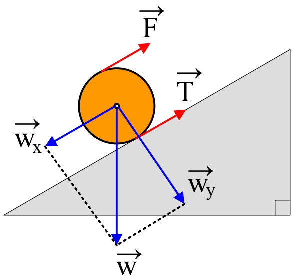
Εφαρμογή του 2^{ου} Νόμου σε σύνθετη κίνηση

Πώς εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε μια σύνθετη κίνηση; Δουλεύουμε με αλγεβρικές τιμές των μεγεθών ή με τα μέτρα τους; Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός κυλίνδρου που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
Οι γνωστές μας σχέσεις ω=υ·R και $α_{cm}=α_{γων}\cdot R$ συνδέουν τα μέτρα των μεγεθών αφού τα διανύσματα είναι μεταξύ τους ασύμβατα **κάθετα** (υ⊥ω και $α_{cm} \perp α_{γων}$.)
Για να μην μπλέξουμε λοιπόν τα πρόσημα των μεγεθών αυτών προτείνεται να χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις αφού ορίσουμε κάθε φορά θετικές φορές (για την μεταφορική και για την περιστροφική κίνηση) με τέτοιο τρόπο ώστε να μην προκύπτουν αρνητικές τιμές για την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και για την γωνιακή επιτάχυνση. Ας το δούμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα



Έστω ότι αφήνουμε σε ένα κεκλιμένο επίπεδο έναν κύλινδρο, γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη στο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Να μελετηθεί η κίνηση του κυλίνδρου, με δεδομένο ότι δεν θα ολισθήσει, αν δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I=\frac{1}{2}mR^2$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
1) Για ποια τιμή του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ ο κύλινδρος ισορροπεί;
Αφού ο κύλινδρος ισορροπεί:

$$ΣF=0 \text{ ή } \begin{cases} ΣF_x=0 \rightarrow F+T-w_x=0 \ (1) \\ ΣF_y=0 \end{cases}$$

Και Στ=0 → -F·R + T·R= 0 → T=F με φορά όπως στο σχήμα, οπότε από την (1) έχουμε:

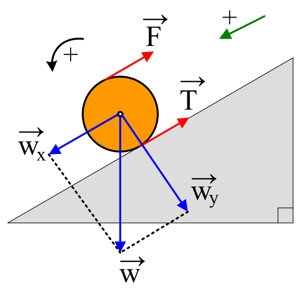
$$2F=w_x \rightarrow \boxed{F=\frac{w_x}{2}}.$$

Δηλαδή αν ασκήσουμε δύναμη παράλληλη προς το επίπεδο, με μέτρο ίσο με το μισό της συνιστώσας w_x του βάρους, τότε και η στατική τριβή είναι της ίδιας κατεύθυνσης με την δύναμη $\vec{F}$ και έχει το ίδιο μέτρο.

2) Το μέτρο της δύναμης είναι μικρότερο από το μισό της συνιστώσας του βάρους w_x, δηλαδή

$$\boxed{F<\frac{w_x}{2}}.$$

Αφού w_x> F ο κύλινδρος τείνει να κινηθεί προς τα κάτω, επομένως και πάλι η στατική τριβή είναι προς τα πάνω, όπως στο σχήμα. Η δύναμη είναι τώρα μικρότερη από αυτή που εξασφαλίζει ισορροπία, επομένως ο κύλινδρος κυλίεται προς τα κάτω και στρέφεται αριστερόστροφα. Θεωρώ για την μεταφορική κίνηση θετική την προς τα κάτω κατεύθυνση και θετικές τις αριστερόστροφες ροπές, οπότε εφαρμόζοντας ξανά τον 2^{ο} Νόμο του Νεύτωνα έχουμε για τις δύο κινήσεις:



$$\Sigma F_x = m\cdot a \longrightarrow w_x - F - T = m\cdot a_{cm} \quad (3) \text{ και}$$

$$\Sigma\tau = I\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R - F\cdot R = \frac{1}{2}mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \longrightarrow T - F = ½\, m a_{cm} \; (4)$$

Με πρόσθεση των (3) και (4) κατά μέλη έχουμε:

$$W_x - 2F = \frac{3}{2}m\alpha_{cm} \longrightarrow a_{cm} = \frac{2(w_x - 2F)}{3m}$$

Οπότε από την (4) παίρνουμε για το μέτρο της τριβής:

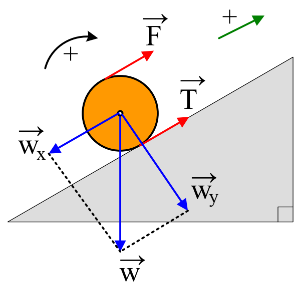
$$T = F + ½\, m\frac{2(w_x - 2F)}{3m} = F + \frac{w_x}{3} - \frac{2F}{3} = \frac{w_x}{3} + \frac{F}{3} > 0$$

Προσέξτε η τριβή έχει κατεύθυνση προς τα πάνω και αυτό το έχουμε χρησιμοποιήσει με κατάλληλο πρόσημο τόσο στην εξίσωση (3), όσο και στην (4).

3) Το μέτρο της δύναμης είναι μεγαλύτερο από το μισό της συνιστώσας του βάρους w_x, δηλαδή

$$F > \frac{w_x}{2}.$$

Η δύναμη είναι τώρα μεγαλύτερη από αυτήν που εξασφαλίζει ισορροπία, επομένως ο κύλινδρος κυλίεται προς τα πάνω και στρέφεται δεξιόστροφα. Έστω ότι και πάλι η τριβή είναι προς τα πάνω. Θεωρώ για την μεταφορική κίνηση θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση και θετικές τις δεξιόστροφες ροπές, οπότε εφαρμόζοντας ξανά τον 2^o Νόμο του Νεύτωνα έχουμε για τις δύο κινήσεις:



$$\Sigma F_x = m\cdot a \longrightarrow F + T - w_x = m\cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma\tau = I\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R - T\cdot R = \frac{1}{2}mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \longrightarrow F - T = ½\, m a_{cm} \quad (2)$$

$$2F - w_x = 3/2\, m a_{cm} \longrightarrow a_{cm} = \frac{2(2F - w_x)}{3m}$$

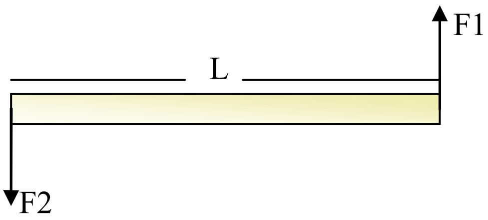
και από την (2) παίρνουμε:

$$T = F - ½\, m\cdot\frac{2(2F - w_x)}{3m} = F - \frac{2F}{3} + \frac{w_x}{3} = \frac{F}{3} + \frac{w_x}{3} > 0$$

πράγμα που σημαίνει ότι πράγματι η τριβή είναι όπως στο σχήμα.

Ζεύγος δυνάμεων. Και ρυθμοί μεταβολής.

Ράβδος μήκους L και μάζας M ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση ζεύγους οριζοντίων δυνάμενων F1=F2=F, όπως στο σχήμα.



Οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής και της στροφορμής είναι αντίστοιχα:

- **i.** μηδέν και διαφορος του μηδενός
- **ii.** διαφορος του μηδενός και μηδεν
- **iii.** μηδέν και μηδέν

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

Λύση:

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $\frac{dp}{dt} = \sum F$ είναι 0 αφού η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδενική.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμης είναι: $\frac{dL}{dt} = \sum \tau = FL$

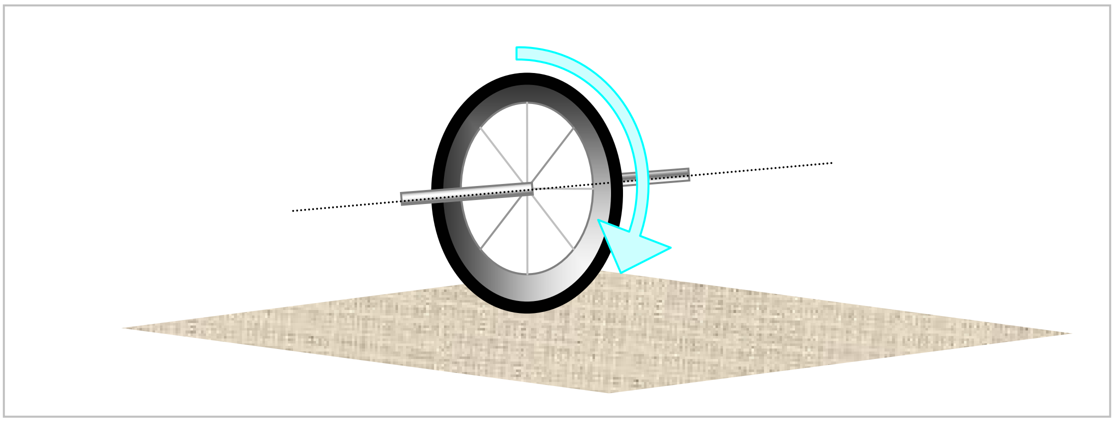
Άρα σωστή είναι η πρόταση i.

Κοσμίδης Γιώργος

giorgakis_91@hotmail.com

Από την περιστροφή στην κύλιση…

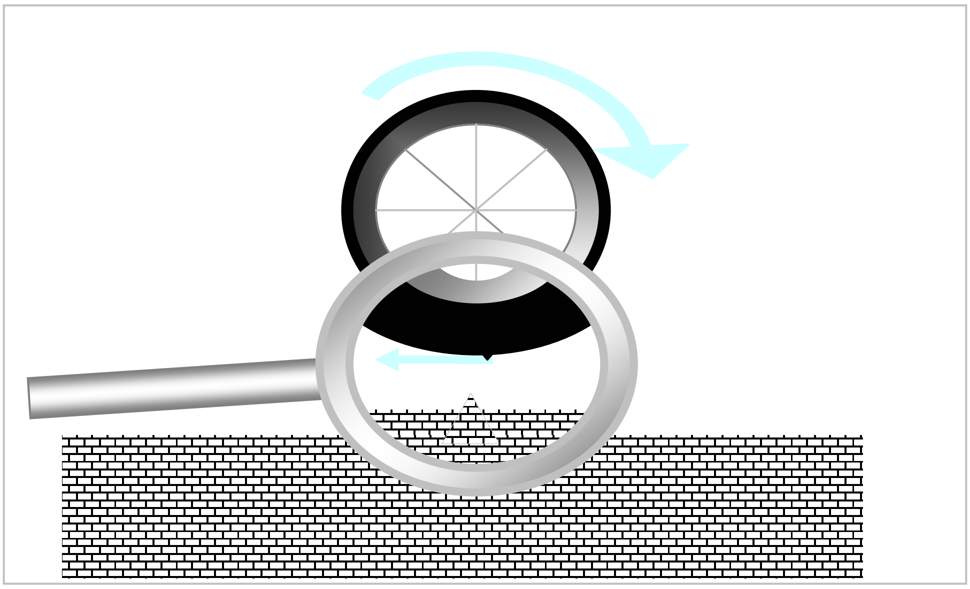
Ο τροχός του σχήματος είναι ομογενής και έχει τη μάζα του συγκεντρωμένη στην περιφέρεια. Προσφέρουμε ενέργεια στον τροχό όποτε αυτός περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Στην συνεχεία τον τοποθετούμε αργά στο οριζόντιο δάπεδο και αυτός κυλά χωρίς να ολισθήσει ή να αναπηδήσει. Αποδείξτε ότι χάσαμε τη μισή ενέργεια!

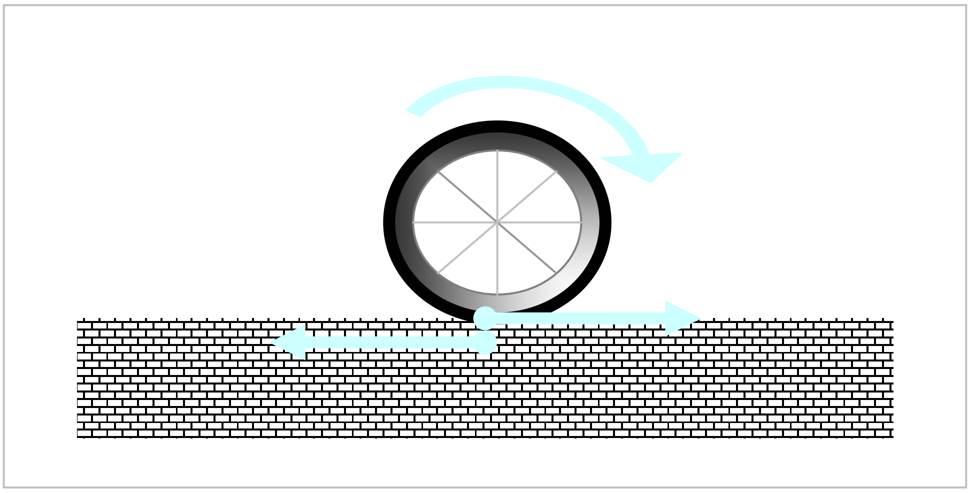


Απάντηση:

Παραδοχές:

- Θεωρούμε την επαφή στο δάπεδο ως στιγμιαία κρούση του κατώτατου σημείου του τροχού με σημειακή ανωμαλία του εδάφους ώστε να μην υπάρξει ολίσθηση εξ αιτίας της επαφής.
- Θεωρούμε ότι κατώτατο σημείο ακινητοποιείται στιγμιαία εξ' αιτίας της κρούσης.
- Θεωρούμε ότι ο τροχός αμέσως μετά την κρούση ικανοποιεί τη συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση.





Από αρχή διατήρησης στροφορμής για την κρούση του τροχού ως προς το σημείο επαφής έ-χουμε:

$$L_{\text{ΠΕΡ}} = L'_{\text{ΠΕΡ}} + L'_{\text{ΜΕΤ}}$$

$$I\omega = I\omega' + MRU_{CM}\,(1)$$

$$U_{CM} = \omega' R(2)$$

Από (1) και (2)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{2}(3)$$

(Οι στροφορμές λόγω ιδιοπεριστροφής είναι ανεξάρτητες του σημείου επιλογής διότι ο άξονας που είναι κάθετος στο επίπεδο του τροχού και περνά από το κέντρο μάζας αποτελεί άξονα πρω-τεύουσας αδρανείας.)

$$K_{\text{ΠΡΙΝ}} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$K_{\text{ΜΕΤΑ}} = \frac{1}{2} I\omega'^2 + \frac{1}{2} MU_{CM}^2$$

Από (1),(2),(3)

$$\boxed{\frac{K_{\text{ΜΕΤ}}}{K_{\text{ΠΡΙΝ}}} = \frac{1}{2}}$$

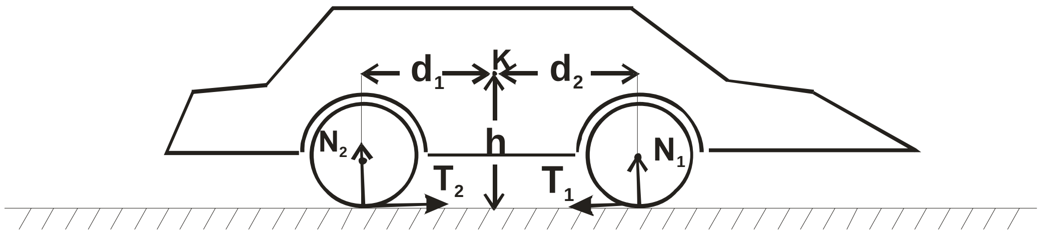
Κώστας Μυρσίρης

Κίνηση αυτοκινήτου

Σε ένα αυτοκίνητο με κίνηση στους πίσω τροχούς ασκείται ροπή στρέψης τ και το Κ.Μ. του είναι σε ύψος h απ' το έδαφος. Η οριζόντια απόσταση του Κ.Μ. από τους μπροστινούς και πίσω τροχούς είναι d_1 και d_2 αντίστοιχα. Δίνεται ότι R είναι η ακτίνα των τροχών του και μ ο συντελεστής στατικής τριβής με το δρόμο και οι τροχοί του κυλίονται χωρίς ολίσθηση. Επίσης μάζα του αυτοκινήτου είναι m και ο κάθε τροχός έχει ροπή αδράνειας I ως προς το κέντρο περιστροφής του. Να βρείτε:

1. την επιτάχυνση με την οποία θα ξεκινήσει το αυτοκίνητου
2. τη στατική τριβή στους μπροστινούς και πίσω τροχούς.
3. να δικαιολογήσετε γιατί το αυτοκίνητο ανασηκώνει το μπροστινό του τμήμα κατά την εκκίνηση.

ΛΥΣΗ



1. Αν υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο κατευθύνεται προς τα δεξιά, τότε στο ξεκίνημα η δύναμη από το έδαφος θα έχει τέτοια φορά ώστε η στατική τριβή T_2 να κατευθύνεται προς τα δεξιά. Αυτό προκύπτει από το ότι στο ξεκίνημα η πίσω ρόδα τείνει να κινηθεί προς τα αριστερά (το σημείο επαφής με το οδόστρωμα όταν ασκείται η ροπή στον άξονα των τροχών). Αντίθετα η δύναμη από το έδαφος στους μπροστινούς τροχούς θα είναι προς τα αριστερά γιατί οι τροχοί αυτοί τείνουν να κινηθούν προς τα δεξιά. Αν είναι N_2 και N_1 οι κάθετες δυνάμεις στους πίσω και εμπρός τροχούς αντίστοιχα τότε θα έχουμε για τη δυναμική της κίνησης.

$$T_2\text{-}T_1 = m\alpha \ (1)$$

$$N_2 + N_1\text{-} mg = 0 \ (2)$$

$$(T_2\text{-}T_1)h + N_1d_2\text{-}N_2d_1 = 0 \ (3)$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις για τη στροφική κίνηση στους πίσω και εμπρός τροχούς θα έχουμε:

$$\tau - T_2R = 2I\alpha_\gamma \quad (4)$$

$$T_1R = 2I\alpha_\gamma \quad (5)$$

$$\alpha = \alpha_\gamma R \quad (6)$$

Από τις εξισώσεις (1), (4), (5) και (6) βρίσκουμε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου:

$$a = \frac{\tau R}{4I + mR^2} \quad (7) \quad \text{και} \quad a_\gamma = \frac{\tau}{4I + mR^2} \quad (8)$$

2. Γνωρίζοντας την επιτάχυνση του Κ.Μ. του αυτοκινήτου α τότε από τις εξισώσεις (2) και (3) βρίσκουμε τις κάθετες δυνάμεις από το έδαφος στους τροχούς.

$$N_1 = \frac{mgd_1 - mah}{d_1 + d_2} \quad (9)$$

$$N_2 = \frac{mgd_2 + mah}{d_1 + d_2} \quad (10)$$

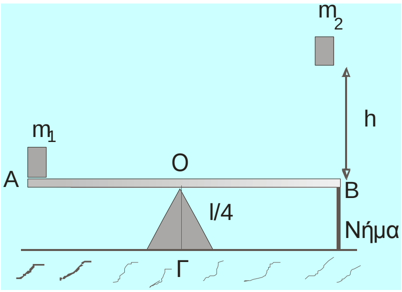
$$T_1 = \frac{2I\alpha}{R^2} \quad (11)$$

$$T_2 = \frac{2I\alpha}{R^2} + ma \quad (12)$$

3. Από τις τιμές των N_1 και N_2 που βρίσκουμε στις εξισώσεις (9) και (10) προκύπτει ότι στην εκκίνηση του αυτοκινήτου το N_2 αυξάνεται και η N_1 μειώνεται και μάλιστα αυτές οι μεταβολές είναι τόσο πιο μεγάλες όταν αυξάνεται η επιτάχυνση α. Αυτό γίνεται αντιληπτό από το ανασήκωμα του μπροστινού μέρους του αυτοκινήτου.

Κυριάκος Κουγιουμτζόπουλος 6ο Λύκειο Καλλιθέας

Ισορροπία ράβδου και κρούση



Για το παραπάνω σχήμα δίνονται m_1 =4Kg, m_2=1kg, η ομογενής ράβδος ΑΒ έχει μάζα M=9kg και μήκος L=2m, ΟΓ= L/4, ΑΟ=L/2, $I_{ράβδου\ (cm)}= ML^2/12$ και $g=10m/s^2$

A) Εάν το σύστημα ισορροπεί να υπολογιστεί το μέτρο της τάσης του νήματος.

B) Από ποιο ύψος θα πρέπει να αφεθεί το σώμα μάζας m_2 έτσι ώστε αφού συγκρουστεί πλαστικά με τη ράβδο, το άκρο Β μόλις που να ακουμπήσει στο έδαφος;

Απάντηση

A) $\Sigma\tau_{(0)}=0$ άρα $T\frac{L}{2}=m_1 g\frac{L}{2}$ άρα T=40N

B)

$$I_{ολ}=\frac{1}{12}ML^2+m_1(L/2)^2+m_2(L/2)^2=8\ kg\ m^2$$

Για την πτώση του σώματος μάζας m_2 Διατήρηση μηχανικής ενέργειας

$$m_2gh=\frac{1}{2}m_2 υ_B^2 \text{ άρα } h=\frac{υ_B^2}{2g} \quad (1)$$

Για την κρούση αρχή διατήρησης στροφορμής $m_2 υ_B (OB)= I_{ολ}\, ω$ (2)

Για την κίνηση του συστήματος έως ότου το άκρο Β μόλις που να ακουμπήσει το έδαφος Διατήρηση μηχανικής, με επίπεδο αναφοράς το έδαφος.

$$\frac{1}{2} I_{ολ}\, ω^2+ m_1g\ ΟΓ + M_ρ\, g\ ΟΓ + m_2\, g\, ΟΓ = 0 + M_ρ\, g\ ΟΓ + m_1g\ L\, ημ30^0 \quad (3)$$

(η οξεία γωνία που σχηματίζει η ράβδος όταν το άκρο Β ακουμπήσει στο έδαφος από το τρίγωνο ΟΓΒ είναι 30^0)

Από τη σχέση (3) βρίσκουμε ότι $ω=\sqrt{15}/2$ rad/s

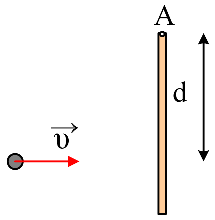
Από την (2) έχουμε $υ_B=4\sqrt{15}$ m/s

Από την (1) h=12m

Σιόντης Στέφανος Φυσικός

<u>ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ & ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ ΣΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ</u>

Ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να στρέφεται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ένα στήριγμα που βρίσκεται στο πάνω άκρο της Α. Ένα βλήμα μάζας m με ταχύτητα υ, χτυπάει τη ράβδο σε απόσταση d από το άκρο Α και σφηνώνεται σε αυτή. Αν το κέντρο μάζας του συστήματος ράβδος-βλήμα μετά την κρούση βρίσκεται σε απόσταση $x = \dfrac{md + M\frac{L}{2}}{m+M}$ από το άκρο Α, να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:



1) Το σύστημα ράβδος-βλήμα μετά την κρούση στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το στήριγμα που βρίσκεται στο άκρο Α με αρχική γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \dfrac{3m\upsilon}{ML^2 + 3md^2}$

2) Η ορμή του συστήματος ράβδος-βλήμα αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $p = (md + M\frac{L}{2})\omega$,
όπου ω η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-βλήμα, αμέσως μετά την κρούση.

3) Η ορμή του συστήματος ράβδος-βλήμα είναι αδύνατο να διατηρείται κατά την κρούση.

4) Η απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση είναι ίση με:

$$\left|\Delta E_M\right| = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \frac{ML^2}{ML^2 + 3md^2}$$

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σε αυτή: $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) Επειδή κατά την κρούση δεν αναπτύσσονται ροπές εξωτερικών δυνάμεων, διατηρείται η στροφορμή του συστήματος ράβδος-βλήμα ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το στήριγμα στο άκρο Α:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon d = (\frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} + md^2)\omega \Rightarrow m\upsilon d = \frac{ML^2 + 3md^2}{3}\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3m\upsilon d}{ML^2 + 3md^2}$$

Άρα η πρόταση είναι λανθασμένη

2) Θεωρούμε όλη τη μάζα του συστήματος ράβδος-βλήμα συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το άκρο Α, με γραμμική ταχύτητα:

$$\upsilon = \omega x = \omega \frac{md + M\frac{L}{2}}{M + m}$$

Η ορμή του συστήματος εκφράζεται:

$$p = (M + m)\upsilon = (M + m)\omega \frac{md + M\frac{L}{2}}{M + m} \Rightarrow p = (md + M\frac{L}{2})\omega$$

όπου $\omega = \frac{3m\upsilon d}{ML^2 + 3md^2}$, η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-βλήμα,

αμέσως μετά την κρούση.

Άρα η πρόταση είναι σωστή.

3) Η ορμή του συστήματος ράβδος-βλήμα μπορεί να διατηρηθεί κατά την κρούση, στην περίπτωση που η ράβδος ξεκολλήσει από το στήριγμα κατά την κρούση, οπότε παύει να ασκείται εξωτερική δύναμη από το στήριγμα και η ράβδος είναι ελεύθερη να εκτελέσει μεταφορική κίνηση.

Άρα η πρόταση είναι λανθασμένη.

4) Η απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση είναι ίση με:

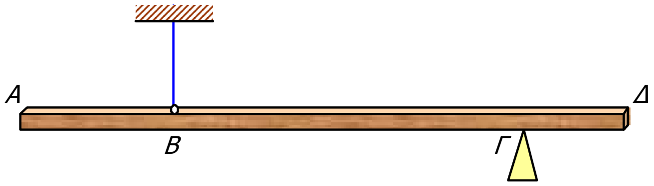
$$|\Delta E_M| = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2 + md^2)\frac{9m^2\upsilon^2 d^2}{(ML^2 + 3md^2)^2} \Rightarrow$$

$$|\Delta E_M| = \frac{1}{2}m\upsilon^2(1 - \frac{3md^2}{ML^2 + 3md^2}) \Rightarrow |\Delta E_M| = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \frac{ML^2}{ML^2 + 3md^2}$$

Άρα η πρόταση είναι σωστή.

Θοδωρής Παπασγουρίδης

Η ομογενής δοκός του σχήματος που έχει μάζα m=7 kg και μήκος (ΑΔ)=d=6 m, ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια ενός στηρίγματος Γ και ενός αβαρούς μη ελαστικού νήματος δεμένου στο Β και στο ταβάνι.



I. Να υπολογίσετε την τάση $\vec{T}$ του νήματος και την αντίδραση $\vec{N}$ του στηρίγματος στο σημείο Γ.

II. Αν κάποιος μετακινηθεί ανάμεσα στα σημεία Β και Γ της δοκού, αυτή θα συνεχίσει να ισορροπεί οριζόντια. Όμως αριστερότερα του Β και δεξιότερα του Γ, κάθε βήμα κρύβει τον κίνδυνο ανατροπής της δοκού. Και για τις δυο περιπτώσεις, να βρείτε μέχρι ποια απόσταση x - μετρημένη από το άκρο Α - μπορεί να περπατήσει ένα αγόρι βάρους w_A=210 N, ώστε να μην ανατραπεί η δοκός.

III. Αν στο άκρο Δ σταθεί ένα κοριτσάκι βάρους w_K=210 N, η δοκός ανατρέπεται αμέσως περιστρεφόμενη περί του Γ. Τη στιγμή που αρχίζει την περιστροφή της η δοκός (ενώ ακόμη βρίσκεται οριακά σε οριζόντια θέση), να υπολογίσετε :

i. Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της.

ii. Τη γωνιακή της επιτάχυνση.

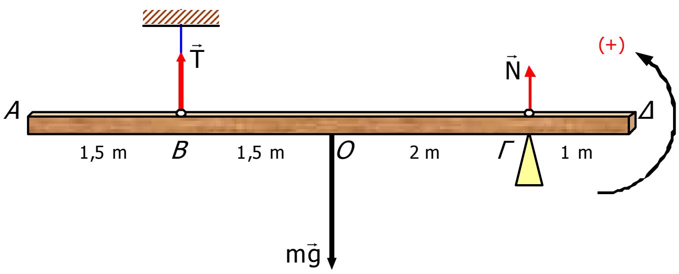
Δίνονται : (ΑΒ)=1,5 m, (ΓΔ)=1 m, g=10 m/s^2, $I_{cm}=\frac{1}{12}\cdot m\cdot d^2$.

ΛΥΣΗ

Π I. Αφού η δοκός ισορροπεί οριζόντια, ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις $\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0$ και $\Sigma F_\psi=0$.

$\Sigma F_\psi=0 \Rightarrow +T+N-mg=0 \Rightarrow 40+N=7\cdot 10 \Rightarrow \boxed{N=30\ N}$.

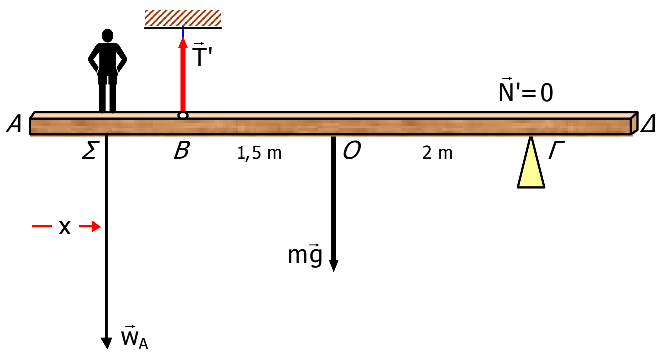
$\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0 \Rightarrow -T\cdot(B\Gamma)+mg\cdot(O\Gamma)=0 \Rightarrow -T\cdot 3{,}5+7\cdot 10\cdot 2=0 \Rightarrow \boxed{T=40\ N}$.



Π II. ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗΣ ΑΒ (0 ≤ x < 1,5 m) : Έστω πως η ανατροπή γύρω από το σημείο Β, αρχίζει όταν το αγόρι βρεθεί στο σημείο Σ. Δηλαδή η ζητούμενη (οριακή) απόσταση είναι (ΑΣ)=x.

Την στιγμή της ανατροπής η δοκός χάνει την επαφή της με το στήριγμα Γ (συνεπώς $\vec{N}'$ =0), ενώ η τάση του νήματος θ' αυξηθεί σε μια νέα τιμή T'>T !

Εφόσον θ' αρχίσει αριστερόστροφη (θετική δηλαδή) περιστροφή περί του Β, πρέπει η $\Sigma\tau_{(B)}\geq 0$.



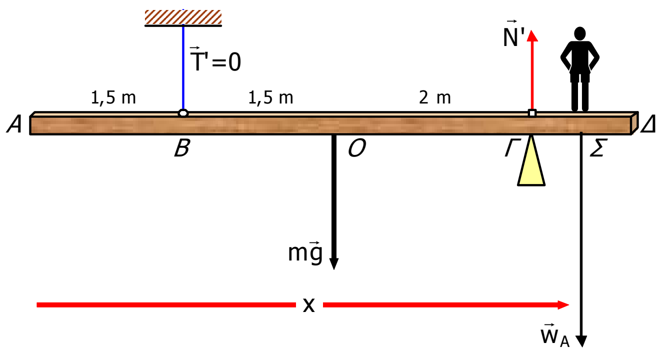
Συνεπώς, $\Sigma\tau_{(B)}\geq 0 \Rightarrow +w_A\cdot(AB-x)-mg\cdot(BO)\geq 0 \Rightarrow 210\cdot(1{,}5-x)-7\cdot 10\cdot 1{,}5\geq 0 \Rightarrow 315-210\cdot x-105\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 210-210\cdot x\geq 0 \Rightarrow 1-x\geq 0 \Rightarrow 1\geq x \Rightarrow x\leq 1$ m.

☐ ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗΣ ΓΔ ($5\text{ m} < x \le 6\text{ m}$) : Έστω πως η ανατροπή γύρω από το σημείο Γ, αρχίζει όταν το αγόρι βρεθεί στο σημείο Σ. Δηλαδή η ζητούμενη (οριακή) απόσταση είναι (ΑΣ)=x.

Την στιγμή της ανατροπής χαλαρώνει το νήμα (συνεπώς $\vec{T}'=0$), ενώ η αντίδραση του στηρίγματος Γ θ' αυξηθεί σε μια νέα τιμή $N'>N$!

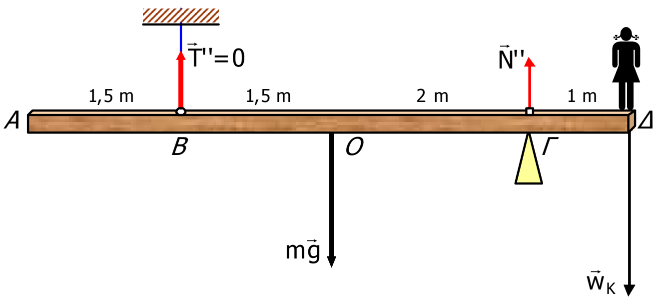
Εφόσον θ' αρχίσει δεξιόστροφη (αρνητική δηλαδή) περιστροφή περί του Γ, πρέπει η $\Sigma\tau_{(\Gamma)}\le 0$.



Συνεπώς, $\Sigma\tau_{(\Gamma)}\le 0 \Rightarrow +mg\cdot(O\Gamma)-w_A\cdot(x-A\Gamma)\le 0 \Rightarrow 7\cdot10\cdot2-210\cdot(x-5)\le 0 \Rightarrow 140-210\cdot x+1050\le 0 \Rightarrow 1190\le 210\cdot x \Rightarrow x\ge\frac{17}{3}$ m.

Συμπερασματικά, κίνηση με ασφάλεια επιτυγχάνεται στην περιοχή : $\boxed{1\text{ m} < x < \frac{17}{3}\text{ m}}$.

Π III. Η ράβδος θ' αρχίσει να περιστρέφεται περί του Γ με την βοήθεια των ροπών που προκαλούν οι δυνάμεις $m\vec{g}$ και $\vec{w}_K$ (τότε η $\vec{T}''=0$ και η αντίδραση $\vec{N}''$ στο Γ, δεν προκαλεί ροπή περί του Γ).



i. Σύμφωνα με την γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κινησης, ισχύει πως $\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi(\Gamma)}$.

∗ Η συνισταμένη ροπή - εφόσον υπάρχει περιστροφή - ΔΕΝ ακολουθεί την σύμβαση για τα πρόσημα που εφαρμόζεται στην ισορροπία. Όποια ροπή βοηθά την περιστροφή λαμβάνει πρόσημο "+", όποια την δυσκολεύει λαμβάνει πρόσημο "–".

- Επομένως - εφόσον προκαλείται δεξιόστροφη περιστροφή - θα ισχύει :

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi(\Gamma)}=+w_K\cdot(\Gamma\Delta)-mg\cdot(O\Gamma)=210\cdot1-7\cdot10\cdot2 \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt}=+70\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2\text{ (ή N}\cdot\text{m)}}.$$

ii. Έχοντας αλλαγή περιστροφικής κατάστασης με αιτία εξωτερικές ροπές, τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου υπολογίζει ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης περί του σημείου Γ.

$$\text{Δηλαδή : } \Sigma\tau_{\varepsilon\xi(\Gamma)}=I_{(\Gamma)}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=\frac{\Sigma\tau_{\varepsilon\xi(\Gamma)}}{I_{(\Gamma)}}.$$

- Σύμφωνα με τον κανόνα των παραλλήλων αξόνων του Steiner, προκύπτει :

$$I_{(\Gamma)}=I_{cm}+m\cdot(O\Gamma)^2+m_k(\Gamma\Delta)^2=\frac{1}{12}\cdot m\cdot d^2+m\cdot(O\Gamma)^2+m_k(\Gamma\Delta)^2=\frac{1}{12}\cdot7\cdot6^2+7\cdot2^2+21\cdot1=\frac{1}{12}\cdot7\cdot6^2+7\cdot2^2+21=21+28+21 \Rightarrow$$

$$I_{(\Gamma)}=70\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Αντικαθιστώντας … $a_{\gamma\omega\nu}=70/70 \Rightarrow \boxed{a_{\gamma\omega\nu}=1\text{ rad/s}^2}$.

Έργο ζεύγους δυνάμεων.

Μια σφαίρα μάζας 10kg και ακτίνας 0,2m, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm}=10m/s. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω της μια σταθερή ροπή, ενός ζεύγους δυνάμεων, οπότε η σφαίρα σταματά σε απόσταση x=7m, χωρίς να ολισθήσει στη διάρκεια του φρεναρίσματος.

i) Πού οφείλεται η μείωση της ταχύτητας του κέντρου μάζας;

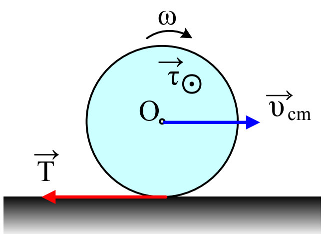
ii) Να σχεδιάστε ένα σχήμα στο οποίο να φαίνεται το διάνυσμα της ροπής.

iii) Να υπολογιστει το μέτρο της ασκούμενης ροπής.

Απάντηση:

i) Αφού στη διάρκεια της επιβράδυνσης της σφαίρας δεν υπάρχει ολίσθηση, η α-σκούμενη τριβή, είναι στατική και είναι η δύναμη που μειώνει την ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης. Αυτό συμβαίνει γιατί η συνισταμένη του ζεύγους είναι μηδενική και άρα δεν υπάρχει άλλη δύναμη να επιβραδύνει την σφαίρα.

ii) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάνυσμα της ροπής, κάθετο στο επίπεδο με φορά προς τα έξω, αφού η γωνιακή ταχύτητα είναι κάθετη στο επίπεδο με φορά προς τα μέσα και για να μειωθεί, θα πρέπει η γωνιακή επιτάχυνση να έχει αντί-θετη φορά.



Να σημειωθεί ότι η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει την φορά της ασκούμενης συ-νολικής ροπής, αλλά η φορά της ροπής της τριβής είναι προς τα μέσα. Προσέξτε λοιπόν ότι η ασκούμενη ροπή του ζεύγους θα πρέει να είναι προς τα έξω και να έχει μέτρο μεγαλύτερο από το μέτρο της ροπής της τριβής.

iii) Εφαρμόζουμε για την σύνθετη κίνηση της σφαίρας το Θ.Μ.Κ.Ε και έχουμε:

$$K_{τελ}\text{-}K_{αρχ}= W_w+W_N+W_T+W_τ \ (1)$$

Αλλά W_w=W_N =0 αφού είναι κάθετες στην μετατόπιση και δεν έχουν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, ενώ W_T=0 αφού η τριβή είναι στατική και ασκεί-ται σε σημείο που έχει ταχύτητα μηδέν.

Έτσι από την (1) έχουμε:

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2-\frac{1}{2}I\omega^2=-\tau\theta$$

όπου θ η γωνία περιστροφής μέχρι να σταματήσει η σφαίρα. Έτσι αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα ισχύει $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$, ενώ $\theta=x/R$ θα έχουμε:

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2-\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega^2=-\tau\frac{x}{R}\rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2-\frac{1}{5}m\upsilon_{cm}^2=-\tau\frac{x}{R}\rightarrow$$

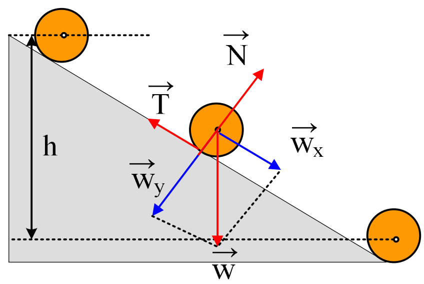
$$\tau=\frac{7m\upsilon_{cm}^2R}{10x}\rightarrow$$

$\tau=20N\cdot m$.

dmargaris@sch.gr

ΕΡΓΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΤΡΙΒΗΣ

Σε ένα πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης φ αφήνεται από ύψος h, ένα στερεό σώμα με κατανομή μάζας συμμετρική ως προς το κέντρο του. (Το στερεό μπορεί να είναι συμπαγής σφαίρα, συμπαγής κύλινδρος, κοίλη σφαίρα, κούφιος κύλινδρος, δίσκος, δακτύλιος). Το στερεό **κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει** και φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μεταφορικής (υ) και περιστροφικής (ω) κίνησης τη στιγμή που φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.
Η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του (για το δίσκο και το δακτύλιο είναι και κάθετος στο επίπεδό τους, ενώ για τους κυλίνδρους συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας τους) δίνεται από τη σχέση: $I = \lambda MR^2$, όπου λ θετική αδιάστατη σταθερά.



ΛΥΣΗ Μια συνηθισμένη λύση είναι αυτή που βασίζεται στην **Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας**. Εφόσον το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, η τριβή που αναπτύσσεται είναι **στατική** και **δεν παράγει έργο** αφού εφαρμόζεται στο σημείο επαφής σώματος-δαπέδου το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα. Έτσι η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η **συντηρητική** δύναμη του βάρους, οπότε η αρχική δυναμική ενέργεια λόγω θέσης στο βαρυτικό πεδίο της Γης είναι ίση με την τελική κινητική ενέργεια της σύνθετης κίνησης του στερεού:

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda MR^2\omega^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda M\upsilon^2 \Rightarrow$$
$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2(1+\lambda) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$$

Εφόσον το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει:

$$\upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$$

Στην πιο πάνω κομψή και λυτή λύση νομίζω ότι γεννάται το εξής ερώτημα: **αφού η στατική τριβή δεν παράγει έργο**, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος και συγκεκριμένα η Wx συνιστώσα, οπότε η ελάττωση της δυναμικής ενέργειας θα έπρεπε να μετατρέπεται αποκλειστικά σε κινητική μεταφορικής κίνησης (αφού η Wx δεν δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο ή συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας), τότε **η κινητική λόγω περιστροφικής κίνησης από το έργο ποιας δύναμης προέρχεται;**

Η απάντηση νομίζω ότι προκύπτει, αν βασιζόμενοι στην αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για κάθε κίνηση χωριστά.

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_x} + W_T \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 - 0 = Mg\eta\mu\varphi x - Tx \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 = Mgh - Tx \quad (1)$$

αφού εξετάζοντας μόνο τη μεταφορική κίνηση το σημείο εφαρμογής της στατικής τριβής μετατοπίζεται κατά: $x = \dfrac{h}{\eta\mu\varphi}$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για την περιστροφική κίνηση έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\tau_T} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = \tau_T\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda MR^2\omega^2 = TR\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda M\upsilon^2 = Tx \quad (2)$$

αφού εξετάζοντας μόνο την περιστροφική κίνηση η ροπή της στατικής τριβής στρέφει το στερεό κατά γωνία: $\theta = \dfrac{x}{R}$ όπου x η μετατόπιση του κέντρου μάζας, η οποία συμπίπτει με το τόξο περιστροφής ενός σημείου της περιφέρειας.

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1)+(2) έχουμε:

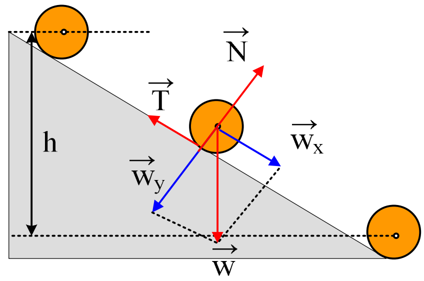
$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda M\upsilon^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2(1+\lambda) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$$

δηλαδή φθάνουμε στο ίδιο συμπέρασμα όπως και με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μόνο που τώρα είναι κατανοητό από τα έργα ποιων δυνάμεων προκύπτουν οι διάφορες μορφές ενέργειας.

Νομίζω ότι η φράση: « **η στατική τριβή κατά τη διάρκεια της κύλισης χωρίς ολίσθηση δεν παράγει έργο,** διότι το σημείο επαφής σώματος δαπέδου έχει μηδενική ταχύτητα οπότε δε μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της» ***παραπλανά***. Η στατική τριβή επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση και επιταχύνει την περιστροφική. **Ενεργειακά η απώλεια κινητικής μεταφορικής λόγω του έργου της στατικής τριβής, μετατρέπεται σε κινητική περιστροφής μέσω του έργου της ροπής της τριβής**. Άρα η φράση **η στατική τριβή δεν παράγει έργο**, **δεν λέει όλη την αλήθεια**. Επειδή τα έργα της στατικής τριβής στη μεταφορική και στην περιστροφική κίνηση είναι ίσα κατά απόλυτη τιμή, **δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας,** παρά μόνο μετατροπή κινητικής μεταφορικής σε κινητική περιστροφικής κίνησης. Αν θέλουμε να είμαστε πιο **ακριβείς στη διατύπωση** είναι καλύτερα να λέμε: **κατά τη διάρκεια της κύλισης χωρίς ολίσθηση η στατική τριβή δεν προκαλεί απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας**, οπότε διατηρείται η μηχανική ενέργεια του στερεού. Μια αντίστοιχη φραστική ασάφεια υπάρχει στη διατύπωση: «στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις» για την περίπτωση όπου: ΣF=0.

Θοδωρής Παπασγουρίδης.

ΕΡΓΟ ΤΡΙΒΗΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ



Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου το στερεό εκτελεί **κύλιση με ολίσθηση** καθώς κατεβαίνει το πλάγιο επίπεδο. Όπως έχουμε δείξει σε προηγούμενη ανάρτηση, για να κυλίεται το στερεό χωρίς να ολισθαίνει πρέπει ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής να έχει τιμή: $\mu > \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\varepsilon\varphi\varphi$. Στην αντίθετη περίπτωση το στερεό εκτελεί κύλιση με ολίσθηση, οπότε η τριβή που δέχεται είναι τριβή ολίσθησης και οι επιταχύνσεις υπολογίζονται εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής χωριστά για κάθε κίνηση.

Για τη μεταφορική κίνηση ισχύει:

$$W_x - T = Ma_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - \mu Mg\sigma\upsilon\nu\varphi = Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = g(\eta\mu\varphi - \mu\sigma\upsilon\nu\varphi) \quad (1)$$

Για την περιστροφική αντίστοιχα:

$$\Sigma\tau = TR = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mu Mg\sigma\upsilon\nu\varphi R = \lambda MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi}{\lambda R} \quad (2)$$

Αν εκφράσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας θα έχουμε ότι η αρχική δυναμική έχει μετατραπεί σε κινητική μεταφορικής κίνησης, σε κινητική περιστροφικής κίνησης και σε θερμότητα:

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda MR^2\omega^2 + Q_\Theta \quad (3)$$

Όμως το έργο ποιας δύναμης εκφράζει την εκλυόμενη θερμότητα;

Η απάντηση νομίζω ότι προκύπτει, αν βασιζόμενοι στην αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για κάθε κίνηση χωριστά.

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_x} + W_T \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 - 0 = Mg\eta\mu\varphi x - Tx \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 = Mgh - Tx \quad (4)$$

αφού εξετάζοντας μόνο τη μεταφορική κίνηση το σημείο εφαρμογής της τριβής μετατοπίζεται κατά: $x = \dfrac{h}{\eta\mu\varphi}$.

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για την περιστροφική κίνηση έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\tau_T} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = \tau_T\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda MR^2\omega^2 = TR\theta \quad (5)$$

Προσθέτοντας τις (4)+(5) έχουμε:

$$\frac{1}{2}M\upsilon^2+\frac{1}{2}\lambda MR^2\omega^2=Mgh-Tx+TR\theta\Rightarrow\frac{1}{2}M\upsilon^2+\frac{1}{2}\lambda MR^2\omega^2+T(x-R\theta)=Mgh \quad (6)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3) και (6) βλέπουμε ότι **η εκλυόμενη θερμότητα** είναι ίση με:

$$Q_\Theta=T(x-R\theta)=T(x-s)$$

αφού κατά τη διάρκεια της κύλισης με ολίσθηση, η **μετατόπιση x** του κέντρου μάζας είναι **μεγαλύτερη** από το **μήκος του τόξου s** που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας του στερεού, κάτι που δε συμβαίνει στην κύλιση χωρίς ολίσθηση. Συνεπώς, **η απώλεια κινητικής μεταφορικής λόγω του έργου της τριβής ολίσθησης, δε μετατρέπεται πλήρως σε κινητική περιστροφικής μέσω του έργου της ροπής της τριβής, αλλά ένα μέρος εκλύεται στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας.**

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φθάσουμε ξεκινώντας από τη σχέση (3) και αντικαθιστώντας για την ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική:

$$x=\frac{1}{2}a_{cm}t^2\Rightarrow x=\frac{1}{2}a_{cm}\left(\frac{\upsilon}{a_{cm}}\right)^2\Rightarrow x=\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{a_{cm}}\Rightarrow\upsilon^2=2xa_{cm}$$

Ομοίως για την ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική:

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\left(\frac{\omega}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}\right)^2\Rightarrow\omega^2=2\theta\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}&Mgh=\frac{1}{2}M2xa_{cm}+\frac{1}{2}\lambda MR^2 2\theta\alpha_{\gamma\omega\nu}+Q_\Theta\Rightarrow Mgh=Ma_{cm}x+\lambda MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}\theta+Q_\Theta\Rightarrow\\&Mgh=(W_x-T)x+TR\theta+Q_\Theta\Rightarrow Mgh=Mg\eta\mu\varphi x-Tx+TR\theta+Q_\Theta\Rightarrow\\&\Rightarrow Q_\Theta=T(x-R\theta)\Rightarrow Q_\Theta=T(x-s)\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός της γωνίας που διαγράφει το στερεό μέχρι να φθάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου μπορεί να γίνει από τις εξισώσεις κίνησης $x=\frac{1}{2}a_{cm}t^2$ και $\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$ αν τις διαιρέσουμε κατά μέλη:

$$\theta=\frac{\alpha_{\gamma\omega\nu}}{a_{cm}}x\Rightarrow\theta=\frac{\frac{\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi}{\lambda R}}{g(\eta\mu\varphi-\mu\sigma\upsilon\nu\varphi)}x\Rightarrow\theta=\frac{\mu\sigma\upsilon\nu\varphi}{\lambda(\eta\mu\varphi-\mu\sigma\upsilon\nu\varphi)}\frac{x}{R}$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης.

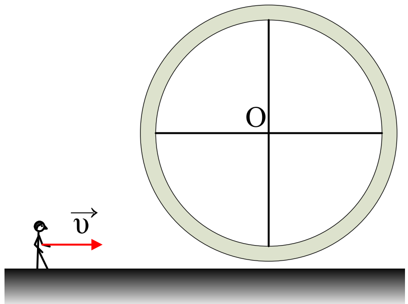
Αρχές Διατήρησης

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Άνθρωπος μάζας m τρέχοντας σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ πηδά στο εσωτερικό ακίνητου κατακόρυφου τροχού ακτίνας R. Ο τροχός έχει ροπή αδράνειας I, ως προς οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του. Να βρεθεί ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα του ανθρώπου ώστε αυτός αγκαλιάζοντας τον τροχό να φθάσει στο ψηλότερο σημείο. Οι τριβές στον άξονα περιστροφής θεωρούνται αμελητέες. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g, καθώς και ότι οι διαστάσεις του ανθρώπου είναι πολύ μικρές σε σχέση με την ακτίνα του τροχού οπότε μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο.

ΛΥΣΗ

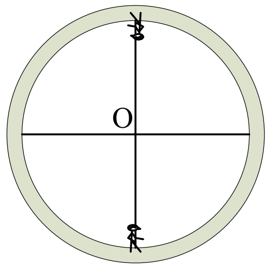
Ο άνθρωπος πηδά στο κατώτερο σημείο του εσωτερικού του τροχού, δηλαδή έχουμε μια μορφή **πλαστικής κρούσης**. Προφανώς στον άξονα του τροχού τη στιγμή της κρούσης αναπτύσσονται δυνάμεις οι οποίες όμως **δε δημιουργούν ροπή** ως προς τον άξονα αυτό.



Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τροχός-άνθρωπος με βάση την **Αρχή Διατήρησης** της **Στροφορμής** ως προς τον άξονα του τροχού:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon R = (I + mR^2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{m\upsilon R}{I + mR^2} \quad (1)$$

Μετά την κρούση και εφόσον **δεν** υπάρχουν τριβές **διατηρείται** η **Μηχανική ενέργεια** του συστήματος τροχός-άνθρωπος. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η ελάχιστη ταχύτητα υ προκαλεί την ελάχιστη ω, η οποία θα έχει ως συνέπεια ο άνθρωπος **να φθάσει στο ανώτατο σημείο της τροχιάς με μηδενική ταχύτητα.** Έτσι η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος τροχός-άνθρωπος θα έχει μετατραπεί σε δυναμική βαρυτική ενέργεια του ανθρώπου:



$$E_{ολ(αρχ)} = E_{ολ(τελ)} \Rightarrow \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2{}_{\min} = mg2R \Rightarrow \frac{1}{2}(I + mR^2)\frac{m^2\upsilon^2{}_{\min}R^2}{(I + mR^2)^2} = mg2R \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{4g}{mR}(I + mR^2)}$$

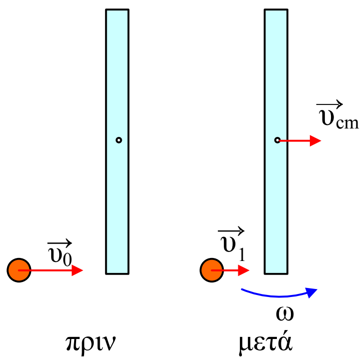
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας M βρίσκεται σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Μικρό σώμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα Uo, η διεύθυνση της οποίας είναι **κάθετη** στη ράβδο, χτυπά **ελαστικά** στο άκρο της. A) Ποια φυσικά μεγέθη διατηρούνται κατά την κρούση; B) Να υπολογισθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου γύρω από το

κέντρο μάζας της και η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης. Γ) Να βρεθεί η σχέση μαζών m, M ώστε το σώμα μάζας m να συνεχίσει να κινείται μετά την κρούση κατά τη φορά της κίνησής του πριν την κρούση.
Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I = \frac{1}{12}Ml^2$

ΛΥΣΗ

Α) Εφόσον το σύστημα είναι **μονωμένο** και η **διάρκεια** της κρούσης **αμελητέα**, **διατηρούνται** η **ορμή** και η **στροφορμή** του συστήματος. Επιπλέον αφού η κρούση είναι **ελαστική** διατηρείται και η **κινητική** ενέργεια του συστήματος.



Β) Η ράβδος μετά την κρούση θα αποκτήσει ταχύτητα **μεταφορικής** κίνησης Ucm ενώ ταυτόχρονα θα αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω λόγω **περιστροφικής** κίνησης γύρω από **άξονα που διέρχεται από το μέσο της** και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η ράβδος και η ταχύτητα του σώματος m.

Λόγω διατήρησης της ορμής ισχύει:

$$p_{\omicron\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = p_{\omicron\lambda(\mu\varepsilon\tau\alpha)} \Rightarrow m\upsilon_0 = m\upsilon_1 + M\upsilon_{cm} \quad (1)$$

όπου U1 η ταχύτητα του σώματος m μετά την κρούση.

Λόγω διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής ισχύει:

$$L_{\omicron\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = L_{\omicron\lambda(\mu\varepsilon\tau\alpha)} \Rightarrow m\upsilon_0\frac{l}{2} = m\upsilon_1\frac{l}{2} + \frac{1}{12}Ml^2\omega \quad (2)$$

Λόγω διατήρησης της κινητικής ενέργειας ισχύει:

$$K_{\omicron\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = K_{\omicron\lambda(\mu\varepsilon\tau\alpha)} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^{\,2} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^{\,2} + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{1}{12}Ml^2\omega^2 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) , (2) έχουμε:

$$(1) \Rightarrow m(\upsilon_0 - \upsilon_1) = M\upsilon_{cm}$$

$$(2) \Rightarrow m(\upsilon_0 - \upsilon_1) = \frac{1}{6}Ml\omega$$

$$Ά\rho\alpha: M\upsilon_{cm} = \frac{1}{6}Ml\omega \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\omega l}{6} (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (3) την (4) έχουμε:

$$m\upsilon_0^{\,2} - m\upsilon_1^{\,2} = \frac{M\omega^2 l^2}{9} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) την (4) έχουμε:

$$m\upsilon_1 = m\upsilon_0 - M\frac{\omega l}{6} \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_0 - \frac{M\omega l}{6m} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας στην (5) την (6) και λύνοντας ως προς ω μετά από πράξεις καταλήγουμε:

$$\omega = \frac{12m\upsilon_0}{l(M+4m)} \quad (7)$$

Η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης υπολογίζεται αν στην (4) αντικαταστήσουμε την (7):

$$\upsilon_{cm} = \frac{2m\upsilon_0}{M+4m} \quad (8)$$

Γ) Η ταχύτητα του σώματος m μετά την κρούση υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε στην (6) την (7):

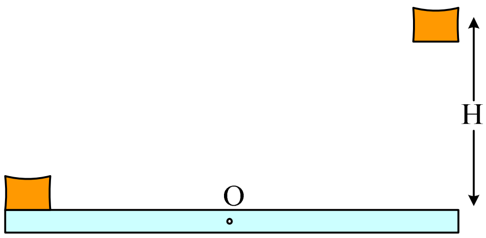
$$\upsilon_1 = \upsilon_0 \frac{4m - M}{4m + M} \quad (9)$$

Προφανώς το σώμα μάζας m θα συνεχίσει να κινείται μετά την κρούση κατά τη φορά της κίνησής του πριν την κρούση αν:

$$\upsilon_1 > 0 \Rightarrow 4m > M \Rightarrow m > \frac{M}{4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Ομογενής ράβδος μάζας M στηρίζεται στο μέσο της. Στο ένα της άκρο υπάρχει σάκος (1) με άμμο μάζας m. Η ράβδος συγκρατείται οριζόντια. Από ύψος H πέφτει στο άλλο άκρο της ένας δεύτερος σάκος (2) με άμμο ίσης μάζας m, οπότε η ράβδος ανατρέπεται γύρω από το σημείο στήριξης. Σε ποιο ύψος θα αναπηδήσει ο σάκος (1);

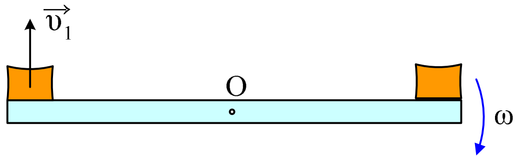


Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I = \frac{1}{12}Ml^2$

ΛΥΣΗ

Η ταχύτητα του σάκου (2) οριακά πριν την κρούση υπολογίζεται με χρήση του ΘΜΚΕ κατά τη διάρκεια της πτώσης:

$$\Delta K = W_B \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = mgH \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gH} \quad (1)$$



Το σύστημα ράβδος-σάκοι **αμέσως μετά** την κρούση εκτελεί **περιστροφική** κίνηση γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της ράβδου. Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά αμέσως μετά την κρούση, υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Στροφορμής** γύρω από τον άξονα περιστροφής, αφού το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δημιουργούν τα βάρη από τα σακιά είναι μηδέν:

$$L_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = L_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\alpha)} \Rightarrow m\upsilon\frac{l}{2} = (\frac{1}{12}Ml^2 + 2m\frac{l^2}{4})\omega$$

$$\Rightarrow m\upsilon\frac{l}{2} = \frac{M+6m}{12}l^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{6m\sqrt{2gH}}{(M+6m)l} \quad (2)$$

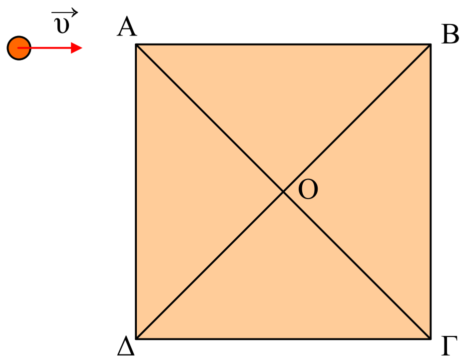
Την ίδια στιγμή ο σάκος (1) έχει κατακόρυφη προς τα πάνω ταχύτητα ίση με τη γραμμική ταχύτητα του άκρου της ράβδου:

$$\upsilon_1 = \omega\frac{l}{2} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{3m\sqrt{2gH}}{M+6m} \quad (3)$$

Το ύψος στο οποίο θα ανέβει υπολογίζεται με χρήση ΘΜΚΕ κατά τη διάρκεια της ανόδου:

$$\Delta K = W_B \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = -mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{\upsilon_1^2}{2g} \Rightarrow h_{max} = H(\frac{3m}{M+6m})^2$$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7</u>

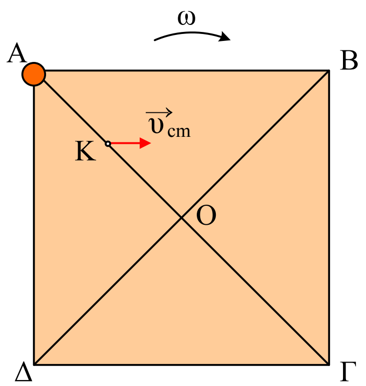


Λεπτή τετράγωνη ΑΒΓΔ πλάκα μάζας m βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο άκρο Α χτυπάει σώμα μικρών διαστάσεων μάζας m, με ταχύτητα υ **κάθετη** στην πλευρά ΑΔ και κολλάει σ' αυτό. Υπολογίστε: α) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος πλάκα-σώμα μετά την κρούση β) τη θερμότητα που ελευθερώνεται κατά την κρούση.
Δίνεται η ροπή αδράνειας τετράγωνου ως προς άξονα κάθετο σ' αυτό που διέρχεται από το

κέντρο του: $I = \frac{1}{6}ma^2$ όπου α η πλευρά του τετράγωνου. Το **κέντρο μάζας του συστήματος πλάκα-σώμα** βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο ΑΓ και σε απόσταση $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ από το άκρο Α.

ΛΥΣΗ

Επειδή ο φορέας της ταχύτητας υ του μικρού σώματος δε διέρχεται από το κέντρο της πλάκας, το σύστημα πλάκα-σώμα μετά την κρούση θα εκτελέσει **μεταφορική** και **περιστροφική** κίνηση γύρω από άξονα κάθετο στην πλάκα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος. Η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Ορμής**:



$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon = 2m\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon}{2} \quad (1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Στροφορμής** γύρω από τον άξονα περιστροφής. Η απόσταση του φορέα της ταχύτητας από το κέντρο μάζας είναι:

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{4}ημ45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d = \frac{a}{4}$$

Οπότε:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon\frac{a}{4} = \left[(\frac{1}{6}ma^2 + m\frac{a^2}{8}) + m\frac{a^2}{8}\right]\omega \Rightarrow$$
$$m\upsilon\frac{a}{4} = \frac{5}{12}ma^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{3\upsilon}{5a} \quad (2)$$

Η θερμότητα που ελευθερώνεται είναι ίση με την ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος:

$$Q_\theta = |\Delta K| = K_{(πριν)} - K_{(μετα)} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - (\frac{1}{2}I_{ολ}\omega^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_{cm}{}^2) \Rightarrow$$
$$Q_\theta = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - (\frac{1}{2}\frac{5}{12}ma^2\frac{9\upsilon^2}{25a^2} + m\frac{\upsilon^2}{4}) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{13}{40}m\upsilon^2 \Rightarrow Q_\theta = \frac{7}{40}m\upsilon^2$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

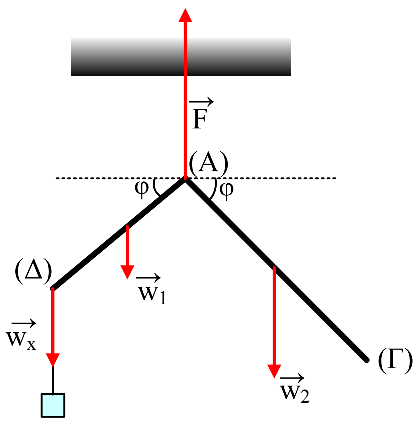
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ 1

Από τον φίλο και συνάδελφο Θοδωρή Παπασγουρίδη πήρα τρεις Ασκήσεις που ανα φέρονται στην ισορροπία στερεού. Η μια συνδιάζει την ισορροπία με κυκλική κίνηση και η άλλη την ταλάντωση με την ισορροπία του στερεού. Θα ήθελα και από την θέση αυτή να τον ευχαριστήσω για την προσφορά του αυτή.
Η πρώτη από αυτές είναι η παρακάτω:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ισοπαχής ομογενής ράβδος βάρους W=300 N κάμπτεται σε σημείο Α, ώστε να σχηματίσει ορθή γωνία. Τα μήκη των δύο τμημάτων συνδέονται με τη σχέση: (ΑΓ)=2(ΑΔ). Η ράβδος κρεμιέται από το σημείο Α, μέσω ιδανικού μη εκτατού νήματος, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται σε οροφή. Ποιο βάρος Wx πρέπει να κρεμάσουμε στο άκρο Δ, ώστε η ράβδος να ισορροπεί και τα δύο σκέλη της να σχηματίζουν την ίδια γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση;

ΛΥΣΗ



Έστω d το μήκος της ράβδου. Τα δύο σκέλη της έχουν μήκη: (ΑΓ)+(ΑΔ)=d. Όμως (ΑΓ)=2(ΑΔ). Αντικαθιστώντας έχουμε: 3(ΑΔ)=d. Οπότε: (ΑΔ)=d/3 και (ΑΓ)=2d/3.

Εφόσον η ράβδος είναι **ομογενής** και **ισοπαχής** τα βάρη των τμημάτων ΑΔ και ΑΓ είναι αντίστοιχα: W_1=W/3, W_2=2W/3.

Σημείο εφαρμογής του κάθε βάρους είναι το μέσο του αντίστοιχου σκέλους τα οποία απέχουν από το σημείο Α: (ΑΜ)=(ΑΔ)/2=d/6 και (ΑΜ)=(ΑΓ)/2=d/3.

Στο άκρο Δ ασκείται δύναμη ίση με το βάρος Wx του κρεμασμένου σώματος. Εφόσον η ράβδος ισορροπεί **ΣF=0** και **Στ=0** ως προς **οποιοδήποτε** σημείο του επιπέδου των δυνάμεων. Επιλέγουμε το σημείο Α όπου η άγνωστη δύναμη F δε δημιουργεί ροπή. Έτσι:

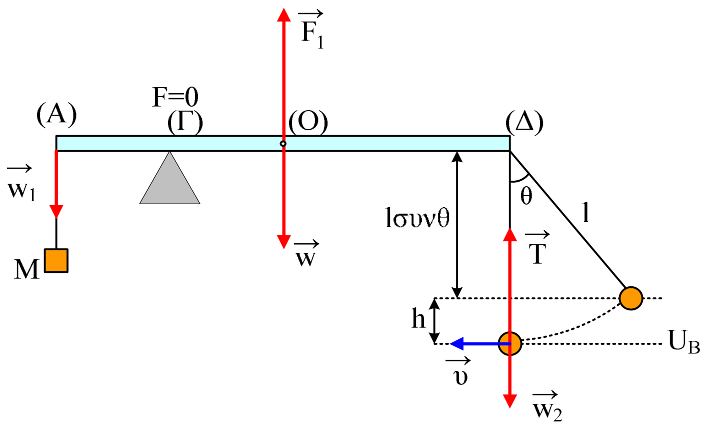
$$\Sigma\tau_{(\mathrm{A})}=0 \Rightarrow W_x(\mathrm{A\Delta})\sigma\upsilon\nu\varphi + W_1(\mathrm{AM})\sigma\upsilon\nu\varphi = W_2(\mathrm{AM'})\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$W_x\frac{d}{3}+W_1\frac{d}{6}=W_2\frac{d}{3} \Rightarrow W_x=W_2-\frac{W_1}{2} \Rightarrow W_x=\frac{2W}{3}-\frac{W}{6} \Rightarrow W_x=\frac{W}{2} \Rightarrow W_x=150N$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο άκρο Α ράβδου ΑΔ κρεμιέται μέσω ιδανικού νήματος σώμα μάζας M=10 Kg. Στο άλλο άκρο Δ κρεμιέται μέσω ιδανικού νήματος μήκους l=1,5 m σώμα μάζας m=6 Kg. Η ράβδος ΑΔ στηρίζεται σε σημείο Γ, μεταξύ του άκρου Α και του μέσου Ο, ενώ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της. Κατά ποια γωνία θ, μετρημένη από την κατακόρυφο, πρέπει να εκτραπεί το νήμα στο οποίο είναι συνδεδεμένο το σώμα m, ώστε μόλις αυτό διέρχεται από την κατακόρυφο η ράβδος να χάσει οριακά την επαφή της με το στήριγμα στο σημείο Γ; Ποια είναι τότε η ταχύτητα της μάζας m;
Δίνεται: $g=10m/s^2$.



ΛΥΣΗ

Κάθε στιγμή στο σώμα μάζας m ασκείται η τάση του νήματος και το βάρος του. Η συνισταμένη δύναμη στην ακτινική διεύθυνση συμπεριφέρεται ως κεντρομόλος. Τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο ισχύει:

$$\Sigma F = T - W_2 = F_K \Rightarrow T = mg + m\frac{\upsilon^2}{l} \qquad (1)$$

Κατά τη διάρκεια της κυκλικής κίνησης , η τάση είναι διαρκώς κάθετη στη μετατόπιση και δεν παράγει έργο, οπότε διατηρείται η μηχανική ενέργεια του σώματος μάζας m:

$$U_{\beta\alpha\rho(\alpha\rho\chi)} = K_{(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 2gh \Rightarrow \upsilon^2 = 2gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta) \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) έχουμε:

$$T = mg + m2g(1-\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow \mathrm{T} = 3mg - 2mg\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (3)$$

Στο άκρο Α της ράβδου ασκείται δύναμη ίση με το βάρος του σώματος Μ, στο άκρο Δ δύναμη ίση με την τάση του νήματος, ενώ στο μέσο της Ο ασκείται το βάρος της W και άγνωστη δύναμη F από τον άξονα περιστροφής. Τη στιγμή που το νήμα διέρχεται από την κατακόρυφο, η ράβδος **χάνει οριακά την επαφή της** με το στήριγμα στο σημείο Γ, άρα η **δύναμη επαφής μηδενίζεται**. Την ίδια στιγμή η ράβδος **οριακά ισορροπεί**. Άρα:

$$\Sigma\tau_{(o)} = 0 \Rightarrow Mg\frac{l}{2} = T\frac{l}{2} \Rightarrow Mg = 3mg - 2mg\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3mg - Mg}{2mg} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3m - M}{2m} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2}{3}$$

Η ταχύτητα της μάζας m όταν το νήμα διέρχεται από την κατακόρυφο υπολογίζεται από τη σχέση (2):

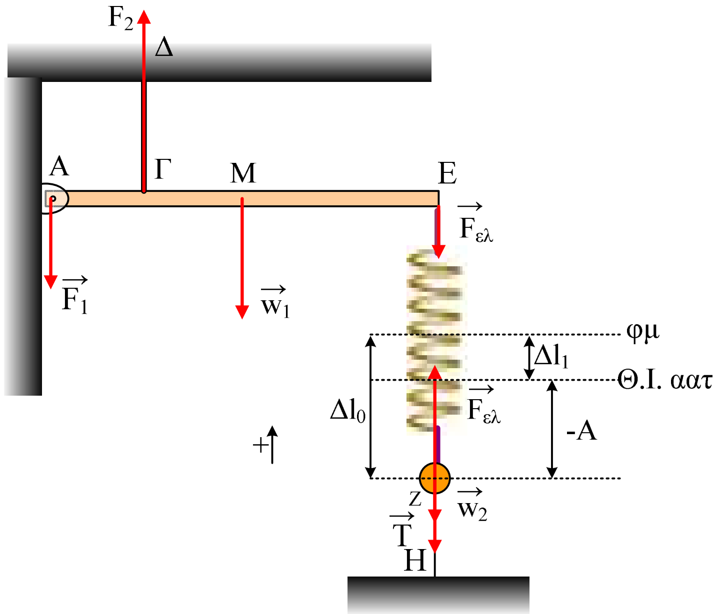
$$\upsilon = \sqrt{2gl(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{10}\,\frac{m}{s}$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ομογενής ράβδος ΑΕ μήκους l=4m βάρους W_1=200 N ισορροπεί οριζόντια, συνδεδεμένη μέσω άρθρωσης Α με τον κατακόρυφο τοίχο και μέσω αβαρούς ράβδου ΓΔ με την οριζόντια οροφή, σε σημείο Γ όπου (ΑΓ)=1m. Στο άκρο Ε είναι συνδεδεμένο το πάνω άκρο ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σώμα μάζας m_2=4 Kg, το οποίο συνδέεται μέσω αβαρούς τεντωμένου νήματος ΖΗ με το έδαφος. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί και το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δlo=0,2m.
Α) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος ΖΗ και τις δυνάμεις που δέχεται η ράβδος στα σημεία στήριξης Α και Γ.
Β) Κάποια στιγμή που τη θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου (t=0) κόβουμε το νήμα ΖΗ οπότε το σώμα m_2 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω, να γράψετε την εξίσωση κίνησης του m_2 και να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο τη χρονική στιγμή t=T/2, όπου Τ η περίοδος, μετά την έναρξη της ταλάντωσης.
Δίνεται: g=10 m/s2

ΛΥΣΗ



Α) Εφόσον το ελατήριο έχει υποστεί επιμήκυνση, ασκεί στο σώμα m_2 και στο άκρο Ε της ράβδου δύναμη μέτρου:

$$F_{ελ} = k\Delta l_0 \Rightarrow F_{ελ} = 400 \times 0,2 = 80N$$

Επειδή το σώμα m_2 ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W_2 - T = 0 \Rightarrow T = F_{ελ} - W_2 = F_{ελ} - m_2 g \Rightarrow T = 40N$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει: **ΣF=0** και **Στ=0** ως προς **οποιοδήποτε** σημείο του επιπέδου των δυνάμεων. Άρα:

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow F_1(\mathrm{A\Gamma}) = W_1(\mathrm{\Gamma M}) + F_{\varepsilon\lambda}(\mathrm{\Gamma E}) \Rightarrow F_1 = 440N$$

Επίσης:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_2 = F_1 + W_1 + F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F_2 = 720N$$

B) Μόλις κοπεί το νήμα το σώμα m2 αρχίζει να εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς D=k και θέση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε επιμήκυνση:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_1 = m_2 g \Rightarrow \Delta l_1 = 0{,}1m$$

Επειδή ξεκινά από την ηρεμία, η αρχική θέση είναι ακρότατη, οπότε το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με:

$$A = \Delta l_0 - \Delta l_1 = 0{,}1m$$

Τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στην αρνητική ακρότατη θέση: y=-A=-0,1m, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: φ=3π/2.
Η κυκλική συχνότητα είναι:

$$D = k = m_2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

Οπότε η εξίσωση κίνησης γράφεται: $y = 0{,}1\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})(S.I)$

Τη χρονική στιγμή t=T/2 το m_2 θα βρίσκεται στη συμμετρική ακρότατη θέση (y=+A=+0,1m), η οποία συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, όπου Fελ=0. Τότε:

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow F_1(\mathrm{A\Gamma}) = W_1(\mathrm{M\Gamma}) \Rightarrow F_1 = W_1 \Rightarrow F_1 = 200N$$

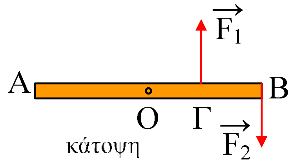
Επίσης:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_2 = F_1 + W_1 \Rightarrow F_2 = 400N$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

Ζεύγος δυνάμεων.

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται μια ράβδος μήκους l=4m, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το μέσον της Ο. Ασκούμε πάνω της δύο οριζόντιες δυνάμεις με ίσα μέτρα $F_1=F_2=20N$, όπως στο σχήμα, όπου (ΟΓ)=(ΓΒ).



i) Βρείτε την συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής.
ii) Υπολογίστε την οριζόντια δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα.
iii) Πόση η συνολική ροπή των δυνάμεων F_1-F_2 ως προς το άκρο Α;
iv) Για να μην περιστραφεί η ράβδος ασκούμε πάνω της οριζόντια δύναμη F_3 στο άκρο Α, παράλληλη προς τις F_1, F_2.
   α) Να σχεδιάστε την δύναμη F_3.
   β) Πόση οριζόντια δύναμη δέχεται τώρα η ράβδος από τον άξονα;

Απάντηση:

i) Αν F η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής, έχουμε
$\tau_{ολ}= \tau_F+ \tau_1 + \tau_2 =F\cdot 0+ F_1\cdot(ΟΓ) – F_2\cdot(ΟΒ) = 20N\cdot 1m-20N\cdot 2m= - 20N\cdot m.$
Στην πραγματικότητα ροπή έχει το ζεύγος των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οπότε θα μπορούσαμε να πάρουμε:
$\tau= -|F_1|\cdot d= -20N\cdot 1m= - 20N\cdot m.$
Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι με την επίδραση των δύο δυνάμεων η ράβδος τείνει να περιστραφεί με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

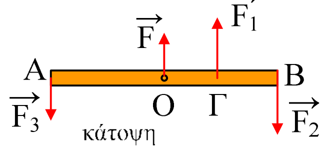
ii) Επειδή η ράβδος στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Ο, ισχύει:

$$\Sigma F=0 \rightarrow$$
$$F+F_1-F_2 = 0 \rightarrow F=0.$$

Δηλαδή η ράβδος δεν δέχεται δύναμη από τον άξονα περιστροφής,

iii) Ως προς το σημείο Α έχουμε:
$\tau_{ολ} = F_1\cdot(ΑΓ) – F_2\cdot(ΑΒ) = 20N\cdot 3m- 20N\cdot 4m= -20Nm.$
Βλέπουμε ότι η ροπή του ζεύγους είναι ίδια είτε υπολογίζεται ως προς το Ο, είτε ως προς το Α.

iv) Για να μην περιστρέφεται η ράβδος, θα πρέπει να ασκηθεί μια δύναμη στο άκρο Α, η οποία να προκαλεί ροπή +20Nm και να εξουδετερώνει τη ροπή του ζεύγους.
Άρα η φορά της είναι αυτή του διπλανού σχήματος και αφού η ράβδος δεν στρέφεται:



$$\Sigma\tau_O =0 \rightarrow$$
$$- F_3\cdot(ΑΟ) –F_1\cdot(ΟΑ) + F_2\cdot(ΟΒ) = 0\rightarrow$$
$$- F_3\cdot 2 -20\cdot 1+20\cdot 2 \rightarrow F_3=10N.$$

Αφού η ράβδος δεν μεταφέρεται $\Sigma F=0 \rightarrow F+F_1-F_3-F_2 =0 \rightarrow F=10N$ δηλαδή τώρα η ράβδος δέχεται δύναμη από τον άξονα.

Προσέξτε ότι η δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει ζεύγος δυνάμεων με την $\vec{F}_3$.

Δηλαδή για εξουδετερωθεί η δράση του ζεύγους των δυνάμεων F_1 –F_2 απαιτήθηκε η εξάσκηση ενός νέου ζεύγους δυνάμεων και όχι μια μόνο δύναμη.

dmargaris@Gmail.com

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΡΟΚΑΛΟΥΝ ΟΙ… ΤΡΙΒΕΣ

Η φορά της στατικής τριβής.

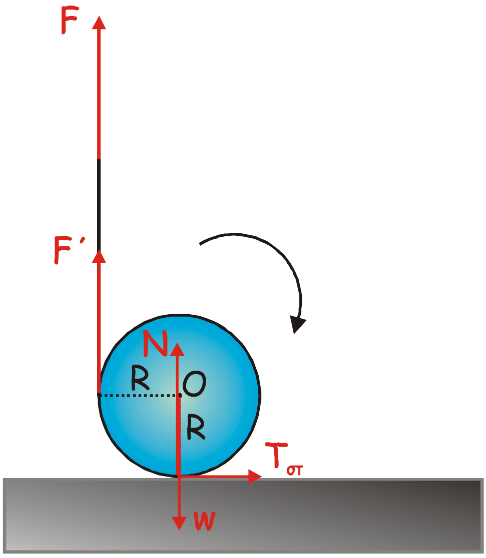
Ένα από τα ζητήματα που πολλές φορές μας δυσκολεύουν είναι η σχεδίαση της στατικής τριβής και ο σωστός προσδιορισμός της φοράς της. Κάποιες φορές είναι εφικτό (και σχετικά εύκολο) να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της στατικής τριβής ενώ άλλες φορές δεν πειράζει και … να κάνουμε λάθος. Ας δούμε όμως τα πράγματα λίγο πιο αναλυτικά.

Η σκέψη-κλειδί : Εάν έχουμε <u>κύλιση χωρίς ολίσθηση</u>, τα μέτρα της ταχύτητας του κέντρου μάζας και της γωνιακής ταχύτητας συνδέονται με τη σχέση : $u_{cm}=\omega\cdot R$. Επομένως εάν το μέτρο της μιας ταχύτητας αυξάνεται ή μειώνεται ή μένει σταθερό το ίδιο συμβαίνει αντίστοιχα και στο μέτρο της άλλης.

Και η προϋπόθεση για να σχεδιάσουμε σωστά τη στατική τριβή : Η στατική τριβή είναι <u>η μόνη δύναμη</u> που μπορεί να προκαλέσει είτε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας στη μεταφορική κίνηση, είτε τη γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σε στροφική κίνηση.

Παράδειγμα 1

Εξασκούμε κατακόρυφη δύναμη F μέσω του αβαρούς νήματος και ο αρχικά ακίνητος δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο.



Ο δίσκος αποκτά γωνιακή επιτάχυνση λόγω της ροπής της δύναμης F. Επομένως και το κέντρο μάζας θα επιταχυνθεί προς τα δεξιά. Το βάρος w, η δύναμη F και η κάθετη αντίδραση N είναι δυνάμεις κατακόρυφης διεύθυνσης οπότε δεν μπορούν να επιταχύνουν τον δίσκο προς τα δεξιά. ***Έτσι η μόνη δύναμη που μπορεί να επιταχύνει τον δίσκο είναι η στατική τριβή. <u>Επομένως η φορά της στατικής τριβής είναι προς τα δεξιά.</u>*** *(γιατί το μέτρο της στατικής τριβής πρέπει να είναι μικρότερο του μέτρου τής F ;)*

Έχουμε λοιπόν :

$T_{στ}=m\cdot a_{cm}$ και $F΄\cdot R-T_{στ}\cdot R=I\cdot α_{γων}$.

Εάν τώρα σχεδιάζαμε λανθασμένα τη στατική τριβή προς τ' αριστερά θα γράφαμε :

$T_{στ}=m\cdot a_{cm}$ και $F΄\cdot R+T_{στ}\cdot R=I\cdot α_{γων}$ και θα οδηγούμασταν σε λανθασμένο αποτέλεσμα.

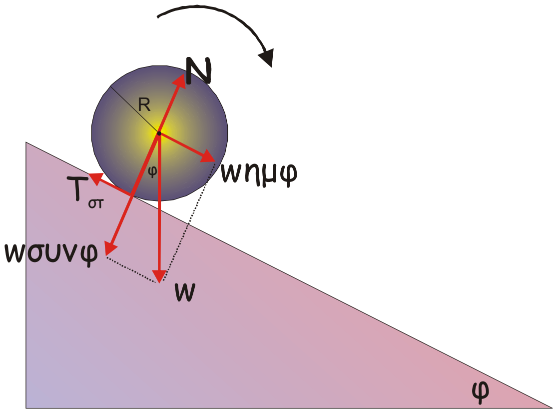
Στο σωστό θα καταλήγαμε γράφοντας :

$-T_{στ}=m\cdot a_{cm}$ και $F΄\cdot R+T_{στ}\cdot R=I\cdot α_{γων}$ (θα βρίσκαμε $T_{στ}<0$)που όμως προϋποθέτει ότι έχουμε «ψυλλιαστεί» το λάθος μας και δεν θα το κάναμε!

Παράδειγμα 2

Το στερεό του σχήματος (κύλινδρος, δίσκος, δακτύλιος, σφαίρα) αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο οπότε κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

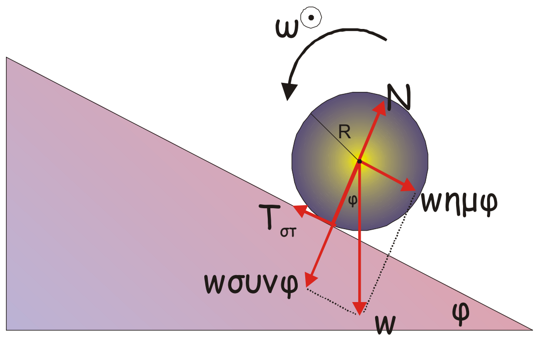
Γνωρίζουμε ότι το κέντρο μάζας του στερεού επιταχύνεται προς τα κάτω. Επομένως και η γωνιακή ταχύτητά του πρέπει να αυξάνεται (αφού $u_{cm}=\omega\cdot R$). Έτσι κάποια δύναμη πρέπει να προκαλεί ροπή που περιστρέφει το στερεό σύμφωνα με τη φορά



περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. ***Η μόνη δύναμη που μπορεί να προκαλέσει ροπή είναι η στατική τριβή <u>έτσι πρέπει να έχει κατεύθυνση προς τα πάνω</u>***.

Παράδειγμα 3

Το στερεό τώρα βάλλεται από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και ανεβαίνει κυλιόμενο χωρίς να ολισθαίνει. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας μειώνεται κατά μέτρο επομένως και η γωνιακή ταχύτητα θα πρέπει να μειώνεται κατά μέτρο μια και ισχύει $u_{cm}=\omega \cdot R$. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να υπάρχει ροπή που προκαλεί γωνιακή επιβράδυνση, δηλαδή να τείνει να περιστρέψει το σώμα σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. ***Η μόνη δύναμη που μπορεί να προκαλέσει ροπή είναι η στατική τριβή οπότε <u>η κατεύθυνσή της πρέπει και πάλι να είναι προς τα πάνω</u>.***



Από τα παραδείγματα 2 και 3 βλέπουμε ότι είτε το στερεό σώμα ανεβαίνει είτε κατεβαίνει, η στατική τριβή έχει κατεύθυνση προς τα πάνω.

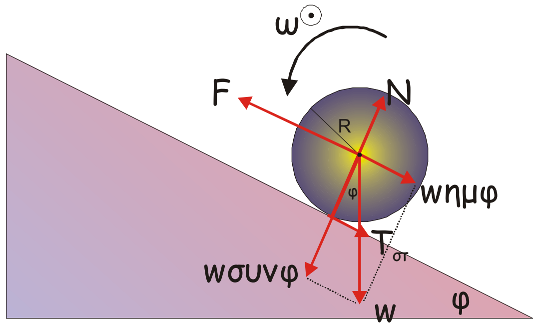
ΠΡΟΣΟΧΗ ΟΜΩΣ : Αυτό ισχύει όταν δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις πέρα από το βάρος και τις δυνάμεις από το κεκλιμένο επίπεδο, όπως άλλωστε θα φανεί στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Αποδεικνύεται μάλιστα πως το μέτρο της επιτάχυνσης στην άνοδο και την κάθοδο είναι το ίδιο. (Φανταστείτε ότι βλέπουμε την κάθοδο σε βίντεο. Αν πατήσουμε το rewind παρακολουθούμε την άνοδο. Κανένα από τα διανύσματα δεν έχει αλλάξει κατεύθυνση ! Κάτι τέτοιο θα συνέβαινε για παράδειγμα με την τριβή εάν είχαμε ολίσθηση χωρίς περιστροφή)

Ας κάνουμε όμως τα πράγματα λίγο πιο περίπλοκα… (κι άλλο ; …)

Παράδειγμα 4

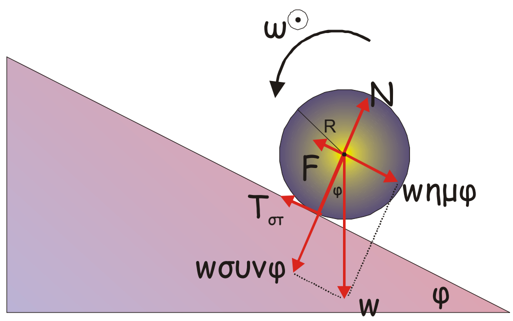
Το στερεό του παραδείγματος 3 τραβάει και πάλι την ανηφόρα μόνο που τώρα στο παιχνίδι μπαίνει και η δύναμη F που φαίνεται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι η δύναμη F διέρχεται από το κέντρο μάζας οπότε η ροπή της είναι μηδενική. Πώς όμως θα καταλάβουμε αν το κέντρο μάζας επιταχύνεται ή επιβραδύνεται ; Απλό… Συγκρίνουμε το μέτρο της F με το μέτρο της w_x. Στο σχήμα μας είναι $F > w_x$ οπότε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας αυξάνεται και το ίδιο πρέπει να συμβαίνει με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας. ***<u>Η στατική τριβή λοιπόν τώρα πρέπει να έχει κατεύθυνση προς τα κάτω</u>*** ώστε η ροπή της να μην φρενάρει αλλά να «γκαζώνει» το σώμα περιστροφικά.



Αν λοιπόν στην εκφώνηση αναφερόταν ότι $F=2w/3$ ενώ $\varphi=30^0$, θα είχαμε $w_x=w\cdot ημφ=w/2$ δηλαδή $F > w_x$ και …αυτή είναι η περίπτωση που μελετήσαμε.

Παράδειγμα 5

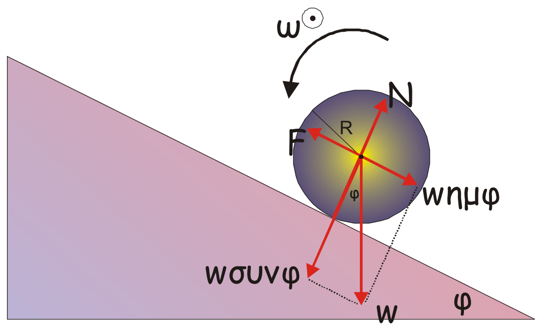
Έστω τώρα ότι στην εκφώνηση αναφέρεται ότι $F=w/3$ και $\varphi=30^0$ οπότε $w_x=w\cdot ημφ=w/2$ και άρα $F < w_x$. Τι σημαίνει αυτό ; Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα μειώνεται κατά μέτρο. Το ίδιο θα πρέπει λοιπόν να συμβαίνει και με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας οπότε έχουμε γωνιακή επιβράδυνση και έτσι $T_{στ}$ προς τα επάνω !



Παράδειγμα 6

Ε, φυσιολογικό είναι να σκεφτούμε τώρα : Αν η F έχει ίσο μέτρο με την w_x τι συμβαίνει με τη στατική τριβή ;

Το κέντρο μάζας κινείται τώρα με σταθερή ταχύτητα αφού ΣF=0 και έτσι σταθερή πρέπει να είναι και η γωνιακή ταχύτητα. Θα πρέπει δηλαδή να ισχύει και Στ=0 και αφού η μόνη δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η $T_{στ}$ θα πρέπει η στατική τριβή να είναι μηδενική. Απλό…

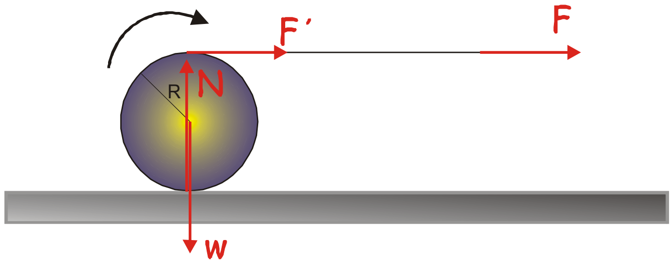


- Εάν η δύναμη F δεν ήταν παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο θα την αναλύαμε σε δύο συνιστώσες και θα ασχολούμασταν μόνο με τη συνιστώσα την παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο.

Και τώρα περιπτώσεις στις οποίες δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για τη φορά της στατικής τριβής αλλά δεν μας νοιάζει !

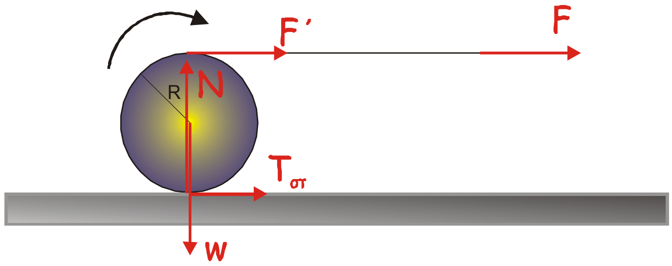
Παράδειγμα 8

Στο διπλανό σχήμα ασκούμε στο αβαρές νήμα δύναμη F οπότε στο στερεό ασκείται μέσω του νήματος δύναμη F΄ (F=F΄) και ο δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο.



Ποιο είναι το πρόβλημα που έχουμε τώρα και δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για τη σωστή φορά της στατικής τριβής ; ***Ροπή προκαλεί και η F΄ όχι μόνο η στατική τριβή***.

Η φορά της στατικής τριβής εξαρτάται τόσο από το σημείο εφαρμογής της F΄ όσο και από τη ροπή αδράνειας του στερεού. Για την περίπτωση του σχήματος η σωστή φορά αποδεικνύεται ότι είναι (η απόδειξη θα δοθεί στο τέλος) προς τα δεξιά όπως φαίνεται στο σχήμα.

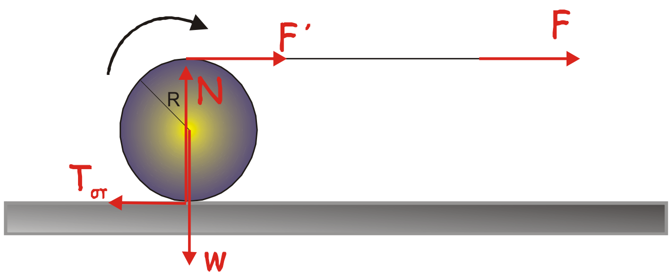


Οι εξισώσεις μας λοιπόν γράφονται :

$F΄+T_{στ}= m·a_{cm}$ και

$F΄·R-T_{στ}·R=I·α_{γων}$

Αλλά και αν … μαντέψουμε λάθος και σχεδιάσουμε τη στατική τριβή προς τ’ αριστερά δεν πειράζει. Οι εξισώσεις μας τώρα γίνονται :



$F΄-T_{στ}= m·a_{cm}$ και

$F΄·R+T_{στ}·R=I·α_{γων}$

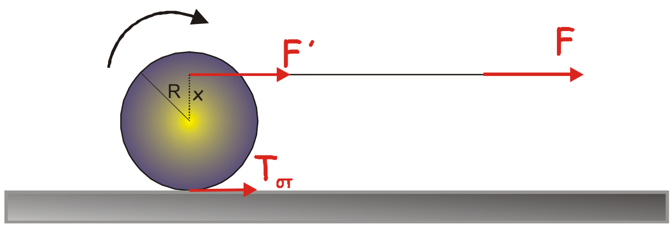
Το …καλό είναι ότι κάναμε λάθος και στις δύο εξισώσεις, όχι μόνο στη μία !!!

Όταν κάνουμε λοιπόν τις πράξεις θα βρούμε αρνητικό αποτέλεσμα για τη στατική τριβή έχοντας όμως βρει το σωστό μέτρο. Θα αναφέρουμε λοιπόν ότι το σωστό θα ήταν να έχουμε σχεδιάσει τη στατική τριβή προς τ’ αριστερά και … ούτε γάτα ούτε ζημιά !

Ηθικό δίδαγμα (αμφιβόλου αξίας !) : Μερικές φορές καλύτερα να κάνουμε 2 λάθη παρά ένα !

Ισχυριστήκαμε προηγουμένως ότι αποδεικνύεται πως στην περίπτωση του σχήματος η στατική τριβή έχει φορά προς τα εμπρός. Ας το διερευνήσουμε.

Διερεύνηση της φοράς της στατικής τριβής στην περίπτωση κύλισης χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο δάπεδο κάτω από την επίδραση οριζόντιας δύναμης F .



Υποθέτουμε ότι ο φορέας της δύναμης απέχει από το κέντρο μάζας απόσταση x (πάνω από το κέντρο μάζας) όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω ακόμη ότι η φορά της στατικής τριβής είναι προς τα δεξιά (εμπρός). Το στερεό έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος $I=\lambda MR^2$ (για κύλινδρο και δίσκο $\lambda=1/2$, για δακτύλιο $\lambda=1$, ενώ για σφαίρα $\lambda=2/5$). Έχουμε :

Για τη μεταφορική κίνηση : $F\text{-}T_{στ}=M\cdot a_{cm}$ (1)

Για την περιστροφική κίνηση : $F\cdot x\text{-}T_{στ}\cdot R=I\cdot a_{γων} \overset{ΚΧΟ}{\Longleftrightarrow} F\cdot x\text{-}T_{στ}\cdot R=I\cdot\dfrac{a_{cm}}{R}$ (2)

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε :

$$\frac{F+T_{στ}}{F\cdot x\text{-}T_{στ}\cdot R}=\frac{M\cdot R}{I}\Leftrightarrow F+T_{στ}=F\cdot x\cdot\frac{M\cdot R}{I}-T_{στ}\cdot R\frac{M\cdot R}{I}\Leftrightarrow T_{στ}(1+\frac{M\cdot R^2}{I})=F(\frac{x\cdot M\cdot R}{I}-1)\Leftrightarrow$$

$$T_{στ}=\frac{\dfrac{x\cdot M\cdot R}{I}-1}{1+\dfrac{M\cdot R^2}{I}}F\Leftrightarrow T_{στ}=\frac{\dfrac{x\cdot M\cdot R}{\lambda\cdot M\cdot R^2}-1}{1+\dfrac{M\cdot R^2}{\lambda\cdot M\cdot R^2}}F\Leftrightarrow\boxed{T_{στ}=\frac{\dfrac{x}{\lambda\cdot R}-1}{1+\dfrac{1}{\lambda}}F}$$

Διερευνούμε λοιπόν τη σχέση αυτή :
Ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός, έτσι το πρόσημο καθορίζεται από τον αριθμητή.

- Εάν $\dfrac{x}{\lambda\cdot R}-1=0\Leftrightarrow\boxed{x=\lambda\cdot R}$ η στατική τριβή είναι μηδέν.

- Εάν $\dfrac{x}{\lambda\cdot R}-1>0\Leftrightarrow\boxed{x>\lambda\cdot R}$ η στατική τριβή είναι θετική δηλαδή προς τα δεξιά.

- Εάν $\dfrac{x}{\lambda\cdot R}-1<0\Leftrightarrow\boxed{x<\lambda\cdot R}$ η στατική τριβή είναι αρνητική δηλ. προς τ' αριστερά.

- Για $x < 0$ δηλαδή κάτω από το κέντρο μάζας η στατική τριβή ανεξάρτητα από την τιμή του λ έχει φορά προς τα πίσω (αριστερά).

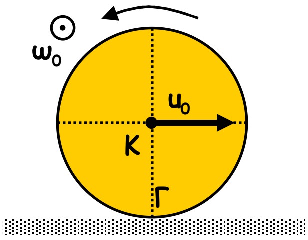
Ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματα σε πίνακα.

<table>
<tr><th colspan="2">ΔΙΣΚΟΣ , ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ
λ=1/2</th><th colspan="2">ΣΦΑΙΡΑ
λ=2/5</th><th colspan="2">ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ
λ=1</th></tr>
<tr><th>Μοχλοβραχίονας
x</th><th>Φορά
$T_{στ}$</th><th>Μοχλοβραχίονας
x</th><th>Φορά
$T_{στ}$</th><th>Μοχλοβραχίονας
x</th><th>Φορά
$T_{στ}$</th></tr>
<tr><td>$R > x > \frac{R}{2}$</td><td>$\rightarrow$</td><td>$R > x > \frac{2R}{5}$</td><td>$\rightarrow$</td><td>$x = R$</td><td>$T_{στ}$=0</td></tr>
<tr><td>$x = \frac{R}{2}$</td><td>$T_{στ}$=0</td><td>$x = \frac{2R}{5}$</td><td>$T_{στ}$=0</td><td rowspan="2">$R > x > -R$</td><td rowspan="2">$\leftarrow$</td></tr>
<tr><td>$\frac{R}{2} > x > -R$</td><td>$\leftarrow$</td><td>$\frac{2R}{5} > x > -R$</td><td>$\leftarrow$</td></tr>
</table>

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για ένα δακτύλιο (ή μία στεφάνη) η στατική τριβή έχει πάντα κατεύθυνση προς τα πίσω και μόνο στην περίπτωση που η δύναμη F ασκείται στο ανώτατο σημείο η τιμή της στατικής τριβής μηδενίζεται !

Σταύρος Ε. Πρωτογεράκης
protogst@otenet.gr
protogerakiss@rpschool.gr

Η μπάλα πηγαίνει και προς τα πίσω.



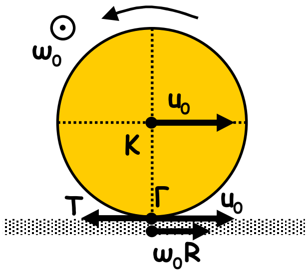
Σε μια μπάλα του μπιλιάρδου με κατάλληλο χτύπημα τη χρονική στιγμή t=0 προσδίδουμε γωνιακή ταχύτητα ω_o και γραμμική ταχύτητα υ_o σύμφωνα με το σχήμα.

α. Να μελετηθεί η κίνηση και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις υ_{cm}=f(t) και ω=f(t), μέχρι ν' αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση.

β. Να υπολογισθεί το έργο της τριβής ολίσθησης.

Τα μεγέθη ω_0, υ_0, m, μ, g θεωρούνται γνωστά και για τη μπάλα δίνεται $I=(2/5)mR^2$.

<u>**Λύση**</u>



α. Το σημείο επαφής σφαίρας-δαπέδου αμέσως μετά το χτύπημα (t=0) έχει δύο ταχύτητες τη u_0 και τη γραμμική $\omega_0 R$, οι οποίες είναι ομόρροπες με φορά προς τα δεξιά, οπότε και η ολική ταχύτητα έχει φορά προς τα δεξιά. Άρα η τριβή ολίσθησης έχει φορά προς τ' αριστερά.

Η τριβή επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση:
$\Sigma F_x = ma_{cm} \rightarrow T = ma_{cm} \rightarrow \mu mg = ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \mu g$

Η <u>αλγεβρική</u> τιμή της μεταφορικής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο εκφράζεται:
$u_{cm} = u_0 - a_{cm} t \rightarrow u_{cm} = u_0 - \mu g t$

Η ροπή της τριβής επιβραδύνει την περιστροφική κίνηση.
$$\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow TR = \frac{2}{5} mR^2 a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{5\mu g}{2R}$$
Η <u>αλγεβρική</u> τιμή της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο εκφράζεται:
$$\omega = \omega_0 - a_{\gamma\omega\nu} t \rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2R} t$$

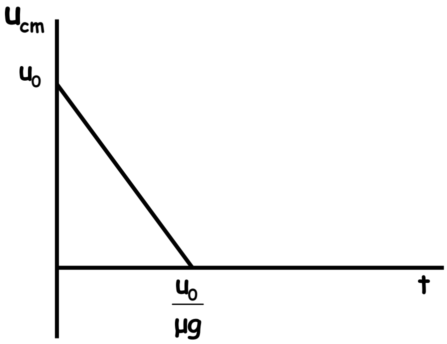
Διακρίνουμε **τρεις περιπτώσεις** ανάλογα με τις τιμές των $\boldsymbol{\omega_o}$ και $\boldsymbol{\upsilon_o}$. Μπορεί να μηδενιστούν ταυτόχρονα ή να μηδενιστεί πρώτα γωνιακή ταχύτητα ή να μηδενιστεί πρώτα η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

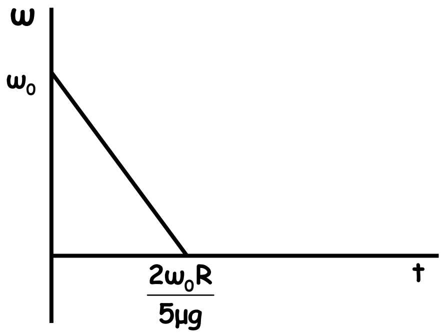
Χρόνος μηδενισμού της u_{cm}: $0 = u_0 - \mu g t_{\mu.cm} \rightarrow t_{\mu.cm} = \dfrac{u_0}{\mu g}$

Χρόνος μηδενισμού της ω: $0 = \omega_0 - \dfrac{5\mu g}{2R} t_{\mu.\omega} \rightarrow t_{\mu.\omega} = \dfrac{\frac{2}{5}\omega_0 R}{\mu g}$

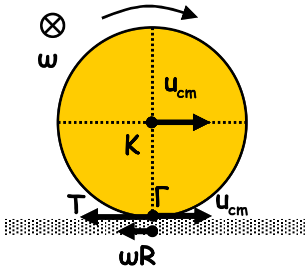
1. Αν $\dfrac{u_0}{\mu g} = \dfrac{\frac{2}{5}\omega_0 R}{\mu g} \rightarrow u_0 = \dfrac{2}{5}\omega_0 R$, οι δύο ταχύτητες **μηδενίζονται ταυτόχρονα** και η μπάλα **ακινητοποιείται**.

Η μπάλα πηγαίνει και προς τα πίσω.





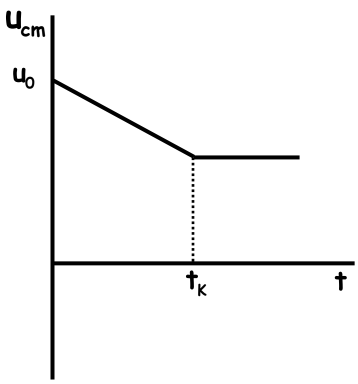
2. Αν $\frac{u_0}{\mu g} > \frac{\frac{2}{5}\omega_0 R}{\mu g} \rightarrow u_0 > \frac{2}{5}\omega_0 R$, **μηδενίζεται πρώτα η γωνιακή ταχύτητα.**

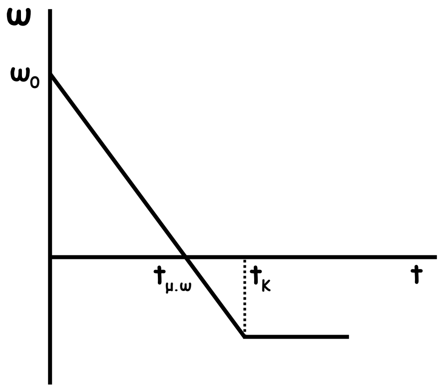


Τότε η ροπή της τριβής ολίσθησης θ' αρχίσει να επιταχύνει τη μπάλα δεξιόστροφα (ανάποδα), ενώ η τριβή θα εξακολουθεί να μειώνει το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας. Όταν το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας γίνει ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας θ' αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση (προς τα <u>δεξιά</u>).

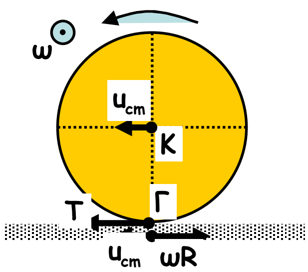
Προσοχή στο <u>μείον</u>, η γραμμική ταχύτητα έχει αλλάξει φορά!!!

$$|u_{cm}| = |\omega R| \rightarrow u_0 - \mu g t_\kappa = -(\omega_0 - a_{\gamma\omega\nu} t_\kappa)\cdot R \rightarrow u_0 - \mu g t_\kappa = -\left(\omega_0 - \frac{5\mu g}{2R} t_\kappa\right)\cdot R \rightarrow t_\kappa = \frac{2(u_0 + \omega_0 R)}{7\mu g}$$





3. Αν $\frac{u_0}{\mu g} < \frac{\frac{2}{5}\omega_0 R}{\mu g} \rightarrow u_0 < \frac{2}{5}\omega_0 R$, **μηδενίζεται πρώτα η ταχύτητα του cm.**

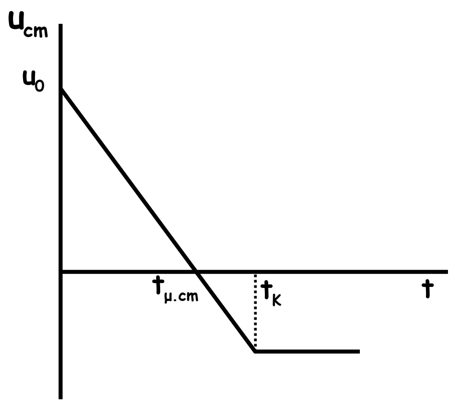


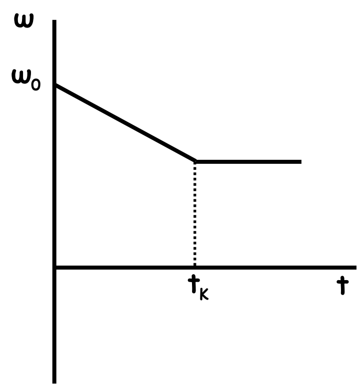
Τότε η τριβή ολίσθησης θ' αρχίσει να επιταχύνει τη μπάλα μεταφορικά προς τα αριστερά (πίσω), ενώ η ροπή της τριβής θα εξακολουθεί να μειώνει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας. Όταν το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας γίνει ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας θ' αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση (προς τα <u>αριστερά</u>).

Προσοχή στο <u>μείον</u>, η ταχύτητα του κέντρου μάζας έχει αλλάξει φορά!!!

$$|u_{cm}| = |\omega R| \rightarrow -(u_0 - \mu g t_\kappa) = (\omega_0 - a_{\gamma\omega\nu} t_\kappa)\cdot R \rightarrow -u_0 + \mu g t_\kappa = \left(\omega_0 - \frac{5\mu g}{2R} t_\kappa\right)\cdot R \rightarrow t_\kappa = \frac{2(u_0 + \omega_0 R)}{7\mu g}$$

Η μπάλα πηγαίνει και προς τα πίσω.





β. Σε κάθε περίπτωση, επειδή η τριβή ολίσθησης είναι η μόνη δύναμη που εκτελεί έργο κατά τη διάρκεια της κύλισης με ολίσθηση, αυτό μπορεί να υπολογισθεί εύκολα με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για τη σύνθετη κίνηση:

$$K_{ΤΕΛ} - K_{ΑΡΧ} = W_T \rightarrow \left(\frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - \left(\frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2\right) = W_T$$

όπου u_{cm} και ω η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής αντίστοιχα τη χρονική στιγμή που αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση ή που συμβαίνει ακινητοποίηση, δηλαδή:
Για την 1η περίπτωση που έχουμε ακινητοποίηση, $u_{cm} = 0$ και $\omega = 0$.

Ενώ για τη 2η και τη 3η περίπτωση:

$$u_{cm} = u_0 - \mu g t_k = u_0 - \mu g \cdot \frac{2(u_0 + \omega_0 R)}{7\mu g} \rightarrow u = \frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R$$

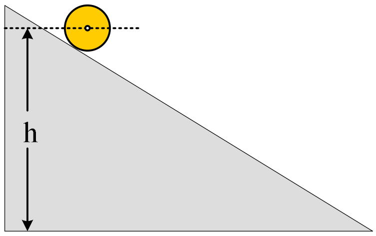
$$\omega = \omega_0 - a_{γων} t_k \rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2R} \cdot \frac{2(u_0 + \omega_0 R)}{7\mu g} \rightarrow \omega = \frac{2}{7}\omega_0 - \frac{5}{7} \cdot \frac{u_0}{R}$$

Στη 2η περίπτωση θα προκύψει $\omega<0$ ενώ στη 3η περίπτωση $u_{cm}<0$, εδώ όμως τα πρόσημα δεν μας απασχολούν διότι οι ταχύτητες υψώνονται στο τετράγωνο.

Νίκος Ανδρεάδης

Η σφαίρα κυλίεται σε κεκλιμένο επίπεδο.

Από το ίδιο ύψος h σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, αφήνουμε ταυτόχρονα δύο σφαίρες Α και Β, οι οποίες κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Η σφαίρα Α έχει μάζα m και ακτίνα R, ενώ η Β έχει μάζα 3m και ακτίνα R/2.



i) Για τα χρονικά διαστήματα t_A και t_B που απαιτούνται για να φτάσουν στη βάση του επιπέδου ισχύει:

α) $t_A < t_B$ β) $t_A = t_B$ γ) $t_A > t_B$.

ii) Για τις τελικές ταχύτητες $υ_A$ και $υ_B$ ισχύει:

α) $υ_A < υ_B$ β) $υ_A = υ_B$ γ) $υ_A > υ_B$.

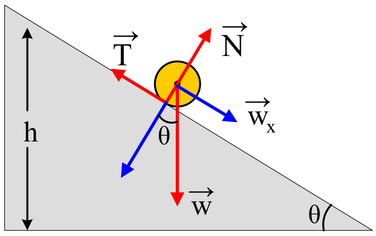
iii) Ο λόγος K_A/K_B, όπου K_A και K_B οι τελικές κινητικές ενέργειες των δύο σφαιρών λόγω περιστροφής, είναι ίσος με:

α) 1 β) 3 γ) 1/3

Για τη σφαίρα $I_{cm} = 2/5\ mR^2$.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε μια σφαίρα που κυλίεται κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου.



Για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma F_x = m\cdot α_{cm} \rightarrow$$

$$mgημθ - T = mα_{cm}\ (1)$$

Αντίστοιχα για την στροφική κίνηση και θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές θετικές έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T\cdot R = 2/5\ mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T = 2/5\ m\cdot R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η (2) γίνεται:

$$T = 2/5\ m\cdot\alpha_{cm} \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$mg\eta\mu\theta = \frac{7}{5}ma_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{5}{7}g\eta\mu\theta \quad (4)$$

Η σχέση (4) μας λέει ότι η μεταφορική κίνηση της σφαίρας είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, όπου η επιτάχυνση δεν εξαρτάται ούτε από την μάζα της, ούτε από την ακτίνα της.

Έτσι για τη σφαίρα ισχύουν:

$$x = ½\ \alpha_{cm}\cdot t^2 \ \text{ και } \ \upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t$$

Αφού οι δύο σφαίρες διανύουν ίσες αποστάσεις θα φτάσουν στον ίδιο χρόνο στη βάση του επιπέδου με ίσες ταχύτητες κέντρου μάζας. Έτσι οι σωστές απαντήσεις είναι:

i) β) και ii) β).

iii) Για το λόγο των κινητικών ενεργειών λόγω περιστροφής έχουμε:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{1}{2}I_A\omega_A^2}{\frac{1}{2}I_B\omega_B^2} = \frac{\frac{2}{5}mR^2\omega_A^2}{\frac{2}{5}3m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_B^2} = \frac{\upsilon_A^2}{3\upsilon_B^2} = \frac{1}{3}$$

Σωστή πρόταση η γ).

dmargaris@sch.gr

Ισορροπία-ροπές και κάθετη αντίδραση.

Ας ξεκινήσουμε με ένα ερώτημα:

Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

«Αν ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα, στο οποίο ασκούνται διάφορες ομοεπίπεδες δυνάμεις, δεν στρέφεται, τότε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων, ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι ίσο με μηδέν».

Είναι σωστή ή λανθασμένη η πρόταση αυτή;

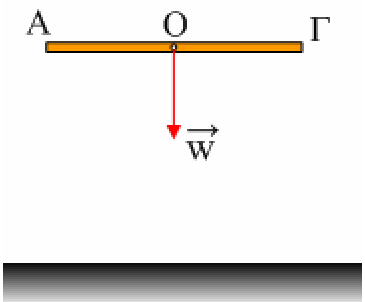
Η πρόταση είναι λάθος…

Η πρόταση είναι λανθασμένη γιατί δεν αναφέρει τίποτα για την συνισταμένη δύναμη. Αν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, τότε αν υπάρχουν ροπές αυτές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων και για να μην αρχίσει να περιστρέφεται θα πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών να είναι μηδέν. Και αφού μιλάμε για ζεύγη δυνάμεων έχουμε το δικαίωμα να πάρουμε τις ροπές ως προς οποιοσήποτε σημείο, αφού η ροπή ενός ζεύγους είναι ανεξάρτητη του σημείου αναφοράς μας.

Αλλά αν η συνισταμένη δύναμη δεν είναι μηδενική; Αν δηλαδή το σώμα επιταχύνεται; Τότε θα πρέπει να πάρουμε ***υποχρεωτικά το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς προς το κέντρο μάζας του στερεού,*** γιατί αν το στερεό περιστραφεί, θα περιστραφεί γύρω από άξονα κάθετον στο επίπεδο των δυνάμεων που περνά από το κέντρο μάζας του. Ως προς άλλα σημεία μπορεί η συνολική ροπή να είναι διάφορη του μηδενός, αλλά αυτό δεν μας απασχολεί.

Παράδειγμα 1ο:

Αφήνουμε μια ομογενή ράβδο ΑΓ να πέσει ελεύθερα, από μικρό ύψος, από οριζόντια θέση. Προφανώς η ράβδος εκτελεί ελεύθερη πτώση, χωρίς να περιστρέφεται.



Να υπολογιστεί η συνολική ροπή που ασκείται πάνω της:

α) Ως προς το μέσον της Ο.

β) Ως προς το ένα της άκρο Α.

Απάντηση:

α) Ως προς το μέσον της Ο: Στ= w·d= w·0=0

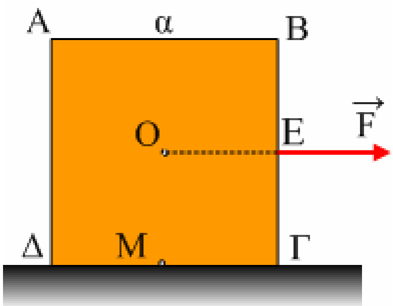
β) Ως προς το άκρο Α: Στ= - w ·l/2

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ροπή ως προς άκρο Α δεν είναι μηδέν, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η ράβδος θα αρχίσει να περιστρέφεται.

Παράδειγμα 2ο:

Ένας κύβος πλευράς α=1m και βάρους w=1000N ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,4$.

1) Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο.
2) Ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη F=300N, όπως στο σχήμα, όπου (ΒΕ)=(ΕΓ) και ο κύβος δεν κινείται.
   i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο και να υπολογίστε τα μέτρα τους.
   ii) Να βρεθεί το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στο κύβο ως προς:



α) Το κέντρο Ο του κύβου.

β) Της κορυφής Α.

Απάντηση:

1) Ο κύβος ισορροπεί συνεπώς:

$$ΣF= 0 \ (1)$$

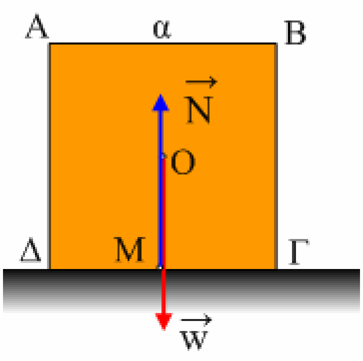
$$Στ=0 \ (2)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο είναι το βάρος του w και η κάθετη αντίδραση του επιπέδυο Ν. Με βάση την σχέση (1) Ν=w=1000N.

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το κέντρο Ο, έχουμε:

$w \cdot 0 + N \cdot x = 0 \rightarrow x=0$, όπου x η απόσταση του Ο από τον φορέα της Ν. Η κάθετη αντίδραση λοιπόν ασκείται στο κέντρο της βάσης Μ.

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο.



2) Η μέγιστη τιμή της τριβής που μπορεί να ασκηθεί στον κύβο είναι η οριακή τριβή $T_{ορ}=\mu_s \cdot N$ (1), αλλά στον κατακόρυφο άξονα ο κύβος ισορροπεί επομένως $\Sigma F_y=0$ ή $N=w=1000N$, οπότε:

$$T_{ορ}= \mu_s \cdot N = 0{,}4 \cdot 1000N=400N.$$

Στον άξονα x οι ασκούμενες δυνάμεις είναι η F και η τριβή. Αφού η δύναμη που ασκούμε είναι μικρότερη από 400N, ο κύβος δεν θα επιταχυνθεί στον άξονα x, οπότε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F-T=0 \rightarrow T=T_{στ}=F=300N.$$

Ας πάρουμε τώρα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το κέντρο Ο του κύβου:

$$\Sigma\tau=\tau_w+ \tau_T+\tau_F+\tau_N= w \cdot 0 - T \cdot \alpha/2 + F \cdot 0 + N \cdot x = N \cdot x - T \cdot \alpha/2$$

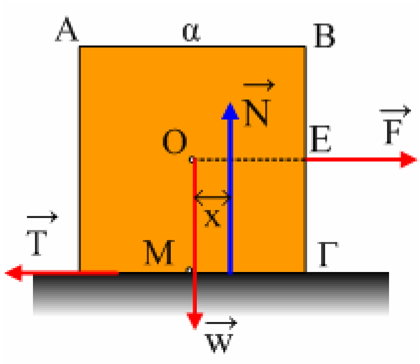
Αλλά αφού ο κύβος ισορροπεί $\Sigma\tau=0 \rightarrow$

$$N \cdot x - T \cdot \alpha/2 =0 \rightarrow$$

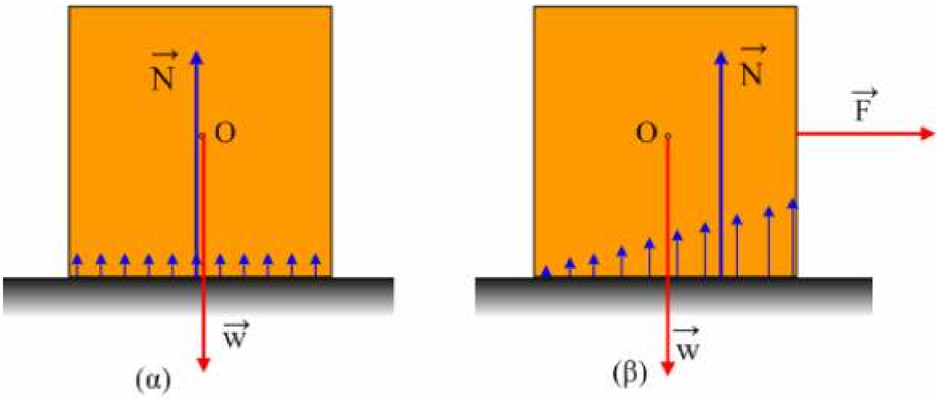
$$1000x=300 \cdot 0{,}5 \rightarrow$$

$$x=0{,}15m$$

Τι βρήκαμε; Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου Ν δεν περνά από το κέντρο Ο, αλλά είναι μετατοπισμένη κατά x=0,15m προς τα δεξιά όπως στο σχήμα.



Γιατί να συμβαίνει αυτό; Στην πραγματικότητα η Ν είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον κύβο από το δάπεδο. Στο α΄υποερώτημα το έδαφος πιέζεται από το σώμα ομοιόμορφα οπότε και οι δυνάμεις που δέχεται από το δάπεδο είναι όπως στο σχήμα (α), μόλις ασκηθεί πλάγια δύναμη όμως οι δυνάμεις δεν ασκούνται ομοιόμορφα, αλλά όπως στο σχήμα (β), όποτε στην (α) η συνισταμένη περνά από το μέσον, ενώ στην (β) όχι.



Παίρνοντας τις ροπές τώρα ως προς την κορυφή Α έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = -w\cdot\alpha/2 - T\cdot\alpha + F\cdot\alpha/2 + N\cdot(\alpha/2+x)$$

$$\Sigma\tau_A = -1000\cdot 0{,}5 - 300\cdot 1 + 300\cdot 0{,}5 + 1000\cdot 0{,}65 = 0$$

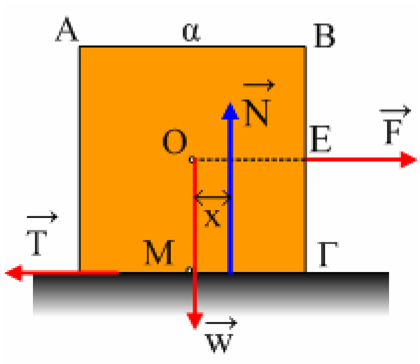
Συμπέρασμα αφού η ΣF=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν πάρουμε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών θα είναι μηδέν.

Παράδειγμα 3ο:

Αν η δύναμη F στο προηγούμενο παράδειγμα είχε μέτρο F=500N, να βρεθεί η συνολική ροπή ως προς την κορυφή Α.

Απάντηση:

Δεν ξέρουμε τώρα αν ισορροπεί ο κύβος. Αν κάνει μόνο μεταφορική ή και στροφική κίνηση (αν ανατρέπεται). Οι δυνάμεις είναι ξανά αυτές του παρακάτω σχήματος.



Αφού $F>T_{ορ}$ ο κύβος επιταχύνεται προς τα δεξιά και η ασκούμενη τριβή είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο $T_{ολ}=μ\cdot N= 400N$.

Δηλαδή ο κύβος αποκτά επιτάχυνση που υπολογίζεται από τον 2^o Νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_x=m\cdot α_{cm} \rightarrow a_{cm}= (F-T)/m =2m/s^2.$$

Έστω ότι ο κύβος επιταχύνεται μεν προς τα δεξιά χωρίς όμως να στρέφεται. Τότε ως προς το κέντρο μάζας Ο θα ισχύει $\Sigma τ=0 \rightarrow$

$$w\cdot 0+N\cdot x-T\cdot α/2 +F\cdot 0 = 0 \rightarrow$$

$$x=T\cdot α/2N = 400\cdot 1/2\cdot 1000m = 0{,}2m.$$

Δηλαδή ο φορέας της N περνάει από την βάση στήριξης και απλά είναι μετατοπισμένος κατά 0,2m από το μέσον M, πράγμα που μπορεί να συμβαίνει. Παρατηρήστε ότι η απόσταση αυτή έχει αυξηθεί σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα που ήταν 0,15m.

Αν πάρουμε τώρα τις ροπές ως προς το Α έχουμε:

$$\Sigma τ_A= -w\cdot α/2 -T\cdot α + F\cdot α/2+N\cdot(α/2+x)\rightarrow$$

$$\Sigma τ_A=-1000\cdot 0{,}5 - 400\cdot 1+600\cdot 0{,}5+1000\cdot 0{,}7 =+100N\cdot m$$

Όταν λοιπόν επιταχύνεται μεταφορικά ο κύβος χωρίς να περιστρέφεται, η συνολική ροπή είναι μηδέν, μόνο ως προς το κέντρο μάζας Ο και όχι ως προς οποιοδήποτε σημείο.

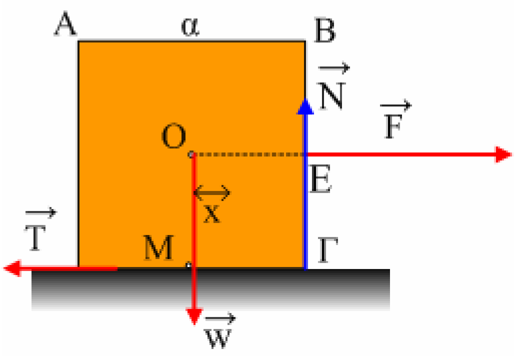
Παράδειγμα 4^o:

Και πότε μπορεί να ανατραπεί ο κύβος;

Αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης F. Ποια η ελάχιστη τιμή του μέτρου της F για την οποία ο κύβος ανατρέπεται;

Απάντηση:

Είδαμε ότι αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης η κάθετη αντίδραση N απομακρύνεται από το μέσον M της βάσης προς τα δεξιά. Συνεπώς θα έλθει κάποια στιγμή που θα ασκείται στην κορυφή Γ, όπως στο σχήμα.



Στην κατάσταση αυτή ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ανατραπεί. Στην πραγματικότητα ακουμπά στο έδαφος μόνο κατά μήκος της ακμής που περνά από την κορυφή Γ.
Όταν ο κύλινδρος θα ανατραπεί σημαίνει ότι θα περιστραφεί γύρω γύρω από άξονα που περνά από το Γ και για να συμβεί αυτό πρέπει η δεξιόστροφη ροπή της F να είναι μεγαλύτερη της αριστερόστροφης ροπής του βάρους, κατά μέτρο (οι ροπές της N και της τριβής είναι μηδενικές):

$$F \cdot \alpha/2 > w \cdot \alpha/2 \rightarrow$$

$$F > w$$

Συνεπώς πρέπει η δύναμη F να είναι μεγαλύτερη από 1000N, ώστε να ανατραπεί ο κύβος.

dmargaris@sch.gr

Και αν η σκάλα γλιστράει;

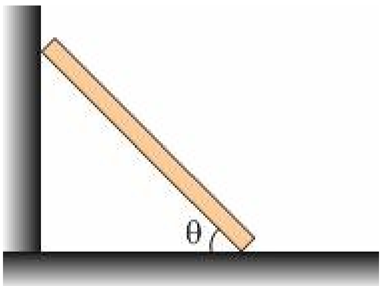
Αυστηρώς Ακατάλληλη ……… για μαθητές.

Μόνο για καθηγητές.

Από ανώνυμο αναγνώστη ζητήθηκε να λυθεί μια άσκηση σαν το πρόβλημα 4.58 του βιβλίου στην περίπτωση που η σκάλα ολισθαίνει.

Στο μεταξύ μεσολάβησε η ανάρτηση **Ολίσθηση ράβδου.** της συναδέλφου Ελευθερίας Νασίκα με παρόμοιο θέμα και η οποία προτείνεται να μελετηθεί πριν την παρούσα ά-σκηση.

Μια ομογενής ράβδος μήκους l αφήνεται από την κατακόρυφη θέση να ολισθήσει, σε επαφή με ένα κατακόρυφο λείο τοίχο, μέχρι να φτάσει στο επίσης λείο έδαφος.



Ζητούνται σε συνάρτηση με την γωνία θ που σχηματίζει η ράβδος με το έδαφος:

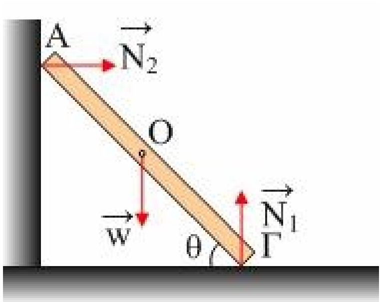
1) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου.

2) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

Δίνεται $I_{cm}=ml^2/12$.

Απάντηση:

1) Έστω η ράβδος σε μια τυχαία θέση που σχηματίζει γωνία θ με το έδαφος. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω της.



Από τον 2^o Νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση παίρνουμε:

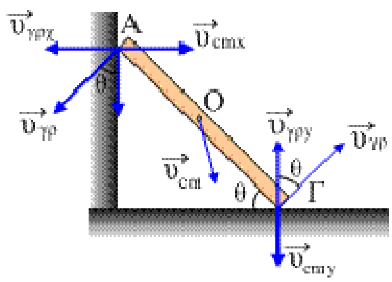
$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_x \rightarrow N_2 = m\cdot\alpha_x \ (1)$$

$$\Sigma F_y = m\cdot\alpha_y \rightarrow w - N_1 = m\cdot\alpha_y \ (2)$$

Ενώ αντίστοιχα για την στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$N_\Gamma \frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\theta - N_2 \frac{l}{2}\eta\mu\theta = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (3)$$



Για το σημείο A:

$$\Sigma\upsilon_x = 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_{cmx} = \upsilon_{\gamma\rho x} = \upsilon_{\gamma\rho}\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$\upsilon_{cmx} = \omega R\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$\upsilon_{cmx} = \omega\frac{l}{2}\eta\mu\theta \ \ (4)$$

Για το άκρο Γ:

$$\Sigma \upsilon_y = 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_{cmy} = \omega R \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$\upsilon_{cmy} = \omega \frac{l}{2} \sigma\upsilon\nu\theta \quad (5)$$

Από (4) και (5) έχουμε:

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\upsilon_{cmx}^2 + \upsilon_{cmy}^2} = \omega \frac{l}{2} \quad (6)$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής κατακόρυφης θέσης και της θέσης που φαίνεται στο σχήμα έχουμε, θεωρώντας στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Ο ως U=0 έχουμε:

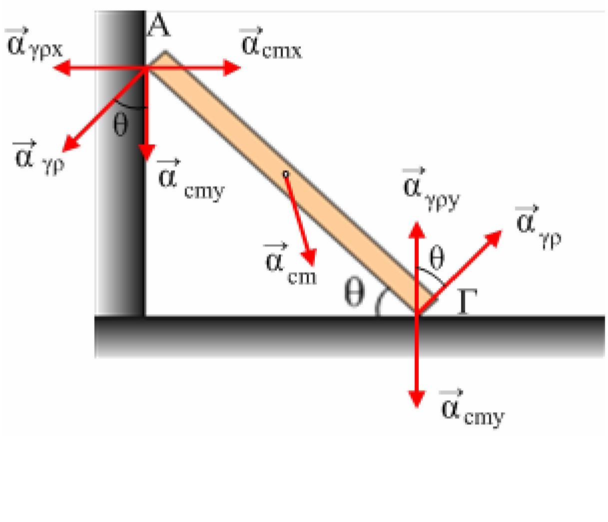
$$mg\frac{l}{2} = mg\frac{l}{2}\eta\mu\theta + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (7)$$

Από την (7) και (6) παίρνουμε:

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{3}{4}gl(1-\eta\mu\theta)} \quad \text{και}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\eta\mu\theta)}$$

2) Ομοίως για τις επιταχύνσεις με βάση το διπλανό σχήμα έχουμε:

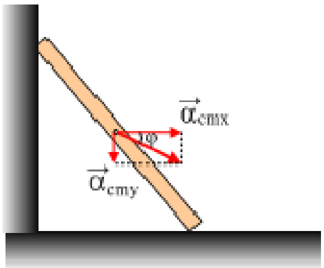


Για το άκρο Α:

$$\alpha_{cmx} = \alpha_{\gamma\rho x} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{1}{2}\eta\mu\theta \quad (8)$$

$$\alpha_{cmy} = \alpha_{\gamma\rho y} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta \quad (9)$$

Από τις (1), (2), (3) και (8), (9) παίρνουμε:



$$\alpha_{cmx} = \frac{3g}{4}\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\alpha_{cmy} = \frac{3g}{4}\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$\alpha_{cm} = \frac{3g}{4}\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\varepsilon\phi\phi = \sigma\phi\theta$$

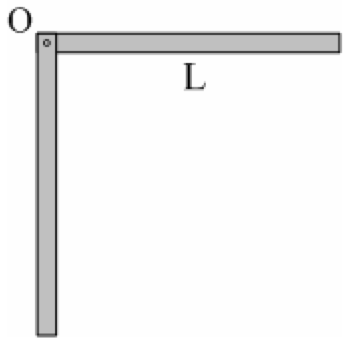
Από τον συνάδελφο Γιώργο Ρούση έλαβα ένα αρχείο, το οποίο μελετά το χάσιμο της επαφής της ράβδου με τον κατακόρυφο τοίχο, κατά την εξέλιξη της κίνησης, το οποίο μπορείτε να κατεβάσετε σε pdf, αλλά και ένα αρχείο Ip το οποίο αναπαριστά το φαινόμενο. Μπορείτε να κατεβάσετε και αυτό το αρχείο από εδώ.

Θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την προσφορά του αυτή.

dmargaris@sch.gr

Και αν θέλουμε τον χρόνο κίνησης;

Από τον συνάδελφο Θωμά Ζωνιόπουλο μια ερώτηση προσθήκη στο παρ. 4.12 του σχολικού βιβλίου, σελ. 128. Να τον ευχαριστήσω για την προσφορά του αυτή.



Ο χρόνος που χρειάστηκε η ράβδος για να μετακινηθεί από την οριζόντια στην κατακόρυφη θέση είναι:

α) $t<0.05π$ s β) $t=0.05π$ s γ) $t>0.05π$ s ;

Απάντηση:

Αν η κίνηση ήταν ομαλή στροφική με γωνιακή ταχύτητα $ω=10$ rad/s (όση υπολογίζεται ότι είναι στην κατακόρυφη θέση) τότε $φ=ωt$

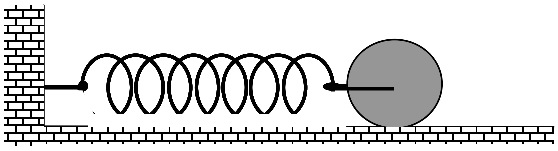
δηλαδή $π/2=ωt$ και $t=π/20$ s$=0.05π$ s

Προφανώς ο ζητούμενος χρόνος θα είναι μεγαλύτερος, άρα σωστό είναι το (γ).

Θωμάς Ζωνιόπουλος

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

1η Άσκηση

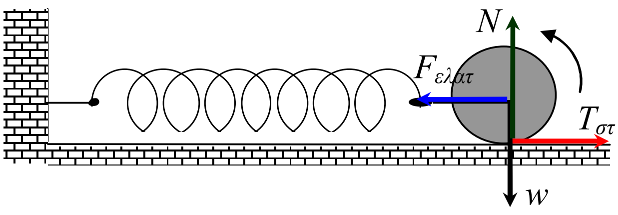


Ομογενής και συμπαγής κύλινδρος, μάζας M=200g και ακτίνας R=4cm, ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Το στερεό είναι συνδεδεμένο με ιδανικό οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k=30N/m μέσω του κυρίου άξονα συμμετρίας του (ο άξονας ο οποίος είναι κάθετος στη βάση του κυλίνδρου και διέρχεται από το κέντρο μάζας του). Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονα συμμετρίας του χωρίς τριβές.
Το ελατήριο αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση ελευθέρου μήκους και στη συνέχεια εκτρέπουμε τον κύλινδρο οριζόντια κατά απόσταση A=8cm και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Θεωρείστε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του ο κύλινδρος κυλίεται στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει.
i. Να δείξετε ότι το σύστημα ελατηρίου-κυλίνδρου θα εκτελέσει μεταφορικά απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A και να υπολογίσετε την σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης.
ii. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης-χρόνου της ταλάντωσης του συστήματος.
iii. Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.
iv. Δίνεται ότι ο συντελεστής οριακής τριβής κυλίνδρου-επιπέδου είναι $\mu_s=0{,}6$. Να βρείτε το άνω όριο του μεγίστου δυνατού πλάτους ταλάντωσης A_{max} του συστήματος για το οποίο δεν παρατηρείται ολίσθηση του στερεού στο οριζόντιο επίπεδο.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από τον άξονα περιστροφής του $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$.

Λύση:

i. Στην θέση ισορροπίας του συστήματος, η οποία ταυτίζεται και με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, ασκούνται:

- Το βάρος του κυλίνδρου w=mg
- Η κάθετη αντίδραση του δαπέδου N



Ο κύλινδρος ξεκινά από την ηρεμία στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης A και κινείται προς τ' αριστερά. Στην θέση τυχαίας απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας στον κύλινδρο ασκούνται:

- Το βάρος w=mg
- Η κάθετη αντίδραση του δαπέδου N
- Η δύναμη της στατικής τριβής $T_{στ}$, η οποία έχει κατεύθυνση προς τ' αριστερά, διότι ο κύλινδρος κυλίεται αριστερόστροφα και η δύναμη της στατικής τριβής είναι η μοναδική που μπορεί να δημιουργήσει αυτή την αριστερόστροφη ροπή
- Η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελατ}$ με φορά προς τ' αριστερά, αφού τείνει να επαναφέρει τον κύλινδρο προς την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Θεωρώντας θετικές απομακρύνσεις προς τα δεξιά, οπότε θετικές τις ροπές τις δεξιόστροφές, ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης και ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής γράφονται:

$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}$ (1)

$\Sigma F = M\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow T_{\sigma\tau} - F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = M\alpha cm \Rightarrow T_{\sigma\tau} - kx = M\alpha_{cm}$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε: $-kx = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = -\frac{2k}{3M}x$ (3)

Έτσι, η συνισταμένη των δυνάμεων στη τυχαία θέση απομάκρυνση x από την Θ.Ι. έχουμε:

$\Sigma F = M\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow \Sigma F = -M\frac{2k}{3M}x \Rightarrow \Sigma F = -\frac{2k}{3}x$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = \frac{2k}{3} \Rightarrow$ **D=20N/m**

ii. Ο κύλινδρος την χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στην θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης(x=+A) οπότε η ταλάντωσή του έχει αρχική φάση $\varphi_o = \frac{\pi}{2}rad$.

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,2}} \Rightarrow \omega = 10rad/s$$

Επομένως, η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης θα είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \mathbf{x = 0{,}08\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

iii. Ο κύλινδρος αποκτά τη μέγιστη μεταφορική ταχύτητά του στη θέση ισορροπίας και υπολογίζεται από τον τύπο: $u_{cm,max} = \omega A$.
Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει: $u_{cm} = \omega R$.
Επομένως, η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι:

$$\omega_{max} = \frac{u_{cm,max}}{R} = \frac{\omega A}{R} = \frac{10\cdot 0{,}08}{0{,}04} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_{max} = 20rad/s}$$

iv. Το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και δαπέδου από τις σχέσεις (1),(2) και (3) είναι:

$$T_{\sigma\tau} = -\frac{1}{2}M\alpha_{cm} = -\frac{1}{2}M\left(-\frac{2k}{3M}\right)x \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{1}{3}kx$$

Το μέτρο της οριακής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και δαπέδου είναι:

$$T_{o\rho} = \mu N = \mu Mg = 0{,}6\cdot 0{,}2\cdot 10 = 1{,}2N$$

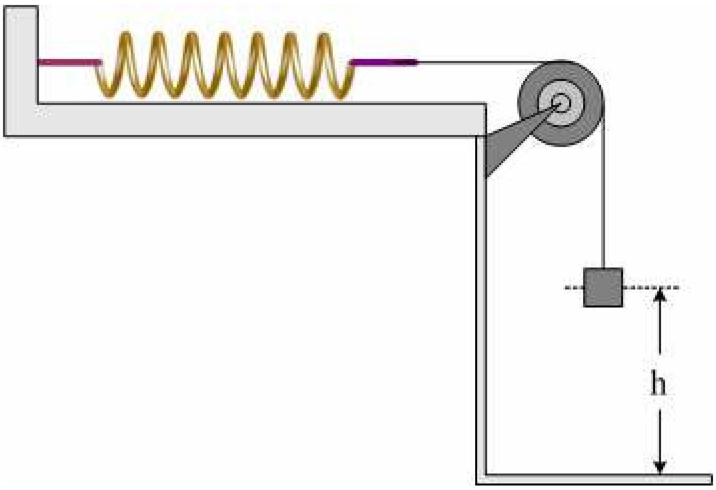
Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει εφόσον η στατική τριβή είναι μικρότερη ή ίση από την οριακή τριβή:

$$T_{\sigma\tau} \le T_{o\rho} \Rightarrow \frac{1}{3}kx \le T_{o\rho} \Rightarrow x \le \frac{3T_{o\rho}}{k} \Rightarrow A_{max} = \frac{3T_{o\rho}}{k} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}12m = 12cm}$$

Πέτρος Καραπέτρος

$2^η$ Άσκηση

Στο διπλανό σχήμα το ελατήριο δεν έχει μάζα, η σταθερά του ισούται με k=100N/m και το ένα του άκρο είναι δεμένο με αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο διέρχεται από το αυλάκι τροχαλίας μάζας M=4kg και ακτίνας R=0,15m. Στο άλλο άκρο του νήματος έχουμε δέσει ένα μικρό σώμα μάζας m=2kg το οποίο βρίσκεται σε ύψος h=1m από το έδαφος. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα αυτό υπολογίζεται από τον τύπο: $I=\frac{1}{2}MR^2$. Αρχικά κρατάμε ακίνητο το σώμα, ενώ το ελατήριο βρίσκεται στην κατάσταση φυσικού του μήκους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σώμα να κινηθεί.



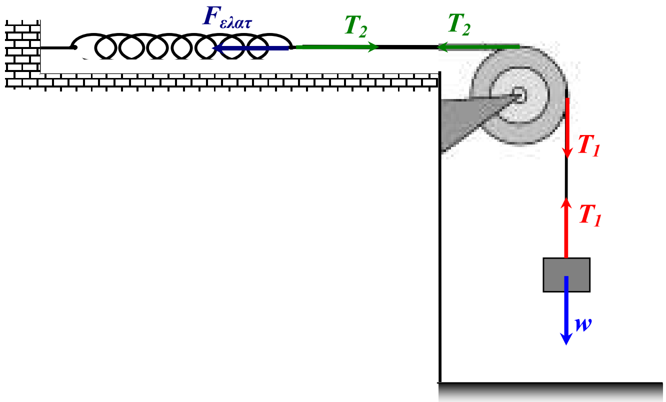
i. Να αποδειχθεί ότι το σύστημα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης.

ii. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος Σ όταν αυτό βρίσκεται σε ύψος h_1=80cm από το έδαφος.

iii. Να υπολογιστεί το μικρότερο ύψος από το έδαφος, στο οποίο θα κατέβει το σώμα Σ.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$.

Λύση:

i. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα θέση ισορροπίας του συστήματος(διπλανό σχήμα) και έχουμε:



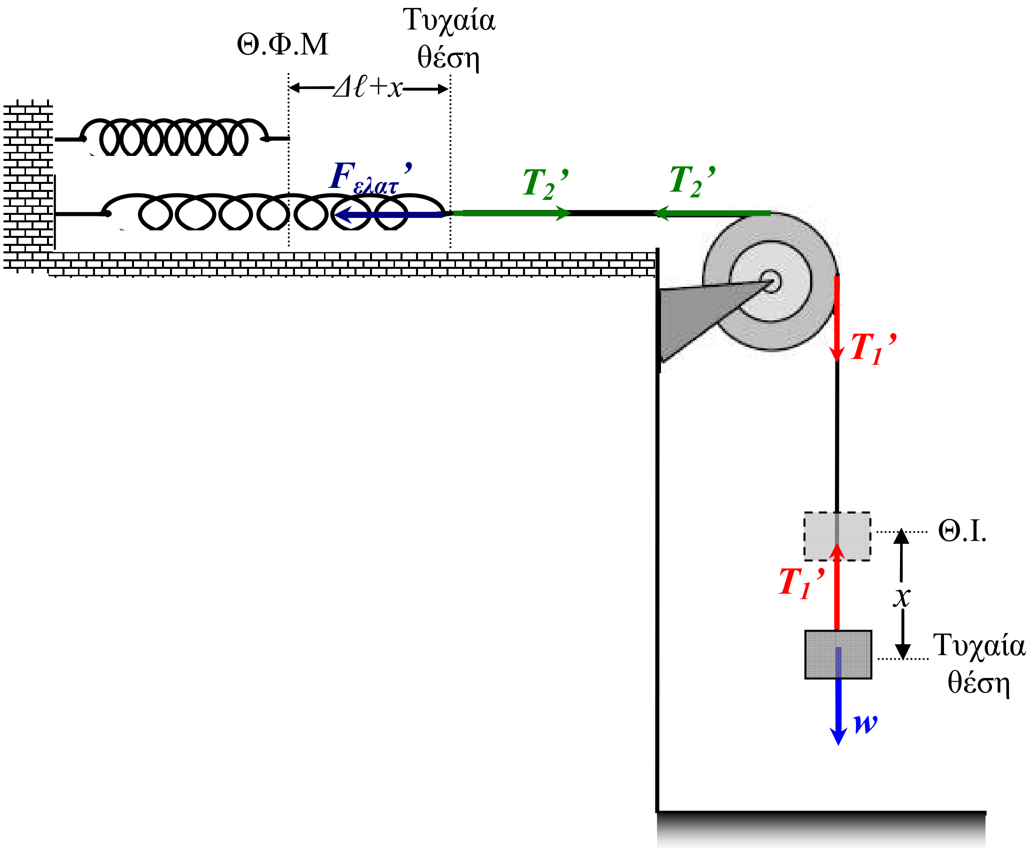
Για το σώμα: $ΣF=0 \Rightarrow w-T_1=0 \Rightarrow w=T_1$

Για την τροχαλία: $Στ=0 \Rightarrow T_1R-T_2R=0 \Rightarrow T_1=T_2$

Για το ελατήριο: $ΣF=0 \Rightarrow F_{ελατ}=T_2 \Rightarrow T_2=k \cdot Δ\ell$

Άρα $w=kΔ\ell$ (1)

Για την θέση τυχαίας απομάκρυνσης x κάτω από την θέση ισορροπίας έχουμε:



Για το ελατήριο: $\Sigma F = m_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_2' - F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}' = 0 \Rightarrow T_2' = k(\Delta\ell + x)$ (2)

Για την τροχαλία: $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1'R - T_2'R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$

και επειδή η επιτρόχια (εφαπτομενική) επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας ι-σούται με την επιτάχυνση του σώματος Σ θα είναι $\alpha_{cm} = \alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ οπότε:

$$T_1' - T_2' = \frac{1}{2} M\alpha_{cm} \ (3)$$

Για το σώμα: $\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow w - T_1' = m\alpha_{cm}$ (4)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) έχουμε:

$$T_1' - T_2' + w - T_1' = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\alpha_{cm} \Rightarrow w - T_2' = \left(\frac{M + 2m}{2}\right)\alpha_{cm}$$

και λόγω της σχέσης (2)

$$w - k(\Delta\ell + x) = \left(\frac{M + 2m}{2}\right)\alpha_{cm} \Rightarrow w - k\Delta\ell - kx = \left(\frac{M + 2m}{2}\right)\alpha_{cm}$$

και λόγω της (1)

$$\alpha_{cm} = -\frac{2k}{M+2m}x$$

Επομένως για την συνισταμένη των δυνάμεων στη θέση τυχαίας απομάκρυνσης x ισχύει:

$$\Sigma F = w - T_1' = m\alpha_{cm} = -m\frac{2k}{M+2m}x \Rightarrow \Sigma F = -\frac{2km}{M+2m}x = -Dx$$

Άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς

$$D = \frac{2km}{M+2m} = \frac{2\cdot 100\cdot 2}{4+2\cdot 2} = 50N/m$$

Η περίοδος ταλάντωσης θα είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{50}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}s \Rightarrow \mathbf{T = 0,4\pi s}$$

ii. Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. από την αρχική κατάσταση όπου το σώμα βρίσκεται σε ύψος h=1m μέχρι την χρονική στιγμή που απέχει από το έδαφος h_1=80cm.

$$E_{αρχ} = E_{τελ}$$

$$\Rightarrow K_{μετ,αρχ} + K_{περ,αρχ} + U_{ελατ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ} = K_{μετ,αρχ} + K_{περ,αρχ} + U_{ελατ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad mgh \quad = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(h-h_1)^2 + mgh_1$$

$$\Rightarrow \quad mg(h-h_1) - \frac{1}{2}k(h-h_1)^2 = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad mg(h-h_1) - \frac{1}{2}k(h-h_1)^2 = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{4}Mu_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad mg(h-h_1) - \frac{1}{2}k(h-h_1)^2 = \frac{1}{2}2u_{cm}^2 + \frac{1}{4}4u_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot 10\cdot (1-0,8) - \frac{1}{2}\cdot 100\cdot (1-0,8)^2 = 2\cdot u_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad 4 - 2 = 2u_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{u_{cm} = 1m/s}$$

iii. Στην θέση όπου το σώμα απέχει την μικρότερη απόσταση από το έδαφος η ταχύτητά του στιγμιαία μηδενίζεται (ουσιαστικά πρόκειται για την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα). Έστω h_2 το ελάχιστο ύψος του σώματος από το έδαφος. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε.

$$E_{αρχ} = E_{τελ}$$

$$\Rightarrow K_{μετ,αρχ} + K_{περ,αρχ} + U_{ελατ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ} = K_{μετ,αρχ} + K_{περ,αρχ} + U_{ελατ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad mgh \quad = 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad \frac{1}{2}k(h-h_2)^2 \; + mgh_2$$

$$\Rightarrow mg(h - h_2) = \frac{1}{2}k(h-h_2)^2 \;\Rightarrow\; h - h_2 = \frac{2mg}{k} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10}{100} \Rightarrow 1 - h_2 = 0{,}4$$

$$\Rightarrow \mathbf{h_2 = 0{,}6m}$$

Πέτρος Καραπέτρος

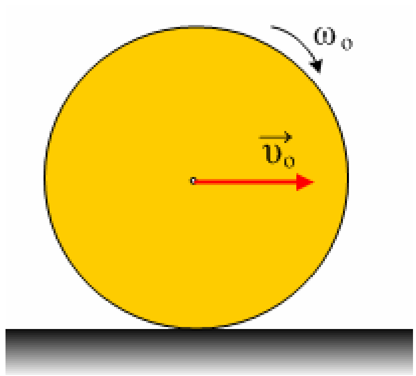
ΚΙΝΗΣΗ ΜΠΑΛΑΣ ΜΠΙΛΙΑΡΔΟΥ

Μπάλα μπιλιάρδου που θεωρείται σφαίρα μάζας M ακτίνας R, ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Χτυπάμε ακαριαία τη μπάλα σε ύψος h πάνω από το κέντρο μάζας της , οπότε αποκτά ορμή p. Να μελετηθεί η κίνησή της.

Δίνεται η ροπή αδράνειας σφαίρας ως προς μια διάμετρό της: $I=\frac{2}{5}MR^2$

ΛΥΣΗ Επειδή το χτύπημα (ώθηση) δεν περνά από το κέντρο μάζας της μπάλας, θα εκτελέσει ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Το κέντρο μάζας αμέσως μετά το χτύπημα αποκτά ταχύτητα:

$$p=M\upsilon_o \Rightarrow \upsilon_o=\frac{p}{M},$$



ενώ ταυτόχρονα αποκτά γωνιακή ταχύτητα:

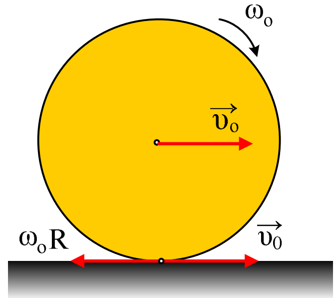
$$L=ph=I\omega_o \Rightarrow \omega_o=\frac{ph}{\frac{2}{5}MR^2} \Rightarrow \omega_o=\frac{5ph}{2MR^2}$$

Το σημείο επαφής σφαίρας δαπέδου έχει αρχική ταχύτητα:

$$\upsilon=\upsilon_o-\omega_o R=\frac{p}{M}-\frac{5ph}{2MR^2}R \Rightarrow \upsilon=\frac{p}{M}(1-\frac{5h}{2R}) \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Α) $1-\frac{5h}{2R}=0 \Rightarrow 1=\frac{5h}{2R} \Rightarrow h=\frac{2R}{5}$

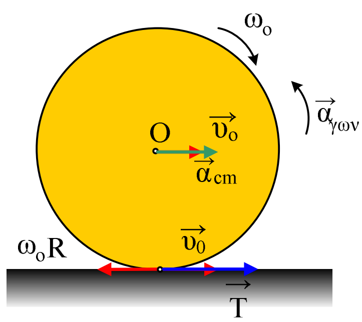


Το σημείο επαφής σφαίρας δαπέδου έχει μηδενική ταχύτητα ($\upsilon_o=\omega_o R$) οπότε η μπάλα αρχίζει αμέσως να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Β) $1-\frac{5h}{2R}<0 \Rightarrow h>\frac{2R}{5}$.

Σε αυτή την περίπτωση το σημείο επαφής σφαίρας δαπέδου έχει ταχύτητα αντίρροπη της Uo ($\upsilon_o<\omega_o R$), οπότε εμφανίζεται τριβή ολίσθησης μεταξύ μπάλας-δαπέδου ομόρροπη με την Uo.

Η τριβή επιταχύνει τη μεταφορική κίνηση:



$$\Sigma F = T = Ma_{cm} \Rightarrow \mu Mg = Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \mu g = \sigma\tau\alpha\theta$$

Η στιγμιαία τιμή της μεταφορικής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο εκφράζεται:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_o + a_{cm}t = \upsilon_o + \mu gt \qquad (2)$$

Η ροπή της τριβής επιβραδύνει την περιστροφική κίνηση. Για την περιστροφική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = \frac{2}{5}MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mu Mg = \frac{2}{5}MRa_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{5\mu g}{2R} = \sigma\tau\alpha\theta$$

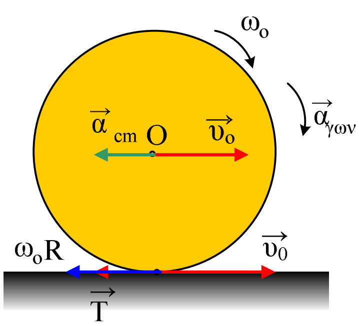
Η στιγμιαία τιμή της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο εκφράζεται:

$$\omega = \omega_o - a_{\gamma\omega\nu}t \Rightarrow \omega = \omega_o - \frac{5\mu g}{2R}t \qquad (3)$$

Η μπάλα αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει τη στιγμή όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σημείου επαφής σφαίρας-δαπέδου:

$$\upsilon = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow \upsilon_o + \mu gt = \omega_o R - \frac{5\mu g}{2R}Rt \Rightarrow \frac{7}{2}\mu gt = \omega_o R - \upsilon_o \Rightarrow$$
$$\frac{7}{2}\mu gt = \frac{p}{M}(\frac{5h}{2R} - 1) \Rightarrow t = \frac{2p}{7\mu Mg}(\frac{5h}{2R} - 1)$$

Γ) $1 - \frac{5h}{2R} > 0 \Rightarrow h < \frac{2R}{5}$. Σε αυτή την περίπτωση το σημείο επαφής σφαίρας δαπέδου έχει ταχύτητα ομόρροπη της Uo ($\upsilon_o > \omega_o R$), οπότε εμφανίζεται τριβή ολίσθησης μεταξύ μπάλας-δαπέδου αντίρροπη με την Uo.



Η τριβή επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F = T = Ma_{cm} \Rightarrow \mu Mg = Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \mu g = \sigma\tau\alpha\theta$$

Η στιγμιαία τιμή της μεταφορικής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο εκφράζεται:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_o - a_{cm}t = \upsilon_o - \mu gt \qquad (4)$$

Η ροπή της τριβής επιταχύνει την περιστροφική κίνηση. Για την περιστροφική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = \frac{2}{5}MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mu Mg = \frac{2}{5}MRa_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{5\mu g}{2R} = \sigma\tau\alpha\theta$$

Η στιγμιαία τιμή της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο εκφράζεται:

$$\omega = \omega_o + a_{\gamma\omega\nu} t \Rightarrow \omega = \omega_o + \frac{5\mu g}{2R} t \quad (5)$$

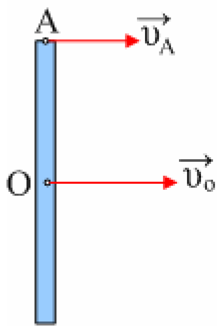
Η μπάλα αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει τη στιγμή όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σημείου επαφής σφαίρας-δαπέδου:

$$\upsilon = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow \upsilon_o - \mu g t = \omega_o R + \frac{5\mu g}{2R} R t \Rightarrow \frac{7}{2}\mu g t = \upsilon_o - \omega_o R_o \Rightarrow$$

$$\frac{7}{2}\mu g t = \frac{p}{M}(1 - \frac{5h}{2R}) \Rightarrow t = \frac{2p}{7\mu M g}(1 - \frac{5h}{2R})$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

Κίνηση ράβδου.



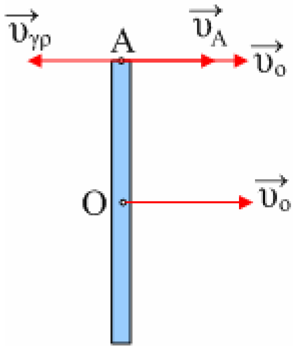
Μια ομογενής δοκός μήκους l=2m κινείται ελεύθερα οριζόντια πάνω σε μια παγωμένη λίμνη, χωρίς τριβές και για t=0 δίνονται οι ταχύτητες του μέσου Ο και του άκρου Α, υ_0=10m/s και υ_A=4m/s αντίστοιχα. Να βρεθούν οι ταχύτητες των παραπάνω σημείων τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/6$s.

Απάντηση:

Αφού οι ταχύτητες των δύο σημείων είναι διαφορετικές, η δοκός δεν κάνει μεταφορική κίνηση. Αν έκανε μόνο στροφική κίνηση θα στρέφοταν γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο και η ταχύτητα του cm θα ήταν μηδενική. Συνεπώς η δοκός εκτελεί σύνθετη κίνηση με $\upsilon_{cm}=\upsilon_0$=10m/s και γωνιακή ταχύτητα ω. Έτσι το άκρο Α έχει και ταχύτητα ίδια με το Ο, υ_0 και γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$, όπου:

$$\vec{\upsilon}_A=\vec{\upsilon}_0+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$$

και αφού η ταχύτητα του Α είναι μικρότερη από την ταχύτητα υ_0, σημαίνει ότι οι δύο ταχύτητες έχουν αντίθετη φορά όπως στο παρακάτω σχήμα.



Συνεπώς:

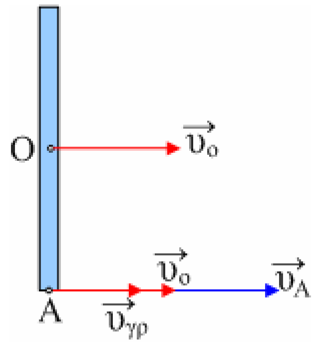
$$\upsilon_A=\upsilon_0-\omega R \rightarrow \omega=(\upsilon_0-\upsilon_A)/R=(10-4)/1 \text{ rad/s} = 6 \text{ rad/s},$$

αφού R=l/2 μιας και η δοκός στρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το Ο.

Μετά από χρόνο $t_1=\pi/6$s η δοκός έχει περιστραφεί κατά:

$$\theta=\omega t= \pi \text{ rad}$$

και η εικόνα είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.

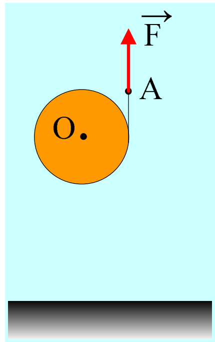


Συνεπώς η ταχύτητα του κέντρου Ο συνεχίζει να είναι είναι υ_0=10m/s, ενώ του Α είναι:

$$\upsilon_A=\upsilon_0+\omega R=10+6\cdot 1=16m/s.$$

dmargaris@sch.gr

Κινητική ενέργεια κυλίνδρου.



Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας m, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα. Τραβάμε το νήμα ασκώντας στο άκρο του Α σταθερή κατακόρυφη δύναμη F=mg/2, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε τον κύλινδρο να κινηθεί. Αν ως προς τον άξονα του κυλίνδρου $I= ½\ m\cdot R^2$ και ο κύλινδρος μετατοπισθεί κατακόρυφα κατά h, τότε η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου θα είναι ίση:

i) με το έργο του βάρους.

ii) με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας του κυλίνδρου.

iii) με 2mgh

iv) με 1,5mgh.

Απάντηση:

Σωστή πρόταση είναι η iv)

Για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

$$\Sigma F=m\alpha_{cm} \rightarrow mg\text{-}F=ma_{cm} \rightarrow \alpha_{cm}= g/2$$

Με φορά προς τα κάτω.

Για την στροφική κίνηση:

$$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$FR= ½\ mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}= g/R$$

Παίρνοντας το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi}= W_w+ W_F + W_{\tau F} \quad (1)$$

Όπου W_F το έργο της δύναμης για την μεταφορική προς τα κάτω κίνηση, ενώ $W_{\tau F}$ το έργο της ροπής της δύναμης. Έτσι η (1) γίνεται:

$$K= mgh - F\cdot h + F\cdot R\theta \ (2)$$

Αλλά h= ½ $\alpha_{cm}\cdot t^2$ και θ= ½ $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2$, οπότε με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{\theta}{h} = \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{\alpha_{cm}} = \frac{2}{R} \rightarrow \theta R = 2h$$

και η (2) γίνεται:

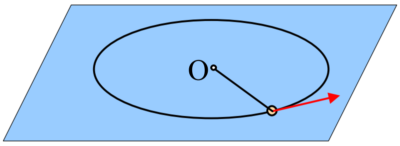
$$K = mgh - \tfrac{1}{2}\, mgh + \tfrac{1}{2}\, mg\cdot 2h = \frac{3}{2} mgh$$

dmargaris@sch.gr

Κυκλική κίνηση

Τι πρέπει να ξέρει ένας μαθητής πριν αρχίσει να διδάσκεται την Μηχανική στερεού, από την κυκλική κίνηση υλικού σημείου, την οποία διδάχτηκε ή θα έπρεπε να διδαχτεί στην Α΄Λυκείου.

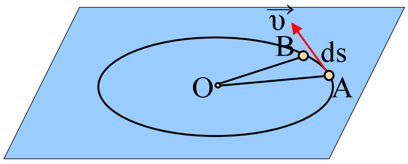
Ένα υλικό σημείο εκτελεί κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο, με ακτίνα R γύρω από το σημείο Ο, όπως στο σχήμα.



Πώς μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση του υλικού σημείου; Με δύο διαφορετικούς τρόπους:

<u>1) Με χρήση γραμμικών μεγεθών.</u>

Ποια είναι αυτά; Το μήκος του τόξου που διαγράφει σε κάποιο χρονικό διάστημα, τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του τόξου αυτού, που είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου, και του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητάς του, δηλαδή η επιτάχυνσή του.



Αναφερόμενοι λοιπόν στο παραπάνω σχήμα, αν το σώμα σε χρόνο dt μετακινείται από τη θέση Α στην Β διαγράφοντας το τόξο ds, ορίζουμε την ταχύτητά του (που από εδώ και πέρα θα ονομάζουμε γραμμική ταχύτητα) από την σχέση:

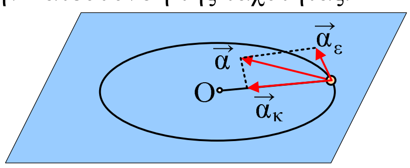
$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Η γραμμική ταχύτητα είναι πάνω στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, εφαπτόμενη στον κύκλο (πράγμα που σημαίνει κάθετη στην ακτίνα σε κάθε σημείο).

Η ταχύτητα του υλικού σημείου σε μια κυκλική κίνηση μεταβάλλεται ΠΑΝΤΑ. Ακόμη και αν το μέτρο της παραμένει σταθερό θα αλλάζει η κατεύθυνσή της, αφού θα είναι πάντα εφαπτόμενη του κύκλου. Συνεπώς πάντα υπάρχει επιτάχυνση. Ορίζεται από την γνωστή σχέση:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Ενώ η κατεύθυνσή της είναι προς το εσωτερικό μέρος της κυκλικής τροχιάς. Η επιτάχυνση αυτη μεταβάλλει και το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας. Μπορούμε λοιπόν να αναλύσουμε την επιτάχυνση αυτή σε δύο συνιστώσες. Μια στη διεύθυνση της ταχύτητας, η οποία θα μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας και μια κάθετη στην ταχύτητα με φορά προς το κέντρο του κύκλου, η οποία μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας.



Η συνιστώσα $\boldsymbol{\alpha_\varepsilon}$ που είναι κάθετη στην ακτίνα ονομάζεται **επιτρόχια επιτάχυνση** και αν έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα θα είναι υπεύθυνη για την αύξηση του μέτρου της ταχύτητας (επιταχυνόμενη κίνηση), ενώ αν έχει αντίθετη φορά, θα μειώνει το μέτρο της ταχύτητας (επιβραδυνόμενη κίνηση).

Η συνιστώσα $\boldsymbol{\alpha_\kappa}$ ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση** το μέτρο της οποίας δίνεται από την εξίσωση:

$$a_{\kappa} = \frac{\upsilon^2}{R}$$

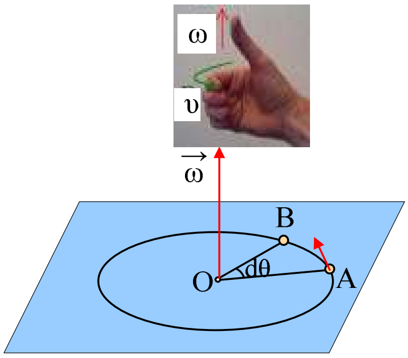
Να τονίσουμε ότι αυτή ευθύνεται για την αλλαγή στην κατεύθυνση της ταχύτητας, είναι αυτή που κρατά το σώμα σε κυκλική τροχιά.

Είναι προφανές ότι για έχει το σώμα επιτάχυνση, θα πρέπει να δέχεται και αντίστοιχη συνισταμένη δύναμη, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμου του Νεύτωνα. Δηλαδή η συνισταμένη θα έχει την κατεύθυνση της επιτάχυνσης και συνεπώς και αυτή θα μπορούσαμε να την αναλύσουμε επίσης σε δύο συνιστώσες, μια εφαπτομενική $\boldsymbol{\Sigma F_\varepsilon = m \cdot a_\varepsilon}$ και μια προς το κέντρο του κύκλου, την οποία λέμε και κεντρομόλο δύναμη, $\boldsymbol{\Sigma F_R = m \cdot a_\kappa}$.

<u>2) Με χρήση γωνιακών μεγεθών.</u>

Αν το υλικό μας σημείο μετακινείται από την θέση (A) στη θέση (B), η επιβατική ακτίνα (η ακτίνα που δίνει κάθε στιγμή τη θέση του κινητού) διαγράφει την επίκεντρη γωνία dθ. Γνωρίζοντας λοιπόν τη γωνία που διαγράφει το κινητό γνωρίζουμε κάθε στιγμή και την θέση του.

Μπορούμε και εδώ να ορίσουμε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η παραπάνω γωνία. Το μέγεθος που προκύπτει ονομάζεται ***Γωνιακή ταχύτητα***. Αυτή είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, στο κέντρο του κύκλου, με φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως στο σχήμα:



Και το μέτρο της οποίας θα είναι:

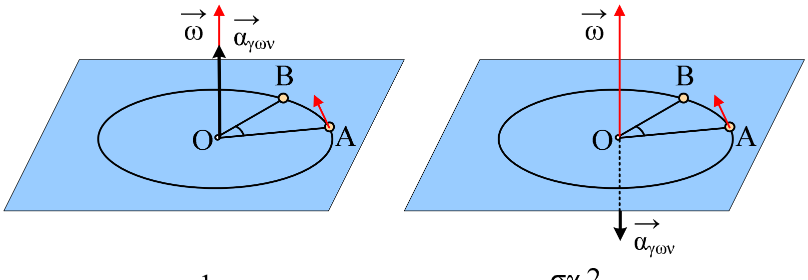
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

με μονάδα μέτρησης το 1 rad/s.

Αν μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα, τότε ορίζουμε το ρυθμό μεταβολής της, τον οποίο ονομάζουμε ***γωνική επιτάχυνση***:

$$\vec{a}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση είναι επίσης κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς στο κέντρο του κύκλου, ενώ η φορά της μπορεί να είναι ίδια με την φορά της γωνιακής ταχύτητας (σχ.1) ή αντίθετης φοράς (σχ.2). Στην πρώτη περίπτωση η γωνιακή ταχύτητα του σώματος αυξάνεται (επιταχυνόμενη κίνηση) ενώ στην δεύτερη μειώνεται (επιβραδυνόμενη κίνηση).



σχ.1 σχ.2

3) Πώς συνδέονται τα παραπάνω μεγέθη;

Η επίκεντρη γωνία dθ και το αντίστοιχο μήκος του τόξου στο οποίο βαίνει συνδέονται με την σχέση:

$$d\theta = \frac{ds}{R} \quad (1)$$

Παρατηρείστε ότι η γωνία είναι αδιάστατο μέγεθος, συνεπώς δεν έχει μονάδες. Καταχρηστικά και για λόγους διευκόλυνσης μετράμε τις γωνίες σε rad, όπου όταν μια επίκεντρη γωνία βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου, λέμε ότι είναι ίση με 1 ακτίνιο (rad).

Από την (1) και δουλεύοντας με **μέτρα** παίρνουμε:

$$ds = d\theta \cdot R \rightarrow$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \rightarrow$$

$$\upsilon = \omega \cdot R \ (2)$$

Προσέξτε ότι η σχέση (2) συνδέει τα μέτρα της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας. Μην ξεχνάμε ότι τα διανύσματα είναι όπως λέμε ασύμβατα κάθετα. Το ένα οριζόντιο το άλλο κατακόρυφο, χωρίς να περνάνε από το ίδιο σημείο.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \rightarrow$$

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3)$$

Βλέπουμε ότι το dυ/dt είναι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας που συνδέεται με την επιτρόχια επιτάχυνση. Προσοχή λοιπόν και η σχέση (3) συνδέει επίσης **τα μέτρα** της επιτρόχιας και της γωνικής επιτάχυνσης.

4) Δύο εύκολες κυκλικές κινήσεις.

Α) Ομαλή κυκλική κίνηση:

Αν το υλικό μας σημείο στρέφεται με ταχύτητα σταθερού μέτρου, τότε η κίνηση ονομάζεται ομαλή κυκλική κίνηση. Αλλά τότε δεν θα υπάρχει επιτρόχια επιτάχυνση και θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow$$

$\Delta s = \upsilon \cdot \Delta t$ και αν $t_0=0$ και $s_0=0$ θα είχαμε $s=\upsilon \cdot t$

Ή αναφερόμενοι σε γωνιακά μεγέθη, αφού η γραμμική ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο, από την σχέση (2) προκύπτει ότι και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας παραμένει σταθερό, οπότε αντίστοιχα θα έχουμε:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow$$

$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$ και αν $t_0=0$ και $\theta_0=0$ θα είχαμε και $\theta=\omega t$ (σας θυμίζει τίποτα;).

Β) Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση:

Αν ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερός, δηλαδή α_ε=σταθερή και η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, όπως προκύπτει από τη σχέση (3) και η κίνηση θα είναι είτε κυκλική ομαλά επιταχυνόμενη, είτε κυκλική ομαλά επιβραδυνόμενη και τότε:

Για τα γραμμικά μεγέθη θα ισχύουν οι γνωστές μας σχέσει για το μέτρο της ταχύτητας και για το μήκος του διανυόμενου τόξου:

$\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha_\varepsilon \cdot t$ και $\Delta s = \upsilon_0 \cdot t \pm ½ \alpha_\varepsilon \cdot t^2$.

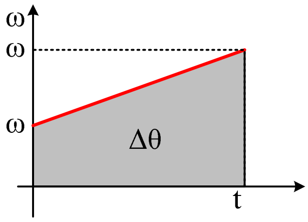
Ενώ όσον αφορά τα γωνιακά μεγέθη θα έχουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow$$

$\omega=\omega_0 \pm \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t$ και αν $t_0=0$ θα έχουμε:

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \ (4)$$

Αν τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο (για την επιταχυνόμενη κίνηση) παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:



όπου το εμβαδόν του γκριζαρισμένου τραπεζίου είναι αριθμητική ίσο με την γωνία:

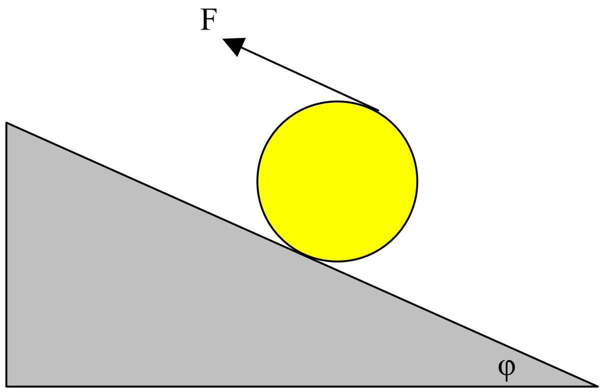
$$\Delta\theta = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = \frac{\omega_0 + \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} t}{2} \rightarrow$$

και αν $\theta_0=0$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$

dmargaris@sch.gr

Κύλιση δίσκου

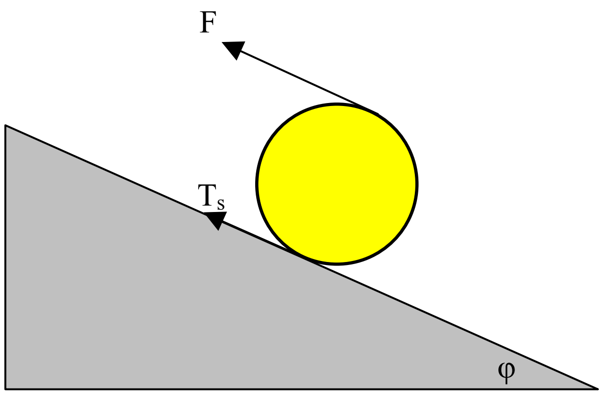


Ο δίσκος του σχήματος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου με την επίδραση της δύναμης F στο ανώτερο σημείο του και παράλληλα του πλαγίου επιπέδου. Αν γνωρίζετε ότι: F=0,55mg, φ=30°, $g=10m/s^2$, m=1kg, R=0,5m και $I_{cm}=\frac{1}{2}mR^2$ αφού δικαιολογήσετε την φορά της στατικής τριβής να υπολογίσετε:

1. Την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου καθώς και τη στατική τριβή που ενεργεί στο δίσκο.
2. Τη μεταβολή της στροφορμής του δίσκου κατά τη διάρκεια $\Delta t= t_2 - t_1 =2s$.
3. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου λόγω περιστροφικής κίνησης τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.
4. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου λόγω μεταφορικής κίνησης τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.
5. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.
6. Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.
7. Την ισχύ της F τη χρονική στιγμή $t_1= 2s$.

Λύση

Η στατική τριβή δρα έτσι ώστε να επιτυγχάνεται κύλιση χωρίς ολίσθηση. Επομένως εάν υπολογίσουμε τις επιταχύνσεις $\alpha_{\gamma\rho}$ και α_{cm} του δίσκου χωρίς να λάβουμε υπόψιν μας την ύπαρξη της T_s είναι προφανές ότι η φορά της T_s θα είναι ίδια με τη φορά της μικρότερης επιτάχυνσης.



$$\Sigma F_x=m\alpha_{cm}\rightarrow F\text{-}mg\eta\mu\varphi= m\alpha_{cm}\rightarrow$$

$$\alpha_{cm}=\frac{F}{m}-g\eta\mu\varphi$$

$$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\rightarrow FR=\frac{1}{2}mR^2$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}\rightarrow F=\frac{1}{2}m\alpha_{\gamma\rho}\rightarrow\alpha_{\gamma\rho}=\frac{2F}{m}.\ \text{Άρα}\ \alpha_{cm}<\alpha_{\gamma\rho}$$

Επομένως η T_s θα έχει φορά προς τα πάνω.

1) $\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \rightarrow F + T_s - mg\eta\mu\varphi = m\alpha_{cm}$

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow FR - T_sR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow R(F - T_s) = \frac{1}{2}mR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \rightarrow F - T_s = \frac{1}{2}m\alpha_{cm}$.

Από αυτά προκύπτει $\alpha_{cm} = 0,4g = 4m/s^2$.

2) Επειδή έχουμε σταθερό ρυθμό μεταβολής της στροφορμής μπορούμε να πούμε $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau \rightarrow \Delta L = \Sigma\tau.\Delta t \rightarrow \Delta L = I.$

$\alpha_{\gamma\omega\nu}.\Delta t = \frac{1}{2}mR^2\frac{\alpha_{cm}}{R}\Delta t = \frac{1}{2}mR\alpha_{cm}\Delta t = \frac{1}{2}.1.0,5.4.2 = 2kg.m^2/s$.

3) $\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = \Sigma\tau.\omega = (FR - T_sR)\omega = (F - T_s)R\alpha_{\gamma\omega\nu}t = \frac{1}{2}m\alpha_{cm}R\alpha_{\gamma\omega\nu}t = \frac{1}{2}m\alpha_{cm}{}^2t = 16J/s$

4) $\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = \Sigma F_x.\upsilon_{cm} = (F + T_s - mg\eta\mu\varphi)\,\upsilon_{cm} = m\alpha_{cm}.\alpha_{cm}t = 32J/s$

5) $\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} + \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = 48J/s$

6) $\frac{dU}{dt} = mg\eta\mu\varphi\,\upsilon_{cm} = mg\eta\mu\varphi\,\alpha_{cm}t = 40J/s$

7) $P_F = P_{F\mu\varepsilon\tau} + P_{F\pi\varepsilon\rho} = F.\upsilon_{cm} + \tau_F.\omega = F.\upsilon_{cm} + FR\omega = 2\,F.\upsilon_{cm} = 88J/s$.

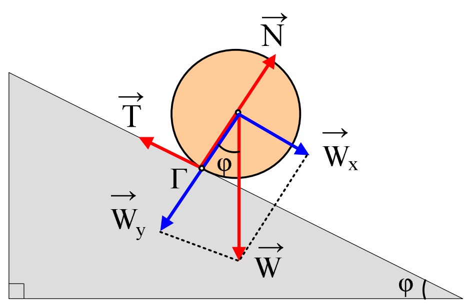
Ασημακόπουλος Χρήστος

ΚΥΛΙΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΠΛΑΓΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Σε ένα πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης φ **κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει** προς τα κάτω, ένα στερεό σώμα με κατανομή μάζας συμμετρική ως προς το κέντρο του. (Το στερεό μπορεί να είναι σφαίρα, συμπαγής κύλινδρος, κούφιος κύλινδρος). Έχει ενδιαφέρον να υπολογίσουμε την επιτάχυνση της μεταφορικής προς τα κάτω κίνησης με **τρεις διαφορετικούς τρόπους**, αποδεικνύοντας έτσι ότι οι διαφορετικές αυτές προσεγγίσεις παρουσιάζουν μεταξύ τους **πλήρη συνέπεια**.

<u>1) ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΑΞΟΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ</u>.

Η προσέγγιση αυτή του θέματος παρουσιάζει ενδιαφέρον για τους μαθητές της Γ' Λυκείου, αφού υπάρχουν αντίστοιχα θέματα και στο σχολικό βιβλίο. Ο βαθμός δυσκολίας είναι μάλλον περιορισμένος, αφού αποτελεί **θεμελιώδη γνώση** για κάθε σοβαρό υποψήφιο.



Στο σώμα ασκούνται το βάρος του W, το οποίο έχει αναλυθεί σε Wχ και Wψ συνιστώσα, η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή. Εφόσον το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει ότι: υ(cm)=ωR και α(cm)=α(γων)R. Η φορά της στατικής τριβής είναι προς τα πάνω, διότι πρέπει να προκαλέσει δεξιόστροφη ροπή ώστε να επιταχύνει την περιστροφική κίνηση.

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma F_x = W_x - T = Ma_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T = Ma_{cm} \qquad (1)$$

Η μόνη δύναμη που δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος είναι η στατική τριβή. Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την περιστροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma\tau = TR = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = I\frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow T = I\frac{a_{cm}}{R^2}$$ (2) όπου I η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του.

Υπενθυμίζεται ότι, ο θεμελιώδης νόμος της περιστροφικής κίνησης όταν ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται, ισχύει εφόσον ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας, είναι άξονας συμμετρίας και δεν αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$Mg\eta\mu\varphi = (M + \frac{I}{R^2})a_{cm} = (1 + \frac{I}{MR^2})Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{g\eta\mu\varphi}{1 + \dfrac{I}{MR^2}} \qquad (3)$$

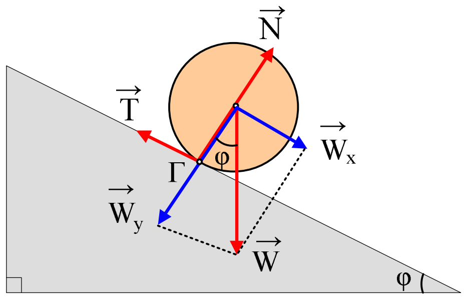
Για συμπαγή κύλινδρο όπου $I = \frac{1}{2}MR^2$ από την (3) έχουμε: $a_{cm} = \frac{g\eta\mu\varphi}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g\eta\mu\varphi$.

Για κούφιο κύλινδρο όπου $I = MR^2$ από την (3) έχουμε: $a_{cm} = \frac{g\eta\mu\varphi}{1+1} = \frac{1}{2}g\eta\mu\varphi$

Για σφαίρα όπου $I = \frac{2}{5}MR^2$ από την (3) έχουμε: $a_{cm} = \frac{g\eta\mu\varphi}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5}{7}g\eta\mu\varphi$

2) <u>ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΙΓΜΙΑΙΟ ΑΞΟΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ ΣΩΜΑΤΟΣ-ΔΑΠΕΔΟΥ</u>

Η προσέγγιση αυτή του θέματος παρουσιάζει **μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας**, απευθύνεται σε μαθητές που αναζητούν πληρέστερη πληροφόρηση από αυτή που δίνεται στο σχολικό και πιθανόν σε άλλα βιβλία, τα οποία αναφέρουν αλλά δεν εξηγούν το θέμα. Νομίζω ότι ο βαθμός δυσκολίας του θέματος ξεφεύγει από τα συνηθισμένα θέματα στις γενικές εξετάσεις, σαν προσέγγιση όμως παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και είναι απόλυτα συμβατή με την ύλη της Γ' Λυκείου.



Η κίνηση του στερεού μπορεί να θεωρηθεί σαν **περιστροφική αποκλειστικά** γύρω από **στιγμιαίο** άξονα που διέρχεται από το **σημείο επαφής (Γ)** του σώματος με το πλάγιο επίπεδο. Η διεύθυνση του άξονα περιστροφής είναι σταθερή, η θέση του όμως μετατοπίζεται προς τα κάτω στην επιφάνεια του πλάγιου επιπέδου.
Η επιτάχυνση της μεταφορικής κίνησης μπορεί να υπολογιστεί με χρήση του 2ου Νόμου του Νεύτωνα στη γενικευμένη μορφή του, απαιτώντας το **αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο (Γ) να είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως προς το σημείο αυτό.**

Η στροφορμή του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο (Γ) είναι ίση με: $L = I_\Gamma \omega$. Η ροπή αδράνειας ως προς τον ίδιο άξονα υπολογίζεται από το θεώρημα παράλληλων αξόνων: $I_\Gamma = I + MR^2$, όπου I η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής. Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα συνδέεται με τη στιγμιαία μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας με τη σχέση: $\upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R}$, αφού το κέντρο μάζας λόγω περιστροφής του στερεού εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R γύρω από το εκάστοτε σημείο επαφής σώματος-δαπέδου.

Η μόνη δύναμη που δημιουργεί ροπή ως προς το (Γ) είναι η συνιστώσα του βάρους στον άξονα X, τον παράλληλο στο πλάγιο επίπεδο, αφού οι φορείς όλων των άλλων δυνάμεων διέρχονται από το (Γ): $\Sigma\tau_{(\Gamma)} = W_x R = Mg\eta\mu\varphi R$.

Εφαρμόζοντας το 2ο Νόμο του Νεύτωνα στη γενικευμένη μορφή του, λαμβάνοντας υπόψη τα σταθερά μεγέθη έχουμε:

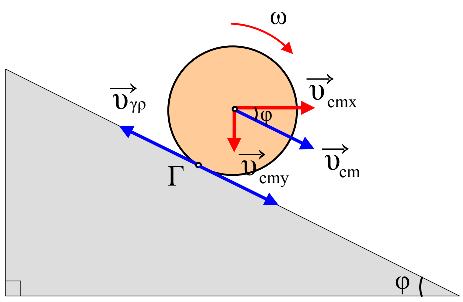
$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{(\Gamma)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(I + MR^2)\frac{\upsilon_{cm}}{R}\right] = Mg\eta\mu\varphi R \Rightarrow (\frac{I + MR^2}{R})\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = Mg\eta\mu\varphi R \Rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{Mg\eta\mu\varphi R^2}{I + MR^2} = \frac{Mg\eta\mu\varphi R^2}{MR^2(1 + \frac{I}{MR^2})} \Rightarrow a_{cm} = \frac{g\eta\mu\varphi}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

3) <u>ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ</u>

Σαν τρίτο τρόπο υπολογισμού της επιτάχυνσης της μεταφορικής κίνησης **χρησιμοποιούμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας**. Η προσέγγιση αυτή απευθύνεται κυρίως σε **συναδέλφους** (για να θυμηθούμε και τα φοιτητικά μας χρόνια) αφού γίνεται χρήση παραγώγου, κάτι που σε επίπεδο φυσικής Λυκείου αποφεύγεται χωρίς να απαγορεύεται, αλλά και σε μαθητές που θέλουν να γνωρίσουν κάτι διαφορετικό.

Η ολική-μηχανική ενέργεια του σώματος αποτελείται από την κινητική λόγω μεταφορικής κίνησης, την κινητική λόγω περιστροφικής κίνησης γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και τη δυναμική ενέργεια βαρύτητας:



$E_{o\lambda} = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} + U_{\beta\alpha\rho} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh$ (1) όπου h το ύψος πάνω από το οριζόντιο επίπεδο, το οποίο έχει εκλεγεί ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση, η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας έχει ίσο μέτρο με την ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης: $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = \upsilon_{cm}$, άρα το εκάστοτε σημείο επαφής σώματος δαπέδου έχει μηδενική ταχύτητα:

$$\vec{\upsilon_{\Gamma}} = \vec{\upsilon_{cm}} + \vec{\upsilon_{\gamma\rho}} \Rightarrow \upsilon_{\Gamma} = \upsilon_{cm} - \omega R = 0$$

Συνεπώς η στατική τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, οπότε δεν παράγει έργο. Έτσι διατηρείται η μηχανική ενέργεια του σώματος.

Αφού η ολική ενέργεια διατηρείται σταθερή, ο ρυθμός μεταβολής της , δηλαδή η χρονική της παράγωγος, είναι ίση με μηδέν. Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{dE_{o\lambda}}{dt} = \frac{1}{2}M\frac{d\upsilon_{cm}{}^2}{dt} + \frac{1}{2}I\frac{d\omega^2}{dt} + Mg\frac{dh}{dt} = 0$$

Αναλύοντας την ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης σε δύο συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη, για την κατακόρυφη ισχύει:

$$\upsilon_{\psi} = -\frac{dh}{dt} = \upsilon_{cm}\eta\mu\varphi \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\upsilon_{cm}\eta\mu\varphi$$

Άρα:

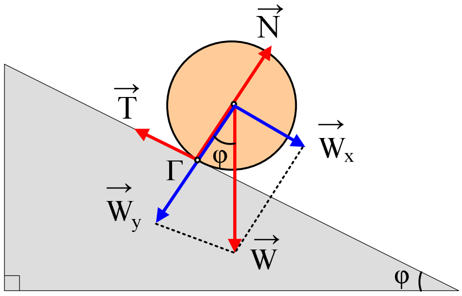
$$\frac{1}{2}M2\upsilon_{cm}\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}+\frac{1}{2}I2\omega\frac{d\omega}{dt}-Mg\upsilon_{cm}\eta\mu\varphi=0\Rightarrow M\upsilon_{cm}a_{cm}+I\frac{\upsilon_{cm}}{R}a_{\gamma\omega\nu}=Mg\upsilon_{cm}\eta\mu\varphi\Rightarrow$$
$$Ma_{cm}+\frac{I}{R^2}a_{cm}=Mg\eta\mu\varphi\Rightarrow Ma_{cm}(1+\frac{I}{MR^2})=Mg\eta\mu\varphi\Rightarrow a_{cm}=\frac{g\eta\mu\varphi}{1+\frac{I}{MR^2}}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Αν στην εκφώνηση της άσκησης **δεν αναφέρεται** ότι το σώμα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, τότε πρέπει να **εξετάσουμε τι είδους κίνηση** εκτελεί. Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Σε πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης φ=30 αφήνουμε σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R=0,1m. Αν η σφαίρα κυλίεται, να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας καθώς και τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας. Ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής που θεωρείται ίσος με το συντελεστή τριβής ολίσθησης, μεταξύ σφαίρας δαπέδου είναι μ=0,1. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι: $I=\frac{2}{5}MR^2$

Λύση



Έστω ότι η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Τότε:

$$\Sigma\tau=Ia_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow TR=\frac{2}{5}MR^2\frac{a_{cm}}{R}\Rightarrow T=\frac{2}{5}Ma_{cm}\Rightarrow Ma_{cm}=\frac{5T}{2}$$

αφού: $a_{cm}=a_{\gamma\omega\nu}R$. Επίσης:

$$Mg\eta\mu\varphi-T=Ma_{cm}\Rightarrow Mg\eta\mu\varphi-T=\frac{5T}{2}\Rightarrow Mg\eta\mu\varphi=\frac{7T}{2}\Rightarrow T=\frac{2}{7}Mg\eta\mu\varphi$$

Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει η τριβή να είναι στατική, δηλαδή μικρότερη από την οριακή στατική:

$$T<T_{o\rho}\Rightarrow\frac{2}{7}Mg\eta\mu\varphi<\mu N=\mu Mg\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow\mu>\frac{2}{7}\varepsilon\varphi\varphi\Rightarrow\mu>\frac{2}{7}\frac{\sqrt{3}}{3}=0,165$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού μ=0,1, άρα η σφαίρα κυλίεται και ταυτόχρονα ολισθαίνει. Η τριβή που δέχεται είναι τριβή ολίσθησης. Για τη μεταφορική κίνηση ισχύει:

$$W_x-T=Ma_{cm}\Rightarrow Mg\eta\mu\varphi-\mu Mg\sigma\upsilon\nu\varphi=Ma_{cm}\Rightarrow a_{cm}=g(\eta\mu\varphi-\mu\sigma\upsilon\nu\varphi)\Rightarrow a_{cm}=4,1\frac{m}{s^2}$$

Για την περιστροφική αντίστοιχα:

$$\Sigma\tau=TR=Ia_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\mu Mg\sigma\upsilon\nu\varphi R=\frac{2}{5}MR^2a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{5\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi}{2R}\Rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=21,65\frac{rad}{s^2}.$$

Προφανώς δεν ισχύει ότι $a_{cm} = a_{γων} R$. Η εφαπτομενική (παράλληλη στο πλάγιο επίπεδο) επιτάχυνση του σημείου επαφής σφαίρας-δαπέδου είναι:

$$a = a_{cm} - a_{\varepsilon} = a_{cm} - a_{γων} R \Rightarrow a = 4,1 - 2,165 = 1,935 \frac{m}{s^2}$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

ΚΥΛΙΣΗ ΚΑΙ DOPPLER

Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ, αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί ένα συμπαγή κύλινδρο μάζας 2kg και ακτίνας 0.2m, στο κέντρο του οποίου έχουμε προσαρμόσει δέκτη ηχητικών κυμάτων αμελητέας μάζας. Ένας πομπός ηχητικών κυμάτων βρίσκεται στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, σε διεύθυνση παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου και εκπέμπει κύματα συχνότητας 680Hz. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και ελάχιστα πριν φτάσει στη βάση του κεκλιμένου ο δέκτης μετρά τη συχνότητα των ηχητικών κυμάτων ίση με 688Hz.

α. Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου ο κύλινδρος.

β. Να βρεθεί το ύψος του κεκλιμένου επιπέδου από το οποίο αφέθηκε ο κύλινδρος.

γ. Να βρείτε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

δ. Να παραστήσετε γραφικά τη συχνότητα του ήχου που μετράει ο δέκτης ηχητικών κυμάτων μέχρι τη στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, σε συνάρτηση με το χρόνο t και να υπολογίσετε τη στροφορμή του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή που η συχνότητα που μετράει ο δέκτης είναι 684Hz.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_{cm}=1/2\ MR^2$, ημφ=0.3, $g=10m/s^2$ και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου ως προς τον ακίνητο αέρα $υ_{ηχ.}=340$ m/s.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Η συχνότητα που μετράει ο δέκτης κινούμενος προς την ακίνητη πηγή με ταχύτητα $υ_{cm}$ δίνεται από την σχέση :

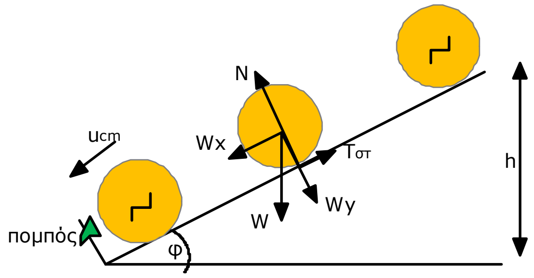
$$f_A = \frac{u_{ηχ} + u_{cm}}{u_{ηχ.}} f_S \Rightarrow 688 = \frac{340 + u_{cm}}{340} 680 \Rightarrow u_{cm} = 4m/s$$

β. Για την σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου στο κεκλιμένο επίπεδο εφαρμόζω την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας , γιατί η στατική τριβή παρόλο που είναι μη διατηρητική δύναμη δεν προκαλεί θερμικές απώλειες και το συνολικό της έργο είναι μηδενικό, άρα:

$E_{μηχ.(αρχ.)} = E_{μηχ.(τελ.)}$ ή

$K_A + U_A = K_T + U_T$ ή

$Mgh = 1/2 \cdot M \cdot u_{cm}^2 + 1/2 \cdot I_{cm} \cdot ω^2$ (1)



Λόγω της κύλισης : $u_{cm} = ω \cdot R \rightarrow ω = u_{cm}/R$

και $α_{cm} = α_{γων.} \cdot R \rightarrow α_{γων.} = α_{cm}/R$

Και τελικά από την (1) έχουμε :

$Mgh = 1/2 \cdot M \cdot u_{cm}^2 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot M \cdot R^2 \cdot (u_{cm}/R)^2$ ή

$gh = 3/4 \cdot u_{cm}^2$ ή

$h = 1.2m$

γ. Για την σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου

εφαρμόζουμε θεμελιώδη νόμο μεταφορικής και στροφικής κίνησης, δηλαδή :

$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\phi - T_{\sigma\tau.} = M \cdot a_{cm} (2) \text{ και}$$

$$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T_{\sigma\tau.} \cdot R = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T_{\sigma\tau.} = \frac{1}{2} M \cdot R \cdot a_{\gamma\omega\nu.} = \frac{1}{2} M \cdot a_{cm} (3)$$

Από (2) και (3) προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε :

$$Mg\eta\mu\phi = \frac{3}{2} M \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2g\eta\mu\phi}{3} \Rightarrow a_{cm} = 2m/s^2$$

δ. Για τη συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης ισχύει :

$$f_A = \frac{u_{\eta\chi} + u_{cm}}{u_{\eta\chi.}} f_S \quad \text{και} \quad u_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t$$

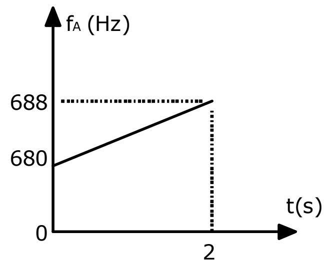
Όταν φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου πέρασε χρόνος $t = u_{cm} / \alpha_{cm} = 2$ s

επομένως θα είναι :

$$f_A = \frac{u_{\eta\chi} + u_{cm}}{u_{\eta\chi.}} f_S \Rightarrow f_A = \frac{u_{\eta\chi} + a_{cm} \cdot t}{u_{\eta\chi.}} f_S \Rightarrow$$

$$f_A = \frac{340 + 2t}{340} 680 \Rightarrow f_A = 680 + 4t (S.I.)(4)$$

όπου $0 \leq t \leq 2$ s



Όταν ο δέκτης μετράει συχνότητα $f_A = 684$ Hz από την (4) προκύπτει ότι :

$684 = 680 + 4t$ ή $t = 1$s

και επειδή $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu.} \cdot t = \alpha_{cm} / R. \cdot t = 10$ rad/s

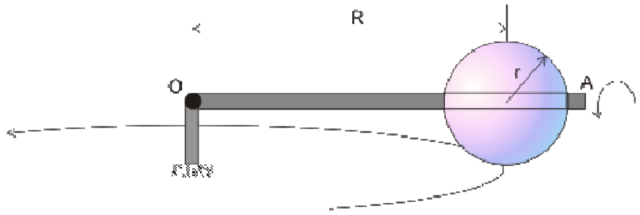
Άρα η στροφορμή του κυλίνδρου την στιγμή $t = 1$s θα είναι: $L = I_{cm} \cdot \omega = 1/2 M \cdot R^2 \cdot \omega$ ή

$L = 0.4 kg \cdot m^2/s$

Στελίου Κωνσταντίνος

Κύλιση σφαίρας

Μια ομογενής σφαίρα με μάζα m και ακτίνα r κυλίεται χωρίς ολίσθηση πάνω σε οριζόντιο επίπεδο περιστρεφόμενη γύρω από έναν οριζόντιο άξονα ΟΑ (βλέπε σχήμα). Το κέντρο της σφαίρας κινείται με ταχύτητα υ σε κύκλο με ακτίνα R . Να βρεθεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας.



Απάντηση:

Η συνολική ενέργεια θα είναι το άθροισμα

- της κινητικής ενέργειας από περιστροφή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = \upsilon/r$ και
- της κινητικής ενέργειας από περιστροφή γύρω από άξονα που διέρχεται από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας με γωνιακή ταχύτητα $\omega_2=\upsilon/R$ και ροπή αδράνειας που υπολογίζεται από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων ως προς το σημείο Ο.

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(I_{cm} + m \cdot R^2\right)\omega_2^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} m \cdot \cancel{R^2} \cdot \frac{\upsilon^2}{\cancel{R^2}}$$

Οι τρεις όροι αθροίσματος εκφράζουν κινητική ενέργεια

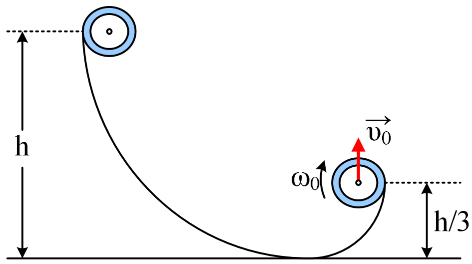
- από περιστροφή γύρω από το κέντρο μάζας με γωνιακή ταχύτητα ω_1
- από περιστροφή γύρω από το κέντρο μάζας με γωνιακή ταχύτητα ω_2
- από μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας της σφαίρας με ταχύτητα υ.

Αν θέσουμε την ροπή αδράνειας $(2/5)mR^2$:

$$K = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5} m \cdot \cancel{r^2} \cdot \frac{\upsilon^2}{\cancel{r^2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5} m \cdot r^2 \cdot \frac{\upsilon^2}{R^2} + \frac{1}{2} m \cdot \cancel{R^2} \cdot \frac{\upsilon^2}{\cancel{R^2}}$$

$$K = \left(\frac{1}{5} + \frac{r^2}{5 \cdot R^2} + \frac{1}{2}\right) m \cdot \upsilon^2$$

ΚΥΛΙΣΗ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΟΔΗΓΟΥ



Ένας **κούφιος** κύλινδρος με λεπτά τοιχώματα, μάζας M=1Kg και ακτίνας R=0,1m, αφήνεται ελεύθερος στο σημείο Α από ύψος h=1,8m. **Ο κύλινδρος κυλά χωρίς να γλιστρά στο εσωτερικό του οδηγού** του σχήματος. Ο οδηγός έχει τέτοια κλίση ώστε στο άκρο Γ, γίνεται **κατακόρυφος**. Ο κύλινδρος φθάνει στο άκρο Γ, το οποίο απέχει απόσταση h/3 από το οριζόντιο επίπεδο, οπότε ξεφεύγει από τον οδηγό και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Να υπολογίσετε:

Α) Το **μέγιστο ύψος** στο οποίο θα ανέβει ο κύλινδρος, καθώς και τον **αριθμό των περιστροφών** που θα εκτελέσει, από τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό μέχρι να φθάσει στο μέγιστο ύψος.

Β) Την **ταχύτητα** της μεταφορικής κίνησης τη στιγμή που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της τροχιάς του στο εσωτερικό του οδηγού καθώς και τη **στατική τριβή** που δέχεται από τον οδηγό εκείνη τη στιγμή.

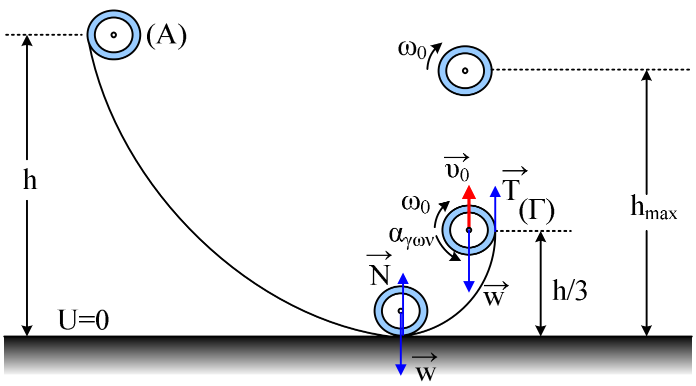
Γ) Το μέτρο της **μεταφορικής** και **γωνιακής επιβράδυνσης** τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό στη θέση Γ, καθώς και το **ρυθμό μεταβολής** της **κινητικής περιστροφικής**, της **κινητικής μεταφορικής** και της **δυναμικής βαρυτικής** του ενέργειας, την ίδια στιγμή. Να **επαληθεύσετε** την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας εκείνη τη στιγμή.

Δίνεται: g=10m/s2

ΛΥΣΗ

Εφόσον ο κύλινδρος είναι κούφιος με λεπτά τοιχώματα, **όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του**. Άρα η ροπή αδράνειας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots \Rightarrow I = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \ldots \Rightarrow I = (m_1 + m_2 + \ldots) R^2 \Rightarrow I = MR^2 \quad (1)$$



Α) Η **στατική τριβή** που δέχεται ο κύλινδρος από τον οδηγό, **δεν προκαλεί απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας**, άρα **διατηρείται η μηχανική** του ενέργεια. Τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό στη θέση Γ, έχει γωνιακή ταχύτητα:

$$E_{\text{ολ}(\text{Α})} = E_{\text{ολ}(\Gamma)} \Rightarrow Mgh = Mg\frac{h}{3} + \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 \Rightarrow Mg\frac{2h}{3} = \frac{1}{2}M\omega_0^2R^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega_0^2 \Rightarrow$$
$$Mg\frac{2h}{3} = M\omega_0^2R^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2gh}{3R^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{3}} \Rightarrow \omega_0 = 20\sqrt{3}\,\frac{rad}{s} \quad (2)$$

Μόλις ο κύλινδρος **εγκαταλείψει** τον οδηγό, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος του, το οποίο όμως **δεν προκαλεί ροπή** ως προς τον άξονα περιστροφής. Άρα δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση και έτσι η **γωνιακή του ταχύτητα διατηρείται σταθερή**. Το βάρος όμως **επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση**, προκαλώντας επιβράδυνση σταθερού μέτρου: α=g. Συνεπώς η σύνθετη κίνηση που εκτελεί μόλις εγκαταλείψει τον οδηγό περιλαμβάνει μια **ομαλή περιστροφική** και μια **ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική.** Στο μέγιστο ύψος φθάνει τη στιγμή που μηδενίζεται η μεταφορική του ταχύτητα:

$$E_{\text{ολ}(\text{Α})} = E_{\text{ολ}(H)} \Rightarrow Mgh = Mgh_{\max} + \frac{1}{2}I\omega_0^2 \Rightarrow Mgh = Mgh_{\max} + \frac{1}{2}MR^2\frac{2gh}{3R^2} \Rightarrow$$
$$\frac{2}{3}Mgh = Mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{2h}{3} \Rightarrow h_{\max} = 1,2m \quad (3)$$

Τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό στη θέση Γ έχει ταχύτητα: $\upsilon_0 = \omega_0 R \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2gh}{3}}$

Εφόσον εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική ισχύει:

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - gt \Rightarrow t = \frac{\upsilon_0}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{3g}}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει, από τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό μέχρι να φθάσει στο μέγιστο ύψος, υπολογίζεται από:

$$\theta = \omega_0 t \Rightarrow N2\pi = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{3}}\sqrt{\frac{2h}{3g}} \Rightarrow N = \frac{h}{3R\pi} \Rightarrow N = \frac{6}{\pi}\,\textit{περιστροφές}$$

Β) Τη στιγμή που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της τροχιάς του στο εσωτερικό του οδηγού, έχει μεταφορική ταχύτητα:

$$E_{\text{ολ}(A)} = E_{\text{ολ}(Z)} \Rightarrow Mgh = MgR + \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow$$

$$Mg(h-R) = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$Mg(h-R) = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$Mg(h-R) = Mv^2 \Rightarrow$$
$$\upsilon = \sqrt{g(h-R)} = \sqrt{10(1,8-0,1)} = \sqrt{17}m/s$$

Από τη θέση Α μέχρι τη θέση Ζ ο κύλινδρος επιταχύνεται. Στη θέση Ζ η αρχική δυναμική βαρύτητας έχει μετατραπεί **πλήρως** σε κινητική, οπότε έχει αποκτήσει **μέγιστη ταχύτητα**. Την ίδια στιγμή η **επιτάχυνσή** του **μηδενίζεται**:

$$\upsilon = \upsilon_{\max} \Rightarrow a = \frac{d\upsilon}{dt} = 0$$

Στην ίδια θέση **μηδενίζεται στιγμιαία η στατική τριβή**, αφού μηδενίζονται η μεταφορική και η γωνιακή επιτάχυνση.

Γ) Από τη θέση Ζ μέχρι τη θέση Γ αυξάνεται η δυναμική και μειώνεται η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου, άρα ο κύλινδρος **επιβραδύνεται**. Στη θέση Γ η στατική τριβή είναι **κατακόρυφη** με φορά προς τα **πάνω**, ώστε να δημιουργεί αριστερόστροφη ροπή και να επιβραδύνει τη δεξιόστροφη περιστροφή. Στη **θέση Γ** ισχύει:

$$\Sigma F = Mg - T = Ma_{cm}$$
$$\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T = MRa_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T = Ma_{cm}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$Mg = 2Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{g}{2} \Rightarrow a_{cm} = 5\frac{m}{s^2}$$
$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{g}{2R} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 50\frac{rad}{s^2}$$
$$T = Ma_{cm} \Rightarrow T = 5N$$

Ο **ρυθμός μεταβολής** της κινητικής **μεταφορικής** ενέργειας είναι ίσος με:

$$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = -\Sigma F \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = -5 \cdot 2\sqrt{3} = -10\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Ο **ρυθμός μεταβολής** της κινητικής **περιστροφικής** ενέργειας είναι ίσος με:

$$\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = -\Sigma\tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = -TR \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = -0,5 \cdot 20\sqrt{3} = -10\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Ο **ρυθμός μεταβολής** της **δυναμικής** βαρυτικής ενέργειας είναι ίσος με:

$$\frac{dU}{dt} = -P_W = -Mg \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 180^0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Mg \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 10 \cdot 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\,\frac{J}{s}$$

Ισχύει ότι:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} + \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_{o\lambda}}{dt} = 0 \Rightarrow E_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$$

δηλαδή ο ρυθμός ελάττωσης της κινητικής είναι ίσος με το ρυθμό αύξησης της δυναμικής.

Θοδωρής Παπασγουρίδης

$$K = \frac{7}{10} m \cdot \upsilon^2 \left(1 + \frac{2r^2}{7R^2}\right)$$

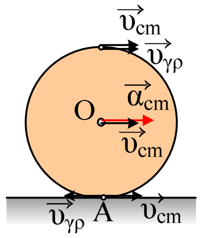
Αντώνης Αντωνίου

Κύλιση τροχού.

Ένας τροχός ακτίνας R=0,5m, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή επιτάχυνση $2m/s^2$ ξεκινώντας από την ηρεμία. Μετά από χρονικό διάστημα t=5s, να βρείτε:

i) Την ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού Ο.
ii) Την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού.
iii) Τη ταχύτητα και την οριζόντια επιτάχυνση του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος, σημείο Α, καθώς και του αντιδιαμετρικού του σημείου Β.

Απάντηση



i) Όταν αναφέρεται η επιτάχυνση του τροχού, υπονοείται η μεταφορική επιτάχυνσή του, η οποία είναι η επιτάχυνση του κέντρου Ο του τροχού $\vec{\alpha}_{cm}$.
Για την μεταφορική κίνηση ο τροχός αντιμετωπίζεται σαν υλικό σημείο, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_0 + \alpha_{cm}\cdot t \ \ (1) \text{ και } x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{cm}\cdot t^2. \ \ (2)$$

Οπότε από την εξίσωση (1) παίρνουμε $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha_{cm}\cdot t = 0+2\cdot 5m/s = 10m/s$.
Όλα τα σημεία του τροχού έχουν κάθε στιγμή ταχύτητα εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, ίση με την υ_{cm}.

ii) Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση ισχύει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\alpha_{cm}}{R} = 4rad/s^2$.

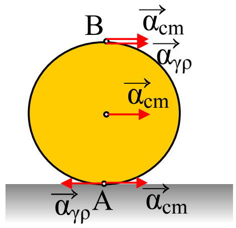
Άρα ο τροχός εκτελεί και στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε:

και $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=20rad/s$.

Την ίδια τιμή θα βρούμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$\upsilon_{cm} = \omega R \rightarrow \quad \omega=\frac{\upsilon}{R}=\frac{10}{0,5}= 20rad/s.$$

iii) Το σημείο Α έχει μια ταχύτητα προς τα δεξιά, την υ_{cm} αλλά και μια ταχύτητα προς τ' αριστερά εξαιτίας της στροφικής κίνησης $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R =20\cdot 0,5m/s = 10m/s$.
Άρα η συνολική ταχύτητα του σημείου Α είναι ίση με μηδέν.
Αυτό είναι και το βασικό κριτήριο για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο τροχός.
Με την ίδια λογική το σημείο Β θα έχει ταχύτητα $\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho} = 20m/s$.
Για τις επιταχύνσεις των δύο σημείων:



Το σημείο Α έχει εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης επιτάχυνση α_{cm} και εξαιτίας της στροφικής κίνησης μια επιτρόχια επιτάχυνση με φορά προς τ' αριστερά, η οποία είναι ίση με $\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\rho}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R = 4\cdot 0,5m/s^2 = 2m/s^2$.
Άρα η συνολική επιτάχυνση του σημείου Α είναι:

$\alpha_A=\alpha_{cm} - \alpha_{\gamma\rho} = 0$.

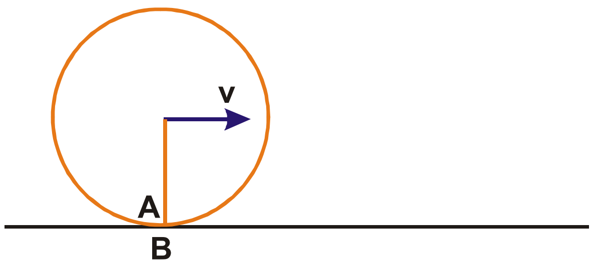
Ενώ για το σημείο Β: $\alpha_B= \alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\rho}= 2m/s^2 + 2m/s^2 =4m/s^2$.

Σχόλιο: Αφού το σημείο επαφής με το έδαφος έχει ταχύτητα μηδενική, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ένα σημείο ενός ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΥ ΑΞΟΝΑ περιστροφής του τροχού. Έτσι η κίνηση του τροχού μπορεί να θεωρηθεί μόνο στροφική (γύρω από τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής) και όχι σύνθετη.

dmargaris@sch.gr

ΚΥΛΙΣΗ ΤΡΟΧΟΥ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΣΗΜΕΙΟΥ

Τροχός ακτίνας R, κυλίεται-χωρίς να γλιστράει-σε οριζόντιο δάπεδο έτσι ώστε το κέντρο του να γράφει οριζόντια ευθεία με σταθερή ταχύτητα υ. Βρείτε:

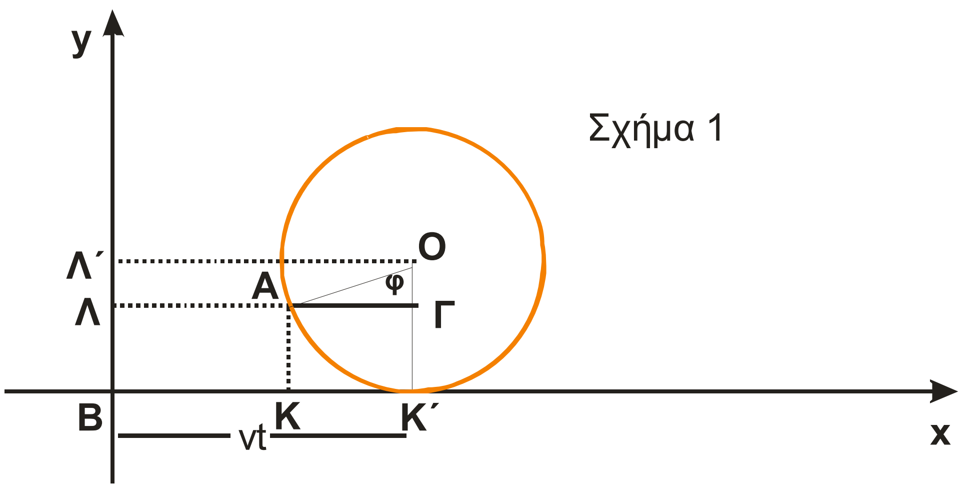


a) Τη θέση του A (σημείο του τροχού που ακουμπά στο δάπεδο) σχετικά με το B (σημείο του δαπέδου κάτω ακριβώς απ' το A) μετά από χρόνο t

b) Την ταχύτητα του A μετά από χρόνο t

c) Το διάστημα που διανύει το σημείο A του τροχού μέχρι να ξανασυναντήσει το έδαφος.

ΛΥΣΗ



a) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού είναι $\omega = \frac{v}{R}$ (1) διότι κυλίεται χωρίς ολίσθηση. Σε χρόνο t το A διαγράφει γωνία φ=ωt (2).

Το σημείο A τώρα σχετικά με το B έχει συντεταγμένες (σχήμα 1) x=BK και y=BΛ.

Αλλά απ' το σχήμα BK=BK΄-KK΄⇒ x=vt-Rημφ και λόγω της (1) και (2) τελικά θα είναι $x = vt - R\eta\mu\frac{vt}{R}$ (3)

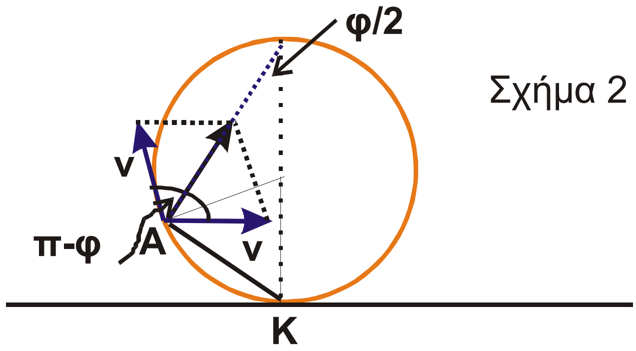
BΛ=BΛ΄-ΛΛ΄⇒y=R-Rσυνφ και τελικά $y = R(1-\sigma\upsilon\nu\frac{vt}{R})$ (4)

Για το διάνυσμα θέσης του Α μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{r} = (vt - R\eta\mu\frac{vt}{R})\vec{i} + R(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{vt}{R})\vec{j}$$

b) <u>1^{ος} τρόπος</u>

Η ταχύτητα του Α βρίσκεται αν συνθέσουμε την ταχύτητα μεταφορικής κίνησης και την ταχύτητα λόγω περιστροφής οι οποίες έχουν τα ίδια μέτρα v. Η γωνία που



σχηματίζουν οι δύο ταχύτητες είναι π-φ και από το νόμο των συνιμητόνων

$v_1 = \sqrt{v^2 + v^2 + 2v \cdot v \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \phi)}$ αλλά συν(π-φ)=-συνφ και επομένως

$v_1 = \sqrt{2v^2 - 2v^2\sigma\upsilon\nu\phi} = v\sqrt{2 - 2\sigma\upsilon\nu\phi}$ και από τον τύπο του διπλάσιου τόξου

$\sigma\upsilon\nu\phi = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\phi}{2}$ απ' όπου προκύπτει ότι $v_1 = 2v\eta\mu\frac{\phi}{2}$. Η διεύθυνση της ταχύτητας στο Α διέρχεται απ' το αντιδιαμετρικό σημείο του Κ.

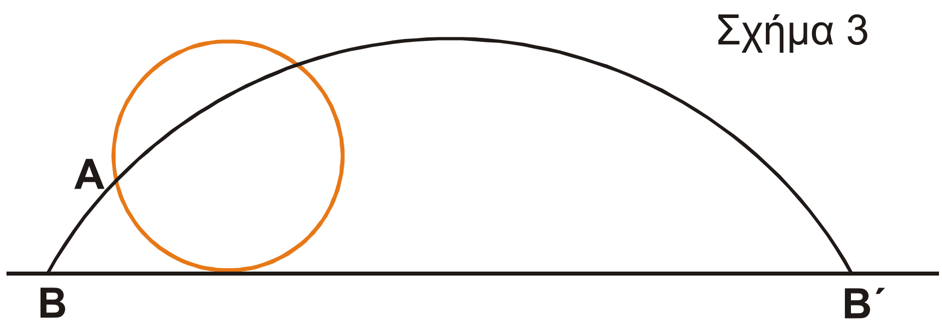
<u>2^{ος} τρόπος</u>

Η ταχύτητα του Α μπορεί να προκύψει αν δεχθούμε ότι ο τροχός κάνει περιστροφική κίνηση περί στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται απ' το σημείο επαφής με το δάπεδο.Τότε μπορούμε να γράψουμε για την ταχύτητα

$v_1 = \omega r$ όπου $r = \mathrm{AK} = 2R\eta\mu\frac{\phi}{2}$ και επειδή v=ωR προκύπτει ότι

$$v_1 = 2v\eta\mu\frac{\phi}{2}$$

c) Το διάστημα που διαγράφει το σημείο Α μεταξύ δύο επαφών του με το δάπεδο βρίσκεται απ' το μήκος της κυκλοειδούς καμπύλης του σχήματος



Κυκλοειδές είναι το σχήμα που προκύπτει όταν οι συντεταγμένες του είναι αυτές που δίδονται απ' τις εξισώσεις (3) και (4).

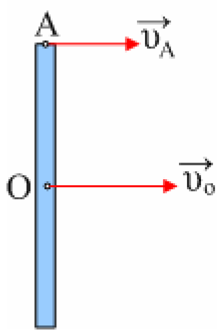
Το μήκος της καμπύλης ΒΒ΄ βρίσκεται αν υπολογίσουμε το $\int_0^T v_1 dt$ και

αντικαταστήσουμε το t με το φ απ' τη σχέση φ=ωt

$$s = \int_0^T v_1 dt = \frac{2}{\omega}\int_0^{2\pi} 2\nu\eta\mu\frac{\phi}{2}d(\frac{\phi}{2}) = \frac{4\omega R}{\omega}\int_0^{2\pi}\eta\mu\frac{\phi}{2}d(\frac{\phi}{2}) = 4R(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = 8R$$

Κυριάκος Κουγιουμτζόπουλος 6$^{\text{ο}}$ Λύκειο Καλλιθέας

Κίνηση ράβδου.



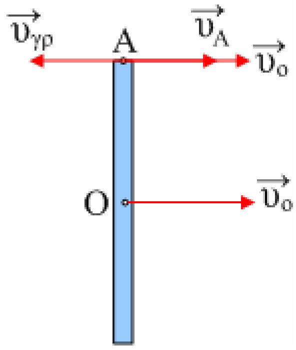
Μια ομογενής δοκός μήκους l=2m κινείται ελεύθερα οριζόντια πάνω σε μια παγωμένη λίμνη, χωρίς τριβές και για t=0 δίνονται οι ταχύτητες του μέσου Ο και του άκρου Α, υ_0=10m/s και υ_A=4m/s αντίστοιχα. Να βρεθούν οι ταχύτητες των παραπάνω σημείων τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/6$s.

Απάντηση:

Αφού οι ταχύτητες των δύο σημείων είναι διαφορετικές, η δοκός δεν κάνει μεταφορική κίνηση. Αν έκανε μόνο στροφική κίνηση θα στρέφοταν γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο και η ταχύτητα του cm θα ήταν μηδενική. Συνεπώς η δοκός εκτελεί σύνθετη κίνηση με $\upsilon_{cm}=\upsilon_0$=10m/s και γωνιακή ταχύτητα ω. Έτσι το άκρο Α έχει και ταχύτητα ίδια με το Ο, υ_0 και γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$, όπου:

$$\vec{\upsilon}_A=\vec{\upsilon}_0+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$$

και αφού η ταχύτητα του Α είναι μικρότερη από την ταχύτητα υ_0, σημαίνει ότι οι δύο ταχύτητες έχουν αντίθετη φορά όπως στο παρακάτω σχήμα.



Συνεπώς:

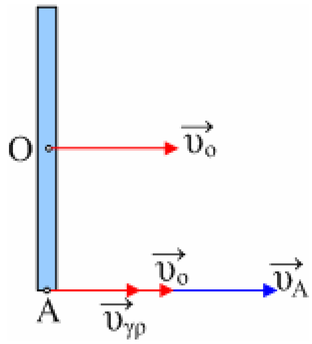
$$\upsilon_A=\upsilon_0-\omega R \rightarrow \omega=(\upsilon_0-\upsilon_A)/R=(10-4)/1 \text{ rad/s} = 6 \text{ rad/s},$$

αφού R=l/2 μιας και η δοκός στρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το Ο.

Μετά από χρόνο $t_1=\pi/6$s η δοκός έχει περιστραφεί κατά:

$$\theta=\omega t= \pi \text{ rad}$$

και η εικόνα είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.

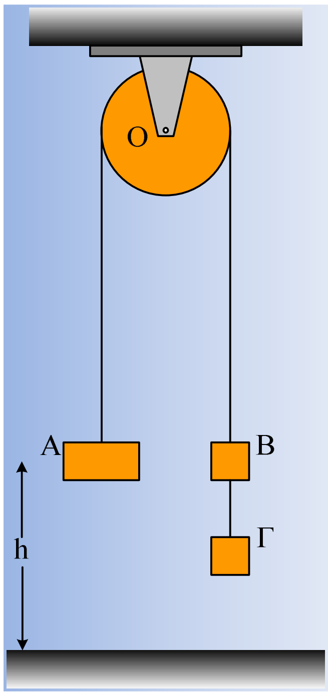


Συνεπώς η ταχύτητα του κέντρου O συνεχίζει να είναι είναι υ_0=10m/s, ενώ του A είναι:

$$\upsilon_A=\upsilon_0+\omega R=10+6\cdot 1=16 m/s.$$

dmargaris@sch.gr

Στρεφόμενο σύστημα και μια γραφική παράσταση.



Ένας κύλινδρος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, που περνά από τα κέντρα των δύο βάσεών του, ο οποίος απέχει 6m από το έδαφος. Γύρω από τον κύλινδρο έχουμε τυλίξει **δύο ανεξάρτητα αβαρή νήματα** ικανού μήκους, στα άκρα των οποίων δένονται τα σώματα Α, Β και Γ, όπως στο σχήμα. Το σύστημα ισορροπεί, ενώ είναι γνωστές οι μάζες των σωμάτων Α και Β, m_1=2kg και m_2=1kg αντίστοιχα, τα οποία βρίσκονται σε ύψος h=2m, από το έδαφος. Δίνεται η ακτίνα του κυλίνδρου R=0,2m, η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονά του $I= \frac{1}{2} MR^2$ και $g=10m/s^2$.

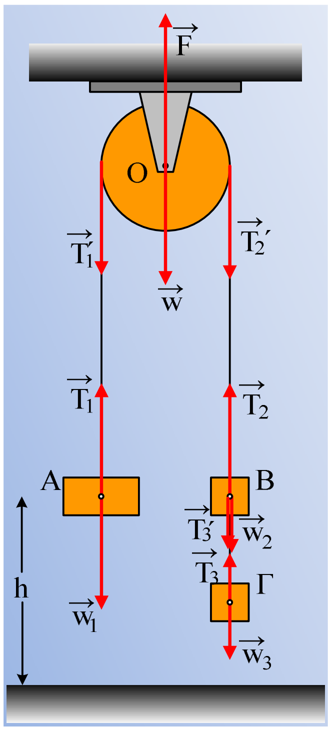
i) Να αποδείξτε ότι η μάζα του σώματος Γ είναι 1kg.

ii) Σε μια στιγμή t=0 κόβουμε το νήμα που συνδέει τα σώματα Β και Γ και παρατηρούμε ότι το σώμα Α φτάνει στο έδαφος τη στιγμή t_1=2s, όπου και ακινητοποιείται. Να αποδείξτε ότι η κίνησή του ήταν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και να υπολογίσετε την μάζα του κυλίνδρου.

iii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της, τη χρονική στιγμή t_2=1s.

iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της στροφορμής του κυλίνδρου σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-4s.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα. Από την ισορροπία των σωμάτων Α, Β και Γ έχουμε:

$\Sigma F_1=0 \rightarrow T_1=m_1g$ (1), όπου $T_1=T_1'$ η τάση του νήματος.

$\Sigma F_3=0 \rightarrow T_3=m_3g$ (2), όπου $T_3=T_3'$ η τάση του νήματος μεταξύ του Β και Γ.

$\Sigma F_2=0 \rightarrow T_2=T_3'+m_2g \rightarrow T_2=T_2'= (m_3+m_2)g$ (3).

Αλλά και ο κύλινδρος ισορροπεί:

$\Sigma\tau_O=0 \rightarrow T_1'R-T_2'R=0 \rightarrow T_1'= T_2'$ (4)

Από (1), (3) και (4) παίρνουμε $m_1g= (m_3+m_2)g \rightarrow m_1g= (m_3+m_2)g \rightarrow$

$$m_3= m_1-m_2=2kg-1kg=1kg.$$

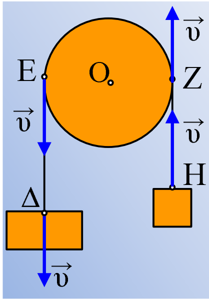
ii) Κόβοντας το νήμα που συνδέει τα σώματα Β και Γ, το σώμα Α κινείται προς τα κάτω, οπότε ο κύλινδρος στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και το νήμα που δένεται το σώμα Β, μαζεύεται, οπότε αυτό κινείται προς τα πάνω. Οι δυνάμεις είναι οι ίδιες, αλλά οι τάσεις των νημάτων έχουν διαφορετικά μέτρα.

Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τα σώματα Α και Β και για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου και παίρνουμε (θεωρούμε την φορά περιστροφής του κυλίνδρου θετική, όπως και την φορά κατά την οποία κινείται θετική, για κάθε σώμα):

$\Sigma F_1=m_1\alpha_1 \rightarrow m_1g-T_1=m_1\alpha_1$ (4)

$\Sigma F_2=m_2\alpha_2 \rightarrow T_2-m_2g = m_2\alpha_2$ (5)

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1'R-T_2'R = ½\, MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1-T_2= ½\, MR\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (6)



Αλλά έστω τα σημεία Δ,Ε,Ζ και Η του διπλανού σχήματος, για τα οποία, ανά δύο (Δ, Ε) και (Ζ, Η) έχουν ταχύτητες με ίσα μέτρα, αφού είναι σημεία του ίδιου νήματος, ενώ τα Ε και Ζ έχουν επίσης ταχύτητες ίσου μέτρου αφού $\upsilon_E=\omega R$ και $\upsilon_Z=\omega R$, μιας και είναι και σημεία της περιφέρειας του κυλίνδρου. Άρα:

$\upsilon_\Delta= \upsilon_E=\upsilon_Z=\upsilon_H$ ή $\upsilon_\Delta= \omega R=\upsilon_H$ και με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon_\Delta}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=\frac{d\upsilon_H}{dt} \text{ ή } \alpha_1=\alpha_2=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \quad (7)$$

Με πρόσθεση των (4)+(5)+(6) και με την βοήθεια της (7) παίρνουμε:

$$m_1g-m_2g=(m_1+m_2+ ½M)\cdot\alpha \quad (8)$$

Από την εξίσωση (8) προκύπτει ότι η επιτάχυνση του σώματος Α είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Για την κίνηση του Α λοιπόν, μέχρι να φτάσει στο έδαφος θα ισχύει $h= ½\, at^2 \rightarrow$

$$a=\frac{2h}{t^2}=\frac{2\cdot 2}{2^2}m/s^2=1m/s^2$$

Λύνοντας εξάλλου την (8) ως προς Μ παίρνουμε:

$$M=\frac{2(m_1-m_2)g}{a}-2(m_1+m_2)=\frac{2(2-1)\cdot 10}{1}kg-2(2+1)kg=14kg$$

iii) Τη στιγμή t_1=1s το σώμα Α έχει ταχύτητα $\upsilon_1=\alpha\cdot t_1$=1m/s, οπότε ο κύλινδρος θα έχει γωνιακή ταχύτητα

$$\omega=\frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{R}=\frac{\upsilon_A}{R}=\frac{1}{0,2}rad/s=5rad/s$$

Συνεπώς έχει κινητική ενέργεια $K= ½\, I\omega^2 = ½\, ½\, MR^2\omega^2= ¼\, M\upsilon_A^2$ και με αντικατάσταση:

$$K= ¼\ 14\cdot 1J=3{,}5J.$$

Εξάλλου ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt}=\Sigma\tau\cdot\omega=(T_1R-T_2R)\cdot\omega=(T_1-T_2)\cdot R\omega=(T_1-T_2)\cdot\upsilon_A \xrightarrow{(6)}$$

$$\frac{dK}{dt}=\frac{1}{2}Ma\cdot\upsilon_A=\frac{1}{2}14\cdot 1\cdot 1J/s=7J/s$$

iv) Μόλις το σώμα Α φτάσει στο έδαφος, ο κύλινδρος αρχίζει να επιβραδύνεται (ροπή και κατά συνέπεια γωνιακή επιτάχυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα) εξαιτίας της ροπής της τάσης του νήματος που κρέμεται το Β σώμα. Δουλεύοντας λοιπόν με τα μέτρα των μεγεθών έχουμε:

Για το σώμα Β: $\Sigma F=m_2\cdot\alpha_1 \rightarrow m_2g-T= m_2\cdot\alpha_1$ (9)

Για τον κύλινδρο: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu 1} \rightarrow T\cdot R= ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T= ½\, MR\cdot\alpha\gamma\omega\nu$ (10)

Αλλά και εδώ έχουμε $α_1=α_{γων}·R$, οπότε με πρόσθεση των (9) και (10) παίρνουμε:

$$m_2g = (m_2+ ½\ M)·α_1 \rightarrow a_1 = \frac{m_2 g}{m_2 + \frac{1}{2}M} = \frac{10}{1+\frac{1}{2}14} m/s^2 = \frac{5}{4} m/s^2$$

Με βάση αυτά για την στροφορμή του κυλίνδρου έχουμε:

Από 0-2s: $L=I·ω= ½\ MR^2·α_{γων}·t = ½\ MR·α·t =1{,}4t$ (μονάδες στο S.I.)

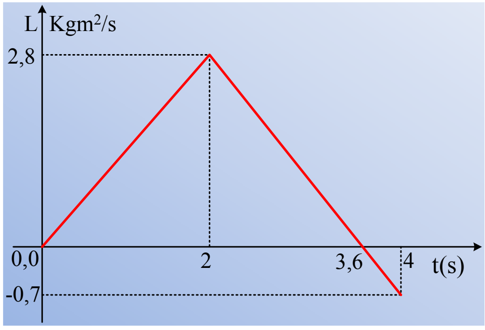
Από 2s-4s: $L=I·ω= ½\ MR^2·(ω_0-α_{γων1}·Δt)$

Όπου $\omega_0 = \frac{\upsilon_A}{R} = \frac{at_1}{R} = \frac{1\cdot 2}{0{,}2} rad/s = 10 rad/s$, $α_{γων1}=α_1/R=25/4 rad/s^2$ και $Δt=t-2$, συνεπώς:

$$L=I·ω= ½\ MR^2·(ω_0-α_{γων1}·Δt)= ½\ 14·0{,}2^2·[10-\frac{25}{4}(t-2)] =6{,}3-3{,}5t \text{ (S.I.)}$$

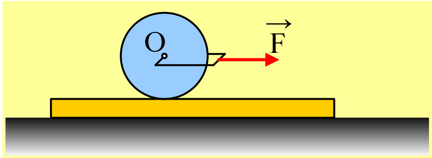
Έτσι κάποιες χαρακτηριστικές τιμές της στροφορμής φαίνονται στον πίνακα, ενώ η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι του διπλανού σχήματος:

t(s)	***L (kgm²/s)***
0,0	0,0
2,0	2,8
3,6	0,0
4,0	-0,7



dmargaris@sch.gr

Ένας τροχός πάνω σε σανίδα.



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας τροχός μάζας M=10kg, πάνω σε μια σανίδα μάζας m=5kg. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ τροχού και σανίδας είναι ίσοι $\mu=\mu_s=0{,}2$. Σε μια στιγμή $t_0=0$ ασκούμε στο κέντρο του τροχού, μια οριζόντια σταθερή δύναμη F=50Ν, μέχρι τη χρονική $t_1=2s$, οπότε παρατηρούμε ότι ο τροχός αρχίζει να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει), ενώ ταυτόχρονα η σανίδα ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο. Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=\frac{1}{2}MR^2$ και $g=10m/s^2$.

i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό και στην σανίδα.

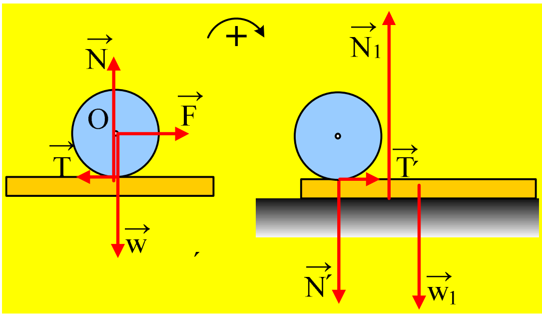
ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου Ο του τροχού.

iii) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα, μέσω του έργου της δύναμης F.

iv) Πώς κατανέμεται η παραπάνω ενέργεια σε τροχό και σανίδα;

v) Θέλουμε στο παραπάνω χρονικό διάστημα $t_1=2s$ να πετύχουμε την μέγιστη δυνατή μετακίνηση του άξονα του τροχού. Για να το πετύχουμε αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, χωρίς όμως να ολισθήσει ο τροχός πάνω στην σανίδα. Ποιο το κατάλληλο μέτρο της δύναμης F και ποιο είναι το ελάχιστο αναγκαίο μήκος της σανίδας;

Απάντηση:

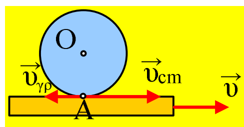


i) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις σε κάθε σώμα χωριστά, όπου Τ η στατική τριβή που ασκείται στον τροχό και Ν η κάθετη αντίδραση από την σανίδα και όπου έχουμε τα ζευγάρια δράσης αντίδρασης Τ-Τ΄, Ν-Ν΄.

ii) Για την μεταφορική κίνηση του τροχού εχουμε: $\Sigma F_x=M\alpha_{cm} \rightarrow F-T=M\alpha_{cm}$ (1)

Για την περιστροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 2T= MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Για την σανίδα: $\Sigma F=m\alpha \rightarrow T=m\alpha$ (3)



Τι σημαίνει τώρα ότι ο τροχός δεν ολισθαίνει; Ας πάρουμε ένα σημείο Α, επαφής του τροχού με την σανίδα. Δεν ολισθαίνει, σημαίνει ότι το σημείο αυτό, δεν έχει ταχύτητα **ως προς τη σανίδα** ή ισοδύναμα έχει κάθε στιγμή ίδια ταχύτητα με την σανίδα.

Αλλά το σημείο Α, θεωρώντας ότι ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση, έχει μια ταχύτητα υ_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης του τροχού και μια $\upsilon_{\gamma\rho}$ λόγω της κυκλκής του κίνησης, όπως εμφανίζονται στο διπλανό σχήμα. Συνεπώς $\upsilon=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}\rightarrow\upsilon=\upsilon_{cm}-\omega\cdot R$, οπότε με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}-\frac{d\omega}{dt}R \text{ ή}$$

$$\alpha=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \quad (4)$$

Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$F-3T= M(\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R)\rightarrow F-3T=M\alpha \ (5)$$

Οπότε με βάση την (3) η παραπάνω εξίσωση γίνεται $F-3m\alpha=M\alpha\rightarrow$

$$a=\frac{F}{3m+M}=\frac{50}{3\cdot 5+10}m/s^2=2m/s^2$$

iii) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω της δύναμης είναι ίση με το έργο της F. Αλλά από την εξίσωση (5) βρίσκουμε $T=\frac{F-Ma}{3}=\frac{50N-10\cdot 2N}{3}=10N$ και από την (1) παίρνουμε:

$$F-T=M\alpha_{cm}\rightarrow a_{cm}=\frac{F-T}{M}=\frac{50-10}{10}m/s^2=4m/s^2$$

Έτσι το κέντρο του τροχού στο χρονικό διάστημα των 2s μετατοπίζεται κατά:

$$x_{cm}= ½\, \alpha_{cm}t^2= ½\, 4\cdot 2^2 m=8m\rightarrow$$

$$W_F=F\cdot x= 50\cdot 8J=400J.$$

iv) Από την εξίσωση (4) παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha_{cm}-\alpha=2m/s^2$. Αλλά τότε τη στιγμή t_1=2s ο τροχός έχει ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t=4\cdot 2$ m/s=8m/s και γωνιακή ταχύτητα $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$.

Έτσι ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια:

$$K= ½\, M\upsilon_{cm}^2 + ½\, I\omega^2 = ½\, M\upsilon_{cm}^2 + ½\, ½\, MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}^2\cdot t^2 = ½\, 10\cdot 8^2 J + ¼\, 10\cdot 2^2\cdot 2^2 J=320J+40J=360J.$$

Αντίστοιχα η ταχύτητα της σανίδας είναι $\upsilon=\alpha t=2\cdot 2$m/s=4m/s, συνεπώς η κινητική της ενέργεια είναι:

$$K_\sigma= ½\, m\upsilon^2 = ½\, 5\cdot 4^2 J=40J.$$

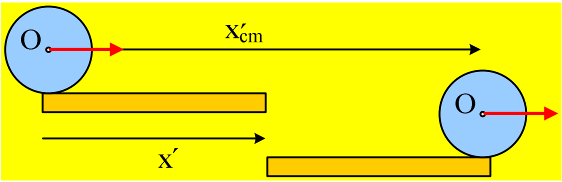
v) Για να πετύχουμε την μεγαλύτερη δυνατή μετατόπιση του κέντρου του τροχού θα αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, αλλά υπάρχει ένας περιορισμός. Όταν αυξάνουμε την δύναμη αυξάνεται και η τριβή. Αλλά η μέγιστη δυνατή τιμή της τριβής είναι η οριακή τριβή $T_{o\rho}=\mu_s N=\mu_s\cdot Mg=20N$.

Αλλά τότε από την (3) παίρνουμε για την σανίδα $a'=\frac{T_{o\rho}}{m}=\frac{20}{5}m/s^2=4m/s^2$, ενώ η εξίσωση (2) μας δίνει $2T= MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\rightarrow Ra'_{\gamma\omega\nu}=\frac{2T}{M}=\frac{2\cdot 20}{10}m/s^2=4m/s^2$, οπότε από την (4) παίρνουμε:

$\alpha=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\rightarrow\alpha'_{cm}=\alpha'+\alpha'_{\gamma\omega\nu}\cdot R=8m/s^2$, συνεπώς από την (1) θα έχουμε:

$$F_{max}=T+M\alpha_{cm} = 20N+10\cdot 8N=100N.$$

Στην περίπτωση αυτή το κέντρο του τροχού θα μετακινηθεί κατά:



$$x'_{cm}= ½\, \alpha'_{cm}t^2= ½\cdot 8\cdot 2^2 m=16m.$$

Η σανίδα εξάλλου θα έχει μετατοπισθεί κατά:

$$x'= ½\, \alpha' t^2 = ½\, 4\cdot 2^2 m=8m.$$

Αλλά το ελάχιστο δυνατό μήκος της σανίδας θα είναι αυτό, που ο τροχός θα ξεκινά από το ένα της άκρο και στο χρονικό διάστημα της επιτάχυνσης θα φτάνει στο άλλο της άκρο, όπως στο σχήμα.

Άρα $l_{min} = x'_{cm} - x' = 16m - 8m = 8m$.

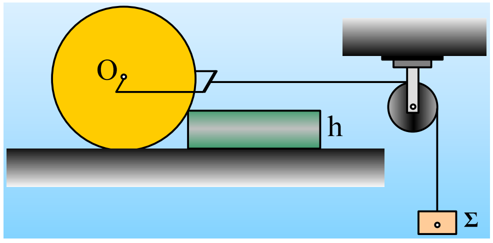
dmargaris@sch.gr

Υπερπήδηση εμποδίου.

Σαν συμπληρωματικά στοιχεία πάνω στην άσκηση 4.57 του σχολικού βιβλίου, αλλά και σαν συνέχεια της ανάρτησης «***Μια ισορροπία κυλίνδρου με εμπόδιο***» ας εξετάσουμε πώς επηρεάζεται η υπερπήδηση ενός εμποδίου από ένα κύλινδρο, από το αν αναπτύσσεται ή όχι τριβή μεταξύ κυλίνδρου και εμποδίου.

Εφαρμογή 1η:

Ο τροχός του διπλανού σχήματος, ακτίνας R και βάρους 100Ν, εμποδίζεται να κινηθεί από εμπόδιο ύψους h= ½ R, όταν δέχεται δύναμη στο κέντρο του Ο, μέσω νήματος, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε κρεμάσει ένα σώμα Σ, μάζας m=4kg.



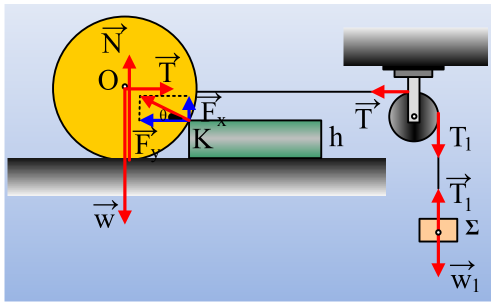
Δίνεται ότι ο τροχός δεν παρουσιάζει τριβές ούτε με το επίπεδο, ούτε με το εμπόδιο.

i) Να βρεθεί η δύναμη (μέτρο και κατεύθυνση) που ασκείται στον τροχό από το εμπόδιο.

ii) Αν αντικαταστήσουμε το σώμα Σ, με άλλο βαρύτερο, μπορεί ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο;

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα. Αφού η τροχαλία ισορροπεί:



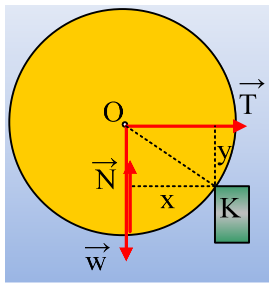
$$Στ=0 \text{ ή } T\cdot R - T_1\cdot R = 0 \rightarrow T=T_1.$$

Αλλά και το σώμα Σ ισορροπεί, συνεπώς $T_1=mg=40N$

Και ο τροχός ισορροπεί, συνεπώς:

$$ΣF=0 \text{ και } Στ=0$$

Αλλά το βάρος, η κάθετη αντίδραση Ν και η τάση του νήματος διέρχονται από τον άξονα (κέντρο Ο του τροχού), έχοντας μηδενική ροπή, οπότε και η ροπή της δύναμης που δέχεται ο τροχός από το εμπόδιο, περνάει από το σημείο Ο. Αναλύοντας τη δύναμη αυτή F από το εμπόδιο σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα έχουμε:



$$ΣF_x=0 \rightarrow T-F_x=0 \rightarrow F_x=T=40N \text{ και}$$

$$ΣF_y=0 \rightarrow N+F_y-w=0 \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } Στ_K=0 \rightarrow w\cdot x - N\cdot x + T\cdot y = 0 \quad (2)$$

Αλλά $y=R-h=R-½R=½R$ και $x=\sqrt{R^2-y^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

Και από (2): $100\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}-N\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}+40\cdot\frac{R}{2}=0 \rightarrow N\approx 76{,}9N$ και από (1) $F_y=w-N\approx 23{,}1N$, οπότε:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{40^2+23{,}1^2}\,N=46{,}2N$$

ii) Ναι, μπορεί να υπερπηδήσει το εμπόδιο, αρκεί να αυξήσουμε το βάρος του σώματος Σ. Πράγματι στην περίπτωση αυτή ο τροχός θα χάσει την επαφή με το έδαφος (Ν=0) και αρκεί $|τ_T|\geq|τ_w|$ ή $T\cdot y \geq w\cdot x$ ή

$$T \geq \frac{w \cdot x}{y} \text{ ή } T \geq 173N$$

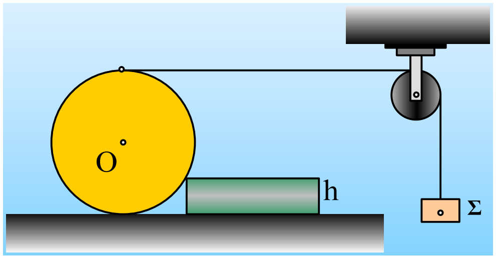
Συνεπώς αν το βάρος του σώματος Σ γίνει μεγαλύτερο από 173N, ο τροχός τείνει να υπερπηδήσει το εμπόδιο.

Σχόλιο:

Μέχρι ποιο ύψος μπορεί να έχει το εμπόδιο ώστε ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο;

Το εμπόδιο αρκεί να έχει ύψος μικρότερο της ακτίνας του τροχού, ώστε η ροπή της τάσης του νήματος, ως προς το σημείο Κ, να υπερνικήσει τη ροπή του βάρους. Σε κάθε περίπτωση είτε υπάρχουν είτε όχι τριβές, με εξάσκηση κατάλληλης δύναμης στο κέντρο, ο τροχός θα υπερπηδήσει το εμπόδιο.

Εφαρμογή 2η:



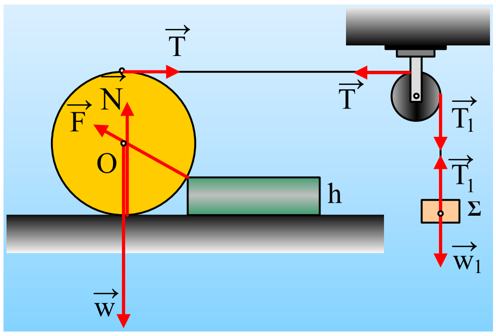
Γύρω από έναν τροχό ακτίνας R και μάζας M=8kg, τυλίγουμε ένα νήμα, το οποίο αφού περαστεί από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο άκρο του κρεμάμε ένα σώμα Σ μάζας m=4kg. Ο τροχός εμποδίζεται να κινηθεί από ένα εμπόδιο ύψους h= ½R. Δίνεται ότι ο τροχός δεν παρουσιάζει τριβές ούτε με το επίπεδο, ούτε με το εμπόδιο.

i) Να βρεθεί η δύναμη (μέτρο και κατεύθυνση) που ασκείται στον τροχό από το εμπόδιο, και το οριζόντιο επίπεδο.

ii) Αν αντικαταστήσουμε το σώμα Σ, με άλλο βαρύτερο, μπορεί ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο; Ποια είναι τότε η ελάχιστη τιμή της δύναμης που δέχεται ο τροχός από το εμπόδιο;

Δίνεται $g=10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του $I= ½ MR^2$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα. Αφού η τροχαλία δεν έχει μάζα (καλύτερα έχει αμελητέα μάζα):

$$\Sigma\tau=0 \text{ ή } T\cdot R-T_1\cdot R=0 \rightarrow T=T_1.$$

Τι κάνει ο τροχός; Αφού η δύναμη που δέχεται από το εμπόδιο περνά από το κέντρο Ο (τριβές δεν υπάρχουν), ασκείται ροπή ως προς τον άξονα Ο του τροχού, οπότε ο τροχός περιστρέφεται και το σώμα Σ επιταχύνεται προς τα κάτω. Έτσι έχουμε:

Για το σώμα Σ: $\Sigma F=m\cdot \alpha \rightarrow mg-T_1=m\cdot \alpha$ (1)

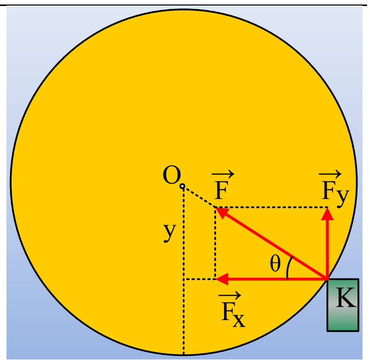
Για τον τροχό και θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad T\cdot R= ½ MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T= ½ MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (2)$$

Ενώ όλα τα σημεία του νήματος κινούνται με την ίδια ταχύτητα άρα $\upsilon_{\gamma\rho\tau\rho}=\upsilon_{\Sigma} \rightarrow \upsilon=\omega R \rightarrow$

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R \rightarrow a=a_{\gamma\omega\nu}R \ (3)$$

Από (1), (2) και (3) παίρνουμε $\alpha=5m/s^2$ και T=20N.



Αλλά $\Sigma F_x=0 \to F_x=T=20N$ και $\Sigma F_y=0 \to N+F_y-w=0$ (4)

Με βάση το διπλανό σχήμα ημθ=y/R= ½ οπότε συνθ=$\dfrac{F_x}{F} \to$

$$F=\frac{F_x}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{20}{\sqrt{3}/2}=\frac{40\sqrt{3}}{3}N \text{ και } F_y=F\cdot\eta\mu\theta=\frac{20\sqrt{3}}{3}N \text{ και από (4)}$$

N≈68,5N.

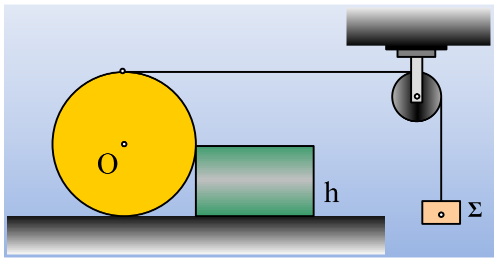
ii) Ναι μπορεί, αρκεί ο τροχός θα χάσει την επαφή με το έδαφος (N=0) οπότε F_y=w=80N, αλλά τότε F=160N.

Σχόλιο:

Παρατηρούμε ότι, όταν δεν υπάρχουν τριβές και η δύναμη ασκείται στο ανώτερο σημείο του τροχού και πάλι ο τροχός μπορεί να υπερπηδήσει το εμπόδιο, όπου την ανύψωσή του θα επιφέρει μια συνιστώσα της κάθετης αντίδρασης από το εμπόδιο, αρκεί το ύψος του εμποδίου να είναι μικρότερο από την ακτίνα του τροχού.

Και αν υπάρχουν τριβές;

Εφαρμογή 3η:

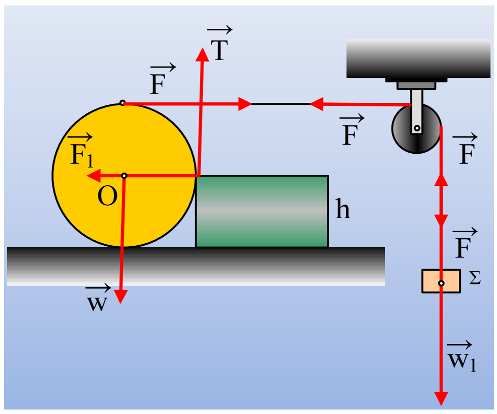


Γύρω από έναν τροχό ακτίνας R και μάζας M=8kg, τυλίγουμε ένα νήμα, το οποίο αφού περαστεί από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο άκρο του κρεμάμε ένα σώμα Σ μάζας m. Ο τροχός εμποδίζεται να κινηθεί από ένα εμπόδιο ύψους h=R.

i) Αν δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ τροχού και εμποδίου, μπορεί ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο;

ii) Αν μεταξύ τροχού και εμποδίου ο συντελεστής τριβής είναι μ=0,5, να βρεθεί η ελάχιστη οριζόντια δύναμη F, που πρέπει να ασκηθεί μέσω του νήματος, ώστε ο τροχός να χάσει την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να υπερπηδά το εμπόδιο. Πόση γωνιακή επιτάχυνση αποκτά στην περίπτωση αυτή ο τροχός; Δίνεται R=0,5m και η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του I= ½ MR^2.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου F η τάση του νήματος και T η τριβή από το εμπόδιο, στην περίπτωση που μηδενίζεται η αντίδραση του οριζοντίου επιπέδου.

i) Αν δεν υπάρχουν τριβές, προφανώς δεν υπάρχει κατακόρυφη δύναμη να εξουδετερώσει το βάρος, πολύ περισσότερο να ανασηκώσει τον τροχό. Συνεπώς ο τροχός δεν υπερπηδά το εμπόδιο.

ii) Όταν χάνεται η επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, οριακά T=w=Mg=80N.

Συνεπώς $T=\mu\cdot F_1 \rightarrow F_1=T/\mu=160N$.

Αλλά τότε $\Sigma F_x=0 \rightarrow F=F_1=160N$.

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R-T\cdot R=\tfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{2(F-T)}{MR}=\frac{2(160-80)}{8\cdot 0,5}rad/s^2=40rad/s^2$$

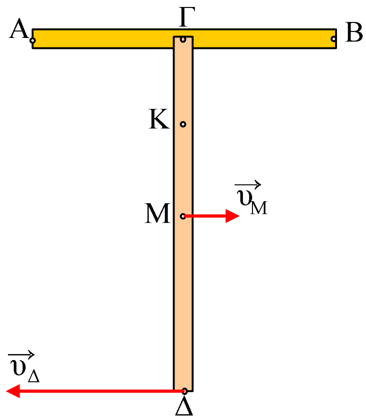
Σχόλιο:

Παρατηρούμε ότι όταν το εμπόδιο έχει ύψος ίσο με την ακτίνα του τροχού, ανυψωτική δύναμη που μειώνει την κάθετη αντίδραση του οριζοντίου επιπέδου, είναι μόνο η τριβή. Αν δεν υπάρχει, ο τροχός δεν θα ανυψωθεί, αν υπάρχει, τότε όταν αυξάνεται η οριζόντια δύναμη που ασκείται μέσω του νήματος, αυξάνεται και η κάθετη αντίδραση στο Κ και κατά συνέπεια η τριβή. Τριβή η οποία θα είναι μικρότερη από την ασκούμενη δύναμη, αν μ<1, οπότε ο τροχός πριν αρχίσει να ανυψώνεται, θα έχει αρχίσει να περιστρέφεται.

dmargaris@sch.gr

Κινηματική στερεού.

Ένα στερεό αποτελείται από δύο ομογενείς, από διαφορετικό υλικό ράβδους, οι οποίες είναι συνδεδεμένες, όπως στο σχήμα. Οι ράβδοι έχουν μήκη (ΑΒ)=0,8m και (ΓΔ)= 1,2m. Το στερεό κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο εκτελώντας σύνθετη κίνηση γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο που περνά από το κέντρο μάζας του Κ, όπου (ΚΓ)=0,3m και σε μια στιγμή βρίσκεται σε μια θέση, όπου τα σημεία Μ και Δ, όπου Μ το μέσον της ράβδου, έχουν οριζόντιες ταχύτητες με μέτρα $υ_Μ$=1m/s και $υ_Δ$=5m/s, όπως στο σχήμα.

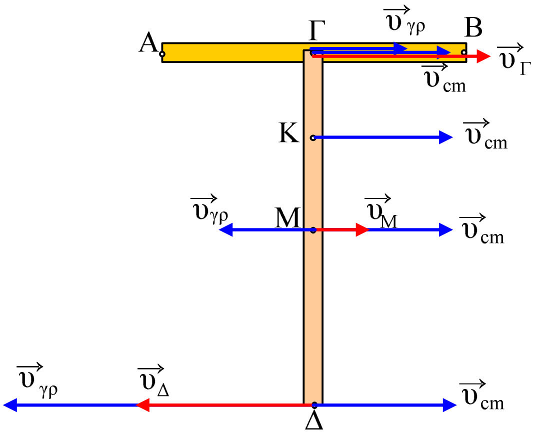


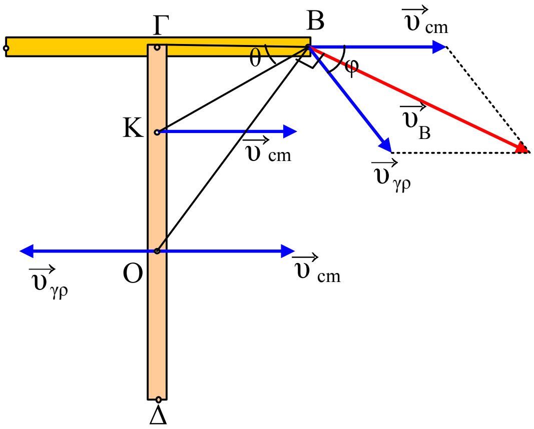
i) Να υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ και του άκρου Γ της ράβδου ΔΓ.

ii) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του άκρου Β.

iii) Να βρεθεί η θέση ενός σημείου Ο του στερεού η ταχύτητα του οποίου είναι μηδενική. Ποια η γωνία μεταξύ της (ΟΒ) και της ταχύτητας του άκρου Β;

Απάντηση:





i) Η σύνθετη κίνηση του στερεού μπορεί να μελετηθεί με βάση την αρχή της επαλληλίας ως σύνθεση μιας μεταφορικής με ταχύτητα $υ_{cm}$ και μιας στροφικής γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ με γωνιακή ταχύτητα ω. Έτσι στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι ταχύτητες των σημείων Δ, Μ, Κ και Γ, όπου $υ_{cm}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού Κ και $υ_{γρ}=ω·R$ η γραμμική ταχύτητα κάθε σημείου, λόγω στης κυκλικής κίνησης που εκτελεί συμμετέχοντας στην στροφική κίνηση του στερεού.

Με βάση τι σχήμα:

$$\upsilon_M = \upsilon_{cm} - \omega \cdot (KM)$$

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_{cm} - \omega \cdot (K\Delta)$$

και με αντικατάσταση:

$$1 = \upsilon_{cm} - \omega \cdot 3 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad -5 = \upsilon_{cm} - \omega \cdot 9 \quad (2)$$

Από (1) και (2) βρίσκουμε υ_{cm}=4m/s και ω=10rad/s.

Κατά συνέπεια η ταχύτητα του σημείου Γ είναι $\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \omega \cdot (K\Gamma)$=7m/s.

ii) Στο δεύτερο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του άκρου Β, όπου $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot (KB)$.

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΒ έχουμε $KB = \sqrt{(K\Gamma)^2 + (\Gamma B)^2} = 0{,}5m$.

Συνεπώς:

$$\upsilon_{\gamma\rho B} = 10 \cdot 0{,}5 \text{m/s} = 5 \text{m/s και:}$$

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu\phi} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{0{,}3}{0{,}5}} m/s = \sqrt{65} m/s$$

Ας σημειωθεί ότι η γωνία φ μεταξύ των συνιστωσών υ_{cm} και $\upsilon_{\gamma\rho}$ είναι συμπληρωματική της γωνίας θ, όπου ημθ=0,3/0,5=συνφ.

iii) Έστω ένα σημείο Ο σε απόσταση x από το κέντρο μάζας Κ, όπου η ταχύτητά του είναι μηδενική, συνεπώς:

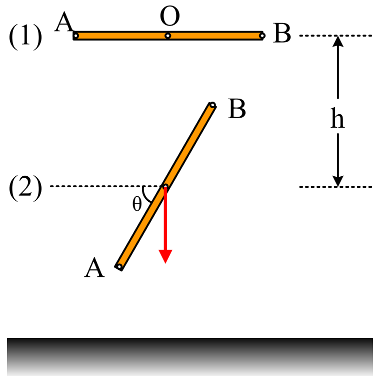
$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot x \rightarrow$$

$$x = \upsilon_{cm}/\omega = 0{,}4 \text{m}.$$

Αφού το σημείο Ο έχει μηδενική ταχύτητα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι από το σημείο αυτό, διέρχεται ένας στιγμιαίος άξονας, κάθετος στο επίπεδο της σελίδας, γύρω από τον οποίο στρέφεται το στερεό μας. Συνεπώς το σημείο Β εκτελεί κυκλική τροχιά με κέντρο το Ο, άρα η ΟΒ θα είναι κάθετη στην ταχύτητα του σημείου Β.

dmargaris@sch.gr

Σύνθετη κίνηση ράβδου.



Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=48/5π m≈3 m εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω και φτάνει σε ύψος Η. Στο σχήμα, η πάνω θέση της ράβδου θέση (1), αντιστοιχεί στο μέγιστο ύψος, ενώ μετά από λίγο η ράβδος φτάνει στη θέση (2) έχοντας στραφεί κατά γωνία θ=π/3, έχοντας κατέλθει κατά h=0,8m.

i) Βρείτε το χρονικό διάστημα για την μετακίνηση της ράβδου από τη θέση (1) στη θέση (2).

ii) Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου;

iii) Να υπολογίστε τις ταχύτητες των άκρων Α και Β της ράβδου στις δύο παραπάνω θέσεις και να τις σχεδιάστε πάνω στο σχήμα.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Αφού η θέση (1) είναι η ανώτερη θέση, η ταχύτητα του μέσου της ράβδου Ο θα είναι μηδενική. Από κει και πέρα η ράβδος εκτελεί ελεύθερη πτώση, όσον αφορά τη μεταφορική της κίνηση, ενώ στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, αφού δεν δέχεται καμιά ροπή. Συνεπώς:

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2 \rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}8}{10}}s = 0{,}4s$$

ii) Στο παραπάνω χρονικό διάστημα η ράβδος έχει περιστραφεί κατά γωνία θ=π/3, άρα:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{\pi/3}{0{,}4} rad/s = \frac{\pi}{1{,}2} rad/s = \frac{5\pi}{6} rad/s$$

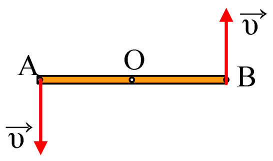
iii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου στη θέση (2) είναι ίση με :

$$\upsilon = gt = 10\cdot 0{,}4 m/s = 4m/s.$$

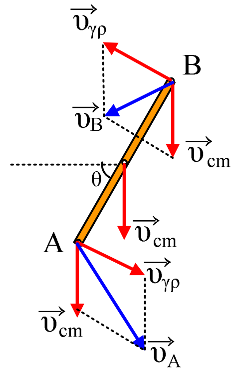
Στη θέση (1) τα άκρα Α και Β έχουν γραμμικές ταχύτητες με μέτρο $\upsilon=\omega\cdot R$ ή

$$\upsilon = \omega\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{5\pi}{6}\cdot\frac{24}{5\pi} = 4m/s$$

με κατεύθυνση όπως στο σχήμα (1).



(1)



(2)

Στο διπλανό σχήμα (2) έχουν σχεδιαστεί για τα άκρα της ράβδου, η ταχύτητα $υ_{cm}$ λόγω της μεταφορικής ταχύτητας και η $υ_{γρ}$, εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης. Στο άκρο Α η γωνία των δύο ταχυτήτων είναι ίση με 60°, ενώ στο σημείο Β ίση με 120°.

Έτσι έχουμε:

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu 60°} = \sqrt{3\upsilon_{cm}^2} = 4\sqrt{3}m/s$$

και επειδή το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος η διαγώνιος διχοτομεί τη γωνία, συνεπώς η ταχύτητα έχει κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο.

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu 120°} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2} = 4m/s$$

και εδώ το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος η διαγώνιος διχοτομεί τη γωνία, συνεπώς η ταχύτητα έχει κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 60° με την $υ_{γρ}$ ή γωνία 30° με την ράβδο.

dmargaris@sch.gr

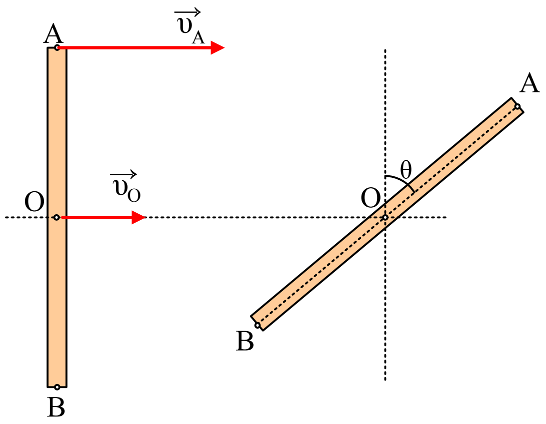
Κεντρομόλος και επιτρόχια επιτάχυνση.

Δυο στάθηκαν οι αφορμές για την παρούσα άσκηση. Η μια είναι η συζήτηση που πραγματοποιείται στο δίκτυο για τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Η άλλη ήταν ερώτηση που μου τέθηκε από φίλο, πάνω στην ανάρτηση «Σύνθετη κίνηση στερεού.».

Αν πάρουμε τη ράβδο σε μια τυχαία θέση, η ταχύτητα του άκρου μεταβάλλεται κατά μέτρο. Ποια είναι η επιτρόχια επιτάχυνση που μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας;

……………………………………………………..

Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=2m κινείται στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης, χωρίς τριβές και σε μια στιγμή βρίσκεται στη θέση του σχήματος (α). Στη θέση αυτή η ταχύτητα του μέσου Ο της ράβδου είναι 2m/s, ενώ του άκρου Α 4m/s. Οι δύο παραπάνω ταχύτητες έχουν την ίδια κατεύθυνση, κάθετες στη ράβδο. Μετά από λίγο η ράβδος βρίσκεται στη θέση (β) έχοντας στραφεί κατά 60°.



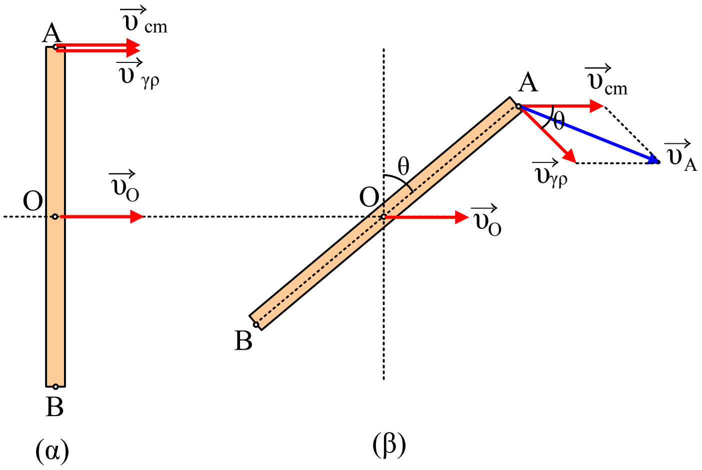
(α) (β)

Για τη θέση αυτή να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα του άκρου Α.
ii) Η επιτάχυνση του Α.
iii) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του Α.
iv) Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του άκρου Α.

Απάντηση:

i) Αφού οι ταχύτητες των σημείων Ο και Α είναι διαφορετικές η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση. Μια μεταφορική με ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}=\upsilon_O=2m/s$ και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.



Στην αρχική θέση (α) η ταχύτητα του άκρου Α προκύπτει από την σύνθεση της ταχύτητας του κέντρου μάζας λόγω μεταφορικής κίνησης και μιας γραμμικής ταχύτητας μέτρου:

$\upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu}$=ω·R. Έτσι

$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu} \rightarrow$

$\upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu} = \upsilon_A - \upsilon_{cm}$=2m/s

Ερχόμαστε τώρα στη θέση (β). Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του άκρου Α, όπου μεταξύ της ταχύτητας κέντρου μάζας και της γραμμικής ταχύτητας σχηματίζεται γωνία θ=60°. Συνεπώς η ταχύτητα του σημείου Α είναι:

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu\theta} \rightarrow$$

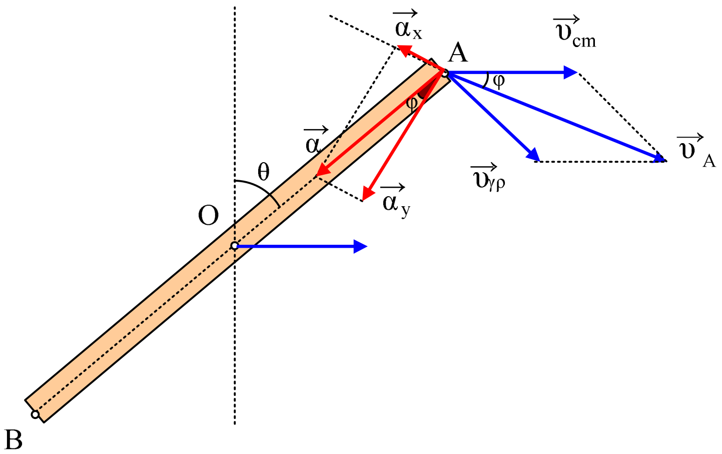
$$\upsilon_A = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}}m/s = 2\sqrt{3}m/s$$

Εξάλλου το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο έχει ίσες πλευρές, συνεπώς είναι ρόμβος και η διαγώνιος διχοτομεί την γωνία και η ταχύτητα του Α σχηματίζει γωνία φ= 30° με την οριζόντια διεύθυνση.

ii) Η μεταφορική κίνηση του κέντρου Ο είναι ευθύγραμμη ομαλή, συνεπώς δεν υπάρχει επιτάχυνση. Λόγω όμως της στροφικής κίνησης το σημείο Α εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχοντας κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$a = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R} = \frac{2^2}{1}m/s^2 = 4m/s^2$$

με κατεύθυνση προς το μέσον Ο της ράβδου, όπως στο παρακάτω σχήμα.



iii) Αναλύουμε την επιτάχυνση σε δύο συνιστώσες μια α_x που έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας και μια α_y με διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα. (Η γωνία μεταξύ της επιτάχυνσης α και της α_y είναι ίση με 30°, αφού με την φ έχουν τις πλευρές κάθετες μία προς μία και οι γωνίες είναι οξείες). Τα μέτρα τους είναι:

$$\alpha_x = \alpha \cdot \eta\mu\varphi = 4 \cdot ½\ m/s^2 = 2 m/s^2 \text{ και}$$

$$\alpha_y = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m/s^2 = 2\sqrt{3} m/s^2$$

Η συνιστώσα α_x μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας και στην περίπτωσή μας επειδή έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα, μειώνει το μέτρο της. Συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται με ρυθμό $2\dfrac{m/s}{s}$.

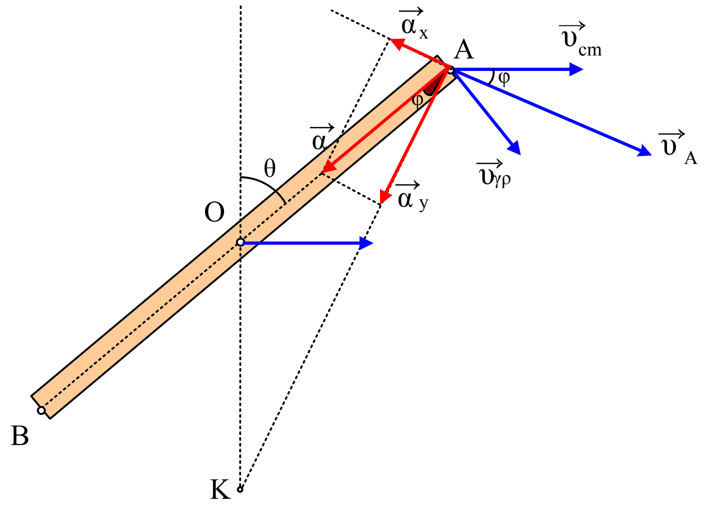
iv) Η συνιστώσα της επιτάχυνσης α_y είναι κάθετη στην ταχύτητα, συνεπώς μεταβάλλει την κατεύθυνσή της, παίζοντας το ρόλο της κεντρομόλου επιτάχυνσης για την κίνηση του σημείου Α. Άρα:

$$a_y = \frac{\upsilon_A^2}{R} \rightarrow$$

$$R = \frac{\upsilon_A^2}{a_y} = \frac{4 \cdot 3}{2\sqrt{3}} m = 2\sqrt{3} m$$

Σχόλιο μόνο για καθηγητές:

Η κίνηση της ράβδου μπορεί να θεωρηθεί μόνο στροφική γύρω από ένα στιγμιαίο άξονα περιστροφής που περνά από ένα σημείο Κ. Το σημείο Κ μπορεί να προσδιοριστεί σαν το σημείο τομής της ευθείας που είναι κάθετη στην ταχύτητα του σημείου Ο, στο Ο και της κάθετης της ταχύτητας του σημείου Α, που περνά από το Α. (Και το σημείο Ο και το Α θα εκτελούν κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο Κ, συνεπώς οι ταχύτητες είναι κάθετες στις ακτίνες).



Το τρίγωνο ΑΟΚ είναι ισοσκελές αφού φ=30° και η γωνία ΑΟΚ=120°, συνεπώς και η γωνία Κ είναι επίσης 30°. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$(AK) = \sqrt{(AO)^2 + (OK)^2 - 2(AO)(OK)\sigma\upsilon\nu 120°}$$

και με αντικατάσταση

$$(\mathrm{AK}) = \sqrt{3}m.$$

Αλλά η απόσταση (ΚΑ) είναι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σημείου Α, οπότε για την ταχύτητα θα έχουμε:

$$\upsilon_A = \omega \cdot R_A \rightarrow$$

$$\upsilon_A = 2 \cdot \sqrt{3}m/\mathrm{s}$$

Δηλαδή μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα περιστροφής του σημείου Α γύρω από το στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε όμως την επιτάχυνση αφού δεν είναι μόνο η α_y αλλά και η α_x. Εξάλλου και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς δεν συμπίπτει με την ακτίνα της τροχιάς. Η τροχιά του σημείου Α δεν είναι κύκλος.

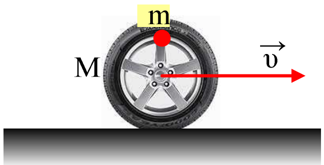
Προσοχή λοιπόν, άλλο ακτίνα καμπυλότητας και άλλο η απόσταση του σημείου Α από τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Για περισσότερα πάνω στο θέμα μπορείτε να παρακολουθείστε την περσινή συζήτηση από εδώ.

dmargaris@sch.gr

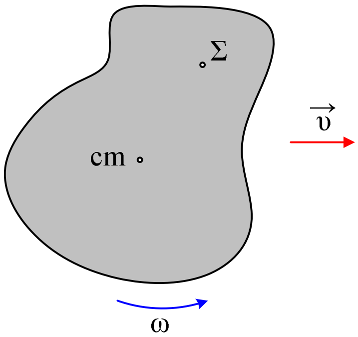
Ερωτήσεις Κινηματικής Στερεού

1) Ένα στερεό που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα μπορεί να έχει υ_{cm}=10m/s;

2) Ένας τροχός αυτοκινήτου, μάζας Μ, που κινείται με ταχύτητα υ, έχει σε ένα του σημείο κολλημένη μια μάζα m. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι ίση με υ;



3) Ένα ελεύθερο στερεό σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση, όπως στο παρακάτω σχήμα.



α) Να σημειώστε στο σχήμα την ταχύτητα του σημείου Σ.

β) Να σχεδιάστε στο σχήμα την επιτάχυνση του σημείου Σ στις εξής περιπτώσεις:

i) Το σώμα έχει σταθερή ταχύτητα υ και σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.

ii) Το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση προς τα δεξιά και σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.

iii) Το σώμα έχει σταθερή ταχύτητα υ και σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ομόρροπη της γωνιακής του ταχύτητας ω.

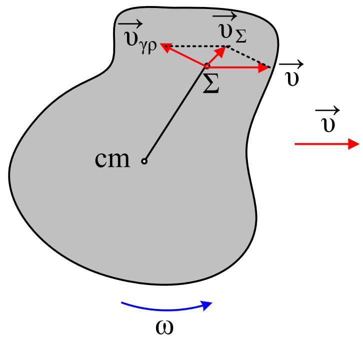
iv) Το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση προς τα δεξιά και σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ομόρροπη της γωνιακής του ταχύτητας ω.

Απάντηση:

1) Προφανώς ναι, αρκεί ο άξονας περιστροφής να μην περνά από το κέντρο μάζας. Θα πρέπει οι μαθητές να μην μπερδεύουν την ταχύτητα του κέντρου μάζας, με τη μεταφορική ταχύτητα ενός στερεού που εκτελεί σύνθετη κίνηση.

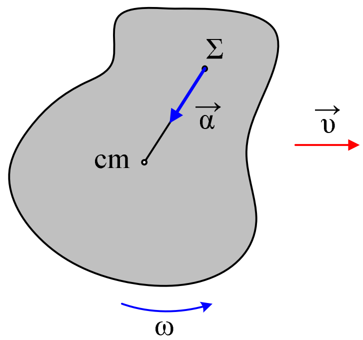
2) Όχι το κέντρο μάζας του συστήματος δεν είναι πλέον το κέντρο Ο του τροχού, αλλά ένα σημείο μεταξύ του κέντρου και του σημείου που έχει κολλήσει η μάζα m. Συνεπώς έχει, εκτός της ταχύτητας υ (μεταφορική) και τη $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot r$, όπου r η απόσταση του κέντρου μάζας από το κέντρο του τροχού.

3) α) Να σημειώστε στο σχήμα την ταχύτητα του σημείου Σ.



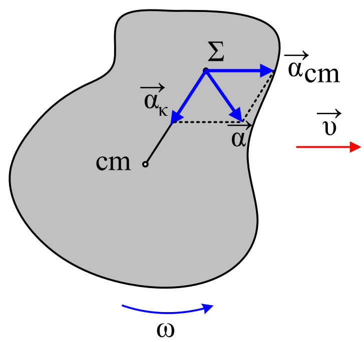
β) Να σχεδιάστε στο σχήμα την επιτάχυνση του σημείου Σ στις εξής περιπτώσεις:

i) Το σώμα έχει σταθερή ταχύτητα υ και σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.

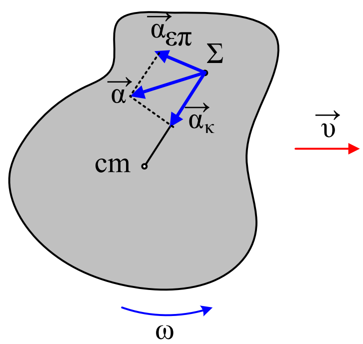


Προφανώς η μόνη επιτάχυνση είναι η κεντρομόλος

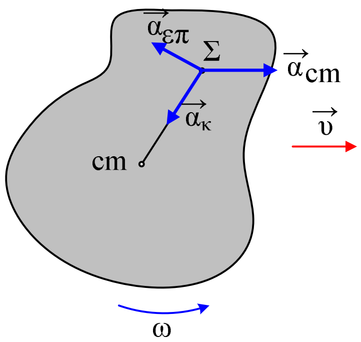
ii) Το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση προς τα δεξιά και σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.



iii) Το σώμα έχει σταθερή ταχύτητα υ και σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ομόρροπη της γωνιακής του ταχύτητας ω.



iv) Το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση προς τα δεξιά και σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ομόρροπη της γωνιακής του ταχύτητας ω.



Σχόλιο:

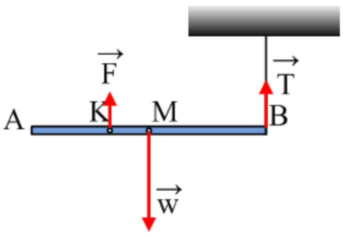
Στο τελευταίο σχήμα αποφεύγω να σχεδιάσω τη συνολική επιτάχυνση αφού η κατεύθυνσή της εξαρτάται από τις τιμές της επιτρόχιας και της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας λόγω μεταφορικής κίνησης.

dmargaris@sch.gr

Ισορροπία και επιτάχυνση ράβδου.

Ένα φύλλο εργασίας.

Μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους 3m και μάζας 4kg, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από σημείο Κ, σε απόσταση (ΑΚ)=1m, ισορροπεί δε σε οριζόντια θέση, δεμένη στο άκρον της Β με κατακόρυφο νήμα, όπως στο σχήμα. Αν $g=10m/s^2$:



i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό και να υπολογίστε τα μέτρα τους.

Από ΣF=0 και Στ=0 έχουμε:

F+T-mg=0 και T(KB)-mg(KM)=0, από όπου T=10N και F=30N.

Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Για τη χρονική στιγμή αμέσως μετά. Να βρεθούν:

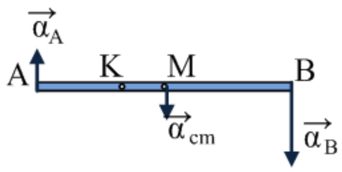
ii) Η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού. Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού, ως προς άξονα κάθετον σε αυτήν που περνά από το μέσον της $I_{cm}=\frac{1}{12}m\ell^2$.

Από 2ο νόμο έχουμε $Στ=I\cdot α_{γων}$ ή $mg(KM)=(\frac{1}{12}m\ell^2+m(KM)^2)\cdot α_{γων} \rightarrow α_{γων}=5rad/s^2$.

iii) Οι επιταχύνσεις των άκρων Α και Β και του μέσου Μ της δοκού. Σχεδιάστε τις πάνω στο διπλανό σχήμα.

$α_A=α_{γων}\cdot(AK)=5m/s^2$, $α_{cm}= α_{γων}\cdot(MK)=2{,}5\ m/s^2$ και

$α_B=α_{γων}\cdot(KB)=10m/s^2$.



iv) Η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη δοκό.

$$ΣF=mα_{cm} \rightarrow w-F=m\cdot α_{cm} \rightarrow F=30N$$

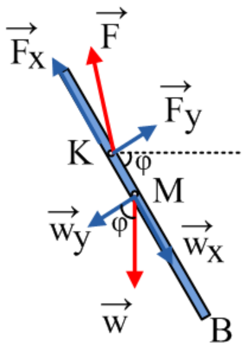
Μετά από λίγο η δοκός σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ=60° στρεφόμενη με ω=6rad/s. Για τη θέση αυτή:

v) Σχεδιάστε τη δύναμη που ασκείται στη δοκό από τον άξονα και κατόπιν, αναλύστε τις δυνάμεις σε δυο άξονες, έναν παράλληλον στη δοκό και έναν κάθετο σε αυτήν.

vi) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού.

$$Στ=I\cdot α_{γων} \rightarrow mgσυνφ(KM)= (\frac{1}{12}m\ell^2+m(KM)^2)\cdot α_{γων}$$

$$α_{γων}=2{,}5rad/s^2.$$



vii) Να βρεθεί η επιτρόχια επιτάχυνση (ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας) του μέσου Μ της δοκού και η κεντρομόλος επιτάχυνσή του.

$$α_{επ}=α_{γων}\cdot(KM)=1{,}25\ m/s^2 \quad \text{και } α_κ=ω^2\cdot R= 18\ m/s^2$$

viii) Να εφαρμόστε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας (το μέσον Μ) της δοκού, για να υπολογίστε τις δυο συνιστώσες της δύναμης από τον άξονα, που έχετε σχεδιάσει στο σχήμα.

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_\kappa \rightarrow F_x - mg\eta\mu\varphi = m \cdot \alpha_\kappa \rightarrow F_x \approx 106{,}6N \text{ και}$$

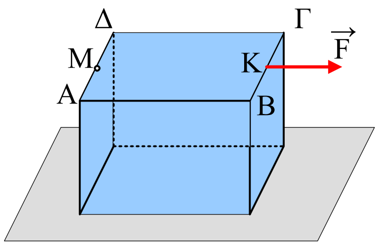
$$\Sigma F_y = m \cdot \alpha_\varepsilon \rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi - F_y = m\alpha_{\varepsilon\pi} \rightarrow F_y = 15N$$

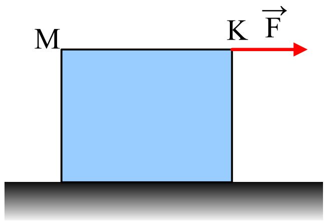
ix) Η κίνηση της δοκού είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γωνιακή επιτάχυνση μεταβάλλεται και η κίνηση δεν είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη

dmargaris@sch.gr

Θα ανατραπεί ο κύβος;





τομή

Ένας κύβος πλευράς α=1m και βάρους w=600N ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}2$. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης μέτρου F=180N, η οποία ασκείται στο μέσον Κ της ακμής ΒΓ, όπως στο σχήμα.

Α) Τότε ο κύβος:

i) Παραμένει ακίνητος.

ii) Επιταχύνεται προς τα δεξιά

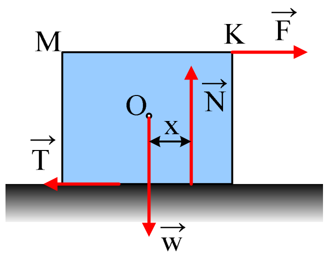
iii) Επιταχύνεται προς τα δεξιά και ανατρέπεται.

Β) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το μέσον Μ της ακμής ΑΔ έχει μέτρο:

α) μηδέν β) 30N·m γ) 50N·m

Απάντηση:

Α) Δεν ξέρουμε αν ισορροπεί ο κύβος. Αν κάνει μόνο μεταφορική ή και στροφική κίνηση (αν ανατρέπεται). Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο είναι αυτές του διπλανού σχήματος.



Στον κατακόρυφο άξονα ο κύβος ισορροπεί, άρα $\Sigma F_y=0$ ή

$$N=w=600N,$$

συνεπώς η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής (η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η τριβή) είναι $T_{ορ}=T_{ολ}=\mu N=120N$.

Αφού $F>T_{ορ}$ ο κύβος επιταχύνεται προς τα δεξιά και η ασκούμενη τριβή είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο $T_{ολ}=120N$.

Δηλαδή ο κύβος αποκτά επιτάχυνση προς τα δεξιά, η οποία υπολογίζεται από τον $2^{ο}$ Νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{F-T}{m}=\frac{180-120}{60}=1m/s^2$$

Έστω ότι ο κύβος επιταχύνεται μεν προς τα δεξιά χωρίς όμως να στρέφεται. Τότε ως προς το κέντρο μάζας Ο θα ισχύει:

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow$$

$$w\cdot 0+N\cdot x-T\cdot\alpha/2-F\cdot\alpha/2=0 \rightarrow$$

$$Nx=T\cdot\alpha/2+F\cdot\alpha/2 \rightarrow$$

$$x = \frac{T+F}{N} \cdot \frac{a}{2} = \frac{120+180}{600}\frac{1}{2}m = 0{,}25m$$

Δηλαδή ο φορέας της Ν περνάει από την βάση στήριξης και απλά είναι μετατοπισμένος κατά x=0,25m από το κέντρο Ο, πράγμα που μπορεί να συμβαίνει. Συνεπώς πράγματι ο κύβος δεν ανατρέπεται. Σωστή η β) πρόταση.

Β) Αν πάρουμε τώρα τις ροπές ως προς το Μ έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = -w\cdot\alpha/2 - T\cdot\alpha + F\cdot 0 + N\cdot(\alpha/2 + x) \rightarrow$$

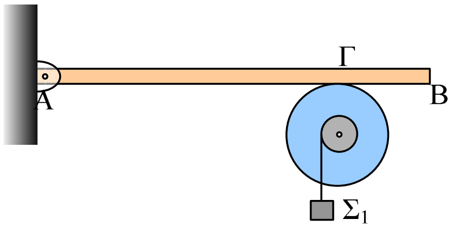
$$\Sigma\tau_A = -600\cdot 0{,}5 - 120\cdot 1 + 600\cdot(0{,}5+0{,}25) = +30 N\cdot m.$$

Σωστή η β) πρόταση.

Μια αναλυτικότερη μελέτη, μπορείτε να δείτε από εδώ:
http://dmargaris2.blogspot.com/search?updated-max=2009-04-28T16%3A23%3A00%2B03%3A00&max-results=10

dmargaris@sch.gr

Μια ισορροπία και μια περιστροφική κίνηση.



Ένα στερεό Κ αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, που συμπίπτει με τον άξονα των δύο κυλίνδρων, ακτίνων R=0,5m και r=0,2m. Γύρω από τον κύλινδρο με την μικρότερη ακτίνα έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα στο κάτω άκρο του οποίου έχουμε δέσει ένα σώμα $Σ_1$ μάζας 2kg. Το στερεό Κ ισορροπεί, όταν πάνω του στηρίζεται μια ομογενής δοκός (ΑΒ) μήκους 4m και μάζας 6kg, η οποία συνδέεται με άρθρωση στο άκρο της Α. Η δοκός είναι οριζόντια και στηρίζεται στο στερεό σε σημείο Γ, όπου (ΓΒ)=1m, όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δοκού και στερεού Κ είναι μ=0,3.

i) Να βρεθεί η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση.

Λύνουμε το σώμα $Σ_1$ και το αντικαθιστούμε με άλλο σώμα Σ μάζας 10kg, το οποίο αφήνουμε να κινηθεί, από ύψος h=2m από το έδαφος. Το σώμα Σ χρειάζεται 2s για να φτάσει στο έδαφος.

ii) Να αποδειχθεί ότι η κίνηση του σώματος Σ είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

iii) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού Κ στη διάρκεια της πτώσης.

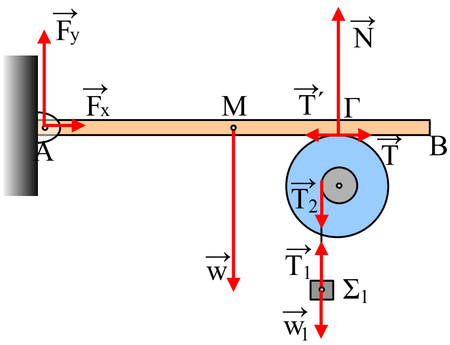
iv) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού Κ.

v) Τι ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ, μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια εξαιτίας της τριβής;

Θεωρείστε μηδενική τη δυναμική ενέργεια στο έδαφος και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό και στο στερεό (δεν έχει σχεδιαστεί η δύναμη από τον άξονα επειδή δεν μας χρειάζεται και για να μην επιβαρυνθεί περαιτέρω το σχήμα)



i) Το σώμα $Σ_1$ ισορροπεί, οπότε ΣF=0 ή

$$T_1=m_1g=20N=T_2.$$

Το στερεό Κ ισορροπεί οπότε Στ=0 ή

$$T_2 \cdot r - T \cdot R = 0 \text{ ή } T=\frac{T_2 \cdot r}{R}=\frac{20\cdot 0,2}{0,5}N=8N$$

Όπου Τ η δύναμη στατικής τριβής που ασκείται στο Κ από τη δοκό, οπότε η δοκός δέχεται την αντίδρασή της Τ΄ με φορά προς τα αριστερά.

Αλλά και η δοκός ισορροπεί, οπότε:

$$ΣF_x=0,\quad ΣF_y=0 \quad \text{και } Στ=0 \rightarrow$$

$$F_x - T'=0 \text{ ή } F_x = T' = T=8N$$

$$F_y+N-Mg = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma\tau_A=0 \rightarrow N\cdot(A\Gamma) - w\cdot(AM) = 0 \text{ ή } N = \frac{Mg\cdot(AM)}{(A\Gamma)} = \frac{60\cdot 2}{3}N = 40N$$

Άρα από την (1) F_y=Mg-N= 20N.

ii) Μόλις τη θέση του Σ_1 πάρει το σώμα Σ, οι δυνάμεις είναι ξανά αυτές του σχήματος με τη διαφορά ότι η ασκούμενη τριβή είναι τριβή ολίσθησης για την οποία T=μN=0,3·40N=12N.

Το σώμα Σ επιταχύνεται προς τα κάτω, οπότε:

$$\Sigma F=m\cdot\alpha \text{ ή } mg-T_1=m\cdot\alpha \ (2).$$

Το στερεό Κ στρέφεται με φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού, οπότε με εφαρμογή του 2[ου] νόμου του Νεύτωνα για την στροφική του κίνηση παίρνουμε:

$$T_2\cdot r - T\cdot R = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Όπου αφού το νήμα είναι αβαρές $T_1=T_2$ (ίσα μέτρα).

Εξάλλου η ταχύτητα του σώματος Σ είναι ίση με την ταχύτητα κάθε σημείου του νήματος συνεπώς και με την γραμμική ταχύτητα ενός σημείου του κυλίνδρου ακτίνας r.

$$\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho} \text{ ή } \upsilon=\omega\cdot r \text{ ή } \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cdot r \rightarrow a = a_{\gamma\omega\nu} r \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$a = \frac{mgr^2 - TRr}{mr^2 + I} \quad (4)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή, οπότε η κίνηση του Σ είναι Ε.Ο.Ε.Κ.

iii) Για την κίνηση του σώματος Σ λοιπόν θα ισχύουν:

$$\upsilon=\alpha\cdot t \text{ και } \Delta y = ½\, \alpha\cdot t^2, \text{ από όπου } a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2\cdot 2}{2^2} m/s^2 = 1m/s^2$$

$$\text{οπότε από την (3) βρίσκουμε } a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a}{r} = \frac{1}{0,2} rad/s^2 = 5rad/s^2$$

iv) Από την σχέση (4) βρίσκουμε:

$$I = \frac{m(g-a)r^2 - TRr}{a} = \frac{10(10-1)\cdot 0,2^2 - 12\cdot 0,5\cdot 0,2}{1} kg\cdot m^2 = 2,4 kg\cdot m^2$$

v) Η παραγόμενη θερμότητα είναι κατ' απόλυτο τιμή ίσο με το έργο της τριβής.

$$Q=|W_T| = \tau\cdot\theta = T\cdot R\cdot ½\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 \text{ και με αντικατάσταση:}$$

$$Q= T\cdot R\cdot ½\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 = 12\cdot 0,5\cdot ½\, 5\cdot 2^2 \text{ J} = 60\text{J}$$

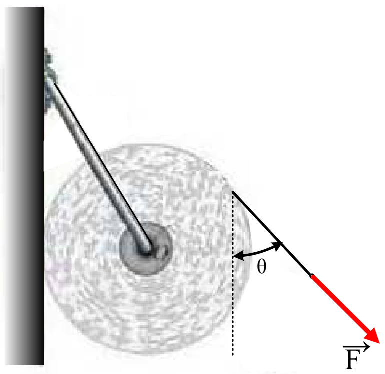
Ενώ η αρχική δυναμική ενέργεια του σώματος είναι U=mgh = 10·10·2J=200J.

Συνεπώς το ζητούμενο ποσοστό είναι;

$$\pi = \frac{Q}{U}100\% = \frac{60}{200}100\% = 30\%$$

dmargaris@sch.gr

Ένας κύλινδρος σε επαφή με τοίχο.



Ο κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα 20kg και ακτίνα R=0,5m και παρουσιάζει με τον τοίχο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,2$.Γύρω του έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου ασκούμε μια μεταβλητή δύναμη. Παρατηρούμε ότι για να αρχίσει να στρέφεται ο κύλινδρος απαιτείται να του ασκήσουμε δύναμη τουλάχιστον F=50N, όπως στο σχήμα, όπου ημθ=0,6.

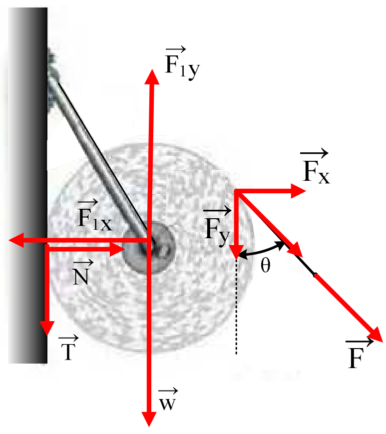
i) Να βρεθεί η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο από τον άξονα περιστροφής του.

ii) Αν αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή F=60N, παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω=20rad/s σε χρονικό διάστημα 5s. Υπολογίστε στην περίπτωση αυτή την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο από τον άξονα περιστροφής του.

Δίνεται για τον κύλινδρο ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=\frac{1}{2}MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, όπου η ασκούμενη στο άκρο του νήματος δύναμη έχει μεταφερθεί στον κύλινδρο και έχει αναλυθεί σε δύο συνιστώσες F_x και F_y, ενώ F_{1x} και F_{1y} οι δυο συνιστώσες της δύναμης που ασκεί στον κύλινδρο ο άξονας. Ο κύλινδρος ισορροπεί οπότε:



$$\Sigma F_x=0 \text{ ή } N+F_x-F_{1x}=0 \quad (1) \text{ και}$$

$$\Sigma F_y=0 \text{ ή } F_{1y}-T-w-F_y=0 \quad (2)$$

Αλλά αφού ο κύλινδρος με την επίδραση της δύναμης F τείνει να περιστραφεί η ασκούμενη τριβή είναι η οριακή. Εξάλλου αφού ο κύλινδρος ισορροπεί Στ=0 ή

$$-F\cdot R+T\cdot R=0 \text{ ή } T=F=50N$$

$$\text{Όμως } T_{o\rho}=\mu_s\cdot N \rightarrow N=\frac{T_{o\rho}}{\mu_s}=250N$$

Και οι εξισώσεις (1) και (2) δίνουν:

$$F_{1x}=N+F\cdot ημθ = 250N+50\cdot 0,6N = 280N \text{ και}$$

$$F_{1y}=T+w+F\cdot συνθ^{*} = 50N+200N+50\cdot 0,8N= 290N$$

ii) Οι ασκούμενες δυνάμεις είναι ξανά οι ίδιες, με τη διαφορά ότι τώρα η τριβή, είναι τριβή ολίσθησης, για την οποία $T=\mu\cdot N$. Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου δεν επιταχύνεται συνεπώς ισχύουν ξανά οι σχέσεις (1) και (2):

$$ΣF_x=0 \text{ ή } N+F_x-F_{1x} = 0 \quad (1) \text{ και}$$

$$ΣF_y=0 \text{ ή } F_{1y}-T-w-F_y= 0 \quad (2)$$

Για την στροφική κίνηση εξάλλου από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$F\cdot R-T\cdot R= I\cdot α_{γων}$$

$$F-T= ½\, MR\cdot α_{γων} \quad (3)$$

Αλλά $α_{γων}=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{\omega-0}{t}=4rad/s^2$

Και από την (3) παίρνουμε:

$$T= F – ½\, MR\cdot α_{γων}= 60N- ½\, 20\cdot 0,5\cdot 4N= 40N$$

Αλλά τότε $N=\dfrac{T}{\mu}=200N$

Και οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν:

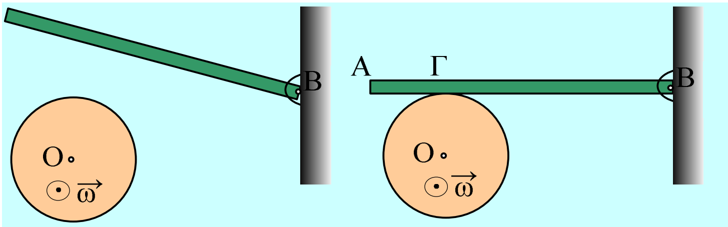
$$F_{1x}=N+F\cdot ημθ = 200N+60\cdot 0,6N = 236N \text{ και}$$

$$F_{1y}=T+w+F\cdot συνθ = 40N+200N+60\cdot 0,8N= 288N$$

*
ημθ=0,6 και αφού $ημ^2θ+συν^2θ=1 \rightarrow συνθ=0,8$

dmargaris@sch.gr

Ισορροπία και επιβράδυνση στερεών.



Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας Μ=80kg και ακτίνας R=1m περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0=10rad/s, γύρω από τον άξονά του, που συνδέει τα κέντρα των δύο του βάσεων, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή φέρνουμε σε επαφή με τον κύλινδρο μια ομογενή δοκό μάζας m=30kg και μήκους 4m, το άκρο της οποίας συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Στη θέση αυτή η δοκός είναι οριζόντια, ενώ (ΑΓ)=1m. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δοκού και κυλίνδρου είναι μ=0,2 και $g=10m/s^2$,

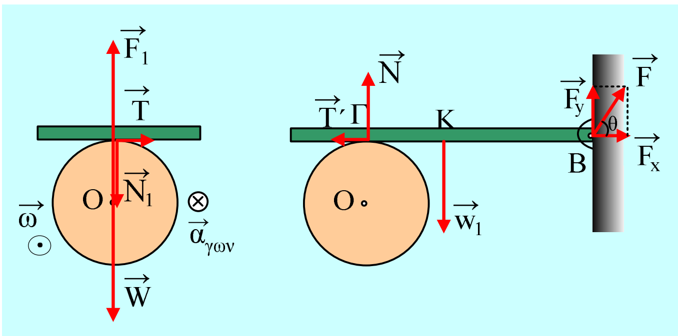
i) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση (επιβράδυνση) του κυλίνδρου.

ii) Πόσες περιστροφές θα εκτελέσει ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει;

iii) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τη δοκό η διεύθυνση της δύναμης που ασκείται από την άρθρωση, στη διάρκεια της επιβράδυνσης του κυλίνδρου.

Δίνεται για τον κύλινδρο I_{cm}= ½ MR^2.

Απάντηση:



i) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί χωριστά οι δυνάμεις σε κύλινδρο και δοκό, όπου F_1 η δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο από τον άξονα περιστροφής.

Η δοκός ισορροπεί, άρα $\Sigma\tau_B=0$ ή

$$-N\cdot(\Gamma B) + w\cdot(KB) = 0 \text{ ή}$$

$$3N=2mg \text{ ή } N=200N$$

Αλλά $T'=\mu\cdot N$ = 40N = T (Η T ασκείται στον κύλινδρο και η αντίδρασή της T΄ στη δοκό).

Αλλά για τον κύλινδρο ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση (δουλεύουμε με μέτρα:

$$\Sigma\tau_o=I\cdot\alpha_{γων} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{T \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2T}{MR} = \frac{2 \cdot 40}{80 \cdot 1} rad/s^2 = 1 rad/s^2$$

με κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του σχήματος και φορά προς τα μέσα.

ii) Η κίνηση λοιπόν του κυλίνδρου είναι στροφική ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη), για την οποία ισχύουν:

$\omega=\omega_0-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$ (1) και $\theta=\omega_0\cdot t - ½\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2$ (2)

Όταν $\omega=0 \rightarrow t=\omega_0/\alpha_{\gamma\omega\nu}= 10s$, οπότε $\theta=10\cdot10rad- ½\, 1\cdot100rad = 50rad$ και

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{25}{\pi} \sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

iii) Η δοκός ισορροπεί

$$\Sigma \vec{F} = 0 \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow F_x - T' = 0 \rightarrow F_x=40N \\ \Sigma F_y= 0 \rightarrow N+F_y-w_1=0 \rightarrow F_y=100N \end{cases}$$

Αλλά με βάση το σχήμα:

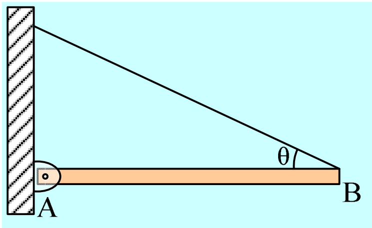
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = 2{,}5$$

Η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της δύναμης αυτής με τη δοκό, είναι η παραπληρωματική της θ, συνεπώς εφθ΄=-2,5.

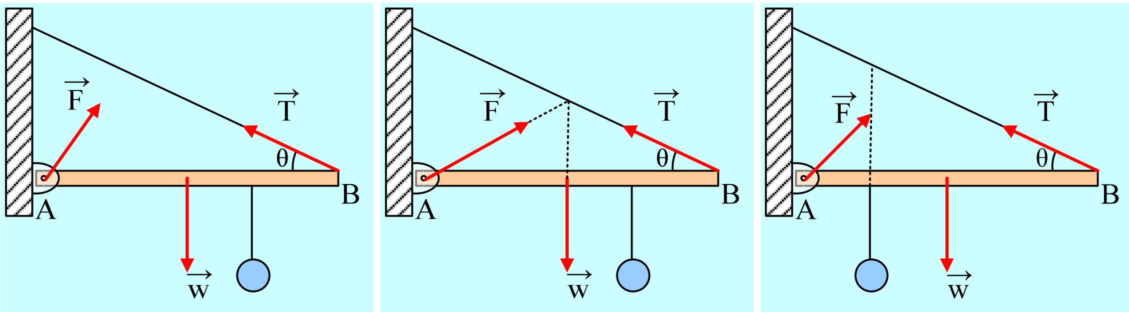
dmargaris@sch.gr

Ισορροπία στερεού. Ερωτήσεις.

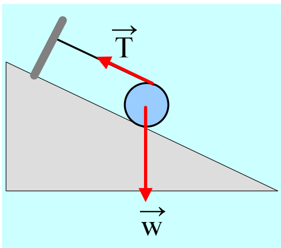
1) Η ράβδος του σχήματος ισορροπεί δεμένη με νήμα που σχηματίζει γωνία θ=30°. Τότε και η δύναμη από την άρθρωση σχηματίζει γωνία 30° με τη ράβδο.



2) Στην παραπάνω ράβδο κρέμεται μέσω νήματος μια σφαίρα. Σε ποιο από τα παρακάτω σχήματα έχει σχεδιαστεί σωστά η δύναμη από την άρθρωση;



3) Ο κύλινδρος του σχήματος ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο δεμένος με νήμα παράλληλο στο επίπεδο.



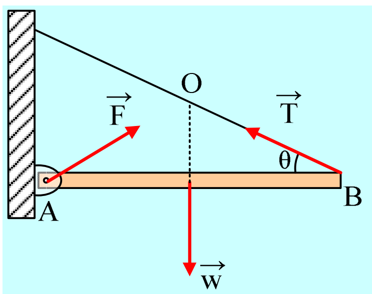
Ποια πρόταση είναι σωστή.

i) το επίπεδο είναι λείο.

ii) Στον κύλινδρο ασκείται τριβή με φορά προς τα πάνω.

iii) Στον κύλινδρο ασκείται τριβή με φορά προς τα κάτω.

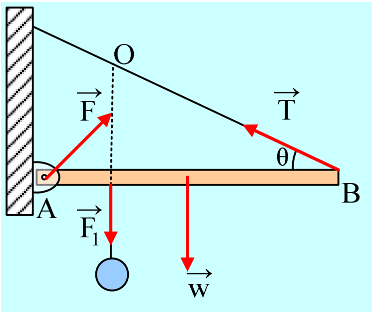
Απαντήσεις:



1) Η πρόταση είναι σωστή.

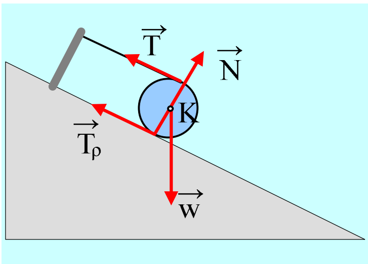
Αν Ο το σημείο τομής του φορέα του βάρους και της τάσης του νήματος, τότε αφού η ράβδος ισορροπεί θα ισχύει $\Sigma\tau_o=0$. Αλλά αφού οι ροπές του βάρους και της τάσης είναι μηδενικές, πρέπει και η ροπή της δύναμης από την άρθρωση F να είναι επίσης μηδενική. Συνεπώς και η δύναμη F κατευθύνεται προς το Ο. Αλλά τότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές, αφού η διάμεσος (ο φορέας του βάρους) είναι και μεσοκάθετος. Άρα η δύναμη F σχηματίζει γωνία θ=30° με τη ράβδο.

2) Σωστό σχήμα είναι το τρίτο, αφού για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο Ο, το σημείο τομής του φορέα της δύναμης F_1 και της τάσης να είναι μηδέν.



Αλλά θεωρώντας τις ροπές που τείνουν να στρέψουν τη ράβδο αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού θετικές, η ροπή του βάρους είναι αρνητική, αλλά τότε η ροπή της F πρέπει να είναι θετική και ο φορέας της πρέπει να «περνά» από σημείο του νήματος χαμηλότερα του Ο.

3) Σωστή πρόταση είναι η ii). Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ασκούμενες δυνάμεις.



Αφού ο κύλινδρος ισορροπεί $\Sigma\tau_\kappa=0$ και αφού $\tau_w=\tau_N=0$, πρέπει $+T\cdot R - T_\rho\cdot R = 0$, συνεπώς η τριβή είναι προς τα πάνω και μάλιστα έχει το ίδιο μέτρο με την τάση του νήματος.

dmargaris@sch.gr

Ισορροπία και τριβές.

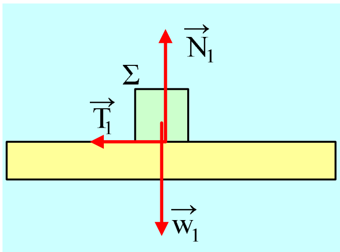
Η λεπτή ομογενής δοκός ΑΓ του σχήματος έχει μήκος 6m, μάζα Μ=2kg και ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη στα σημεία Δ και Ε σε περιστρεφόμενο κύλινδρο και σε τρίποδο. Τα σημεία Δ και Ε απέχουν 1m από τα άκρα της ράβδου. Ένα σώμα Σ μάζας 0,5kg, που θεωρείται υλικό σημείο, εκτοξεύεται για t=0 από το σημείο Δ και φτάνει μέχρι το σημείο Ε, όπου σταματά. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, τόσο μεταξύ δοκού και σώματος Σ, όσο και μεταξύ δοκού και κυλίνδρου είναι ίσος με μ=0,2 και σε όλη τη διάρκεια της κίνησης η δοκός ισορροπεί.

i) Ποια η αρχική ταχύτητα του σώματος Σ και πόσο χρόνο διαρκεί η κίνησή του;
ii) Να βρεθεί η τριβή που ασκείται στη δοκό από το τρίποδο σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση από 0-3s.
iii) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ δοκού και τρίποδου για να ισορροπεί η δοκός;

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ. Αφού στον κατακόρυφο άξονα ισορροπεί, ΣF=0 ή $N_1=mg=5N$, αλλά τότε $T_1=\mu N_1=1N$.
Αλλά, θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, τότε το σώμα αποκτά επιτάχυνση:



$$a=\frac{T_1}{m}=\frac{-1}{0,5}m/s^2=-2m/s^2$$

Άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη) κίνηση και ισχύουν:

$$\upsilon=\upsilon_0+\alpha\cdot t \quad (1) \qquad \text{και } \Delta x=\upsilon_0 t+½\, \alpha t^2 \quad (2)$$

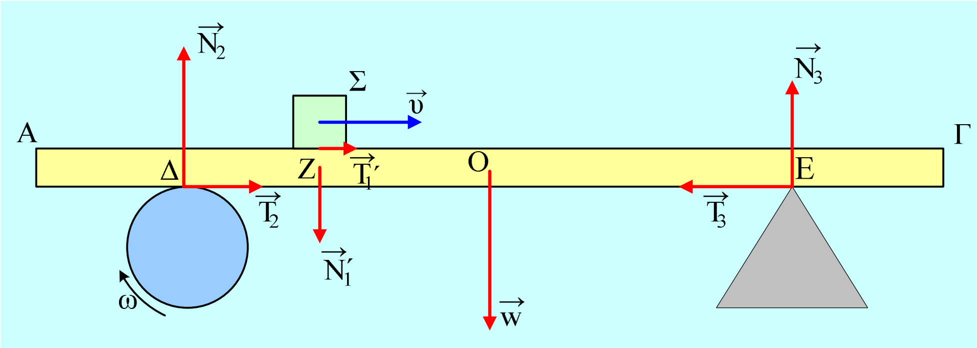
Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο σημείο Ε σταματά, άρα υ=0, οπότε λύνοντας την (1) ως προς t και αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε:

$$\Delta x=-\frac{\upsilon_0^2}{2\alpha}\rightarrow \upsilon_0=\sqrt{-2\alpha\cdot\Delta x}=\sqrt{2\cdot 2\cdot 4}m/s=4m/s$$

Εξάλλου:

$$t=\frac{\upsilon_0}{-a}=2s$$

ii) Έστω τη χρονική στιγμή t το σώμα Σ απέχει κατά (ΔΖ)= x από το σημείο Δ. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται (μόνο) στη δοκό τη στιγμή αυτή.



(Το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου έχει ταχύτητα προς τα δεξιά, συνεπώς η ασκούμενη από τη δοκό τριβή έχει φορά προς τ' αριστερά. Η αντίδρασή της T_2 έχει φορά προς τα δεξιά. Εξάλλου $N_1{'}$είναι η αντίδραση της N_1 και $T_1{'}$η αντίδραση της T_1 που ασκείται στο σώμα Σ).

Αλλά αφού ισορροπεί η δοκός ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}=0 \begin{cases} \Sigma F_x=0 \;\rightarrow T_2+T_1-T_3=0 \;\; (3) \\ \Sigma F_y=0 \;\rightarrow N_2+N_3-N_1{'}-W=0 \;\; (4) \end{cases}$$

Αφού η ράβδος ισορροπεί το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν. Παίρνουμε το $\Sigma\tau_E=0$ και έχουμε:

$$-N_2\cdot(\Delta E)+N_1{'}\cdot(ZE)+W\cdot(OE)=0 \text{ ή}$$

$$-4N_2+5(4-x)+20\cdot 2=0 \;\; (\text{μονάδες στο S.I.})$$

Αλλά $x=\upsilon_0 t+½\,at^2=4t-t^2$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$-4N_2+5(4-4t+t^2)+40=0 \;\rightarrow N_2=15-5t+1{,}25\,t^2 \;\; (\text{μονάδες στο S.I.})$$

Άρα η ασκούμενη από τον κύλινδρο ροπή έχει μέτρο:

$$T_2=\mu\cdot N_2=3-t+0{,}25t \;\; (\text{μονάδες στο S.I.})$$

Και από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

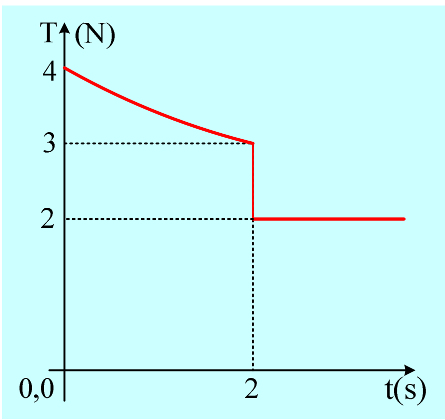
$$T_3=T_1+T_2=4-t+0{,}25t^2 \;\; (\text{μονάδες στο S.I.})$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης είναι μια παραβολή με τα κοίλα άνω, όπου για t=0, T_3=4N και για t=2s T_3=3N. Όμως μετά την ακινητοποίηση του σώματος Σ στο σημείο Ε, παίρνοντας $\Sigma\tau_E=0$ βρίσκουμε:

$$-N_2\cdot 4+W\cdot 2=0 \text{ ή } N_2=10N$$

$$\text{και } T_2=\mu\cdot N_2=2N$$

Με αποτέλεσμα η ζητούμενη γραφική παράσταση να



είναι όπως στο διπλανό διάγραμμα.

iii) Από την παραπάνω μελέτη προκύπτει ότι η μέγιστη τριβή που ασκείται στη δοκό από το τρίποδο έχει μέτρο 4N όταν το σώμα Σ ξεκινά την κίνησή του. Για να ισορροπεί η ράβδος δεν πρέπει να ολισθαίνει στο σημείο Ε, άρα η τριβή αυτή πρέπει να είναι στατική:

$$T_3 \leq T_{ορ} \quad ή \quad T_3 \leq \mu_s \cdot N_3$$

Αλλά από την εξίσωση (4) για N_2=15N παίρνουμε N_3=10N οπότε:

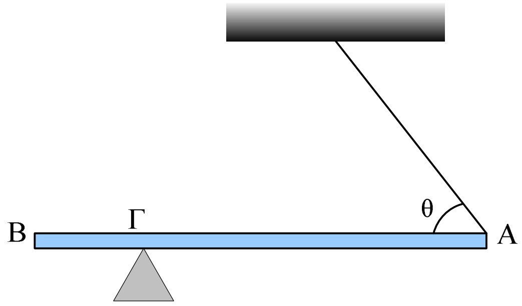
$$\mu_s \geq \frac{T_3}{N_3} \rightarrow \mu_s \geq 0{,}4$$

Δηλαδή η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής είναι ίσος με 0,4

dmargaris@sch.gr

Μια ισορροπία αλλά και τι συμβαίνει αν κοπεί το νήμα;

Η ομογενής ράβδος ΑΒ μήκος 4m και μάζας 30kg ισορροπεί οριζόντια, όπως στο σχήμα, στηριζόμενη σε τρίποδο στο σημείο Γ, όπου (ΒΓ)=1m και δεμένη στο άλλο άκρο της Α με νήμα, που σχηματίζει με τη ράβδο γωνία θ, όπου ημθ=0,8.



i) Βρείτε την τριβή που ασκείται στη ράβδο από το τρίποδο.

ii) Υπολογίστε τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ τρίποδου και ράβδου για να εξασφαλίζεται η ισορροπία.

Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Για τη στιγμή αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος, να βρεθούν:

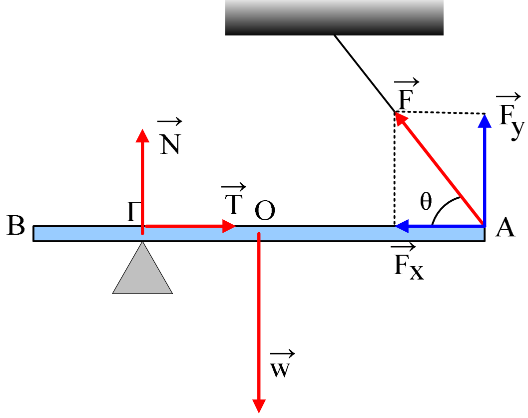
iii) Η επιτάχυνση του άκρου Α.

iv) Η δύναμη που ασκεί το τρίποδο στη ράβδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=m\ell^2/12$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπου F_x και F_y οι συνιστώσες της τάσης του νήματος F.



Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε ΣF=0:

$\Sigma F_x=0$ ή	$\Sigma F_y=0$ ή
$T-F_x=0 \rightarrow$	$N+F_y-w=0$ ή
$T= F\cdot συνθ$ (1)	$N=mg-F\cdot ημθ$ (2)

Αλλά και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων, ως προς οποιοδήποτε σημείο θα είναι μηδενική:

$$\Sigma\tau_\Gamma=0 \rightarrow$$

$$F\cdot ημθ\cdot(ΑΓ) – mg\cdot(ΓΟ) = 0 \rightarrow$$

$$F=30\cdot10\cdot1/3\cdot0,8\ N =125N$$

Με αντικατάσταση στις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$T= 125N\cdot0,6= 75N$$

(υπενθυμίζεται ότι $ημ^2θ+συν^2θ=1$ από όπου συνθ=0,6)

και $N=300N-125N\cdot0,8=200N$

ii) Για να εξασφαλίζεται η ισορροπία της ράβδου θα πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, συνεπώς:

$$T \le T_{ορ} \rightarrow$$

$$T \le \mu_s\cdot N\rightarrow$$

$$\mu_s \ge T/N \text{ ή } \mu_s\ge 0,375$$

Άρα ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής για να ισορροπεί η ράβδος είναι n=0,375

iii) Μόλις κοπεί το νήμα η ράβδος θα περιστραφεί γύρω από το σημείο στήριξης Γ και από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση παίρνουμε:

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{γων} \quad (3)$$

Αλλά από τον κανόνα του Steiner έχουμε:

$$I=I_{cm}+md^2 = 1/12\ m\ell^2+m\ell^2/16 = \frac{7}{48}m\,\ell^2$$

Και η εξίσωση (3) μας δίνει:

$$mg\cdot\ell/4 = \frac{7}{48}m\,\ell^2\cdot\alpha_{γων} \rightarrow$$

$$\alpha_{γων}=\frac{12g}{7l} = 30/7\ rad/s^2.$$

Το άκρο Α της ράβδου όμως εκτελεί κυκλική κίνηση κέντρου Γ και έχει επιτρόχια επιτάχυνση

$$\alpha_A= \alpha_{γων}\cdot R= 90/7 m/s^2.$$

iv) Θεωρώντας ότι όλες οι δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας της ράβδου έχουμε: (συνιστάται η μελέτη της ανάρτησης **Δύναμη από τον άξονα περιστροφής.**)

$$\Sigma F_x = m\upsilon^2/R \text{ και } \Sigma F_y = m\alpha_{cmy} \quad (4)$$

Όπου το κέντρο μάζας Ο της ράβδου εκτελεί κυκλική κίνηση με κέντρο το Γ και ακτίνα την (ΓΟ) και τη στιγμή αυτή έχει μηδενική ταχύτητα, ενώ έχει επιτάχυνση:

$$\alpha_{cmy} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(\Gamma O) = 30/7 \text{ m/s}^2.$$

Έτσι οι εξισώσεις (4) δίνουν:

$$T=0 \text{ και}$$

$$mg-N=m\alpha_{cmy} \text{ ή}$$

$$N=m(g-\alpha_{cmy})$$

Και με αντικατάσταση: $N= 1200/7$ N.

Δηλαδή μόλις κοπεί το νήμα, η κατάσταση αλλάζει συνολικά, η τριβή δεν υπάρχει πλέον, ενώ και η δύναμη στήριξης Ν αλλάζει μέτρο.

Σχόλιο:

Στόχοι της παραπάνω άσκησης, πέρα από τη μελέτη της ισορροπίας μιας ράβδου, είναι το ξεκαθάρισμα για τη σχέση μεταξύ της στατικής και της οριακής τριβής, αλλά και η εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της μηχανικής στη περίπτωση ενός στερεού, όταν στρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος δεν περνά από το κέντρο μάζα του. Η κατανόηση δηλαδή ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλη η μάζα του στερεού, είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας, σημείο στο οποίο μεταφέρουμε ουσιαστικά και όλες τις ασκούμενες δυνάμεις. Πόσοι αλήθεια από τους μαθητές μας μπορούν να κατανοήσουν ότι μια μικρή αλλαγή στα δεδομένα της άσκησης, μπορεί να επιφέρει στην εξαφάνιση μιας υπάρχουσας δύναμης τριβής;

dmargaris@sch.gr

Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.

Η ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους ℓ=2m και μάζας Μ=12kg μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο και ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα, όπου το σώμα Σ έχει μάζα m=4kg.

Το σώμα Σ είναι δεμένο στο πάνω άκρο ιδανικού ελατηρίου και κρέμεται από ένα νήμα.

i) Υπολογίστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στο σώμα Σ.

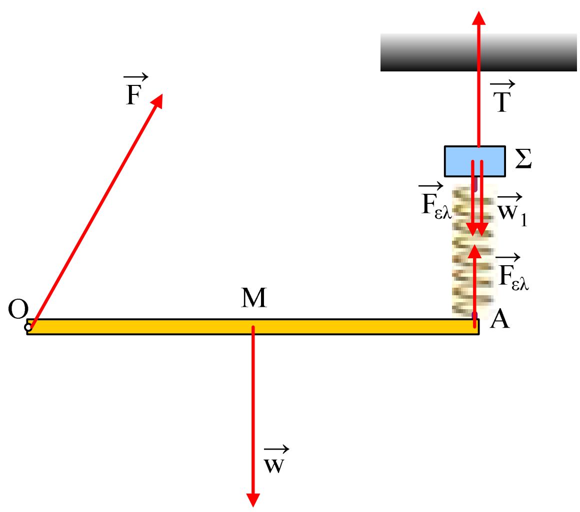
ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα που κρέμεται το σώμα Σ. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα (κατά τον άξονα) περιστροφής που περνά από το Ο, αμέσως μετά, του συστήματος ράβδος-ελατήριο-σώμα Σ.

iii) Ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ;

Δίνεται: $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Στο σχήμα εμφανίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στο σώμα Σ.



i) Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0$$

οπότε:

$$\Sigma F_x=0 \text{ ή}$$

$$F_x=0$$

Συνεπώς η δύναμη F από τον άξονα στο άκρο Ο, δεν έχει οριζόντια συνιστώσα, αλλά είναι κατακόρυφη.

$$\text{Ακόμη } \Sigma F_y=0 \text{ ή}$$

$$F+F_{ελ}-w=0 \quad (1)$$

Ακόμη για τις ροπές ως προς το άκρο Ο έχουμε:

$$\Sigma\tau=0 \text{ ή}$$

$$F_{ελ}\cdot \ell - Mg\cdot \ell/2 = 0 \text{ ή}$$

$$F_{ελ}=Mg/2= 60N.$$

Έτσι η (1) δίνει:

$$F=w-F_{ελ}= 60N$$

Αλλά και το σώμα Σ ισορροπεί:

$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow$$

$$T=mg+F_{ελ}=100N$$

ii) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος έχουμε:

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau_{εξ}$$

Αλλά οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι η δύναμη F του άξονα και τα δύο βάρη, οπότε παίρνοντας ως θετικές τις δεξιόστροφες ροπές έχουμε::

$$\frac{dL}{dt}=Mg\cdot\frac{l}{2}+mgl=200kgm^2/s^2$$

iii) Για το σώμα Σ έχουμε:

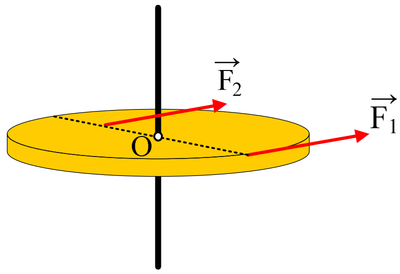
$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=w_1\cdot l+F_{ελ}\cdot l=200kg\cdot m^2/s^2$$

Σχόλιο:

Ο στόχος της παρούσας άσκησης είναι να ξεδιαλύνουμε, πώς βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ενός υλικού σημείου, αλλά και ενός συστήματος. Τι σημαίνει ότι τη μια φορά παίρνουμε τις ροπές όλως των δυνάμεων, ενώ την άλλη τις ροπές των εξωτερικών δυνάμεων.
Στο παράδειγμά μας οι δύο ρυθμοί είναι ίσοι. Γιατί;
Γιατί τη στιγμή αυτή η ράβδος ισορροπεί, αφού δεν έχει αλλάξει καμιά δύναμη από αυτές που ασκούνται πάνω της. Η ράβδος μετά από λίγο θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση, αφού θα αλλάξει το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου, αλλά αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος για τη ράβδο Στ=0.

dmargaris@sch.gr

Περιστροφή ενός δίσκου από δύο ροπές.



Ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας 2m και μάζας 314kg μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του Ο, χωρίς τριβές. Σε μια στιγμή ασκούνται πάνω του δύο οριζόντιες ίσες δυνάμεις, μέτρου F=40N, όπως στο σχήμα, όπου η F_1 δρα πάντα εφαπτομενικά, ενώ η F_2 είναι πάντα παράλληλη προς την F_1 και το σημείο εφαρμογής της είναι πάνω στην ίδια διάμετρο με το σημείο εφαρμογής της F_1. Τη χρονική στιγμή t_1 που ο δίσκος ολοκληρώνει 5 περιστροφές έχει γωνιακή ταχύτητα ω=2rad/s.

i) Ποια η απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F_2 από τον άξονα περιστροφής;

ii) Για τη στιγμή t_1 να βρεθούν:

α) Η ισχύς της δύναμης F_1.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου.

iii) Τη στιγμή t_1 καταργείται η δύναμη F_1.

α) Ποια η ισχύς της δύναμης F_2 αμέσως μετά;

β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής του τη στιγμή t_1+2s και ποια η στροφορμή του δίσκου τη στιγμή αυτή;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του Ι= ½ MR^2.

Απάντηση:

i) Εφαρμόζουμε για το δίσκο το Θ.Μ.Κ.Ε. και παίρνουμε:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}= W_{F1} +W_{F2}$$

$$½\ Iω^2 -0 = (F_1R-F_2x)\ θ \quad ή$$

$$½\ ½\ MR^2\ ω^2 = F_1R·10π-F_2·x·10π$$

$$x=\frac{F_1}{F_2}R-\frac{MR^2\omega^2}{40\pi F_2}$$

$$x=\frac{F_1}{F_2}R-\frac{MR^2\omega^2}{40\pi F_2}=2m-\frac{100\pi\cdot 4\cdot 4}{40\pi\cdot 40}m=1m$$

ii) α) P_{F1}=τ·ω = F·R·ω= 160W

β) $\frac{dK}{dt}=\Sigma\tau\cdot\omega=(F_1R-F_2x)\cdot\omega=80J/s$

iii) α) P_{F2}= - τ·ω = - F_2·x·ω = - 80W

β) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=-F_2\cdot x=-40kgm^2/s^2$$

Αλλά ο παραπάνω ρυθμός είναι σταθερός, αφού είναι σταθερή η ροπή που ασκείται στο δίσκο, άρα:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = -F_2 \cdot x \rightarrow$$

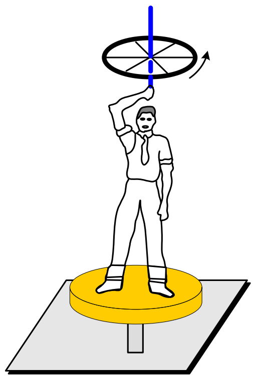
$$L_2 - L_1 = -F_2 \cdot x \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$L_2 = I \cdot \omega_1 - F_2 \cdot x \cdot \Delta t = ½ MR^2 \cdot \omega_1 - F_2 \cdot x \cdot \Delta t \text{ ή}$$

$$L_2 = ½ MR^2 \cdot \omega_1 - F_2 \cdot x \cdot \Delta t = (½\ 314 \cdot 4 \cdot 2 - 40 \cdot 1 \cdot 2) = 1176 kg \cdot m^2/s$$

dmargaris@sch.gr

Περιστροφή του τροχού.



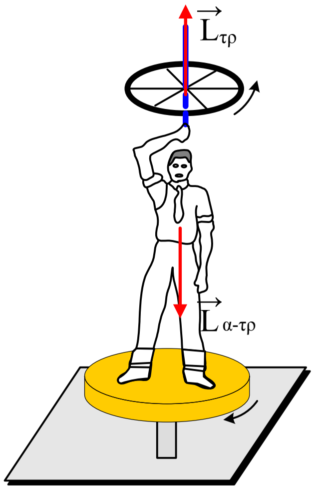
Πάνω σε ένα τραπεζάκι, που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβές, βρίσκεται ένας άνθρωπος κρατώντας στο χέρι του ένα τροχό μάζας 5kg και ακτίνας 0,6m, η μάζα του οποίου θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του. Σε μια στιγμή ο άνθρωπος ασκώντας κατάλληλη ροπή στον τροχό τον θέτει σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα ω=40rad/s, όπως στο σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι ο άνθρωπος μαζί με το τραπέζι θα περιστραφούν αποκτώντας γωνιακή ταχύτητα αντίθετης φοράς, υπολογίζοντας και το μέτρο της.

ii) Πόση χημική ενέργεια του ανθρώπου μετετράπη σε μηχανική κατά τη διαδικασία περιστροφής του τροχού;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ανθρώπου-τραπεζιού ως προς τον άξονα περιστροφής του τραπεζιού $I_1=8kgm^2$.

Απάντηση:



i) Στο σύστημα τραπεζάκι- άνθρωπος- τροχός δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής, συνεπώς η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

$$\vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετά} \quad ή$$

$$0 = \vec{L}_{τρ} + \vec{L}_{α-τ} \quad ή$$

$$\vec{L}_{α-τ} = -\vec{L}_{τροχ}$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι το σύστημα άνθρωπος-τραπεζάκι θα αποκτήσει στροφορμή κατά τον άξονα περιστροφής αντίθετης κατεύθυνσης από την στροφορμή του τροχού. Ή αλγεβρικά, αν Ι και I_1 οι ροπές αδράνειας τροχού-υπόλοιπου συστήματος:

$$I_1 ω_1 = -I \cdot ω \text{ ή}$$

$$ω_1 = -\frac{MR^2}{I_1} ω = -\frac{5 \cdot 0,6^2}{8} \cdot 40 rad.s = -9 rad/s$$

ii) Η χημική ενέργεια που μετετράπη σε μηχανική είναι ίση με την συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος:

$$K_{ολ} = K_{τροχ} + K_{ανθ-τρ} = ½ Iω^2 + ½ I_1 \cdot ω_1^2$$

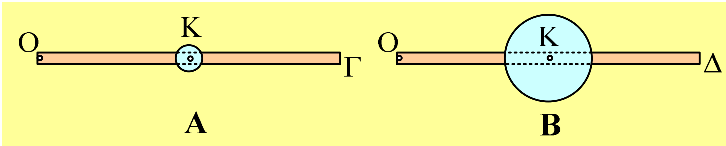
Και με αντικατάσταση:

$$K_{ολ} = ½ MR^2ω^2 + ½ I_1 \cdot ω_1^2 = ½\, 5 \cdot 0,6^2 \cdot 40^2 J + ½\, 8 \cdot 9^2 J = 1764 J.$$

dmargaris@sch.gr

Το υλικό σημείο και η σφαίρα.

ΘΕΜΑ 2ο.



Μια ομογενής λεπτή ράβδος μήκους ℓ και μάζας Μ, μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο μέσον Κ της ράβδου έχει προσδεθεί μια σφαίρα ίσης μάζας Μ (έχουμε τρυπήσει τη σφαίρα κατά μήκος μιας διαμέτρου στην ο-ποία εισχωρήσαμε τη ράβδο), δημιουργώντας έτσι ένα νέο στερεό. Στο πρώτο σχήμα η ακτίνα της σφαίρας είναι μικρή (στερεό Α), οπότε την θεωρούμε αμελητέα, ενώ στο δεύτερο σχήμα (στερεό Β) η σφαίρα έχει ακτίνα R. Τα δύο στερεά συγκρατούνται σε θέση τέτοια, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και σε μια στιγμή αφήνονται να κινηθούν.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες; Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

i) Μεγαλύτερη αρχική γωνιακή επιτάχυνση θα αποκτήσει το στερεό Α.

ii) Μεγαλύτερη ταχύτητα κατά την κίνηση των στερεών θα αποκτήσει το σημείο Γ.

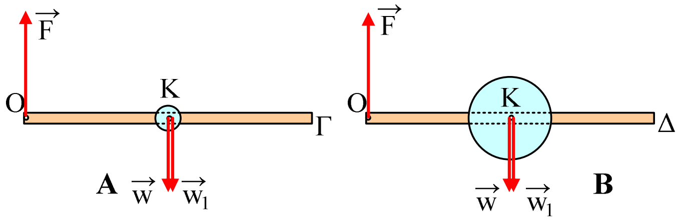
iii) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μεγαλύτερος για το Α στερεό.

iv) Η σφαίρα με τη μεγαλύτερη ακτίνα θα αποκτήσει και μεγαλύτερη μέγιστη κινητική ενέργεια.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_1 = 1/3\, M\ell^2$ και η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ως της άξονα που συμπίπτει με μια διάμετρό της $I_2 = 2/5\, MR^2$.

Απάντηση:

i) Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο στερεά.



Παίρνοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση του στερεού γύρω από το άκρο Ο έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } 2Mg = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2Mg}{I} \quad (1)$$

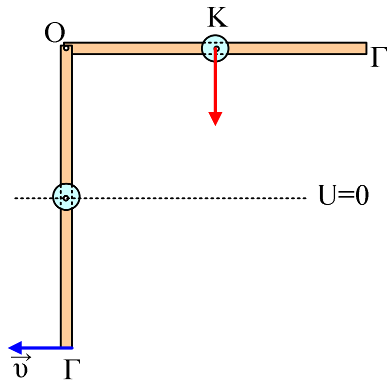
Αλλά για τις ροπές αδράνειας έχουμε:

$$I_A = I_\rho + I_\sigma = \frac{1}{3}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}M\ell^2. \quad (2)$$

$$I_B = I_\rho + I_\sigma = \frac{1}{3}M\ell^2 + \left(\frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{12}M\ell^2 + \frac{2}{5}MR^2 \quad (3)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής έχει το Β στερεό συνεπώς με βάση την σχέση (1) θα αποκτήσει μικρότερη αρχική γωνιακή επιτάχυνση. Η πρόταση είναι σωστή.

ii) Τα στερεά επιταχύνονται μέχρι που η ράβδος να γίνει κατακόρυφη, οπότε αποκτούν και τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα. Η μηχανική ενέργεια ανάμεσα στην αρχική θέση και στη θέση που η ράβδος είναι κατακόρυφη, παραμένει σταθερή, αφού η μόνες δυνάμεις που παράγουν έργο είναι τα βάρη, που είναι συντηρητικές δυνάμεις, οπότε έχουμε:



$$K_{αρχ}+U_{αρχ}= K_{τελ}+U_{τελ} \text{ ή}$$

$$2Mgh = ½ I\omega^2 \text{ ή}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\ell}{I}}$$

Τη μεγαλύτερη ταχύτητα την έχει το κατώτερο σημείο της ράβδου:

$$\upsilon_{γραμ}= \omega \cdot \ell = \ell\sqrt{\frac{Mg\ell}{I}}$$

Όμως το στερεό Α έχει μικρότερη ροπή αδράνειας, συνεπώς το κάτω άκρο του Γ θα αποκτήσει και τη μεγαλύτερη ταχύτητα. Η πρόταση είναι σωστή.

iii) Μόλις τα στερεά αφεθούν να κινηθούν, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι (θεωρούμε θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού):

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = 2Mg\cdot\frac{\ell}{2}$$

Συνεπώς οι δυο ρυθμοί είναι ίσοι. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

iv) Η κινητική ενέργεια κάθε σφαίρας είναι μέγιστη στην κατώτερη θέση. Η κινητική αυτή ενέργεια για τη σφαίρα αμελητέας ακτίνας είναι:

$$K_1= ½ M\upsilon_K^2 = \frac{1}{2}M\omega^2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 = \frac{1}{8}M\frac{Mg\ell}{\frac{7}{12}M\ell^2}\ell^2$$

$$K_1=\frac{3}{14}Mg\ell$$

Ενώ για την σφαίρα ακτίνας R είναι:

$$K_2= ½ M\upsilon_K^2 + ½ I_\sigma\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}M\omega^2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\omega^2 = \frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5}M\omega^2R^2$$

$$K_2=\frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5}M\omega^2R^2 = M(\frac{1}{8}\ell^2+\frac{1}{5}R^2)\frac{Mg\ell}{M(\frac{7}{12}\ell^2+\frac{2}{5}R^2)}$$

$$K_2 = \frac{\frac{1}{8}\ell^2 + \frac{1}{5}R^2}{\frac{7}{12}\ell^2 + \frac{2}{5}R^2} Mg\ell$$

Αλλά $\frac{\frac{1}{8}\ell^2 + \frac{1}{5}R^2}{\frac{7}{12}\ell^2 + \frac{2}{5}R^2} Mg\ell > \frac{3}{14}$

Άρα η πρόταση είναι σωστή.

Σχόλιο:

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας θα μπορούσε να υπολογιστεί σαν μόνο περιστροφική κινητική γύρω από τον άξονα στο άκρο Ο:

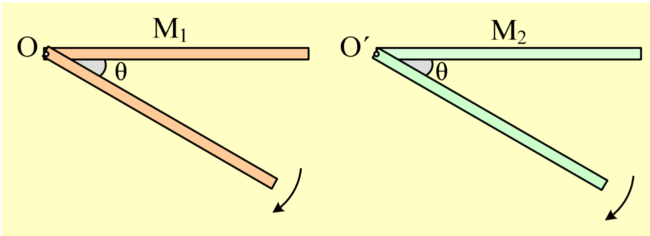
$$K_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\omega^2 = \frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5}M\omega^2 R^2$$

dmargaris@sch.gr

Χρόνος περιστροφής ράβδων.

ΘΕΜΑ 2ο.

Δύο ομογενείς ράβδοι ίδιου μήκους αλλά διαφορετικών μαζών $M_2>M_1$, μπορούν να στρέφονται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα τους άκρο, χωρίς τριβές. Οι ράβδοι αφήνονται ταυτόχρονα να κινηθούν από την οριζόντια θέση.



Αναφερόμενοι στις θέσεις που οι ράβδοι σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση:

i) Για τις γωνιακές ταχύτητες των δύο ράβδων ισχύει:

α) $\omega_1<\omega_2$ β) $\omega_1=\omega_2$ γ) $\omega_1 > \omega_2$

ii) Για τις γωνιακές επιταχύνσεις των δύο ράβδων ισχύει:

α) $\alpha_{\gamma 1}< \alpha_{\gamma 2}$ β) $\alpha_{\gamma 1}=\alpha_{\gamma 2}$ γ) $\alpha_{\gamma 1} >\alpha_{\gamma 2}$

iii) Στη θέση αυτή θα φτάσει πιο γρήγορα:

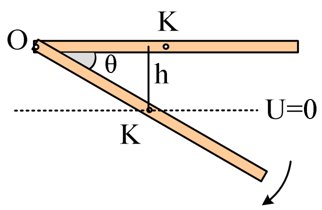
α) Η πρώτη ράβδος, β) η δεύτερη ράβδος γ) θα φτάσουν ταυτόχρονα.

iv) Κατά τη διάρκεια της κίνησης των ράβδων, μεγαλύτερη στροφορμή ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής τους, θα αποκτήσει:

α) Η πρώτη ράβδος, β) η δεύτερη ράβδος γ) θα αποκτήσουν ίσες στροφορμές.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το άκρο της $I= 1/3\ M\ell^2$.

Απάντηση:



i) Έστω μια ράβδος η οποία αφήνεται να περιστραφεί από την αρχική θέση και μετά από λίγο σχηματίζει με την οριζόντια θέση γωνία θ, οπότε το κέντρο μάζας της έχει κατέλθει κατά $h=\frac{\ell}{2}\cdot \eta\mu\theta$. Από την ΑΔΜΕ μεταξύ των δύο θέσεων και θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια της ράβδου στην τελική θέση έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή}$$

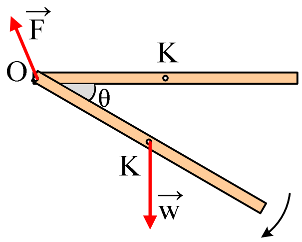
$$0+Mgh = \tfrac{1}{2} I\cdot\omega^2 \quad \text{ή}$$

$$Mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M\ell^2\omega^2 \quad \text{ή}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\cdot\eta\mu\theta}{\ell}} \quad (1)$$

Από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα δεν εξαρτάται από τη μάζα της ράβδου, συνεπώς οι δυο ράβδοι θα αποκτήσουν ίσες γωνιακές ταχύτητες. Σωστή απάντηση το β).

ii) Έστω σε μια στιγμή η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την αρχική διεύθυνσή της. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση παίρνουμε:



$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή}$$

$$Mg\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{3}M\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta$$

Παρατηρούμε ότι η γωνιακή επιτάχυνση μιας ράβδου ορισμένου μήκους, είναι ανεξάρτητη της μάζας, συνεπώς σωστή πρόταση είναι η β)

iii) Η κίνηση βέβαια δεν είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους γνωστούς τύπους για τη γωνία που διαγράφει μια ράβδος. Με βάση όμως τα προηγούμενα οι δύο ράβδοι σε κάθε θέση έχουν ίσες γωνιακές ταχύτητες και ίσες γωνιακές επιταχύνσεις, συνεπώς στο ίδιο χρονικό διάστημα θα διαγράφουν και ίσες γωνίες. Άρα θα φτάσουν ταυτόχρονα στις θέσεις που φαίνεται στο σχήμα όπου σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Σωστή γ).

iv) Από την σχέση (1) παρατηρούμε ότι η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα προκύπτει όταν θ=90°, όπου:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}\,.$$

Συνεπώς οι δυο ράβδοι θα φτάσουν ταυτόχρονα στην κατακόρυφη θέση με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, αλλά

$$L = I\cdot\omega = \frac{1}{3}M\ell^2\omega^2$$

Συνεπώς η δεύτερη ράβδος που έχει μεγαλύτερη μάζα, θα έχει και μεγαλύτερη στροφορμή. Σωστή πρόταση η β).

dmargaris@sch.gr

Στροφορμή και ρυθμός μεταβολής της.

Μια λεπτή δοκός ηρεμεί στηριζόμενη σε δύο τρίποδα στα σημεία Α και Β. Πάνω στη δοκό, στο σημείο Α ηρεμεί ένας κύλινδρος μάζας 20kg και ακτίνας 0,4m. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης, όπως στο σχήμα, οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και μετά από 2s φτάνει στη θέση Β. Στη διάρκεια της κίνησης η δοκός δεν κινείται.

i) Να υπολογιστεί η απόσταση (ΑΒ)

ii) Για τη στιγμή που ο κύλινδρος περνά από τη θέση Β να βρεθούν:

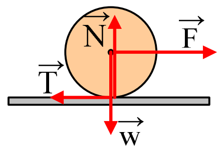
α) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που περνά από το Α και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I = ½\ MR^2$ ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Απάντηση:

i) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μια μεταφορική και μια στροφική. Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύλινδρος ισορροπεί οπότε $\Sigma F_y=0$ ή $N=Mg$. Παίρνουμε τώρα το 2^o νόμο του Νεύτωνα:



Για τη μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F - T = M\cdot\alpha_{cm} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση (θεωρούμε θετική τη φορά περιστροφής):

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = ½\ MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = ½\ M\cdot\alpha_{cm} \quad (2)$$

Αφού για την κύλιση ισχύει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F = \frac{3}{2}Ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2F}{3M} = \frac{2\cdot 60N}{3\cdot 20kg} = 2m/s^2$$

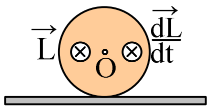
Επομένως η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία:

$$x = ½\ \alpha_{cm}\cdot t^2 = ½\ 2\cdot 2^2 m = 4m \text{ και}$$

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}\cdot t = 2\cdot 2\ m/s = 4m/s$$

Συνεπώς η απόσταση (ΑΒ)=4m.

ii) Αφού κυλίεται ο κύλινδρος ισχύει $υ_{cm}= ω·R → ω=10rad/s$, οπότε



α) Ως προς τον άξονα περιστροφής του έχουμε:

$$L=I·ω = ½\ MR^2·ω = ½\ 20·0{,}4^2·10\ kg·m^2/s = 16\ kg·m^2/s$$

Και $\dfrac{dL}{dt} = \Sigma\tau = T \cdot R = (F - Ma_{cm}) \cdot R$

Και με αντικατάσταση $\dfrac{dL}{dt} = (60 - 20 \cdot 2) \cdot 0{,}4\, kg \cdot m^2 / s^2 = 8\, kg \cdot m^2 / s^2$

Τα αντίστοιχα διανύσματα έχουν τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου που διέρχεται από το κέντρο της βάσης του Ο και φορά όπως στο διπλανό σχήμα.

β) Ως προς τον άξονα κάθετο στο επίπεδο του σχήματος που περνά από το Α έχουμε:

$$L_A=I·ω+ Mυ_{cm}·R$$

Αφού ως προς τον άξονα αυτό έχει στροφορμή και λόγω της ιδιοπεριστροφής του Ιω, αλλά και στροφορμή σαν υλικό σημείο κινούμενο με ταχύτητα $υ_{cm}$. Με αντικατάσταση παίρνουμε:

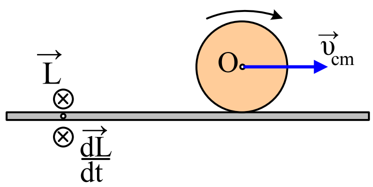
$$L_A = ½\ MR^2·ω + Mυ_{cm}·R = (½\ 20·0{,}4^2·10 + 20·4·0{,}4)\ kg·m^2/s = 48\ kg·m^2/s$$

Ενώ

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = T \cdot 0 + W \cdot (AB) - N \cdot (AB) + F \cdot R = F \cdot R = 24 kg \cdot m^2 / s^2$$

$$\frac{dL}{dt} = F \cdot R = F \cdot R = 24 kg \cdot m^2 / s^2$$

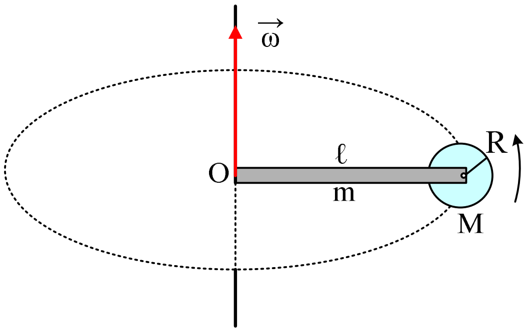
Τα αντίστοιχα διανύσματα έχουν επίσης τη διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα μέσα.



dmargaris@sch.gr

Κινητική ενέργεια στερεού.

Μια σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R είναι προσδεδεμένη με ράβδο μήκους ℓ και μάζας m, όπως στο σχήμα (η σφαίρα έχει τρυπηθεί και το άκρο της ράβδου φτάνει στο κέντρο της σφαίρας Κ), έχοντας έτσι δημιουργήσει ένα στερεό Π. Το στερεό αυτό στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο Ο της ράβδου με γωνιακή ταχύτητα ω.



i) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του στερεού Π.

ii) Να υπολογιστεί η παραπάνω ενέργεια στις εξής περιπτώσεις:

α) $m \to 0$

β) $m \to 0$ και $R \to 0$

δίνεται η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ως προς μια διάμετρό της $I_{cm} = \frac{2}{5} MR^2$ και η αντίστοιχη της ράβδου ως προς άξονα κάθετο προς αυτήν που περνά από το μέσον της $I_1 = \frac{1}{12} m\ell^2$.

Απάντηση:

i) Η ροπή αδράνειας του στερεού Π, ως προς τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο Ο, με εφαρμογή του θεωρήματος του Steiner, είναι ίση:

$$I = I_\rho + I_\sigma = \left(\frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{2}{5} MR^2 + M\ell^2\right) = \frac{1}{3} m\ell^2 + M\left(\frac{2}{5} R^2 + \ell^2\right)$$

Έτσι η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m\ell^2 + M\left(\frac{2}{5} R^2 + \ell^2\right)\right)\cdot \omega^2 \text{ ή}$$

$$K = \frac{1}{6} m\ell^2\omega^2 + \frac{1}{2} M\ell^2\omega^2 + \frac{1}{5} MR^2\omega^2 \quad (1)$$

ii) α) Από την εξίσωση (1) αν $m \to 0$, παίρνουμε:

$$K = \frac{1}{2} M\ell^2\omega^2 + \frac{1}{5} MR^2\omega^2 \quad (2)$$

β) $m \to 0$ και $R \to 0$ θα πάρουμε:

$$K=\frac{1}{2}M\ell^2\omega^2 \quad (3)$$

Σχόλια:

1) Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί:

$$K=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}M\upsilon_K^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\omega^2$$

Όπου ο πρώτος προσθετέος δίνει την κινητική ενέργεια της ράβδου, ο δεύτερος την κινητική ενέργεια της σφαίρας για μια μεταφορική κίνηση και ο τρίτος την κινητική ενέργεια της σφαίρας για περιστροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της.

Αυτό μας δίνει το δικαίωμα να θεωρήσουμε την κίνηση της σφαίρας σαν σύνθετη. Μια μεταφορική (κυκλική) με ταχύτητα $\upsilon_K=\omega\cdot\ell$ και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο της με γωνιακή ταχύτητα ω.

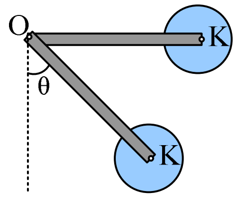
2) Η σχέση (2) μας δίνει την κινητική ενέργεια της σφαίρας όπου οι δύο προσθετέοι μπορούν να θεωρηθούν σαν η μεταφορική και η περιστροφική κινητική ενέργεια της σφαίρας (απαλλαγμένης από την ράβδο), ενώ η σχέση (3) οδηγεί στην αντιμετώπιση της σφαίρας σαν υλικό σημείο, όπου το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να εκτελεί μεταφορική κίνηση.

3) Η γωνιακή ταχύτητα ενός στερεού είναι πάντα ίδια ανεξάρτητα ως προς ποιον άξονα μελετάται. Στην περίπτωσή μας η γωνιακή ταχύτητα ω της σφαίρας ως προς τον άξονα που περνά από το άκρο Ο της ράβδου είναι ίδια με την γωνιακή ταχύτητα ω, ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο της.

dmargaris@sch.gr

Μια σφαίρα στο άκρο ράβδου.

Μια σφαίρα μάζας M και ακτίνας R είναι προσδεδεμένη με αβαρή ράβδο μήκους ℓ=4R, όπως στο σχήμα (η σφαίρα έχει τρυπηθεί και το άκρο της ράβδου φτάνει στο κέντρο της σφαίρας K). Το άλλο άκρο O της ράβδου μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, χωρίς τριβές. Φέρνουμε τη σφαίρα σε τέτοια θέση ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και την αφήνουμε να κινηθεί. Για τη θέση που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία θ:



i) επιτρόχια επιτάχυνση του κέντρου K της ράβδου έχει μέτρο:

α) α < g·ημθ   β) α = g·ημθ   γ) α > g·ημθ

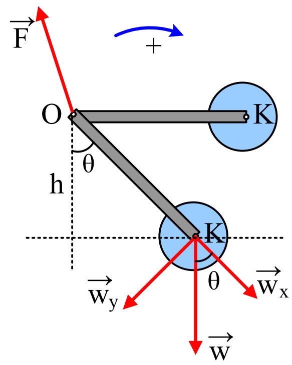
ii) Η ταχύτητα του κέντρου K της ράβδου έχει μέτρο

α) υ < $\sqrt{8Rg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$ β) υ = $\sqrt{8Rg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$ γ) υ > $\sqrt{8Rg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$

Για τη σφαίρα $I_{cm}=0{,}4\ mR^2$.

Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό (σφαίρα-ράβδος). Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση:



$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Αλλά $I_o=I_{cm}+m\ell^2=\frac{2}{5}mR^2+m(4R)^2=\frac{82}{5}mR^2$ οπότε:

$$mg\eta\mu\theta\cdot\ell=I_o\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$mg\cdot\eta\mu\theta\cdot 4R=\frac{82}{5}mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$\alpha_K=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot 4R=\frac{40}{41}g\cdot\eta\mu\theta < g\cdot\eta\mu\theta$$

Σωστή η α) πρόταση.

ii) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ, ανάμεσα στην οριζόντια θέση και στη θέση που η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από την χαμηλότερη θέση του κέντρου της σφαίρας K, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$mgh=\tfrac{1}{2}I_o\cdot\omega^2 \text{ ή}$$

$$mg\cdot 4R\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{82}{5}mR^2\cdot\omega^2 \quad\text{ή}\quad \omega=\sqrt{\frac{20}{41}\frac{g\sigma\upsilon\nu\theta}{R}} \text{ ή}$$

$$\upsilon_K=\sqrt{\frac{320}{41}\cdot Rg\sigma\upsilon\nu\theta}<\sqrt{8Rg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Σωστή η α) πρόταση.

dmargaris@sch.gr