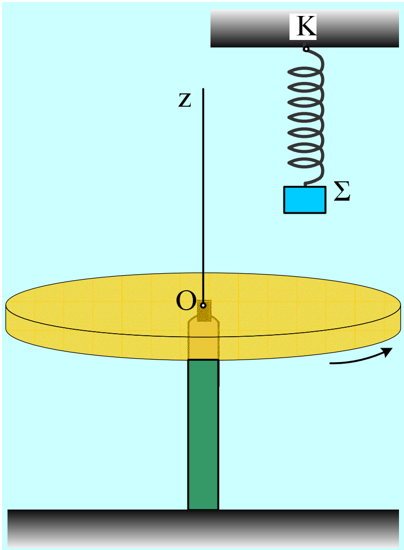
$$\frac{dK}{dt}=\Sigma\tau\cdot\omega=(F-T)R\cdot\omega=(26,25-20)\cdot 0,4\cdot 6,25J/s=15,625J/s.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης

Μια κρούση σώματος με οριζόντιο κυκλικό τραπέζι.



Ένα τραπέζι σχήματος δίσκου, μάζας M=19,5kg και ακτίνας R=0,4m στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του O, όπως στο διπλανό σχήμα, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Πάνω από το τραπέζι συγκρατείται ένα σώμα Σ, αμελητέων διαστάσεων, μάζας m=1kg, το οποίο είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και φυσικού μήκους ℓ_0=0,2m. Το ελατήριο κρέμεται από σημείο K, το οποίο απέχει 0,3m από το τραπέζι, ο άξονάς του απέχει 0,2m από τον άξονα z και στη θέση αυτή έχει το φυσικό μήκος του. Αφήνουμε το σώμα τη στιγμή t_0=0, να κινηθεί και προσκολλάται στο τραπέζι. Αν αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ έχει ταχύτητα υ_1=0,6m/s, ζητούνται:

i) Η επιτάχυνση και η ταχύτητα του σώματος Σ, ελάχιστα πριν την κρούση.

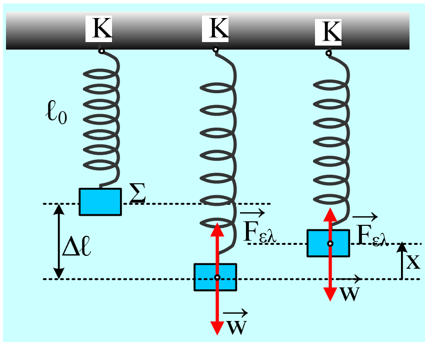
ii) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ που οφείλεται στην πλαστική του κρούση με το τραπέζι. Ποια η αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής του ως προς (κατά) τον άξονα z;

iii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του σώματος Σ, τη στιγμή που θα έχει εκτελέσει μισή περιστροφή.

iv) Η γωνία κατά την οποία στρέφεται το τραπέζι από τη στιγμή t_0=0, μέχρι τη στιγμή της κρούσης.

Δίνεται ότι παρόλη την κρούση το τραπέζι δεν παύει να στρέφεται γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα z χωρίς να «παλαντζάρει», η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα z $I= ½ MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στο τραπέζι, το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = 0{,}3m - 0{,}2m = 0{,}1m$, αλλά τότε το σώμα έχει επιτάχυνση:

$$\Sigma F=m\alpha \rightarrow mg-k\cdot\Delta\ell = m\alpha \rightarrow$$

$$\text{Αλλά } F_{\varepsilon\lambda}=k\Delta\ell=100\cdot 0{,}1N=10N=mg$$

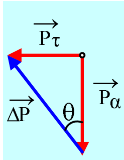
$$\text{Συνεπώς } \alpha=0$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το σώμα έχει φτάσει στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που πραγματοποιεί, μέχρι τη στιγμή αυτή. Αλλά η παραπάνω κίνηση είναι ΑΑΤ, με πλάτος A=Δℓ=0,1m αφού ξεκινάει από ακραία θέση με μηδενική ταχύτητα, ενώ αν πάρουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει κατά x από την θέση της κρούσης, θα έχουμε:

$$\Sigma F=F_{\varepsilon\lambda}-mg= k(\Delta\ell-x)-mg= k\Delta\ell-kx-mg= -kx$$

Κατά συνέπεια η ταχύτητά του είναι $\upsilon_{\max} = \omega\cdot A = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{100}{1}}0{,}1m/s = 1m/s$.

ii) Πριν την κρούση το σώμα Σ είχε κατακόρυφη ορμή με μέτρο $P_π = mυ_{max} = 1kg·m/s$, ενώ αμέσως μετά έχει οριζόντια ορμή μέτρου $P_μ = mυ_1 = 0{,}6kg·m/s$. Συνεπώς η μεταβολή της ορμής του, με βάση το διπλανό σχήμα είναι:



$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_\tau - \vec{P}_a \rightarrow$$

Για το μέτρο της: $\Delta P = \sqrt{P_a^2 + p_\tau^2} = \sqrt{1^2 + 0{,}6^2}\,kgm/s = \sqrt{1{,}36}\,kgm/s$

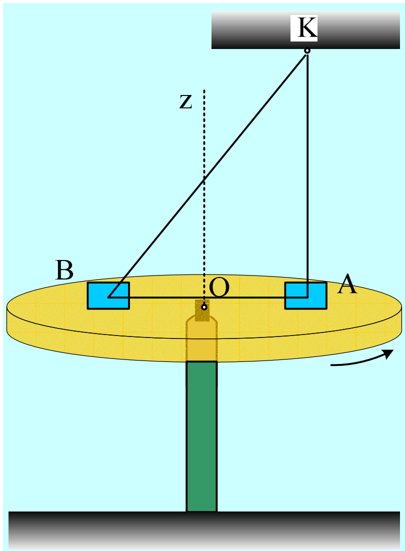
Ενώ για την διεύθυνση της του διανύσματος $\Delta\vec{P}$ έχουμε: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{P_\tau}{P_a} = 0{,}6$

Όσον αφορά τη στροφορμή ως προς τον άξονα z, αρχικά το σώμα δεν έχει στροφορμή, αφού κινείται παράλληλα στον άξονα ενώ μετά την κρούση έχει στροφορμή, πάνω στον άξονα με φορά προς τα πάνω και μέτρο: L=mυR= 1·0,6·0,2 kg·m²/s=0,12 kg·m²/s. ΄Αρα:

$$\Delta L = L_\tau - L_\alpha = 0{,}12\ kg·m^2/s$$

Με διεύθυνση του άξονα (κατακόρυφη) και φορά προς τα πάνω.

iii) Τη στιγμή που το σώμα Σ, έχει κάνει μισή περιστροφή, βρίσκεται στην αντιδιαμετρική θέση Β, της θέσης κρούσης Α, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε από το Π.Θ. βρίσκουμε:



$$(KB) = \sqrt{(AB)^2 + (AK)^2} = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}3^2}\,m = 0{,}5m$$

Αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell'$=0,5m-0,2m=0,3m, ενώ αμέσως μετά την κρούση το στερεό τραπέζι-σώμα Σ έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = \dfrac{\upsilon_1}{(OA)} = \dfrac{0{,}6m/s}{0{,}2m} = 3rad/s$.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η δύναμη του ελατηρίου, η οποία είναι συντηρητική, από τη θέση Α, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη θέση Β και παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B. \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_s\omega_1^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2}I_s\omega_2^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2 \rightarrow$$

Αλλά $I_s = \dfrac{1}{2}MR^2 + mr^2 = \dfrac{1}{2}19{,}5\cdot0{,}4^2kgm^2 + 1\cdot0{,}2^2kgm^2 = 1{,}6\,kg\cdot m^2$, οπότε:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{k\left((\Delta\ell)^2 - (\Delta\ell')^2\right)}{I_s}} = \sqrt{3^2 + \frac{100(0{,}1^2 - 0{,}3^2)}{1{,}6}}\,rad/s = 2rad/s$$

Συνεπώς το σώμα Σ θα έχει ταχύτητα $υ_2 = ω_2·r = 2·0{,}2m/s = 0{,}4m/s$, οπότε η κινητική του ενέργεια θα είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}1\cdot0{,}4^2\,J = 0{,}08J$$

iv) Το χρονικό διάστημα, από τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο το σώμα Σ, μέχρι να συγκρουσθεί με το τραπέζι είναι $t_1=\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{100}}s=\frac{\pi}{20}s$.

Εξάλλου κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές στο σύστημα τραπέζι-σώμα Σ ως προς τον άξονα περιστροφής z, συνεπώς η στροφορμή, ως προς τον άξονα αυτόν, παραμένει σταθερή.

$$\vec{L}_{πριν}=\vec{L}_{μετα} \rightarrow I_τ\omega_0=I_s\omega_1 \rightarrow$$

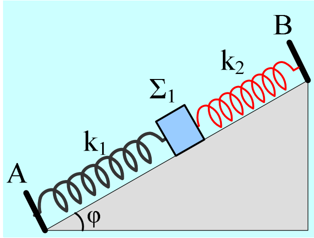
$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0=\left(\frac{1}{2}MR^2+mx^2\right)\omega_1 \rightarrow$$

$$\omega_0=\frac{(MR^2+2mx^2)\omega_1}{MR^2}=\frac{(19{,}5\cdot 0{,}4^2+2\cdot 1\cdot 0{,}2^2)}{19{,}5\cdot 0{,}4^2}3rad/s \approx 3{,}08rad/s$$

Συνεπώς το τραπέζι στρέφεται κατά γωνία $\theta=\omega_0 t_1=3{,}08\cdot\frac{\pi}{20}rad \approx 0{,}48rad$.

dmargaris@sch.gr

Μια παραλλαγή στο θέμα Δ4.



Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης φ=30°. Στα σημεία Α και Β στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1=30N/m και k_2=70 N/m αντίστοιχα. Στα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων, δένουμε σώμα $Σ_1$, και το κρατάμε στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Τη χρονική στιγμή t_0=0 αφήνουμε το σώμα $Σ_1$ ελεύθερο, οπότε διανύει απόσταση 0,1m μέχρι να σταματήσει την προς τα κάτω κίνησή του και να επιστρέψει, εκτελώντας ΑΑΤ.

i) Να βρεθεί η μάζα m_1 του σώματος $Σ_1$.

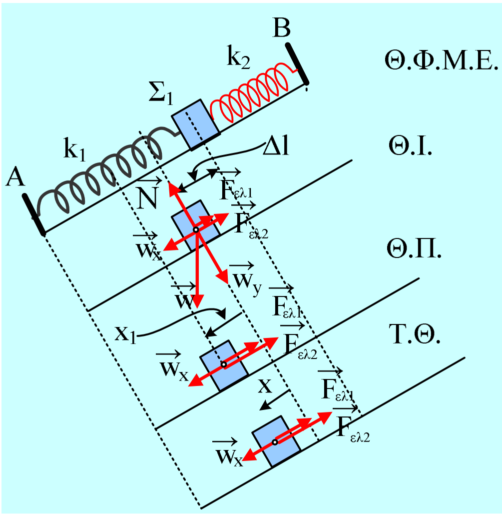
ii) α) Πάρτε το σώμα σε μια θέση Π, η οποία απέχει 3cm από την χαμηλότερη θέση της ταλάντωσης. Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

β) Να αποδείξτε ότι η κίνηση του σώματος είναι ΑΑΤ, υπολογίζοντας και την περίοδο ταλάντωσης.

Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται στην αρχική του θέση, τοποθετούμε πάνω του (χωρίς αρχική ταχύτητα) ένα άλλο σώμα $Σ_2$ μικρών διαστάσεων μάζας m_2=0,4 kg. Το σώμα $Σ_2$ δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα $Σ_1$ λόγω της τριβής που δέχεται από αυτό. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

iii) Έστω μια θέση Ρ, η οποία απέχει 3,5cm από την χαμηλότερη θέση της ταλάντωσης του συστήματος και στην οποία βρίσκεται κάποια στιγμή κινούμενο προς τα πάνω. Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο $Σ_2$ στην θέση Ρ και υπολογίστε τα μέτρα τους, την στιγμή αυτή.

Απάντηση:



Στο σχήμα δίπλα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας, όπως και στη θέση Π και στην τυχαία θέση (στις δύο τελευταίες θέσεις μόνο οι συνιστώσες στην διεύθυνση κίνησης, για να μην επιβαρυνθεί πολύ το σχήμα. Για τον ίδιο λόγο δεν σχεδιάστηκαν και τα ελατήρια…).

i) Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο k_1 έχει συσπειρωθεί κατά $Δ\ell$, ενώ το k_2 έχει επιμηκυνθεί κατά $Δ\ell$, συνεπώς και τα δυο ασκούν δυνάμεις με φορά προς τα πάνω.

$$ΣF=0 \rightarrow F_{ελ1}+F_{ελ2}-w_x=0 \rightarrow$$

$$k_1 \cdot Δ\ell + k_2 \cdot Δ\ell = m_1 \cdot g ημφ \rightarrow (1)$$

Αλλά η αρχική θέση (θέση φυσικού μήκους των ελατηρίων) είναι και ακραία θέση της ταλάντωσης, αφού το σώμα ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα την ταλάντωσή του, συνεπώς $Δ\ell$=Α, όπου Α το πλάτος της ταλάντωσης. Εξάλλου η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων είναι ίση με 2Α=0,1m ή Α=0,05m=$Δ\ell$ και η (1) δίνει:

$$m_1 = \frac{(k_1+k_2)\Delta\ell}{g\cdot\eta\mu\varphi} = \frac{(30+70)\cdot 0{,}05}{10\cdot {}^1\!/_2}kg = 1kg$$

ii) Η θέση Π απέχει 3cm από την κάτω ακραία θέση, συνεπώς το σώμα απέχει κατά x_1= 2cm από τη θέση ισορροπίας, οπότε το ελατήριο k_1 έχει συσπειρωθεί κατά 7cm, όσο έχει επιμηκυνθεί το k_2.

α) Έτσι οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, με κατευθύνσεις όπως έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα, έχουν μέτρα:

Το βάρος $w=m_1g=10N$.

Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, όπου αφού το σώμα ισορροπεί $\Sigma F_y=0$ ή $N=m_1g\sigma\upsilon\nu\varphi=5\sqrt{3}N$

$F_{\varepsilon\lambda 1}=k_1\cdot(\Delta\ell+x_1)=30\cdot 0{,}07N=2{,}1N$ και $F_{\varepsilon\lambda 2}=k_2\cdot(\Delta\ell+x_1)=70\cdot 0{,}07N=4{,}9N$

β) Παίρνουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει κατά x από την θέση ισορροπίας, όπως στο σχήμα.

$$\Sigma F=w_x-F_{\varepsilon\lambda 1}-F_{\varepsilon\lambda 2}= m_1g\eta\mu\varphi-k_1(\Delta\ell+x)-k_2(\Delta\ell+x) = m_1g\eta\mu\varphi-k_1\Delta\ell-k_1x-k_2\Delta\ell-k_2x \xrightarrow{(1)}$$

$$\Sigma F=-(k_1+k_2)\cdot x$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο:

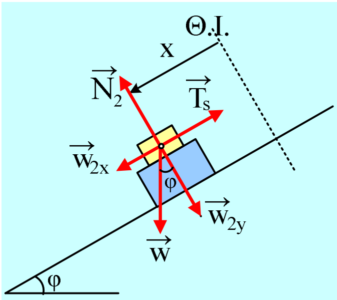
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1+k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{30+70}}s = 0{,}2\pi\ s$$

iii) Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας, για την οποία ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F'_{\varepsilon\lambda 1} + F'_{\varepsilon\lambda 2} - (m_1+m_2)g\cdot\eta\mu\varphi = 0 \rightarrow$$

$$\Delta\ell' = \frac{(m_1+m_2)g\cdot\eta\mu\varphi}{k_1+k_2} = \frac{(1+0{,}4)\cdot 10\cdot {}^1\!/_2}{30+70}m = 0{,}07m$$

Με την ίδια συλλογιστική, όπως και πριν, βλέπουμε ότι τόσο είναι και το νέο πλάτος ταλάντωσης, A_1=7cm. Συνεπώς η θέση Ρ, απέχει από τη θέση ισορροπίας κατά 3,5cm και αν θεωρήσουμε θετική την φορά από το Α στο Β, x=-0,035m. Το Σ_2 ισορροπεί στον άξονα y, συνεπώς για τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του έχουμε:



$w_2=m_2g=4N$, $N=w_{2y}=w_2\sigma\upsilon\nu\varphi=2\sqrt{3}N$

Εξάλλου από το 2ος νόμο του Νεύτωνα, με βάση το διπλανό σχήμα, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=m_2\cdot\alpha \text{ ή } T-m_2g\eta\mu\varphi=m_2\cdot(-\omega^2x) \text{ ή } T= m_2g\eta\mu\varphi-m_2\omega^2x \quad (2)$$

Όπου Τ η στατική τριβή που ασκείται στο σώμα Σ_2 και ω η νέα κυκλική συχνότητα, όπου λαμβάνοντας υπόψη ότι η κίνηση του συστήματος είναι ξανά ΑΑΤ με σταθερά $D=k_1+k_2$, έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{100}{1{,}4}}rad/s$$

Έτσι από την (2) παίρνουμε:

$$T = m_2 g\eta\mu\varphi - m_2\omega^2 x = 0{,}4\cdot 10\cdot {}^{1}\!/_{2}\,N - 0{,}4\cdot\frac{100}{1{,}4}\cdot(-0{,}035)N = 3N$$

Σχόλια:

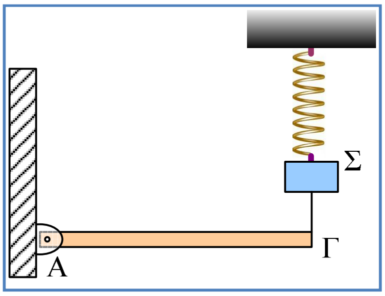
1) Το Σ_2 εκτελεί ταλάντωση, συνεπώς πρέπει να δέχεται συνισταμένη δύναμη με φορά προς την θέση ισορροπίας. Αφού η συνιστώσα λοιπόν w_{2x} έχει φορά προς το Α, η στατική τριβή έχει κατεύθυνση προς το Β, προς την θέση ισορροπίας, είναι δηλαδή ομόρροπη της ταχύτητας του σώματος.
2) Αν δεχτούμε ότι το σώμα Σ_2 εκτελεί ΑΑΤ, θα μπορούσαμε να γράψουμε και:

$$\Sigma F_x = -D_2 x \rightarrow T - m_2 g\cdot\eta\mu\varphi = -D_2 x \;\; \ldots.$$

όπου D_2 η λεγόμενη σταθερά επαναφοράς του σώματος m_2 ίση με $D_2=m_2\omega^2$.

dmargaris@sch.gr

Μια περιστροφή και μια α.α.τ.



Η ράβδος ΑΓ έχει μήκος 3m, μάζα M=10kg και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, αρθρωμένη στο άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, με το άλλο της άκρο Γ, δεμένο μέσω κατακόρυφου νήματος, με σώμα Σ μάζας m=5kg, το οποίο ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος 1m και σταθερά 200N/m.

i) Πόση δύναμη δέχεται η ράβδος στο σημείο Α και πόσο είναι στην ισορροπία το μήκος του ελατηρίου;

ii) Σε μια στιγμή t=0, κόβουμε το νήμα που συνδέει το σώμα Σ με τη ράβδο, οπότε το Σ εκτελεί α.α.τ. ενώ η ράβδος στρέφεται γύρω από το άκρο της Α. Να βρείτε:

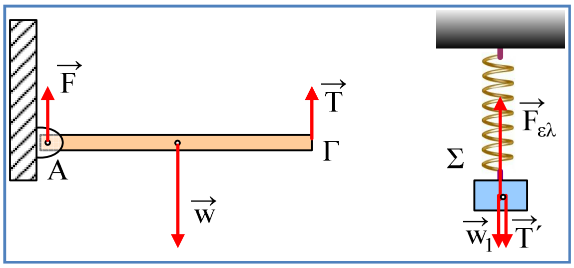
α) Την ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ,

β) Την αρχική επιτάχυνση (για t=0) τόσο του σώματος Σ, όσο και του σημείου Γ της ράβδου.

γ) Την μέγιστη ταχύτητα του σώματος Σ και την μέγιστη ταχύτητα του σημείου Γ.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I_{cm} = ml^2/12$, $\pi^2 \approx 10$, $g=10m/s^2$ ενώ δεν αναπτύσσονται τριβές στην άρθρωση στο άκρο Α κατά την πτώση της ράβδου.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε ράβδο-σώμα Σ, όπου T= T΄ η τάση του νήματος και F δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση, η οποία έχει σχεδιαστεί κατακόρυφη.

Αυτό συμβαίνει αφού η ράβδος ισορροπεί και δεν υπάρχει καμιά άλλη οριζόντια δύναμη, οπότε αφού $\Sigma F_x=0 \rightarrow F_x=0$. Εξάλλου $\Sigma F_y=0 \rightarrow F+T-Mg=0 \rightarrow F+T=Mg$ (1)

Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε: $\Sigma\tau_\Gamma=0 \rightarrow w\cdot\frac{\ell}{2} - F\cdot\ell = 0 \rightarrow F = \frac{Mg}{2} = 50N$

Οπότε από την σχέση (1) T=Mg-F=100N-50N=50N.

Αλλά και το σώμα Σ ισορροπεί, συνεπώς $\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}-T'-mg=0 \rightarrow k\Delta\ell = mg+T' \rightarrow$

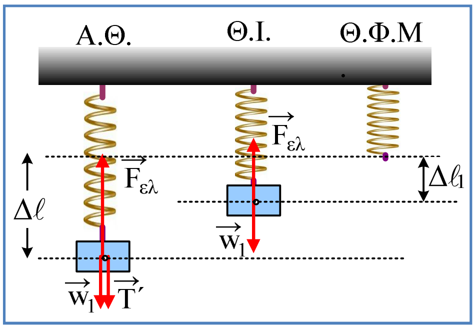
$$\Delta\ell = \frac{mg+T}{k} = \frac{5\cdot 10+50}{200}m = 0{,}5m$$

Συνεπώς το μήκος του ελατηρίου είναι $\ell = \ell_0 + \Delta\ell = 1m + 0{,}5m = 1{,}5m$

ii) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η θέση ισορροπίας και το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Στην θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}-mg=0 \rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{mg}{k} = \frac{5\cdot 10}{200}m = 0{,}25m$$



α) Αλλά η αρχική θέση, από την οποία ξεκινά την ταλάντωσή του το σώμα Σ, είναι ακραία θέση της ταλάντωσης, θέση πλάτους, οπότε Α= $\Delta\ell$ - $\Delta\ell_1$=0,25m και η ενέργεια ταλάντωσής του είναι:

$$E= ½\, k\,\Delta\ell^2= ½\; 200\cdot 0{,}25^2 J=6{,}25J.$$

β) Μόλις κόψουμε το νήμα, το σώμα Σ αποκτά επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$\Sigma F=m\alpha \to a=\frac{F_{ελ}-mg}{m}=\frac{k\Delta\ell}{m}=g=\frac{200\cdot 0{,}5}{5}m/s^2-10m/s^2=10m/s^2$$

Εξάλλου για την στροφική κίνηση της ράβδου έχουμε (η φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού θετική):

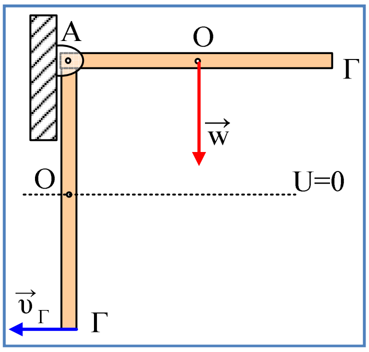
$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{γων} \to Mg\cdot\frac{\ell}{2}=\left(\frac{1}{12}M\ell^2+M\frac{\ell^2}{4}\right)\cdot a_{γων}\to a_{γων}=\frac{3g}{2\ell}$$

Οπότε η επιτάχυνση του άκρου Γ είναι $\alpha_Γ=\alpha_{γων}\cdot\ell=\frac{3g}{2}$ =15m/s^2.

γ) Η μέγιστη ταχύτητα του Σ είναι ίση με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσής του:

$$\upsilon_{max}=\omega\cdot A=\sqrt{\frac{k}{m}}A=\sqrt{\frac{200}{5}}\cdot 0{,}25m/s\approx\frac{\pi}{2}m/s$$

Η ράβδος επιταχύνεται στροφικά εξαιτίας της ροπής του βάρους, μέχρι να γίνει κατακόρυφη, αφού μετά η ασκούμενη ροπή θα την επιβραδύνει (στην περίπτωσή μας βέβαια πρόκειται να κτυπήσει και στον κατακόρυφο τοίχο, οπότε…). Παίρνουμε την ΑΔΜΕ για την περιστροφή της ράβδου, από την αρχική θέση, μέχρι την στιγμή που θα γίνει κατακόρυφη και έχουμε:



$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}$$

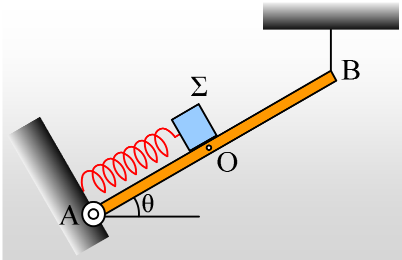
$$Mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2\to Mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\ell^2+M\frac{\ell^2}{4}\right)\omega^2\to\omega=\sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

Οπότε και $\upsilon_Γ=\omega\cdot\ell=\sqrt{3g\ell}=\sqrt{3\cdot 10\cdot 3}m/s\approx 3\pi$ m/s.

dmargaris@sch.gr

Μια ταλάντωση σώματος σε πλάγια σανίδα.

Η σανίδα του σχήματος, μήκους 2m και μάζας M=4kg, έχει αρθρωθεί στο άκρο της Α, ενώ το άλλο της άκρο Β είναι δεμένο με κατακόρυφο νήμα και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, όπου ημθ=0,6. Πάνω στη σανίδα, δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k=20N/m, ο άξονας του οποίου είναι παράλληλος με τη ράβδο, ισορροπεί ένα σώμα Σ, αμελητέων διαστάσεων, μάζας m=2kg. Η θέση ισορροπίας του σώματος Σ είναι το μέσον Ο της σανίδας.



i) Να βρεθεί το μέτρο της τάσης του νήματος.

ii) Μετακινούμε το σώμα Σ, προς τα πάνω κατά μήκος της σανίδας, κατά 0,2m και σε μια στιγμή που θεωρούμε t=0, το αφήνουμε να κινηθεί.

α) Να αποδείξτε ότι η κίνηση του σώματος είναι ΑΑΤ.

β) Θεωρώντας θετική την αρχική απομάκρυνση, να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του Σ σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

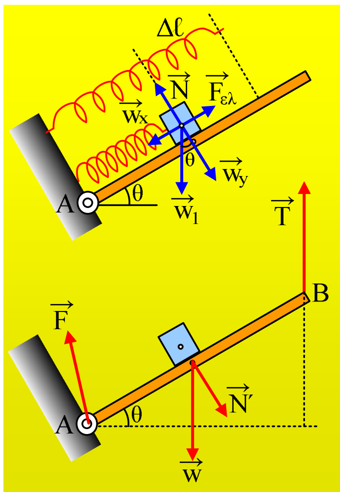
δ) Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ, τη χρονική στιγμή t_1=0,5s.

Δίνονται $\pi^2 \approx 10$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Το σώμα ισορροπεί, οπότε:

$$N=mg \cdot συνθ \text{ και } F_{ελ}=mg \cdot ημθ \rightarrow k\Delta\ell=mg \cdot ημθ. \quad (1)$$



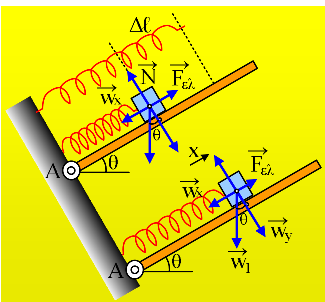
i) Στη σανίδα ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο κάτω σχήμα, όπου N΄η αντίδραση της N, με μέτρο N΄= mg·συνθ=2·10·0,8N=16N.

Η σανίδα ισορροπεί, οπότε ΣF=0 και $Στ_Α=0 \rightarrow$

$$T \cdot \ell \cdot συνθ - N'\frac{\ell}{2} - Mg \cdot \frac{\ell}{2}συνθ = 0 \rightarrow$$

T·συνθ= ½ N΄+ ½ Mg·συνθ= ½ ·16N+ ½ 4·10·0,8N=24N.→ T=30N.

ii) α) Έστω το σώμα Σ, σε απομάκρυνση x από την θέση ισορροπίας. Για την συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση x (παράλληλη στη σανίδα) έχουμε:



$$ΣF_x=F_{ελ}-w_{1x}= k(\Delta\ell -x)-mgημθ= k\Delta\ell -kx-mg \cdot ημθ \xrightarrow{(1)} ΣF_x=-kx$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ΑΑΤ και επειδή ξεκινά με μηδενική ταχύτητα από απομάκρυνση 0,2m, το πλάτος της ταλάντωσης αυτής θα είναι

A=0,2m.

β) Το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία θετική απομάκρυνση, συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι x=Αημ(ωt+φ_0) όπου για t=0, x=+A, άρα φ_0= $\frac{\pi}{2}$) και $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{20}{2}}rad/s\rightarrow$

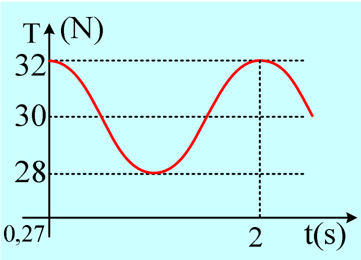
ω=π, οπότε x=0,2·ημ(πt+π/2) οπότε υ=ωΑ·συν(πt+π/2) =0,2π·συν(πt+$\frac{\pi}{2}$) μονάδες S.I.

γ) Η σανίδα ισορροπεί, οπότε ξανά $\Sigma\tau_A$=0 $\rightarrow T\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-N'\left(\frac{\ell}{2}+x\right)-Mg\cdot\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta=0\rightarrow$

T·2·0,8=16·1+16·0,2ημ(πt+$\frac{\pi}{2}$) +4·10·1·0,8→ T=30 +2· ημ(πt+$\frac{\pi}{2}$) ή

T= 30 +2·συνπt (μονάδες στο S.I.)

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι:

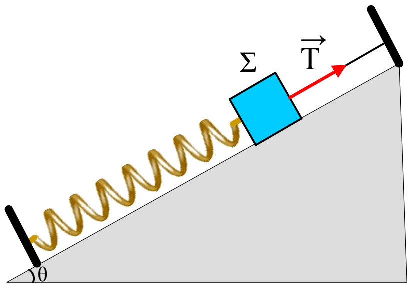


δ) Η περίοδος ταλάντωσης είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=2s$, συνεπώς τη στιγμή t_1=0,5s= ¼ T το σώμα περνά από την θέση ισορροπίας του, όπου ΣF=0. Οπότε έχουμε:

$$\frac{dP}{dt}=\Sigma F=0 \text{ αλλά και } \frac{dK}{dt}=|\Sigma F|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=0$$

dmargaris@sch.gr

Μια ταλάντωση με κρούση σε κεκλιμένο επίπεδο.



Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=2kg ισορροπεί όπως στο σχήμα, όπου η τάση του νήματος έχει μέτρο T=50N. Δίνονται ακόμη η σταθερά του ελατηρίου k=200N/m, το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο με κλίση θ=30°, το νήμα είναι παράλληλο προς το επίπεδο και $g=10m/s^2$.

Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα κινείται.

i) Να αποδείξτε ότι η κίνηση του σώματος είναι ΑΑΤ.

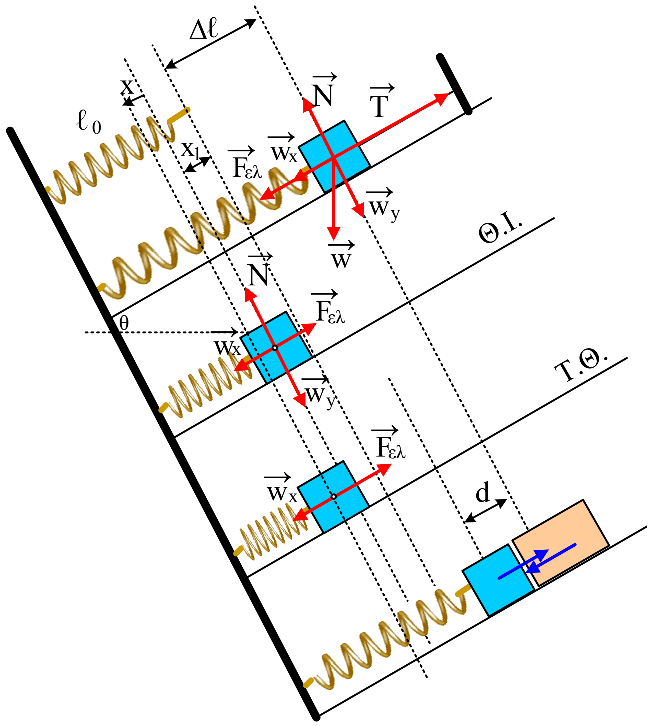
ii) Να βρεθεί το πλάτος και η ενέργεια ταλάντωσης.

iii) Αφού το σώμα συμπιέσει το ελατήριο, κινείται προς τα πάνω. Τη στιγμή που απέχει d=10cm από την αρχική του θέση, συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ένα άλλο σώμα $Σ_2$, μάζας m_2=3kg, το οποίο κατέρχεται κατά μήκος του επιπέδου. Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει μηδενική ταχύτητα.

α) Ποια η ταχύτητα του $Σ_2$, ελάχιστα πριν την κρούση;

β) Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει το συσσωμάτωμα.

Απάντηση:



i) Μόλις κοπεί το νήμα το σώμα θα κινηθεί προς τα κάτω και θα ταλαντωθεί γύρω από την θέση ισορροπίας για την οποία:

$ΣF=0$ ή $w_x=F_{ελ} \rightarrow$

$m_1 gημθ= k \cdot x_1$ (1)

όπου x_1 η συσπείρωση του ελατηρίου

Παίρνουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας:

$ΣF=w_x-F_{ελ}= m_1 gημθ-k(x_1+x) \rightarrow$

$ΣF= m_1 gημθ-kx_1-kx$

$$\xrightarrow{(1)} ΣF=-kx$$

Άρα το σώμα θα εκτελέσει ΑΑΤ με σταθερά D=k.

ii) Στην αρχική θέση, πριν να κοπεί το νήμα, το σώμα ισορροπεί, άρα:

$$ΣF=0 \text{ ή } ΣF_x=0 \text{ ή } T=m_1 gημθ+k \cdot Δℓ \rightarrow$$

$$Δℓ=\frac{T-m_1 gημθ}{k}=\frac{50-2\cdot 10\cdot \frac{1}{2}}{200}m=0{,}2m$$

Ενώ από την εξίσωση (1) έχουμε: $x_1=\frac{m_1 gημθ}{k}=\frac{2\cdot 10\cdot \frac{1}{2}}{200}m=0{,}05m$

Μόλις κοπεί το νήμα το σώμα θα αρχίσει την ταλάντωσή του χωρίς να έχει ταχύτητα, συνεπώς αυτή είναι ακραία θέση, άρα $A=\Delta\ell+x_1= 0{,}2m+0{,}05m=0{,}25m$.

Αντίστοιχα η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι: $E= ½\, kA^2 = ½\, 200\cdot 0{,}25^2 J=6{,}25J$.

iii) Η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ παραμένει σταθερή $K+U=E_\tau$ ή

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}kx_2^2=\frac{1}{2}kA^2$$

όπου x_2 η απομάκρυνσή του $x_2=A-d=0{,}25m-0{,}1m=0{,}15m$ και υ_1 η ταχύτητά του ελάχιστα πριν την κρούση.

$$\upsilon_1=\sqrt{\frac{k}{m_1}(A^2-x_2^2)}=\sqrt{\frac{200}{2}(0{,}25^2-0{,}15^2)}=2m/s$$

α) Εφαρμόζουμε για την κρούση την ΑΔΟ και έχουμε:

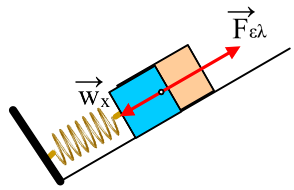
$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή}$$

θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση σαν θετική:

$$m_1\cdot\upsilon_1-m_2\cdot V= 0 \text{ ή } V=4/3 m/s$$

όπου V η ταχύτητα του δεύτερου σώματος Σ_2 με φορά προς τα κάτω.

β) Το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει ταλάντωση, γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας, για την οποία ΣF=0 ή



$$F_{\varepsilon\lambda}=(m_1+m_2)g\cdot\eta\mu\theta \text{ ή}$$

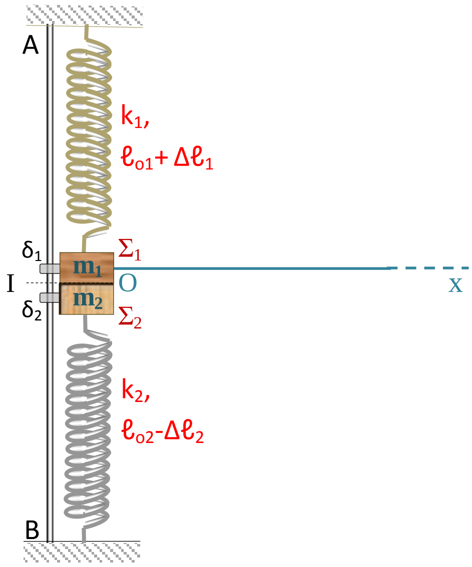
$$k\Delta\ell_1= (m_1+m_2)g\cdot\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$\Delta\ell_1=\frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\theta}{k}=\frac{50\cdot\frac{1}{2}}{200}m=0{,}125m$$

όπου $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου.

Αλλά τη στιγμή της κρούσης το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απόσταση d=0,1m από την αρχική θέση συνεπώς το ελατήριο είχε επιμήκυνση $d_1=\Delta\ell-d=0{,}2m-0{,}1m=0{,}1m$ και η θέση αυτή (ακραία θέση για την νέα ταλάντωση) απέχει κατά $A_1= d_1+\Delta\ell_1=0{,}1m+0{,}125m=0{,}225m$ από την νέα θέση ισορροπίας. Βλέπουμε δηλαδή ότι $A_1=22{,}5cm$.

dmargaris@sch.gr



Δυο σώματα, δύο ελατήρια, μια πλαστική κρούση και ένα κύμα

Οι σταθερές των δύο ελατηρίων του σχήματος είναι k_1= 100 N/m και k_2 = 300 N/m, ενώ οι μάζες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι m_1 = 1 kgr και m_2 = 3 kgr, αντίστοιχα.

Αρχικά, τα σώματα Σ_1 και Σ_2 ισορροπούν εφαπτόμενα στη θέση Ι χωρίς να ασκούν δύναμη το ένα στο άλλο. Στο Σ_1 είναι στερεωμένο ένα τεντωμένο οριζόντιο σχοινί Οx μεγάλου μήκους. Η ακλόνητα στηριγμένη κατακόρυφη ράβδος ΑΒ και οι δακτύλιοι δ_1 και δ_2 που είναι περασμένοι σ' αυτήν και είναι στερεωμένοι στα σώματα, χρησιμεύουν στο να εξουδετερώνεται η τάση του σχοινιού και οι άξονες των δύο ελατηρίων να διατηρούνται κατακόρυφοι.

Απομακρύνουμε προς τα κάτω το Σ_2 κατά 20 cm και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Ανέρχεται, και στη θέση Ι συγκρούεται πλαστικά με το Σ_1. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει αρχίζει να ταλαντώνεται παρασύροντας το άκρο Ο του σχοινιού σε μια παρόμοια κίνηση. Έτσι, πάνω στο σχοινί ξεκινάει η διάδοση ενός εγκάρσιου κύματος με ταχύτητα 10 cm/s.

Α. Να αποδείξετε η ταλάντωση του συσσωματώματος είναι απλή αρμονική με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 + k_2$.
Β. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος και να γράψετε τη σχέση της απομάκρυνσής του σε συνάρτηση με το χρόνο. (0,15 m, ψ=0,15ημ10t)

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ του κύματος που δημιουργείται στο σχοινί και να γράψετε την εξίσωση αυτού του κύματος. (0,02π m, ψ= 0,15ημ(10t – 100x)

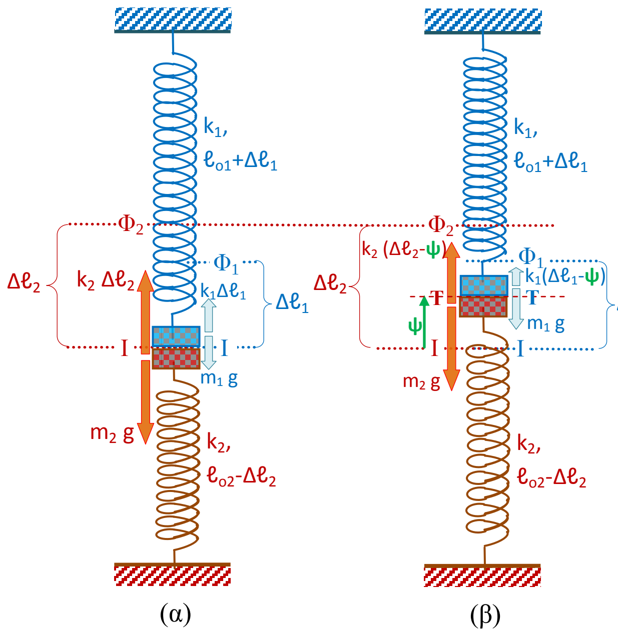
Δ. Τι ταχύτητα έχει τη χρονική στιγμή t = 2 s ένα σημείο Ε του σχοινιού το οποίο απέχει x = 20 cm από την αρχή Ο του σχοινιού; (μηδέν)

Ε. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 = π sec.
(πέντε πλήρη κύματα)

Ως αρχή μέτρησης των χρόνων (t= 0) να θεωρήσετε τη στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση του συσσωματώματος. Τριβές δεν υπάρχουν, οι άξονες των ελατηρίων συμπίπτουν, και οι δακτύλιοι έχουν αμελητέα μάζα. Θετική φορά θεωρείστε την προς τα πάνω.

Τάσος Τζανόπουλος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Σχήμα 1

Α. Επειδή αρχικά τα δύο σώματα ισορροπούν στη θέση Ι χωρίς να ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο, είναι φανερό ότι στη θέση αυτή (σχήμα 1α) τα βάρη τους εξουδετερώνονται από τις δυνάμεις των ελατηρίων, δηλαδή ισχύει

$k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2 = m_1g + m_2g$ (1)

και αφού αμέσως μετά την κρούση οι δυνάμεις αυτές δεν αλλάζουν, η θέση Ι θα εξακολουθήσει να είναι θέση ισορροπίας, της ταλάντωσης του συσσωματώματος αυτή τη φορά.

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα ξεκινήσει να ταλαντώνεται. Για το είδος της ταλάντωσης που θα κάνει, έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

1. Έστω Τ μια τυχαία θέση του συσσωματώματος λίγο πάνω από τη θέση ισορροπίας Ι, σχήμα 1β, σε απομάκρυνση ψ από τη θέση ισορροπίας. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη θέση αυτή στο συσσωμάτωμα είναι το βάρος του $\vec{B}_{ολ}$ (=m_1g + m_2g) και οι δυνάμεις από τα δύο ελατήρια με φορά προς τα πάνω και με μέτρα $F_1 = k_1(\Delta\ell_1 - \psi)$, από το πάνω ελατήριο, και $F_2 = k_2(\Delta\ell_2 - \psi)$, από το κάτω (όπως φαίνεται στο σχήμα 1β οι παραμορφώσεις και των δύο ελατηρίων είναι μειωμένες κατά ψ). Είναι φανερό ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα στη θέση Τ έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας, είναι δηλαδή αντίρροπη με την απομάκρυνση ψ και επομένως είναι δύναμη επαναφοράς.

2. Αν θεωρήσουμε θετικές τις δυνάμεις που έχουν ίδια φορά με την απομάκρυνση ψ, η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης στην τυχαία θέση δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = k_1(\Delta\ell_1 - \psi) + k_2(\Delta\ell_2 - \psi) - m_1g - m_2g \qquad (2)$$

Η σχέση (2), σε συνδυασμό με την (1) δίνει: $\Sigma F = -(k_1 + k_2)x$.

Οπότε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι ανάλογο με το μέτρο της απομάκρυνσης.

Για τους δυο παραπάνω λόγους η κίνηση του σώματος είναι α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 + k_2$.

Β. Ας πάμε τώρα λίγο πίσω, πριν την κρούση των δύο σωμάτων, συγκεκριμένα τη στιγμή που έχοντας απομακρύνει προς τα κάτω το σώμα Σ_2 το αφήνουμε ελεύθερο. Ως γνωστό ένα σύστημα ελατήριο – σώμα αποτελεί ένα αρμονικό ταλαντωτή, έτσι το Σ_2 θα ξεκινήσει μια α.α.τ. με θέση ισορροπίας τη θέση όπου αρχικά ηρεμούσε, δηλαδή τη Ι. Θα εκτελέσει όμως μόνο ένα κλάσμα της ταλάντωσής του, αφού στη θέση Ι θα συγκρουστεί πλαστικά με το Σ_1. Στη θέση αυτή έρχεται με ταχύτητα ίση με τη μέγιστη ταχύτητα της ανολοκλήρωτης ταλάντωσής του, δηλαδή

$$\upsilon_2 = A\omega_2 = A\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 0,2\ m\cdot\sqrt{\frac{300\,N/m}{3kgr}} = 2\,m/s$$

Με εφαρμογή της Α.Δ.Ο, στην πλαστική κρούση που ακολουθεί, θα υπολογίσουμε την αρχική ταχύτητα με την οποία ξεκινά την ταλάντωσή του το συσσωμάτωμα:

$$\begin{aligned} &m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)V \\ &\rightarrow 3kgr\cdot 2\,m/s = 4\,kgr\cdot V \\ &\rightarrow V = 1,5\,m/s \end{aligned}$$

Αυτή είναι και η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Το πλάτος της ταλάντωσής του μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με εφαρμογή ξανά της σχέσης που συνδέει πλάτος ταλάντωσης με πλάτος ταχύτητας, δηλαδή της σχέσης $V = A_{\sigma\upsilon\sigma} \cdot \omega_{\sigma\upsilon\sigma}$.

Είναι $V = 1,5\,m/s$ και $\omega_{\sigma\upsilon\sigma} = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1+m_2}} = \sqrt{\dfrac{400\,N/m}{4kgr}} = 10\,rad/s$

$$\text{Άρα } A_{\sigma\upsilon\sigma} = \frac{V}{\omega_{\sigma\upsilon\sigma}} = \underline{0,15\,m}$$

Επειδή το συσσωμάτωμα ξεκινάει από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τα πάνω (θετική φορά) η αρχική φάση της ταλάντωσής του είναι μηδέν. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\psi = 0,15\eta\mu 10t$$

Γ. Η συχνότητα ταλάντωσης του άκρου Ο του σχοινιού είναι

$$f = \frac{\omega_{\sigma\upsilon\sigma}}{2\pi} = 5/\pi\ Hz$$

Το μήκος κύματος λ θα υπολογιστεί από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής

$$\upsilon = \lambda \cdot f$$

Δηλαδή: $$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{0,1\,m/s}{(5/\pi)/s} = \frac{\pi}{50}\ m$$

Η εξίσωση του παραγόμενου αρμονικού κύματος είναι:

$$\psi = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = 0{,}15\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{\pi/5} - \frac{x}{\pi/50}\right)$$

ή $\quad \psi = 0{,}15\eta\mu(10t - 100x)$

Δ. Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του σχοινιού, εφόσον έχει φτάσει το κύμα σ' αυτά, παρέχεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{\tau\alpha\lambda} = A\omega\sigma\upsilon\nu(10t - 100x)$$

Τη στιγμή 2 sec το κύμα έχει φτάσει ως τη θέση x = $\upsilon t = 10\,\mathrm{cm/s} \cdot 2\,\mathrm{s} = 20\,cm$, δηλαδή ως το Ε. Άρα:

$$\begin{aligned} \upsilon_{\tau\alpha\lambda.A} &= 1{,}5\sigma\upsilon\nu(10t - 100x) \\ &= 1{,}5\sigma\upsilon\nu(10 \cdot 2 - 100 \cdot 0{,}2) \\ &= 1{,}5\ m/s \end{aligned}$$

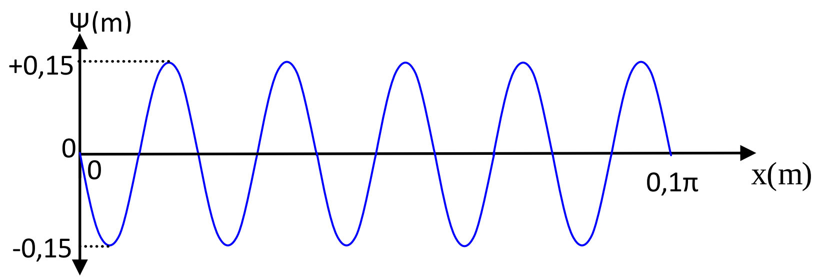
Ε. Ως τη χρονική στιγμή $t_1 = \pi$ sec το συσσωμάτωμα θα έχει κάνει $t_1/T = 5$ πλήρεις ταλαντώσεις και θα έχουν δημιουργηθεί 5 πλήρη κύματα, που θα έχουν διαδοθεί ως τη θέση

$$x = \upsilon t_1 = (0{,}1 m/s) \cdot (\pi \sec) = 0{,}1\pi\ m.$$

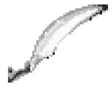
Η εξίσωση του στιγμιότυπου τη στιγμή $t_1 = \pi$ sec είναι:

$$\psi = 0{,}15\eta\mu(10\pi - 100x)$$

Θέτοντας x = 0, λ/4, και υt_1, στην παραπάνω σχέση, βρίσκουμε ψ = 0, -0,15 m, και 0, αντίστοιχα. Έτσι καταλήγουμε στην πιο κάτω γραφική παράσταση.

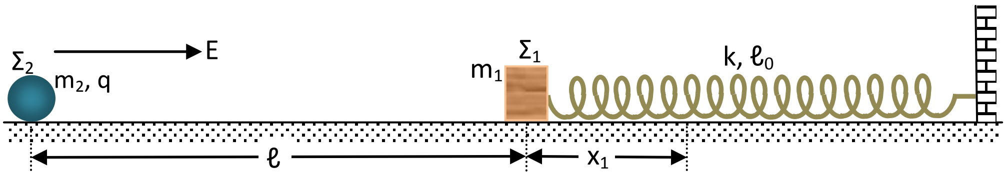


Σχήμα 2



Τάσος Τζανόπουλος

Ευθύγραμμη ομαλα μεταβαλλόμενη κίνηση αντιμέτωπη με αρμονικά μεταβαλλόμενη κίνηση.



Στο χώρο, όπου βρίσκονται τα σώματα του σχήματος, υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης Ε. Το σφαιρίδιο Σ_2 είναι ηλεκτρικά φορτισμένο με φορτίο q και αρχικά το συγκρατούμε ακίνητο σε απόσταση ℓ από το αφόρτιστο σώμα Σ_1, που ισορροπεί στερεωμένο στο αριστερό άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου όπως στο σχήμα. Το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο.

Μετακινούμε το Σ_1 προς τα δεξιά κατά $\mathbf{x_1 = 0{,}2\ m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο. Την ίδια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο και το Σ_2.

Α. Να υπολογίσετε την απόσταση ℓ ώστε η συνάντηση των σωμάτων να γίνει στη θέση ισορροπίας του Σ_1.

Β. Αν δίνεται ότι μετά την κρούση τα δύο σώματα ξαναγυρίζουν στις αρχικές τους θέσεις με μηδενικές ταχύτητες, να υπολογίσετε την m_2.

Γ. Να εξηγήσετε ότι η κρούση των σωμάτων είναι ελαστική και να δείξετε ότι θα φτάσουν στις αρχικές τους θέσεις ταυτόχρονα.

Δ. Αν σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή είναι ίσο με το φορτίο του Σ_2 και η περίοδος της ταλάντωσής του είναι ίση με το χρονικό διάστημα από την έναρξη της κίνησης των δύο σωμάτων μέχρι την επιστροφή τους στην αρχική τους θέση, να υπολογίσετε το πλάτος της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει.

Δίνονται: $\mathbf{q/m_2 = 10^{-4}\ Cb/kgr}$, $\mathbf{m_1 = 1\ kgr}$, $\mathbf{k = 100\ N/m}$, $\mathbf{E = 10^5\ N/Cb}$, η σχέση $\mathbf{F_{\eta\lambda} = Eq}$ και ότι η κρούση είναι μετωπική αμελητέας χρονικής διάρκειας.

Θεωρείστε $\boldsymbol{\pi^2 = 10}$.

Τάσος Τζανόπουλος

ΛΥΣΗ

Α. Όταν αφήσουμε ελεύθερο το σώμα Σ_1 θα κάνει τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης, με σταθερά επαναφοράς D = k και πλάτος $A = x_1$. Για να φτάσει από το σημείο που το αφήσαμε στη θέση ισορροπίας του, για να διανύσει δηλαδή τη διαδρομή x_1, χρειάζεται χρόνο

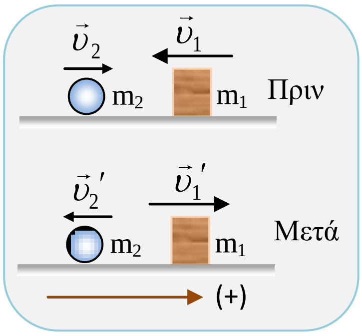
$$t=\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m_1}{k}}=\frac{\pi}{20}\sec$$

Στον ίδιο χρόνο το σώμα Σ_2 πρέπει να διανύσει το διάστημα ℓ. Η κίνησή του είναι ομαλά επιταχυνόμενη, χωρίς αρχική ταχύτητα, με επιτάχυνση

$$\alpha=\frac{\Sigma F}{m_2}=\frac{Eq}{m_2}=E\cdot\frac{q}{m_2}=(10^5\,N/c)(10^{-4}c/kgr)=10\frac{m}{s^2}$$

Επομένως

$$\ell=\frac{1}{2}\alpha t^2=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{T}{4}\right)^2=\frac{1}{2}(10\,m/s^2)\left(\frac{\pi}{20}s\right)^2=\frac{1}{8}\,m$$



Β. Για να ξαναγυρίσουν τα δύο σώματα στην αρχική τους θέση πρέπει αμέσως μετά την κρούση να έχουν ταχύτητες αντίθετες αυτών που είχαν αμέσως πριν την κρούση. Η ταχύτητα με την οποία το Σ_1 φτάνει στη θέση ισορροπίας του είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής του, δηλαδή

$$\upsilon_1=A\omega=x_1\omega=x_1\sqrt{\frac{k}{m_1}}=(0,2\,m)\sqrt{\frac{100\,N/m}{1\,kgr}}=2\,m/\sec$$

Η ταχύτητα με την οποία το Σ_2 φτάνει στο ίδιο σημείο είναι

$$\upsilon_2=\alpha t=(10\,m/s^2)\frac{\pi}{20}\sec=\frac{\pi}{2}\,m/s$$

Με εφαρμογή της Α.Δ.Ο για την κρούση των σωμάτων και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, προκύπτει η σχέση

$$-m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1\upsilon_1'-m_2\upsilon_2'$$

Εξηγήσαμε πριν ότι οι ταχύτητες $\upsilon_1{}'$ και $\upsilon_2{}'$ πρέπει να έχουν ίσα μέτρα με τις υ_1 και υ_2, δηλαδή $\upsilon_1{}'=\upsilon_1$ και $\upsilon_2{}'=\upsilon_2$. Άρα η παραπάνω σχέση γίνεται

$$2m_2\upsilon_2 = 2m_1\upsilon_1$$

Κι επομένως

$$m_2 = m_1\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 1kgr\frac{2\,\cancel{m/s}}{\frac{\pi}{2}\,\cancel{m/s}} = \frac{4}{\pi}\;kgr$$

Γ. Επειδή κατά την κρούση οι ταχύτητες των δύο σωμάτων αντιστρέφονται διατηρώντας το μέτρο τους, η κινητική ενέργεια κάθε σώματος, επομένως και του συστήματος δε μεταβάλλεται. Άρα η κρούση είναι ελαστική.

Μετά την κρούση η ταχύτητα του Σ_1 θα γίνει μηδέν στη θέση x_1 μετά από χρόνο Τ/4. Στον ίδιο χρόνο η ταχύτητα του Σ_2 θα είναι

$\upsilon_2 = \upsilon_2{}' - \alpha\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}m/s - (10\,m/s^2)\frac{\pi}{20}s = 0$, και θα έχει διανύσει διαδρομή

$$s = \upsilon_2{}'\frac{T}{4} - \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{T}{4}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}m/s\right)\left(\frac{\pi}{20}\;s\right) - \frac{1}{2}(10\,m/s^2)\left(\frac{\pi}{20}\;s\right)^2 = \frac{\pi^2}{80}m = \frac{1}{8}m.$$

Άρα μετά την κρούση το σώμα Σ_2 φτάνει στην αρχική του θέση, ταυτόχρονα με το Σ_1, με ταχύτητα μηδέν.

Δ. Δίνεται ότι $q/m_2 = 10^{-4}$ Cb/kgr και έχουμε βρει ότι $m_2 = 4/\pi$ kgr, άρα $q = (4/\pi)10^{-4}$ Cb. Επίσης, το χρονικό διάστημα από την έναρξη της κίνησης των δύο σωμάτων μέχρι την επιστροφή τους στην αρχική τους θέση ισούται με $2T/4 = \pi/10$ sec.

Άρα, σύμφωνα με την εκφώνηση, το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή στο κύκλωμα LC είναι ίσο με $Q_C = (4/\pi)10^{-4}$ Cb και η περίοδος του κυκλώματος ίση με

$T_{LC} = 2\pi\sqrt{LC} = \pi/10\sec$, απ' όπου $\sqrt{LC} = \frac{1}{20}\sec$

Με εφαρμογή της Α.Δ.$Ε_{ταλ}$ για το ηλεκτρικό κύκλωμα προκύπτει η σχέση

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2 \rightarrow I = \frac{Q}{\sqrt{LC}} = \frac{(4/\pi)10^{-4}Cb}{(1/20)\sec} = \frac{8}{\pi}10^{-3}\,A$$

Τάσος Τζανόπουλος

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η Άσκηση είναι παραλλαγή της 1.47 σελ.40 του σχολικού βιβλίου.