


## ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

- ▶ Έργο δύναμης [σελ. 1](#)
- ▶ Κινητική ενέργεια [σελ. 5](#)
- ▶ Δυναμική ενέργεια [σελ. 6](#)
- ▶ Αρχή διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας [σελ. 8](#)
- ▶ Ισχύς [σελ. 9](#)
- ▶ Άλλες μορφές ενέργειας [σελ. 10](#)
- ▶ Αρχή διατήρησης τής ενέργειας [σελ. 11](#)
- ▶ Ερωτήσεις - αβιθήσεις [σελ. 12](#)

Για γρήγορη περιήγηση χρησιμοποίησε  τα [links](#) των αριθμημένων βελίδων (λειτουργούν σωστά μόνο στο 'ντερνετ) για να επιστρέψεις στον πίνακα περιεχομένων

### ΙΑΒΑΣΕ ΑΥΤΟ, ΠΡΙΝ ΞΕΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ

#### ➤ Κείμενο σε γαλάζιο φόντο ⇨ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ (2012-2013)

- Μεγάλα μαύρα γράμματα ⇨ τα κύρια συμπεράσματα (η περίληψη, για γρήγορη επανάληψη)
- Μικρά μαύρα γράμματα ⇨ πιο δευτερεύοντα ζητήματα, όπως εισαγωγή σε κάθε καινούργιο θέμα, διευκρινίσεις, παρατηρήσεις και αποδείξεις
- Μικρά μπλε γράμματα ⇨ παραδείγματα και αποτελέσματα πειραμάτων

#### ➤ Κείμενο σε μαύρο φόντο ⇨ ΘΕΜΑΤΑ ΕΚΤΟΣ ΔΙΔΑΚΤΕΑΣ ΥΛΗΣ (2012-2013)

- Γνώσεις Φυσικής ή Μαθηματικών, εκτός διδακτέας ύλης, που υπενθυμίζονται στην εισαγωγή κάποιων θεμάτων
- Παρατηρήσεις - επιπλέον θέματα - απλές αποδείξεις, εκτός διδακτέας ύλης, που μπορεί να συμπληρώσουν τη διδασκαλία ή τη μελέτη
- Εξιιώσεις, που προκύπτουν συνδυαστικά και δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, αλλά χρειάζονται στη λύση ασκήσεων (αν τις χρησιμοποιήσει ο μαθητής, πρέπει να τις αποδείξει)



Όπου υπάρχει αυτό το εικονίδιο, κάνε κλικ για να δεις σχετικό βίντεο ή προσομοίωση ενός φαινομένου.



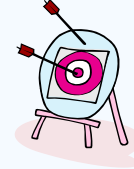
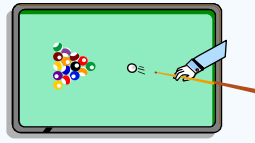
## ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΙΗΣ

Ένα κινούμενο σώμα μπορεί να αλλάξει το περιβάλλον του

Οι μεταβολές που συμβαίνουν στο σύμπαν οφείλονται στις διάφορες αλληλεπιδράσεις των σωμάτων.

Σε προηγούμενες ενότητες ασχοληθήκαμε με δύο κατηγορίες αλληλεπιδράσεων, τις επιταχύνσεις και τις παραμορφώσεις, που οφείλονται στο είδος της αλληλεπίδρασης των σωμάτων που ονομάσαμε δύναμη.

Παραδείγματα δυνάμεων και των αποτελεσμάτων τους βλέπουμε παρακάτω.



- Η **κινούμενη** μπάλα τού μπυλιάρδου ασκεί δύναμη στο τρίγωνο με τις άλλες μπάλες και το "σπάει".
- Ο **κινούμενος** ατμοσφαιρικός αέρας (άνεμος) ασκεί δύναμη στα πανιά τού ιστιοφόρου και το θέτει σε κίνηση.
- Το **κινούμενο** βέλος ασκεί δύναμη στον στόχο του και καρφώνεται σ' αυτόν.
- Το **κινούμενο** αυτοκίνητο ασκεί δύναμη στο δέντρο και το σπάει.

Οι επιταχύνσεις και οι παραμορφώσεις που παρατηρούμε παραπάνω οφείλονται σε δυνάμεις που τις ασκούν κινούμενα σώματα. Τα ίδια σώματα, ακίνητα, δε θα μπορούσαν να προκαλέσουν τα παραπάνω αποτελέσματα.

Κάθε σώμα που κινείται, έχει τη **δυνατότητα** να προκαλεί αλλαγές στο περιβάλλον του.

Σώματα που έχουν τη δυνατότητα να αλλάζουν το περιβάλλον ή τον εαυτό τους λέμε ότι κατέχουν **ενέργεια**. Αν η ενέργεια οφείλεται στην κίνηση των σωμάτων, χαρακτηρίζεται **κινητική ενέργεια**.

(Αργότερα, θα γνωρίσουμε κι άλλους λόγους, για τους οποίους ένα σώμα κατέχει ενέργεια.)

Εκτέλεση έργου: η διαδικασία με την οποία μεταβιβάζεται η ενέργεια τής κίνησης

❓ Και πώς αποκτά, λοιπόν, ενέργεια κίνησης ένα σώμα;

Η απάντηση, ίσως, φαίνεται προφανής: «την αποκτά, όταν τίθεται σε κίνηση».

Ο Νεύτωνας μάς έμαθε ότι οι αλλαγές στην ταχύτητα οφείλονται στη δράση δυνάμεων (που είτε θέτουν τα σώματα σε κίνηση είτε τους αυξάνουν την ταχύτητα που ήδη έχουν είτε τα "φρενάρουν" όταν κινούνται είτε, τέλος, τα αναγκάζουν να "στρίψουν").

- ▶ Αν, λοιπόν, ένα σώμα δέχεται από το περιβάλλον του δύναμη, η οποία το θέτει σε κίνηση, μπορούμε να λέμε ότι το περιβάλλον προσφέρει **κινητική ενέργεια** στο σώμα.
- ▶ Αν η δύναμη αυξάνει την ταχύτητα που ήδη έχει ένα σώμα, τότε –πάλι– το περιβάλλον προσφέρει **κινητική ενέργεια** στο σώμα (επιπλέον αυτής που ήδη έχει, λόγω τής προηγούμενης ταχύτητάς του).
- ▶ Εάν η δύναμη μειώνει την ταχύτητα ενός σώματος, θα λέμε ότι το περιβάλλον **αφαιρεί** κινητική ενέργεια από το σώμα. Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, ότι...

☑ Αν ένα σώμα δεχθεί δύναμη και αυξήσει την ταχύτητά του, τότε αποκτά και **κινητική ενέργεια**.

Μετά **μπορεί κι αυτό** να ασκεί δυνάμεις σε άλλα σώματα, προκαλώντας τους, ότι ακριβώς έπαθε πριν. **Μπορεί, δηλαδή, να μεταβιβάσει την ενέργειά του**.

☑ Η **κινητική ενέργεια** ενός σώματος μπορεί να αυξομειώνεται, όταν το σώμα δέχεται δυνάμεις από το περιβάλλον, οι οποίες τού αυξομειώνουν την ταχύτητα.

Προφανώς, έχουμε υπόψη μας και δυνάμεις που δε μεταβάλλουν την κινητική ενέργεια σωμάτων.

Π.χ., σπρώχνοντας την καρέκλα μας προς το πάτωμα δεν της μεταβιβάζουμε κινητική ενέργεια, οπότε η δύναμή μας δεν εκτελεί έργο.

Για το γεγονός, βέβαια, ότι δεν αλλάζει η κινητική ενέργεια τής καρέκλας δε φταιει η ... αδυναμία τής δύναμής μας να την αλλάξει –φταιει ότι στη δύναμή μας "λέει όχι" μια άλλη δύναμη, που ασκείται από το πάτωμα στην καρέκλα. Τελικά, όμως, η συνεργασία των δύο δυνάμεων δεν προκαλεί αλλαγή στην κινητική ενέργεια τής καρέκλας, οπότε έχουμε δίκιο να λέμε ότι ... δεν εργάζονται!

Ας δούμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα δυνάμεων που αυξομειώνουν την κινητική ενέργεια ενός σώματος.

➤ Το χέρι ενός ακοντιστή ωθεί το ακόντιο **κατά μήκος μιας διαδρομής**, ως τη στιγμή που το ελευθερώνει.

Η δύναμη τού αθλητή ασκείται **προς την κατεύθυνση τής μετατόπισης τού ακοντίου**.

Μόλις το ακόντιο ελευθερώνεται, έχει **κινητική ενέργεια**, διότι πλέον **μπορεί κι αυτό** να ασκήσει δύναμη και να καρφωθεί στο έδαφος –δυνατότητα που **δεν είχε** πριν δράσει πάνω του η δύναμη, με τον τρόπο που περιγράψαμε.

➤ Το χέρι ενός παίκτη τού μπύουλιγκ ωθεί τη μπάλα **κατά μήκος μιας διαδρομής**, μέχρι να την ελευθερώσει.

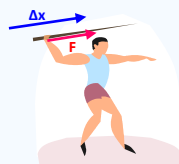
Η δύναμη τού παίκτη ασκείται **προς την κατεύθυνση τής μετατόπισης τής μπάλας**.

Μόλις η μπάλα ελευθερώνεται, έχει **κινητική ενέργεια**, διότι **μπορεί κι αυτή** πλέον να ασκήσει δύναμη στις κορτίνες και να τους αλλάξει θέση –δυνατότητα που **δεν είχε** πριν δράσει πάνω της η δύναμη, με τον τρόπο που περιγράψαμε.

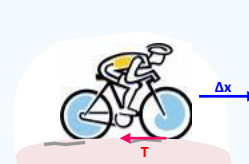
➤ Όταν ο ποδηλάτης πατά φρένο, τα ελαστικά τού ποδηλάτου δέχονται τη δύναμη τής τριβής τού οδοστρώματος **κατά μήκος μιας διαδρομής**. Η δύναμη ασκείται **αντίθετα στη μετατόπιση (ολίσθηση) τού ποδηλάτου**.

Μόλις το ποδήλατο σταματήσει, **δε μπορεί** πλέον να ασκήσει δύναμη σε άλλο σώμα (διαβάτη, αυτοκίνητο κλπ) και να το παρασύρει ή να το παραμορφώσει. Μια τέτοια δυνατότητα την έχει το ποδήλατο μόνο αν κινείται και τη χάνει, όταν το σταματά η τριβή.

Συνεπώς, **κατά τη δράση τής τριβής με τον τρόπο που περιγράψαμε, το ποδήλατο χάνει την κινητική του ενέργεια**.



Η δύναμη  $F$  δρα στην κατεύθυνση τής μετατόπισης  $\Delta x$  και το σώμα αποκτά κινητική ενέργεια



Η δύναμη  $T$  δρα αντίθετα στη μετατόπιση  $\Delta x$  και το σώμα χάνει κινητική ενέργεια

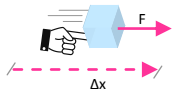
**Έργο θετικό, αρνητικό και... μηδενικό**

Μέσα από τα παραδείγματα μπορούμε να αναγνωρίσουμε μια διαδικασία, με την οποία ένα σώμα αποκτά ή χάνει κινητική ενέργεια.

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος αυξομειώνεται, όταν πάνω του δράσουν δυνάμεις με συγκεκριμένο τρόπο: **όταν το συνοδέψουν προς την κατεύθυνση ή αντίθετα στην κατεύθυνση μιας μετατόπισής του** (δηλαδή παράλληλα στην κίνηση).

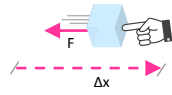
Αυτή τη διαδικασία μεταβίβασης κινητικής ενέργειας τη λέμε **εκτέλεση έργου από μια δύναμη**.

Δηλαδή, μια δύναμη εκτελεί έργο πάνω σε ένα σώμα, όταν συμβάλλει στην αλλαγή της κινητικής του ενέργειας. Ειδικότερα:



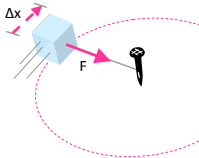
**ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ**  
Το έργο της είναι θετικό

➔ Αν η δύναμη δρα **προς** την κατεύθυνση μιας μετατόπισης τού σώματος, συμβάλλει στο να **αποκτήσει** το σώμα κινητική ενέργεια. Μια τέτοια δύναμη λέμε ότι **εκτελεί θετικό έργο**.



**ΔΥΝΑΜΗ ΑΝΤΙΘΕΤΗ ΣΤΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ**  
Το έργο της είναι αρνητικό

➔ Αν η δύναμη δρα **αντίθετα** στην κατεύθυνση μιας μετατόπισης τού σώματος, συμβάλλει στο να **χάσει** το σώμα κινητική ενέργεια. Μια τέτοια δύναμη λέμε ότι **εκτελεί αρνητικό έργο**.

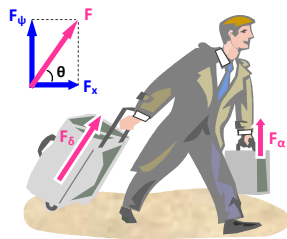


**ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΘΕΤΗ ΣΤΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ**  
Το έργο της είναι μηδενικό

❓ *Εφόσον η δράση μιας δύναμης στην κατεύθυνση της μετατόπισης προσφέρει, ενώ η δράση μιας δύναμης αντίθετης στη μετατόπιση αφαιρεί κινητική ενέργεια, τι αποτέλεσμα έχει, άραγε, μια δύναμη που δρα κάθετα στη μετατόπιση;*

Η κάθετη δύναμη στήριξης που δέχεται ένα σώμα από μια επιφάνεια, στην οποία γλιστρά, ούτε αυξάνει ούτε μειώνει το μέτρο της ταχύτητας. Άρα, **ούτε προσφέρει ούτε αφαιρεί κινητική ενέργεια από το σώμα**. Ας θυμηθούμε, επίσης, το δορυφόρο της Γης, τη Σελήνη, που περιφέρεται γύρω της, χάρη στη βαρυτική δύναμη που δέχεται από αυτήν, κάθετα στην τροχιά του, χωρίς να χάνει ή να κερδίζει κινητική ενέργεια επί εκατομμύρια χρόνια.

Αν η δύναμη δρα κάθετα στην κατεύθυνση μιας μετατόπισης τού σώματος, τότε **δε συμβάλλει στην αλλαγή της κινητικής του ενέργειας**. Μια τέτοια δύναμη λέμε ότι **δεν εκτελεί έργο**.



Ας δούμε μια εφαρμογή όσων είπαμε για το έργο δύναμης.

Η δύναμη  $F_x$ , που ασκεί το αριστερό χέρι τού άντρα στην τσάντα που κρατά, δρα κάθετα στη μετατόπιση τής τσάντας, γι' αυτό **δεν εκτελεί έργο**.

Η δύναμη  $F_y$ , που ασκεί το δεξί χέρι τού άντρα στη βαλίτσα που σέρνει, σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την κατεύθυνση τής μετατόπισης.

Αναλύουμε την  $F_y$  στις συνιστώσες  $F_x$ , η οποία δρα παράλληλα στη μετατόπιση, και  $F_y$ , που δρα κάθετα στη μετατόπιση. Έργο εκτελεί μόνο η συνιστώσα  $F_x = F \cos\theta$

Στην τάξη αυτή ασχολούμαστε με σημειακά σώματα, στα οποία υπάρχει ένα μοναδικό "σημείο εφαρμογής" για μια δύναμη.

Αν αντιμετωπίσουμε ένα σώμα με τις πραγματικές του διαστάσεις, τότε υπάρχουν άπειρα σημεία πάνω του για τη δράση μιας δύναμης. Έτσι πρέπει να έχουμε υπόψη ποιο από τα σημεία τού σώματος είναι το "σημείο εφαρμογής" μιας δύναμης (το σημείο όπου ασκείται, δηλαδή).

Υπάρχει τότε περίπτωση "το σημείο εφαρμογής" τής δύναμης να μετατοπίζεται, χωρίς να μετατοπίζεται το ίδιο το σώμα. (Φανταστείτε π.χ. ότι πιέζετε προς τα κάτω το μαξιλάρι σας με το δάχτυλό σας.)

❓ *Στις περιπτώσεις που λαμβάνουμε υπόψη τις πραγματικές διαστάσεις ενός σώματος, πότε θεωρούμε ότι εκτελείται έργο λοιπόν;*

Λέμε, τότε, έναν πιο αυστηρό ορισμό για την εκτέλεση έργου από μια δύναμη:

«Μια δύναμη εκτελεί έργο, όταν μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της παράλληλα με αυτήν.»  
(και όχι δηλαδή «το σώμα στο οποίο ασκείται», που λέμε για τα σημειακά σώματα)

Αυτός ο ορισμός είναι πιο γενικός και περιλαμβάνει και τον ορισμό που δώσαμε για τα σημειακά σώματα.

Υπολογισμός τού έργου  
(σταθερής) δύναμης

Έχει ενδιαφέρον να μπορούμε να λογαριάσουμε πόσο είναι το έργο (η εργασία) μιας δύναμης, γιατί έτσι μπορούμε έμμεσα να λογαριάσουμε την (κινητική) ενέργεια που προσθαφαιρείται σε ένα σώμα με τη δράση της.

Πρώτα θα λογαριάζουμε το έργο μιας σταθερής δύναμης (σε μέτρο και κατεύθυνση).

Αν θέλουμε να ανυψώσουμε με σταθερή ταχύτητα ένα σώμα, πρέπει η συνισταμένη δύναμη πάνω του να είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται να του ασκούμε μια ανυψωτική δύναμη (προς τα πάνω), ισότιμη με το (προς τα κάτω) βάρος του. Η ανυψωτική δύναμη εκτελεί τότε θετικό έργο, διότι δρα προς τη μετατόπιση τού σώματος.

Κάθε φορά που, με την ανυψωτική δύναμη  $F$ , ανεβάζουμε το ίδιο σώμα σε ύψος  $h$ , επαναλαμβάνουμε την ίδια εργασία.

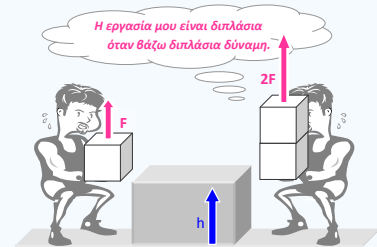
Αν το σώμα ανυψωθεί σε ύψος  $h$  και ξανά σε ύψος  $h$  (δηλαδή σε διπλάσιο ύψος  $2h$ ), κάνουμε διπλάσια εργασία.



Άρα, για συγκεκριμένη δύναμη  $F$ , η εργασία της σε μια μετατόπιση  $2h$  είναι διπλάσια σε σχέση με την εργασία της σε μετατόπιση  $h$ .

Κάθε φορά που ανυψώσουμε με τη δύναμη  $F$  σε ύψος  $h$  ένα σώμα και ξανά ένα δεύτερο όμοιο σώμα, κάνουμε διπλάσια εργασία σε σχέση με την ανύψωση ενός μόνο σώματος.

Την ίδια, διπλάσια, εργασία θα μπορούσαμε να την κάνουμε ανεβάζοντας συγχρόνως τα δύο σώματα, με μια δύναμη  $2F$ .



Άρα, σε συγκεκριμένη μετατόπιση  $h$ , η εργασία μιας δύναμης  $2F$  είναι διπλάσια σε σχέση με την εργασία μιας δύναμης  $F$ .

Συμπεραίνουμε ότι, η εργασία μιας δύναμης  $2F$  για μετατόπιση  $2h$  είναι τετραπλάσια της εργασίας μιας δύναμης  $F$  για μετατόπιση  $h$ .

Καταλήγουμε, λοιπόν, σε μια λογική για το πώς θα λογαριάσουμε την εργασία μιας σταθερής δύναμης.

Αν μια σταθερή δύναμη δρα σε ένα σώμα παράλληλα σε μια μετατόπισή του, υπολογίζουμε το έργο της (συμβολικά  $W$ ) πολλαπλασιάζοντας τα μέτρα τής δύναμης και της μετατόπισης.

Στο γινόμενο θέτουμε πρόσημο  $+/-$ , αν δύναμη και μετατόπιση έχουν ίδια/αντίθετη κατεύθυνση.

Το θετικό/αρνητικό έργο δύναμης λογαριάζει την κινητική ενέργεια που προστίθεται/αφαιρείται στο σώμα και, άρα, είναι ίσο με τη μεταβολή τής κινητικής του ενέργειας. Δηλαδή:

$$\text{έργο σταθερής δύναμης (παράλληλης στη μετατόπιση)} = \text{μεταβολή κινητικής ενέργειας (του σώματος που δέχεται τη δύναμη)} = \pm (\text{δύναμη} \times \text{μετατόπιση})$$

$$\text{ή, συμβολικά, } W = \Delta K = \pm F \cdot \Delta x$$

Μονάδα μέτρησης τού έργου στο S.I. είναι το  $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ , που το λέμε και **τζάουλ (J)**.

Εφόσον με το έργο δύναμης μετράμε ενέργεια που μεταβιβάζεται, άρα μονάδα μέτρησης και της ενέργειας είναι το τζάουλ.



Φαίνεται λοιπόν ότι η εργασία μιας δύναμης είναι τόσο περισσότερη

► όσο πιο μεγάλη είναι η δύναμη και ► όσο πιο μακριά συνοδεύει ένα σώμα.

Ας σκεφτούμε, π.χ., έναν ακοντιστή. Όταν πετά το ακόντιο, αυτό φτάνει τόσο μακρύτερα, όσο μεγαλύτερη ταχύτητα (άρα και όσο περισσότερη κινητική ενέργεια) έχει μόλις ελευθερώνεται από το χέρι τού αθλητή.

Η ενέργεια αυτή μεταβιβάζεται στο ακόντιο, με τη διαδικασία που ονομάσαμε «εκτέλεση έργου».

Όσο μεγαλύτερα χέρια έχει, λοιπόν, ο ακοντιστής, τόσο μακρύτερα συνοδεύει η δύναμη του το ακόντιο μέχρι να το ελευθερώσει, οπότε ανάλογα περισσότερη είναι η κινητική ενέργεια που δίνεται στο ακόντιο (διότι μεγαλώνει το  $\Delta x$  στο γινόμενο  $F \cdot \Delta x$ ).

Όσο μεγαλύτερη είναι, επίσης, η δύναμη τού αθλητή, ανάλογα περισσότερη είναι και η κινητική ενέργεια που δίνει στο ακόντιο (διότι μεγαλώνει το  $F$  στο γινόμενο  $F \cdot \Delta x$ ).

☞ Από όσα είπαμε ως τώρα προκύπτει ότι **έργο δύναμης = 0** :

► σε μηδενική μετατόπιση και ► σε μετατόπιση κάθετη στη δύναμη.

☞ Η ποσότητα "έργο δύναμης" αποτελεί, λοιπόν, το "λογαριασμό" για το πόση (κινητική) ενέργεια προσθαφαιρείται σε ένα σώμα που δέχεται δύναμη. Είναι σωστό, λοιπόν, να λέμε ότι «ένα σώμα έχει ενέργεια», αλλά όχι ότι «έχει έργο».

☞ Σε προηγούμενη τάξη είχαμε αναφερθεί σε ακόμα μία διαδικασία μεταφοράς ενέργειας.

Μάθαμε πως, οπότε σε ένα χώρο υπάρχουν περιοχές με θερμότερη και περιοχές με ψυχρότερη ύλη, συμβαίνει μεταφορά ενέργειας –στην οποία δώσαμε το όνομα **θερμότητα**– από τη θερμότερη προς την ψυχρότερη ύλη.

Κάτω από τον όρο "θερμότητα" κρύβεται μία γνωστή μας πλέον μορφή ενέργειας: πρόκειται για κινητική ενέργεια των μορίων.

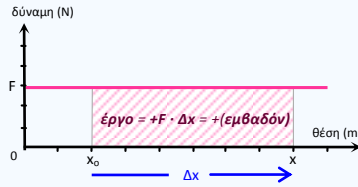
Με τη μεταβίβαση ενέργειας η οποία οφείλεται σε θερμοκρασιακές διαφορές θα ασχοληθούμε σε επόμενη ενότητα.

**Διάγραμμα δύναμης-θέσης και υπολογισμός έργου δύναμης**

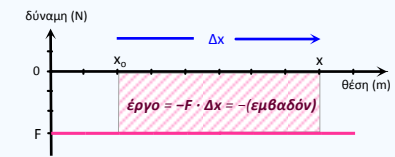
Το έργο μιας δύναμης λογαριάζεται κι από το διάγραμμα δύναμης-θέσης (αν μας δίνεται).

- ➔ Αν η δύναμη έχει σταθερή κατεύθυνση και μέτρο: η γραφική παράσταση του διαγράμματος είναι ευθεία, παράλληλη στον άξονα τής θέσης.

**ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ**



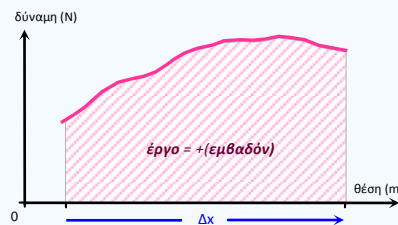
**ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΤΙΘΕΤΗ ΣΤΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ**



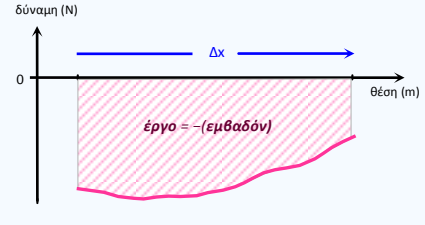
Τότε: **έργο δύναμης σταθερής κατεύθυνσης και μέτρου = ± (εμβαδόν στο διάγραμμα F-x)**

- ➔ Αν η δύναμη έχει σταθερή κατεύθυνση αλλά μεταβλητό μέτρο: η γραφική παράσταση του διαγράμματος είναι τυχαία καμπύλη γραμμή.

**ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ**

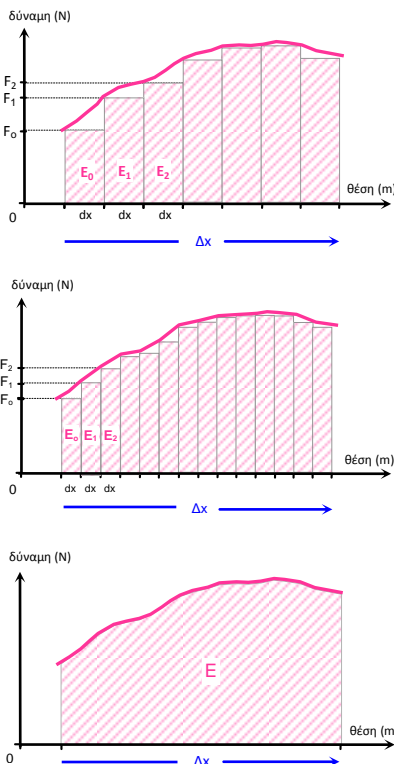


**ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΤΙΘΕΤΗ ΣΤΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ**



Και στην περίπτωση αυτή: **έργο δύναμης σταθερής κατεύθυνσης, μεταβλητού μέτρου = ± (εμβαδόν στο διάγραμμα F-x)**

☞ Προσοχή! Η εξίσωση  $W = \pm F \Delta x$  δεν ισχύει για δύναμη σταθερής κατεύθυνσης ή μεταβλητού μέτρου. Το έργο τέτοιας δύναμης λογαριάζεται μόνο από το εμβαδόν στο διάγραμμα δύναμης-θέσης (αρκεί να μπορεί να υπολογιστεί).



Η απόδειξη για το έργο μεταβλητής δύναμης είναι εκτός ύλης, αλλά θα την περιγράψουμε απλοϊκά.

Στην περίπτωση που η δύναμη έχει σταθερή κατεύθυνση αλλά όχι σταθερό μέτρο, για να λογαριάσουμε το έργο της χωρίζουμε τη μετατόπιση  $\Delta x$  σε πλήθος μικρών μετατοπίσεων  $dx$  και σε κάθε μια από αυτές το μέτρο τής δύναμης, πιθανόν, αλλάζει.

Στην αρχή τής πρώτης μετατόπισης  $dx$  η δύναμη έχει τιμή  $F_0$ . Αν κάνουμε την προσέγγιση ότι μέχρι το τέλος της η δύναμη παραμένει  $F_0$ , τότε το έργο για αυτή τη μικρή μετατόπιση  $dx$  είναι  $W_0 = F_0 dx$  -ίσο με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου παραλληλογράμμου  $E_0$ .

Στην αρχή τής δεύτερης μετατόπισης  $dx$  η δύναμη έχει τιμή  $F_1$ . Αν κάνουμε την προσέγγιση ότι μέχρι το τέλος της η δύναμη παραμένει  $F_1$ , τότε το έργο για τη δεύτερη μετατόπιση  $dx$  είναι  $W_1 = F_1 dx$  -ίσο με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου παραλληλογράμμου  $E_1$ .

Ακολουθώντας την ίδια λογική υπολογίζουμε το έργο για κάθε μικρή μετατόπιση  $dx$ .

Αν αθροίσουμε τα έργα όλων των μικρών μετατοπίσεων  $dx$ , παίρνουμε το έργο  $W$  της δύναμης  $F$  για ολόκληρη τη μετατόπιση  $\Delta x$ :

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + \dots = E_0 + E_1 + E_2 + \dots$$

Το έργο  $W$ , λοιπόν, είναι κατά προσέγγιση ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική παράσταση του διαγράμματος  $F-x$  και τη μετατόπιση  $\Delta x$ .

Το σφάλμα στον υπολογισμό μας βρίσκεται, βέβαια, στο ότι δεχτήκαμε πως η τιμή τής δύναμης διατηρείται σταθερή σε κάθε μικρή μετατόπιση  $dx$  και κάνει ένα "άλμα" στην επόμενη μικρή μετατόπιση -ενώ στην πραγματικότητα η δύναμη μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο.

Όμως, όσο περισσότερες -και πιο μικρές- είναι οι μετατοπίσεις  $dx$ , στις οποίες "κομματιάζουμε" τη μετατόπιση  $\Delta x$ , τόσο μικρότερα γίνονται τα "άλματα" αυτά και τόσο περισσότερο πλησιάζουμε στον πραγματικό τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η δύναμη. Συγχρόνως, το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν -που μας δίνει το έργο  $W$  για τη μετατόπιση  $\Delta x$ - πλησιάζει τότε περισσότερο προς το εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική παράσταση του διαγράμματος και τη μετατόπιση  $\Delta x$ .

Αν οι μετατοπίσεις  $dx$  γίνουν πάρα πολλές και πολύ μικρές, το σφάλμα ελαχιστοποιείται, καθώς η μεταβολή από τη μία τιμή τής δύναμης στην άλλη γίνεται με συνεχή τρόπο, όπως συμβαίνει και στην πραγματικότητα. Τότε, λοιπόν, βλέπουμε ότι το άθροισμα  $W = W_0 + W_1 + W_2 + \dots = E_0 + E_1 + E_2 + \dots$  θα κάλυπτε όλο το εμβαδόν  $E$  ανάμεσα στη γραφική παράσταση και τον άξονα τής θέσης και θα μας έδινε (με ακρίβεια, αρκεί να μπορούσε να υπολογιστεί) το έργο  $W$  για μετατόπιση  $\Delta x$ . Δηλαδή,  $W = E$ .



# ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

## Σχέση τής κινητικής ενέργειας με το παρελθόν ενός σώματος

Είπαμε ως τώρα ότι:

Η κινητική ενέργεια είναι το μέγεθος που εκφράζει τη δυνατότητα ενός σώματος να προκαλεί αλλαγές στο περιβάλλον, εξαιτίας τής κίνησής του.

Κινητική ενέργεια προσθαφαιρείται στο σώμα με τη διαδικασία που ονομάσαμε εκτέλεση έργου από δυνάμεις.

Αν για ένα σώμα λογαριάσουμε τα έργα των δυνάμεων που έδρασαν πάνω του και τα προσθέτουμε αλγεβρικά (με τα πρόσημά τους), βρίσκουμε τη συνολική μεταβολή που σημειώθηκε στην κινητική του ενέργεια.

$$\text{μεταβολή κινητικής ενέργειας σώματος} = \text{έργο 1} + \text{έργο 2} + \dots$$

$$\text{ή, συμβολικά, } \Delta K = W_1 + W_2 + \dots$$

Το παραπάνω συμπέρασμα είναι γνωστό ως **θεώρημα μεταβολής τής κινητικής ενέργειας ή θεώρημα έργου-ενέργειας**. (Για συντομία Θ.Μ.Κ.Ε.)

☞ Στις ασκήσεις που αντιμετωπίζουμε στο επίπεδο τού Λυκείου μπορούμε να χρησιμοποιούμε ότι το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που δρουν σε ένα σώμα είναι όσο και το έργο τής συνισταμένης τους.

$$\text{Πράγματι, } W_1 + W_2 + \dots = F_1 \cdot \Delta x + F_2 \cdot \Delta x + \dots = (F_1 + F_2 + \dots) \Delta x = \Sigma F \cdot \Delta x = W_{\Sigma F}$$

## Σχέση τής κινητικής ενέργειας με το παρόν ενός σώματος

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Κ.Ε., αν για ένα σώμα μπορούμε να λογαριάσουμε τα έργα των δυνάμεων που έδρασαν πάνω του από τη στιγμή τής ηρεμίας του μέχρι να αποκτήσει την ταχύτητα που έχει, τότε η αλγεβρική πρόσθεση των έργων είναι ένας έμμεσος τρόπος να υπολογίσουμε την τρέχουσα κινητική του ενέργεια.

❓ *Αν όμως δε γνωρίζουμε το παρελθόν ενός κινούμενου σώματος, πώς θα λογαριάσουμε την κινητική του ενέργεια;*

Έστω ένα σώμα με μάζα  $m$ , που τώρα έχει ταχύτητα  $v$ .

Το σώμα αυτό κάποτε στο παρελθόν ηρεμούσε, έχοντας μηδενική ενέργεια κίνησης.

Τότε, σύμφωνα με τον 1<sup>ο</sup> νόμο τού Νεύτωνα, η συνισταμένη των δυνάμεων στο σώμα ήταν μηδέν.

Για την απλοποίηση των υπολογισμών ας υποθέσουμε ότι κάποια στιγμή (την ονομάζουμε στιγμή 0) άρχισε να επιδρά πάνω στο σώμα μια μόνο σταθερή δύναμη  $F$ .

Εξαιτίας τής ισορροπίας των υπόλοιπων δυνάμεων η δύναμη  $F$  αντιπροσώπευε τη νέα συνισταμένη στο σώμα.

Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο τού Νεύτωνα, το σώμα απέκτησε σταθερή επιτάχυνση  $a = F/m$ , στην κατεύθυνση τής συνισταμένης  $F$  και η κίνηση που έκανε ήταν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

$$\text{Η ταχύτητά του αυξανόταν κι έφθασε να γίνει } v \text{ μετά από χρόνο } t = \frac{v}{a}$$

$$\text{Στο χρόνο αυτό η δύναμη συνόδευσε το σώμα σε μια μετατόπιση } \Delta x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \left( \frac{v}{a} \right)^2 = \frac{v^2}{2a}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την τιμή  $F$  τής σταθερής δύναμης με τη μετατόπιση  $\Delta x$  στην οποία συνόδευσε το σώμα, βρίσκουμε το έργο  $W$  τής δύναμης που μετέδωσε την κίνηση στο σώμα –άρα και την ενέργεια τής κίνησης που μεταβιβάστηκε σε αυτό από όποιο σώμα τού άσκησε τη δύναμη:

$$W = F \cdot \Delta x = (m a) \cdot \left( \frac{v^2}{2a} \right) \quad \text{και, μετά την απλοποίηση,} \quad W = \frac{m v^2}{2}$$

Το έργο που υπολογίσαμε μετρά την κινητική ενέργεια που μεταβιβάστηκε στο σώμα, από τη στιγμή που ήταν ακίνητο μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα  $v$ . Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η ενέργεια ενός κινούμενου σώματος μπορεί να υπολογιστεί, αν ξέρουμε μόνο τη μάζα και την ταχύτητά του. Επομένως...

*Δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τη δύναμη που, με το έργο της, μεταβίβασε στο σώμα την ενέργεια τής κίνησης!*

Αν δεν έχουμε πληροφορίες για το παρελθόν ενός σώματος, για να λογαριάσουμε την κινητική του ενέργεια αρκεί να γνωρίζουμε τη μάζα του και μια πληροφορία από το παρόν του: την ταχύτητά του.

Η **κινητική ενέργεια** ενός σώματος ισούται με το ημισυνολικό τής μάζας του επί το τετράγωνο τής ταχύτητάς του.

$$\text{κινητική ενέργεια σώματος} = \frac{(\text{μάζα}) \times (\text{ταχύτητα})^2}{2} \quad \text{ή, συμβολικά,} \quad K = \frac{m v^2}{2}$$





# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ένα ανυψωμένο σώμα μπορεί να αλλάξει το περιβάλλον του

Είδαμε ότι ένα κινούμενο σώμα μπορεί να προκαλέσει αλλαγές στο περιβάλλον του και, γι' αυτό, λέμε ότι έχει ενέργεια.

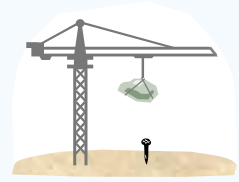
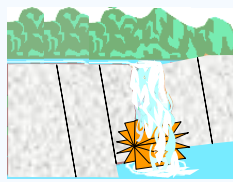
❓ Ένα ακίνητο σώμα μπορεί, άραγε, να αλλάξει το περιβάλλον του;

Ας φέρουμε στο νου τα παρακάτω παραδείγματα.

➤ Το ήρεμο νερό μιας λίμνης συγκρατείται με ένα φράγμα ψηλότερα από τον υδροστρόβιλο ενός υδροηλεκτρικού σταθμού. Παρά το ότι το νερό είναι ακίνητο, έχει τη δυνατότητα να κινηθεί προς τα κάτω –με την επίδραση του βάρους του– και να περιστρέψει τον υδροστρόβιλο (δηλαδή να του μεταβιβάσει ενέργεια κίνησης). Αν φανταστούμε το νερό ακίνητο αλλά στο ύψος του στρόβιλου, δεν έχει τότε τη δυνατότητα αυτή. Άρα, στην ανυψωμένη θέση του το νερό έχει ενέργεια.

➤ Στο τσίρκο, μία μικρόσωμη ακροβάτιδα στέκεται πάνω σε μια σκάλα, ψηλότερα από μία βαρύτερη συνεργάτιδά της, που την περιμένει στην άκρη μιας τραμπάλας. Παρά το ότι η ακροβάτιδα είναι ακίνητη, έχει τη δυνατότητα να κινηθεί προς τα κάτω –με την επίδραση του βάρους της– και πέφτοντας στην τραμπάλα, να τινάξει ψηλά τη συνεργάτιδά της (δηλαδή να της μεταβιβάσει ενέργεια κίνησης). Αν φανταστούμε τη μικρόσωμη ακροβάτιδα ακίνητη αλλά στο ύψος της τραμπάλας, δεν έχει τότε τη δυνατότητα αυτή. Άρα, στην ανυψωμένη θέση της η ακροβάτιδα έχει ενέργεια.

➤ Ένας γερανός συγκρατεί μια μεγάλη πέτρα πάνω από έναν πάσσαλο. Παρά το ότι η πέτρα είναι ακίνητη, έχει τη δυνατότητα να κινηθεί προς τα κάτω –με την επίδραση του βάρους της– και να καρφώσει τον πάσσαλο μέσα σε σκληρό έδαφος (δηλαδή να του μεταβιβάσει ενέργεια κίνησης). Αν φανταστούμε την ίδια πέτρα ακίνητη αλλά στο ύψος του πασσάλου, δεν έχει τότε τη δυνατότητα αυτή. Άρα, στη ανυψωμένη θέση της η πέτρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έχει ενέργεια.



Όποτε κάποιο σώμα έχει τη δυνατότητα να κινηθεί προς χαμηλότερη θέση μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης, το βάρος του σώματος μπορεί να παράγει έργο και να αυξήσει την κινητική ενέργειά του (την οποία, στη συνέχεια, το σώμα μεταβιβάζει στο περιβάλλον). Μπορούμε, λοιπόν, να ισχυριστούμε ότι:

Ένα σώμα που ανυψώνεται στο βαρυτικό πεδίο της Γης, αποταμιεύει ενέργεια, η οποία εκφράζει τη δυνατότητά του να αποκτήσει κινητική ενέργεια κατά την πτώση του, εξαιτίας του έργου του βάρους του. Αυτή τη μορφή ενέργειας ενός σώματος σε σχέση με μια χαμηλότερη θέση του στο βαρυτικό πεδίο, τη λέμε **βαρυτική δυναμική ενέργεια**.

Εάν το ανυψωμένο σώμα είχε μάζα συγκρίσιμη με τη μάζα της Γης, η βαρυτική δύναμη που αυτό ασκεί στη Γη (=η αντίδραση στο βάρος του) θα μπορούσε να επιταχύνει τη Γη και τότε θα παρατηρούσαμε σώμα και Γη να πλησιάζουν ταυτόχρονα. Επομένως, εξαιτίας της βαρυτικής τους αλληλεπίδρασης θα μπορούσαμε να πάρουμε ενέργεια τόσο από το σώμα όσο και από τη Γη.

Επειδή, όμως, η Γη έχει μάζα ασύγκριτα μεγαλύτερη από τη μάζα όλων των σωμάτων με τα οποία ασχολούμαστε, αποκτά ασήμαντη επιτάχυνση από τη βαρυτική δύναμη που της ασκεί ένα σώμα σε κάποια απόσταση από αυτήν και, τελικά, ενέργεια μπορούμε να πάρουμε μόνο από το σώμα. Έτσι, την ενέργεια του ζεύγους, την εκμεταλλεύεται μόνο το ανυψωμένο σώμα, γι' αυτό –καταχρηστικά– τη λέμε «ενέργεια του σώματος».

Διαπιστώσαμε, λοιπόν, ότι και σε ένα ακίνητο σώμα μπορούμε να αναγνωρίσουμε μια δυνατότητα, παρόμοια με αυτή που διακρίναμε και σε ένα κινούμενο σώμα –τη δυνατότητα, δηλαδή, να μπορεί να προκαλεί αλλαγές στο περιβάλλον του, την οποία και αποκαλέσαμε ενέργεια.

❓ Ας δούμε με ποια διαδικασία ένα σώμα αποκτά βαρυτική δυναμική ενέργεια και πώς τη λογαριάζουμε.

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα, που το πετάμε προς τα πάνω, προσφέροντάς του μια αρχική κινητική ενέργεια.

Αυτό κάνει, π.χ., ένας παίκτης του βόλλεϋ, πετώντας προς τα πάνω μια μπάλα.

Καθώς το σώμα ανέρχεται, το βάρος, με το αρνητικό του έργο, εξαντλεί σταδιακά την κινητική ενέργεια (το επιβραδύνει). Όταν το σώμα βρεθεί στο μέγιστο ύψος του, δεν έχει πλέον κινητική ενέργεια, αλλά –όπως είδαμε– έχει ενέργεια (αυτή που ονομάσαμε βαρυτική δυναμική ενέργεια), την οποία μπορεί να μεταβιβάσει στο περιβάλλον με το θετικό έργο του βάρους του κατά την πτώση του. Στις ενδιάμεσες θέσεις η μπάλα έχει και τις δύο μορφές ενέργειας.

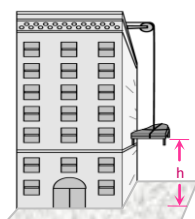
Συμπεραίνουμε ότι:

- Η εκτέλεση έργου από μια δύναμη –εκτός από διαδικασία μεταβίβασης κινητικής ενέργειας– μπορεί να είναι και διαδικασία μετατροπής της ενέργειας από μια μορφή σε άλλη.
- Κατά την ανύψωση ενός σώματος μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης, το αρνητικό έργο του βάρους του μετατρέπει την ενέργεια από κινητική σε βαρυτική δυναμική.
- Κατά την κάθοδο του σώματος μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης, το θετικό έργο του βάρους του μετατρέπει την ενέργεια από βαρυτική δυναμική σε κινητική.
- Αν ένα σώμα, λοιπόν, βρίσκεται σε μια ανυψωμένη θέση, τότε η βαρυτική δυναμική ενέργεια που έχει σε σχέση με μια χαμηλότερη θέση του θεωρούμε ότι είναι όσο και το έργο που θα εκτελέσει το βάρος του μέχρι τη χαμηλότερη θέση (ή, ισοδύναμα, είναι όση και η κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει το σώμα μέχρι τη θέση αυτή κατά την πτώση του).

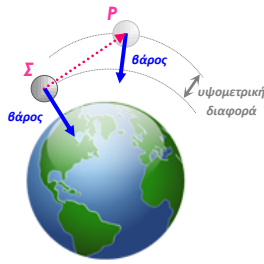
Αν η υψομετρική διαφορά των δύο θέσεων είναι μικρή, ώστε το βάρος να θεωρείται σταθερό, τότε:

$$\text{βαρυτική δυναμική ενέργεια} = \text{έργο βάρους} = \text{βάρος} \times \text{υψομετρική διαφορά}$$

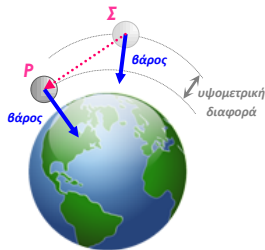
$$\text{ή, συμβολικά, } U = W_B = m g h$$



Όταν σε ένα σώμα εκτελεί έργο μόνο το βάρος



**Άνοδος** σώματος  
Αρνητικό έργο βάρους  
Αύξηση δυναμικής ενέργειας  
Μείωση κινητικής ενέργειας



**Κάθοδος** σώματος  
Θετικό έργο βάρους  
Μείωση δυναμικής ενέργειας  
Αύξηση κινητικής ενέργειας

Το ζεύγος σώμα-Γη, λοιπόν, εξαιτίας της βαρυτικής αλληλεπίδρασής τους, κατέχει βαρυτική δυναμική ενέργεια, η οποία σχετίζεται με την απόσταση Γης-σώματος. Η ενέργεια αυτή καταχρηστικά λέμε ότι είναι «ενέργεια του σώματος».

Σε κάθε κίνηση σώματος σε σχέση με τη Γη, αν πάνω του εκτελεί έργο μόνο το βάρος, συμβαίνει μετατροπή είτε της δυναμικής ενέργειας του σώματος σε κινητική ενέργεια είτε το αντίστροφο. Τότε, το άθροισμα των δύο ενεργειών διατηρείται σταθερό.

Έτσι, αν το σώμα μετακινηθεί από σημείο Σ σε σημείο Ρ:

$$(\text{κινητική ενέργεια στο } \Sigma) + (\text{δυναμική ενέργεια στο } \Sigma) = (\text{κινητική ενέργεια στο } \rho) + (\text{δυναμική ενέργεια στο } \rho)$$

$$\text{ή, συμβολικά, } K_{\Sigma} + U_{\Sigma} = K_{\rho} + U_{\rho}$$

οπότε, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι

$$K_{\rho} - K_{\Sigma} = U_{\Sigma} - U_{\rho} \quad \text{ή} \quad \Delta K_{(\Sigma \rightarrow \rho)} = -\Delta U_{(\Sigma \rightarrow \rho)}$$

Όμως, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας από το Σ στο Ρ (σύμφωνα με το Θ.Μ.Κ.Ε.) ισούται και με το έργο της μοναδικής δύναμης πάνω στο σώμα, του βάρους Β, για τη μετατόπιση από το Σ στο Ρ:

$$K_{\rho} - K_{\Sigma} = W_{B(\Sigma \rightarrow \rho)}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις έχουν ίσα πρώτα μέλη, οπότε για τα δεύτερα μέλη τους προκύπτει ότι

$$U_{\Sigma} - U_{\rho} = W_{B(\Sigma \rightarrow \rho)}$$

Δηλαδή, δείξαμε ότι,

Αν το βάρος είναι η μοναδική δύναμη που εκτελεί έργο στο σώμα, τότε:

$$W_{B(\Sigma \rightarrow \rho)} = \Delta K_{(\Sigma \rightarrow \rho)} = -\Delta U_{(\Sigma \rightarrow \rho)}$$

Δηλαδή:

☞ Το έργο του βάρους

- ▶ είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος
- ▶ είναι αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής του ενέργειας
- ▶ δεν εξαρτάται από ποια τροχιά ακολουθήσει το σώμα από το ένα σημείο στο άλλο (είναι ίδιο για οποιαδήποτε τροχιά)

☞ Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετη της μεταβολής της κινητικής ενέργειας





# ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

## Διατήρηση μηχανικής ενέργειας

	K	U	E
	0 J	10 J	10 J
	2 J	8 J	10 J
	5 J	5 J	10 J
	7 J	3 J	10 J
	10 J	0 J	10 J

**ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ ΣΩΜΑΤΟΣ**

- ▶ Η κινητική ενέργεια αυξάνεται
- ▶ Η βαρυτική δυναμική ενέργεια μειώνεται
- ▶ Η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή

Το άθροισμα τής κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος το λέμε **μηχανική ενέργεια**.

Όταν ένα σώμα κινείται κοντά στη Γη (ώστε να δέχεται τη βαρυτική της έλξη) και πάνω του εκτελεί έργο μόνο το βάρος, είδαμε ότι η μηχανική του ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι:

Η μηχανική ενέργεια ενός σώματος διατηρείται σταθερή,

- ▶ όταν πάνω του εκτελούν έργο μόνο
  - δυνάμεις βαρυτικές
  - δυνάμεις ηλεκτρικές
  - και δυνάμεις ελαστικής παραμόρφωσης (όπως οι δυνάμεις των παραμορφωμένων ελατηρίων)
- ▶ αλλά και όταν δεν εκτελείται πάνω του έργο από δυνάμεις.

Αυτό το γεγονός είναι γνωστό ως **αρχή διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας**.

(Για συντομία θα γράφουμε Α.Δ.Μ.Ε.)

$$\text{κινητική ενέργεια} + \text{δυναμική ενέργεια} = \text{μηχανική ενέργεια} = \text{σταθερή}$$

ή, συμβολικά,  $K + U = E = \text{σταθερή}$

- ☞ Στην Α.Δ.Μ.Ε. **δεν** περιθαρξεί ένα σώμα όταν πάνω του εκτελούν έργο δυνάμεις εκτός από τις προαναφερόμενες (π.χ. τριβές, αντιστάσεις, δυνάμεις από μηχανές ή από τον άνθρωπο κλπ).
- ☞ Αντίθετα, το Θ.Μ.Κ.Ε. μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις δυνάμεων.

## Συνήθως η μηχανική ενέργεια δε διατηρείται ...



Οι παραπάνω δυνάμεις που διατηρούν (συντηρούν) τη μηχανική ενέργεια χαρακτηρίζονται **διατηρητικές** (ή **συντηρητικές**).

Ας κάνουμε τώρα μια αντιπαράθεση ανάμεσα στην επίδραση που έχουν οι συντηρητικές και οι μη συντηρητικές δυνάμεις στη μηχανική ενέργεια.

▶ Οι **συντηρητικές δυνάμεις** που δέχεται ένα σώμα συνεισφέρουν στο "κλάσμα" τής μηχανικής του ενέργειας που ονομάσαμε ενέργεια κίνησης. Επηρεάζουν, όμως, και το άλλο "κλάσμα" τής –τη δυναμική ενέργεια. Οι μεταβολές των δύο "κλασμάτων" είναι αντίθετες και έτσι η δράση των συντηρητικών δυνάμεων δεν επιφέρει κάποια αλλαγή στη μηχανική ενέργεια τού σώματος.

▶ Οι **μη συντηρητικές δυνάμεις** που δέχεται ένα σώμα συνεισφέρουν στην κινητική του ενέργεια, δεν επηρεάζουν όμως τη δυναμική ενέργεια. Άρα, η δράση των μη συντηρητικών δυνάμεων μεταβάλλει το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας (=τη μηχανική ενέργεια) τού σώματος.

Για παράδειγμα, η δύναμη τού ανέμου σπρώχνει τα πανιά ενός ιστιοπλοϊκού σκάφους κι αυξάνει την κινητική του ενέργεια, χωρίς να επηρεάζει τη δυναμική του ενέργεια. Μια τέτοια (μη συντηρητική) δύναμη, εφόσον αυξάνει το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας, προσφέρει "καινούργια" μηχανική ενέργεια στο σκάφος.

Επίσης, όταν ανεβάζουμε στο θρανίο –με σταθερή ταχύτητα– μια πεσμένη γόμα, της προσφέρουμε κινητική ενέργεια, που το βάρος μετατρέπει σε δυναμική ενέργεια. Έτσι, η γόμα φθάνει στο θρανίο χωρίς πρόσθετη κινητική ενέργεια, αλλά έχοντας επιπλέον δυναμική ενέργεια. Άρα, η (μη συντηρητική) ανυψωτική δύναμη αυξάνει το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας, προσφέροντας στη γόμα "καινούργια" μηχανική ενέργεια.

Εκτός από τις δυνάμεις που, με το έργο τους, προσφέρουν μηχανική ενέργεια στα σώματα, υπάρχουν και (μη συντηρητικές) δυνάμεις, που φθείρουν την ενέργεια αυτή, όπως οι τριβές και οι αντιστάσεις.

Το έργο αυτών των δυνάμεων είναι αρνητικό και ελαττώνει την ενέργεια κίνησης, χωρίς παράλληλα να επηρεάζει τη δυναμική ενέργεια.



Ο άνθρωπος έχει επινοήσει τρόπους, ώστε να ανατροφοδοτεί τα σώματα με τη μηχανική ενέργεια που τους αφαιρούν οι αντιστάσεις και οι τριβές –ή ακόμα και να την αυξάνει.

Για παράδειγμα, πατώντας γκάζι φροντίζουμε να ανατροφοδοτούμε το αυτοκίνητό μας με τη μηχανική ενέργεια που χάνει από τα αρνητικά έργα τής αντίστασης τού αέρα και της τριβής των ελαστικών με το οδόστρωμα.

Στο μακρόκοσμο, λοιπόν, τα σώματα που κινούνται σε περιβάλλον τριβών και αντιστάσεων, για να διατηρούν σταθερή τη μηχανική τους ενέργεια, πρέπει να ανατροφοδοτούνται συχνά με όση ενέργεια χάνουν από το έργο τριβών και αντιστάσεων.

Προκύπτει, λοιπόν, το ερώτημα:

☐ Εφόσον στο γήινο κόσμο γύρω μας οι τριβές και οι αντιστάσεις είναι πανταχού παρούσες, υπάρχουν, άραγε, σώματα που η μηχανική τους ενέργεια διατηρείται σταθερή;

Στον μακρόκοσμο (τον κόσμο των αισθησών μας) ένα παράδειγμα διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας μάς προσφέρει η Γη, η οποία περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, με τον οποίο αλληλεπιδρά βαρυτικά. Η Γη κατέχει, λοιπόν, και κινητική και δυναμική ενέργεια, των οποίων, μάλιστα, το άθροισμα διατηρείται επί δεκατομμύρια χρόνια σταθερό.

Στην περίπτωση, βέβαια, τής κίνησης τής Γης δεν υπάρχουν τριβές.

Στο μικρόκοσμο, επίσης, σε ζευγάρια σωματιδίων (π.χ. άτομα, ιόντα, ηλεκτρόνια, μόρια, νουκλεόνια) που αλληλεπιδρούν βαρυτικά και ηλεκτρικά, φαίνεται ότι η διατήρηση τής μηχανικής ενέργειας είναι ένα γεγονός.





## ΙΣΧΥΣ

**Όταν μας ενδιαφέρει το πόσο γρήγορα μεταβιβάζεται ενέργεια**

Ολοκληρώνοντας τη μελέτη φαινομένων που σχετίζονται με τη μεταβίβαση ή τη μετατροπή ενέργειας με τη διαδικασία τής εκτέλεσης έργου από δυνάμεις, αφήσαμε για το τέλος να αναφερθούμε σε ένα ζήτημα που συχνά έχει ενδιαφέρον.

🕒 Υπάρχουν περιπτώσεις, λοιπόν, όπου μας απασχολεί όχι μόνο η ποσότητα τής ενέργειας που ανταλλάσσει ένα σώμα με το περιβάλλον του, αλλά και το πόσο γρήγορα συμβαίνει αυτό.

Ας θεωρήσουμε, π.χ., δύο ίδια τετράδια, που βρίσκονται πεσμένα στο πάτωμα. Αν τα ανεβάσουμε στο θρανίο, το πρώτο τετράδιο μέσα σε 1 s και το δεύτερο τετράδιο μέσα σε 2 s, τότε, κατά την ανύψωσή τους, το έργο τής δύναμής μας θα προσφέρει την ίδια ποσότητα δυναμικής ενέργειας και στα δύο σώματα, αλλά "με διαφορετικό ρυθμό".

Το πρώτο τετράδιο θα αποκτήσει την ίδια δυναμική ενέργεια με το δεύτερο, αλλά στο μισό χρόνο –δηλαδή πιο γρήγορα.

**Ισχύ** λέμε το μονόμετρο φυσικό μέγεθος, με το οποίο εκφράζουμε πόσο γρήγορα μεταβιβάζεται ή μετατρέπεται ενέργεια.

Όταν μεταβιβάζονται ή μετατρέπονται ίσα τζάουλ (J) ενέργειας σε κάθε δευτερόλεπτο (s), θεωρούμε ότι η ισχύς είναι σταθερή.

Αν γνωρίζουμε ότι μια ισχύς είναι σταθερή και θέλουμε να την υπολογίσουμε, μετράμε μια –οποιαδήποτε– ποσότητα ενέργειας που μεταβιβάζεται ή μετατρέπεται και τη διαιρούμε με τον αντίστοιχο χρόνο.

$$\text{ισχύς} = \frac{\text{ενέργεια που ανταλλάσσεται ή μετατρέπεται}}{\text{αντίστοιχος χρόνος}}$$

$$\text{ή, συμβολικά, } P = \frac{E}{\Delta t}$$

Μονάδα μέτρησης τής ισχύος στο S.I. είναι το  $1 \frac{J}{s}$ , που το λέμε και **βατ (W)**.

**Μια ιδιαίτερη περίπτωση: η ισχύς στην Ε.Ο.Κ.**

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα, που ωθείται από μια σταθερή δύναμη F και κινείται με σταθερή ταχύτητα (επειδή –προφανώς– δέχεται κι άλλες δυνάμεις, που όλες μαζί εξισορροπούνται). Το έργο W τής δύναμης που ωθεί το σώμα μεταβιβάζει τότε ενέργεια στο σώμα με ρυθμό:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t}$$

Επειδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή, το πηλίκο  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  δίνει τη σταθερή ταχύτητα v του σώματος. Άρα:

$$\text{Στην Ε.Ο.Κ., ρυθμός μεταβίβασης ενέργειας από το έργο σταθερής δύναμης: } P = F v$$



# ΆΛΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

## Είδη κινητικής ενέργειας

Η **θερμική** και η **αιολική ενέργεια** είναι είδη κινητικής ενέργειας.

Μέσα σε κάθε σώμα τα μικροσωματίδια (πρωτόνια, νετρόνια, ηλεκτρόνια, άτομα, μόρια κλπ.) βρίσκονται σε διαρκή άτακτη κίνηση και το άθροισμα των κινητικών τους ενεργειών που αφορά αυτή την κίνησή τους το λέμε **θερμική ενέργεια** του σώματος.

Τα μικροσωματίδια του ατμοσφαιρικού αέρα (εκτός από την άτακτη κίνησή τους), συχνά οργανώνονται και κάνουν μια προσανατολισμένη κίνηση (τον γνωστό μας άνεμο) και το άθροισμα των κινητικών ενεργειών μιας τέτοιας κίνησης το λέμε **αιολική ενέργεια**.

## Είδη δυναμικής ενέργειας

Βαρυτική δυναμική ενέργεια δεν έχει μόνο κάθε ζευγάρι Γη-σώμα, όταν βρίσκονται σε κάποια απόσταση. Κάθε ζευγάρι σωμάτων στο σύμπαν –οσοδήποτε μεγάλα ή μικρά (π.χ. ο Ήλιος και ο πλανήτης Άρης ή ένα πρωτόνιο κι ένα ηλεκτρόνιο κάποιου ατόμου)– έλκονται αμοιβαία με βαρυτικές δυνάμεις και κατέχουν βαρυτική δυναμική ενέργεια, που εξαρτάται από την απόστασή τους.

Ο όρος "βαρυτική δυναμική" αποδόθηκε σ' αυτή τη μορφή ενέργειας, για να δηλώσει τη σχέση της με τη βαρυτική δύναμη με την οποία αλληλεπιδρούν. Όπως είδαμε, λοιπόν, η βαρυτική δύναμη με το αρνητικό της έργο μετατρέπει την ενέργεια από κινητική σε βαρυτική δυναμική και με το θετικό της έργο κάνει το αντίστροφο.

Εκτός από το βάρος (και, γενικά, τις βαρυτικές δυνάμεις), υπάρχουν και άλλες δυνάμεις με παρόμοια "συμπεριφορά". Είναι οι γνωστές μας συντηρητικές δυνάμεις, όπως:

- ▶ η **ηλεκτρική δύναμη**, με την οποία αλληλεπιδρούν δύο σώματα με ηλεκτρικό φορτίο και
- ▶ η **δύναμη ελαστικής παραμόρφωσης**, με την οποία αλληλεπιδρούν ένα ελαστικά παραμορφωμένο ελατήριο και κάποιο σώμα δεμένο στο ελεύθερο άκρο του.

Ζευγάρια σωμάτων που αλληλεπιδρούν με τις παραπάνω δυνάμεις, μπορούν να αποθηκεύσουν μια μορφή ενέργειας που εξαρτάται από την αλληλεπίδραση και την απόστασή τους.

Μια τέτοια ενέργεια την αποκαλούμε **δυναμική** (διότι έχει τα χαρακτηριστικά της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας).

Ιδιαίτερα, θα χρησιμοποιούμε τον όρο **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια**, για ένα ζεύγος σωμάτων που αλληλεπιδρούν με ηλεκτρικές δυνάμεις και **δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης**, για ένα ζεύγος σωμάτων που αλληλεπιδρούν με δύναμη ελαστικής παραμόρφωσης.

Ειδικότερα:

- ▶ Για δύο σώματα με ετερόσημα ηλεκτρικά φορτία:

Όταν **απομακρύνονται**, η ελκτική δύναμη της αλληλεπίδρασής τους εκτελεί αρνητικό έργο και μετατρέπει την **κινητική ενέργεια σε ηλεκτρική δυναμική**.

Όταν **πλησιάζουν**, το θετικό έργο της αλληλεπίδρασής τους προκαλεί την αντίστροφη μετατροπή –από **δυναμική σε κινητική ενέργεια**.

- ▶ Δύο σώματα με ομόσημα ηλεκτρικά φορτία:

Όταν **πλησιάζουν** μεταξύ τους, η απωστική δύναμη της αλληλεπίδρασής τους εκτελεί αρνητικό έργο και μετατρέπει την **κινητική ενέργεια σε ηλεκτρική δυναμική**.

Όταν **απομακρύνονται**, το θετικό έργο της αλληλεπίδρασής τους μετατρέπει τη **δυναμική ενέργεια σε κινητική**.

- ▶ Για ένα σώμα δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου:

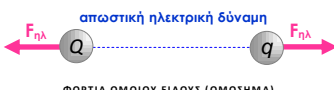
Όταν η **παραμόρφωση του ελατηρίου αυξάνεται**, η δύναμη της αλληλεπίδρασής του με το σώμα εκτελεί αρνητικό έργο, που μετατρέπει την **κινητική ενέργεια του σώματος σε δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης**.

Όταν η **παραμόρφωση του ελατηρίου μειώνεται**, η δύναμη της αλληλεπίδρασής του με το σώμα εκτελεί θετικό έργο, που μετατρέπει τη **δυναμική ενέργεια σε κινητική**.

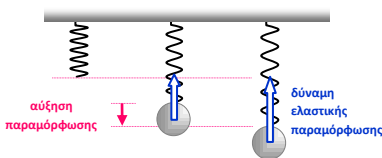
Τέλος, συμπληρώνουμε ότι η **ηλεκτρομαγνητική**, η **χημική** και η **ατομική ή πυρηνική ενέργεια** είναι, επίσης, είδη δυναμικής ενέργειας.



ΦΟΡΤΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥ ΕΙΔΟΥΣ (ΕΤΕΡΟΣΗΜΑ)



ΦΟΡΤΙΑ ΟΜΟΙΟΥ ΕΙΔΟΥΣ (ΟΜΟΣΗΜΑ)





## ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Η συνολική ενέργεια διατηρείται πάντα ίδια

Η ενέργεια είναι ένα φυσικό μέγεθος, που διαπιστώνουμε να συμμετέχει σε όλα τα φαινόμενα του σύμπαντος.

Πειραματικά επιβεβαιώνεται ότι, σε κάθε φαινόμενο:

Ποσότητες ενέργειας μεταφέρονται από μια περιοχή σε άλλη ή μετατρέπονται σε άλλες μορφές. Η ενέργεια, όμως, δεν παράγεται από το μηδέν ούτε καταστρέφεται.

Άρα, η συνολική ενέργεια κάθε μορφής που υπάρχει σε όλο το σύμπαν (από τη δημιουργία του) διατηρείται σταθερή. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως **αρχή διατήρησης της ενέργειας**.

(Για συντομία Α.Δ.Ε.).

*Για παράδειγμα, ένα βιβλίο γλιστρά πάνω σε ένα τραπέζι και σταματά. Φαίνεται σα να έχει χαθεί ενέργεια, όμως το βιβλίο και το τραπέζι είναι πλέον λίγο πιο θερμά.*

*Το γλίστρημα του βιβλίου αντιστοιχεί σε μια οργανωμένη (προσανατολισμένη) κίνηση των μικροσωματιδίων του. Η συνολική κινητική ενέργεια του βιβλίου είναι η συνολική κινητική ενέργεια αυτής της -οργανωμένης- κίνησης των μικροσωματιδίων του.*

*Όταν το βιβλίο σταματά, η ενέργεια αυτή δε χάνεται. Με το έργο της τριβής μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια του βιβλίου και του τραπεζιού, δηλαδή σε κινητική ενέργεια μιας περισσότερο άτακτης κίνησης των μικροσωματιδίων τους.*

Γενικά, η ενεργειακή μεταφορά ή μετατροπή πραγματοποιείται με 4 διαφορετικές διαδικασίες:

- με εκτέλεση έργου  
(δηλαδή με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής μιας δύναμης, που γνωρίσαμε στο κεφάλαιο αυτό)
- με ροή θερμότητας  
(πρόκειται για θερμική ενέργεια που μεταφέρεται από περιοχές υψηλότερης σε περιοχές χαμηλότερης θερμοκρασίας)
- με ροή ηλεκτρικού φορτίου  
(πρόκειται για το γνωστό μας ηλεκτρικό ρεύμα)
- με κύματα  
(πρόκειται για τη διάδοση μιας "διαταραχής" στο χώρο, είτε με τη μεσολάβηση ύλης είτε χωρίς αυτήν)



# ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Με βάση τη **διδασκτέα ύλη Φυσικής Γενικής Παιδείας Α' Λυκείου (2012-2013)**, προτείνω να λυθούν (ανά ενότητα και με την αναφερόμενη σειρά) οι παρακάτω ερωτήσεις / ασκήσεις ▶ από το σχολικό βιβλίο **ΦΥΣΙΚΗ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ** (από σελ. 189-195).

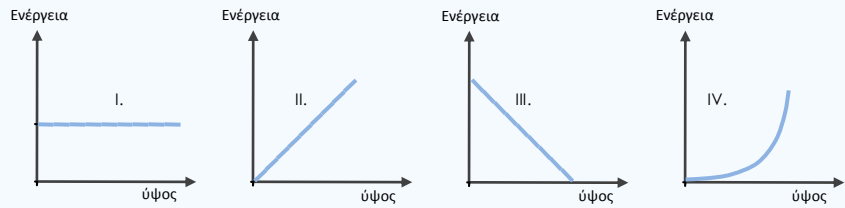
Έργο δύναμης	Ερ. 1, 2, 19 – Άσκ. 1, 10, 9
Κινητική ενέργεια	Ερ. 5, 24 – Άσκ. 3, 14, 6, 12, 18, 15, 16
Δυναμική ενέργεια	Ερ. 26, 27 – Άσκ. 2
Μηχανική ενέργεια	Ερ. 3, 4, 8, 9, 20 – Άσκ. 4, 17 (όχι το Β)
Ισχύς	Ερ. 21, 23 – Άσκ. 5, 7, 10
Επανάληψη	Ερ. 11 (όχι το ΣΤ), 12 (όχι τα Β, Δ), 13 (όχι το Γ), 15 (όχι το Β), 18, 25 – Άσκ. 8, 13 (όχι το Β), 19, 21, 22

Επίσης, προτείνω τις παρακάτω πρόσθετες ερωτήσεις / ασκήσεις για επανάληψη.

Πρόσθετες ερωτήσεις / ασκήσεις  
(εκτός σχολικού βιβλίου)

- P1. Ένα αεροπλάνο κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα σε ύψος 1000 m από την επιφάνεια της Γης. Να χαρακτηρίσετε σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.
- Το αεροπλάνο έχει δυναμική ενέργεια
  - Το αεροπλάνο έχει κινητική ενέργεια
  - Το έργο που παράγει το βάρος είναι μηδέν
  - Το έργο που παράγει η αντίσταση του αέρα είναι μηδέν
  - Το συνολικό παραγόμενο έργο από όλες τις δυνάμεις που δέχεται το αεροπλάνο είναι μηδέν
- P2. Βρισκόμαστε στην άκρη ενός κτιρίου και κρατάμε 3 όμοιες μπάλες. Πετάμε τη μία οριζόντια, την άλλη κατακόρυφα προς τα πάνω και την τρίτη κατακόρυφα προς τα κάτω. Όλες οι μπάλες έχουν αρχική ταχύτητα ίδιου μέτρου. Να εξηγήσετε ποια από τις 3 μπάλες θα συναντήσει το έδαφος με τη μεγαλύτερη ταχύτητα
- αν η αντίσταση του αέρα είναι ασήμαντη
  - αν η αντίσταση του αέρα θεωρείται σημαντική.
- P3. Από το έδαφος ρίχνουμε ένα σώμα, κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα  $v_0$ . Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g$ .
- Να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα, χρησιμοποιώντας
    - τις εξισώσεις της κίνησης που κάνει το σώμα ανερχόμενο
    - το θεώρημα έργου-ενέργειας
    - την αρχή διατήρησης της ενέργειας
  - Να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια του σώματος έχουν το μισό της αρχικής τους τιμής.
- [ ΑΠ:  $h = v_0^2 / 2g$  ]
- P4. Ένας μαθητής σηκώνει το χέρι του και από ύψος  $h = 2,2$  m πάνω από το έδαφος πετάει μια πέτρα, μάζας  $m = 0,5$  kg, με ταχύτητα  $v = 10$  m/s που σχηματίζει γωνία  $\phi = 60^\circ$  προς τα πάνω σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας, όταν συναντά το έδαφος.
  - Να υπολογίσετε το έργο του βάρους κατά τη διαδρομή της πέτρας.
  - Να υπολογίσετε τη μεταβολή  $\Delta U$  της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας της πέτρας.
  - Να αναφέρετε ποια παραδοχή κάνετε για να απαντήσετε στα παραπάνω ερωτήματα.
- [ ΑΠ: α)  $v = 15$  m/s β)  $W_B = 11$  J γ)  $\Delta U = -11$  J ]
- P5. Ένας αθλητής πετά κατακόρυφα προς τα πάνω μια μπάλα, μάζας  $m = 0,4$  kg, με αρχική ταχύτητα  $v_0 = 16$  m/s. Το χέρι του αθλητή που πέταξε τη μπάλα παραμένει στο ίδιο ύψος και η μπάλα επιστρέφει σ' αυτό με ταχύτητα  $v = 12$  m/s. Να υπολογίσετε
- το συνολικό έργο του βάρους της μπάλας
  - το συνολικό έργο της αντίστασης του αέρα πάνω στην μπάλα.
- [ ΑΠ: α)  $W_B = 0$  β)  $W_T = -22,4$  J ]
- P6. Σε σώμα, μάζας  $m = 5$  kg, που ηρεμεί πάνω σε οριζόντια επιφάνεια, ασκείται οριζόντια δύναμη  $F = 30$  N. Το σώμα, αφού διανύσει απόσταση  $S = 20$  m, αποκτά ταχύτητα  $v = 10$  m/s. Να υπολογίσετε το έργο της τριβής.
- [ ΑΠ:  $W_T = -50$  J ]
- P7. Σε σώμα, μάζας  $m = 2$  kg, το οποίο ηρεμεί, ασκείται δύναμη  $F = 30$  N κατακόρυφα προς τα πάνω. Να υπολογίσετε την κινητική και τη δυναμική ενέργειά του μετά από χρόνο  $t = 4$  s. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
- [ ΑΠ:  $K = 400$  J,  $U = 800$  J ]

- Π8. Αφήνουμε ένα σώμα από ύψος  $h$  να πέσει προς τη Γη. Η αντίσταση του αέρα είναι ασήμαντη. Από τα παρακάτω διαγράμματα να επιλέξετε αυτό που παριστάνει γραφικά την τιμή της μηχανικής ενέργειας, της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το ύψος  $h$ .



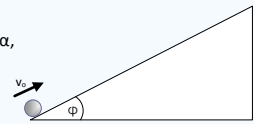
- Π9. Αφήνουμε μια μικρή μπάλα από ύψος  $h = 2$  m να πέσει προς τη Γη. Η αντίσταση του αέρα κατά την πτώση θεωρείται ασήμαντη. Κάθε φορά που η μπάλα συναντά το έδαφος χάνει το 20% της ενέργειας που είχε πριν την κρούση. Να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο φτάνει η μπάλα μετά τη δεύτερη κρούση.

[ ΑΠ:  $h_2 = 1,28$  m ]

- Π10. Από ύψος  $h = 5$  m πάνω από την επιφάνεια της Γης ρίχνουμε κατακόρυφα προς τα κάτω μια μικρή μπάλα, με ταχύτητα μέτρου  $v_0 = 10$  m/s. Η μπάλα συγκρούεται με το έδαφος και αναπηδά πάλι σε ύψος  $h = 5$  m. Να βρείτε το ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας της μπάλας που χάθηκε κατά την κρούση. Επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

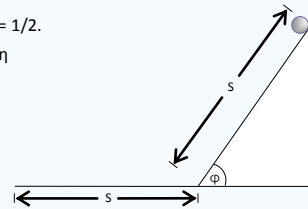
[ ΑΠ:  $\Pi = 50\%$  ]

- Π11. Ένα πλάγιο επίπεδο έχει γωνία κλίσης  $\phi = 30^\circ$  με  $\eta\mu\phi = 1/2$  και  $\sigma\upsilon\upsilon\phi = \sqrt{3}/2$ . Από τη βάση του επιπέδου ρίχνουμε προς τα πάνω και κατά μήκος του ένα σώμα, με αρχική ταχύτητα  $v_0 = 20$  m/s, το οποίο σταματάει στιγμιαία αφού διανύσει απόσταση  $S = 10$  m. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Να υπολογίσετε τον συντελεστή  $\mu$  της τριβής ολίσθησης σώματος-επιπέδου.



[ ΑΠ:  $\mu = \sqrt{3}$  ]

- Π12. Ένα πλάγιο επίπεδο έχει γωνία κλίσης  $\phi = 60^\circ$  με  $\eta\mu\phi = \sqrt{3}/2$  και  $\sigma\upsilon\upsilon\phi = 1/2$ . Από ένα σημείο πάνω σ' αυτό αφήνουμε ένα σώμα, που φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου και συνεχίζει να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο, ώσπου τελικά σταματά. Τα διαστήματα  $S$  που διανύει το σώμα στα δύο επίπεδα είναι ίσα. Να υπολογίσετε τον συντελεστή  $\mu$  της τριβής ολίσθησης σώματος-επιπέδων, ο οποίος είναι σταθερός για όλη τη διαδρομή.



[ ΑΠ:  $\mu = \sqrt{3}/3$  ]

- Π13. Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται ένας κινητήρας, ο οποίος αποδίδει ωφέλιμη ισχύ  $P = 10$  kW, για να ανεβάσει ένα σώμα μάζας  $m = 500$  kg σε ύψος  $h = 8$  m με σταθερή ταχύτητα. Επιτάχυνση βαρύτητας  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

[ Υπόδειξη: Ωφέλιμη ισχύς του κινητήρα είναι ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει μηχανική ενέργεια στο σώμα. (Υπάρχει και η καταναλισκόμενη ισχύς του κινητήρα, που είναι ο ρυθμός με τον οποίο ζοδεύει ηλεκτρική ενέργεια, για να λειτουργήσει. Αυτή η ισχύς είναι περισσότερη από την ωφέλιμη, γιατί υπάρχουν και απώλειες -όπως παραγόμενη θερμότητα). Η μηχανική ενέργεια που προσφέρει ο κινητήρας στο σώμα είναι μόνο δυναμική, διότι το ανυψώνει με σταθερή ταχύτητα. ]

[ ΑΠ:  $t = 4$  s ]