

## Πώς λύνουμε προβλήματα δυναμικής με τριβή:

### ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ:

Τα βήματα που μπορούμε να ακολουθήσουμε, προκειμένου να λύσουμε μια άσκηση Δυναμικής είναι τα εξής:

**1.** Με βάση την εκφώνηση του προβλήματος καθορίζουμε το σώμα που θα μελετήσουμε, αφού κάνουμε ένα απλό σχήμα του σώματος, σε μια τυχαία θέση της κίνησής του.

**2.** Σχεδιάζουμε με προσοχή όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα που εξετάζουμε. Για τη σωστή τοποθέτηση των δυνάμεων παίρνουμε υπ' όψη ότι αυτές μπορεί να είναι είτε από επαφή, είτε από απόσταση.

**3.** Επιλέγουμε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων, έτσι ώστε ο x'x άξονας να συμπίπτει με τη διεύθυνση κίνησης. Επομένως, ο άξονας y'y θα είναι κάθετος προς αυτόν.

**4.** Αναλύουμε στους άξονες x'x και y'y τις δυνάμεις εκείνες που δεν βρίσκονται πάνω σε αυτούς.

**5. α)** Αν το σώμα είναι ακίνητο ή κινείται με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ( $\vec{v} = \text{σταθ}$ ) στηριζόμαστε στη συνθήκη ισορροπίας  $\Sigma F_x = 0$  (ή) και  $\Sigma F_y = 0$ , σύμφωνα με τον **1<sup>ο</sup> νόμο του Newton**.

**β)** Αν το σώμα κινείται με την επίδραση σταθερής (συνισταμένης) δύναμης κάνοντας ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ( $\vec{a} = \text{σταθ}$ ), στηριζόμαστε στο **2<sup>ο</sup> νόμο του Newton** κάνοντας χρήση των εξισώσεων:

**i)** αν η κίνηση γίνεται μόνο στον άξονα x'x, τότε:  $\Sigma F_x = ma$  και  $\Sigma F_y = 0$ .

**ii)** αν η κίνηση γίνεται μόνο στον άξονα y'y, τότε:  $\Sigma F_x = 0$  και  $\Sigma F_y = ma$ .

**Σε όλες τις περιπτώσεις ως θετική φορά του άξονα x'x (για τις δυνάμεις) παίρνουμε τη φορά της κίνησης.**

**γ)** Για να βρούμε το ζητούμενο πιθανόν, να είναι αρκετή η χρήση μίας μόνο από τις παραπάνω εξισώσεις. Ίσως όμως να χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε επί πλέον, τις κατάλληλες εξισώσεις της κινηματικής, σύμφωνα με το είδος της κίνησης που κάνει το σώμα για να καταλήξουμε στο ζητούμενο.

### ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

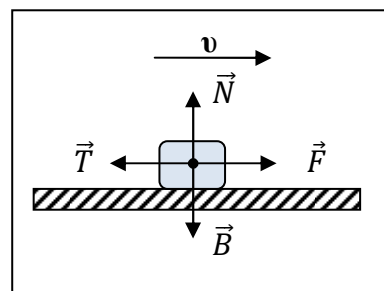
**1) Το σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης F.**

Αφού το σώμα κινείται η τριβή είναι τριβή ολίσθησης. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**A. Κινείται με σταθερή ταχύτητα.** Τότε εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα στους άξονες χχ' και γγ' έχουμε:

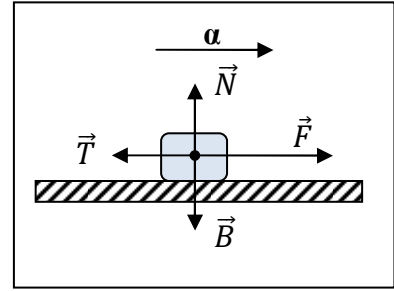
$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\rightarrow F = T \\ \Sigma F_y = 0 &\rightarrow N = B = mg \\ T = \mu N &\rightarrow \mathbf{T = \mu mg} \end{aligned} \right\} (1)$$

Ανάλογα με τα δεδομένα λύνουμε το σύστημα (1) και υπολογίζουμε τα ζητούμενα.



**B. Κινείται με σταθερή επιτάχυνση σε οριζόντιο επίπεδο.** Τότε εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα στους άξονες χ'χ και γ'γ έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = ma &\rightarrow F - T = ma \\ \Sigma F_y = 0 &\rightarrow N = B = mg \\ T = \mu N &\rightarrow \mathbf{T = \mu mg} \end{aligned} \right\} (2)$$



Ανάλογα με τα δεδομένα λύνουμε το σύστημα (2) και υπολογίζουμε τα ζητούμενα.

**Προσοχή !!!!!** Στη σχέση  $T = \mu N$  η τιμή του  $N$  δεν είναι υποχρεωτικά ίση με το βάρος.

**2) Το σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση πλάγιας δύναμης  $F$ .**

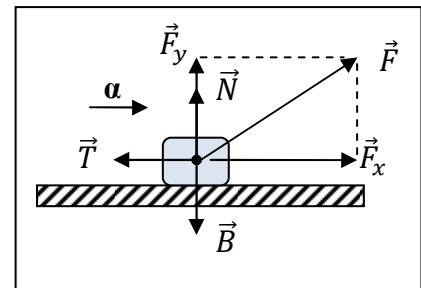
Αν το σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την ασκούμενη δύναμη  $F$  να σχηματίζει γωνία με τον άξονα χ'χ.

Τότε από την ανάλυση των δυνάμεων προκύπτει:

$$\Sigma F_x = F_x - T = ma \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = N + F_y - mg = 0 \rightarrow N = mg - F_y \quad (2)$$

$$T = \mu N \rightarrow \mathbf{T = \mu(mg - F_y)} \quad (3)$$

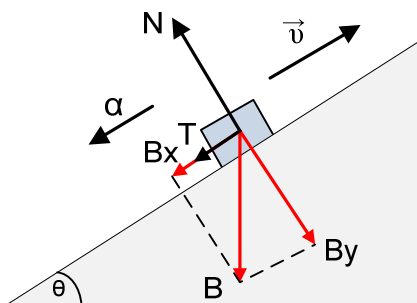


Από το συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) και (3) υπολογίζουμε τα ζητούμενα.

**3) Το σώμα κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης  $F$ .**

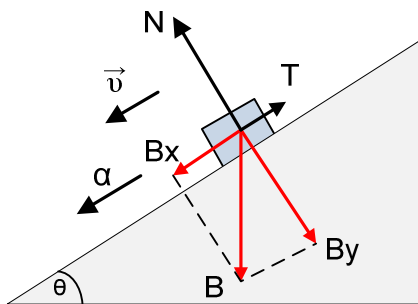
**A) Άνοδος :** Η τριβή είναι ομόρροπη της  $B_x$  (επιβραδυνόμενη κίνηση,  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{v}$ )

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις και αναλύουμε το βάρος κατά τα γνωστά:



$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = ma &\rightarrow -B_x - T = ma \\ \Sigma F_y = 0 &\rightarrow N - B_y = 0 \rightarrow N = mg \sin \theta \\ T = \mu N &\rightarrow \mathbf{T = \mu mg \sin \theta} \end{aligned} \right\}$$

**B) Κάθοδος :** Η τριβή είναι αντίρροπη της  $B_x$  (επιταχυνόμενη κίνηση,  $\vec{a} \uparrow \vec{v}$ )  
 Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις και αναλύουμε το βάρος κατά τα γνωστά:

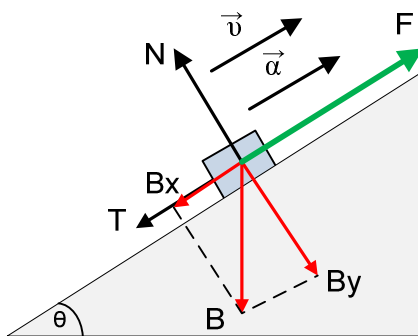


$$\begin{aligned} \Sigma F_x = ma &\rightarrow B_x - T = ma \\ \Sigma F_y = 0 &\rightarrow N - B_y = 0 \rightarrow N = mg \sin \theta \\ T = \mu N &\rightarrow \mathbf{T = \mu mg \sin \theta} \end{aligned}$$

**3) Το σώμα κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο με την επίδραση εξωτερικής δύναμης F.**

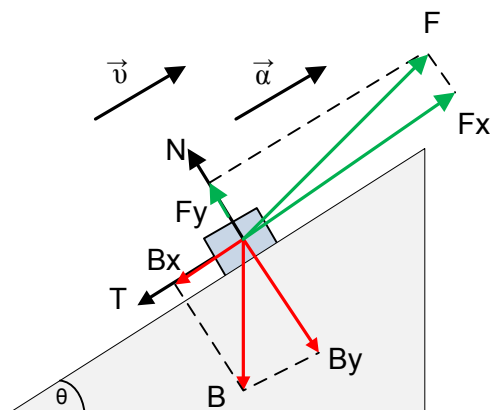
Στην περίπτωση αυτή η δύναμη F μπορεί να είναι A) παράλληλη προς την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου ή B) να σχηματίζει κάποια γωνία με αυτήν.

**A)**



$$\begin{aligned} \Sigma F_x = ma &\rightarrow F - B_x - T = ma \\ \Sigma F_y = 0 &\rightarrow N - B_y = 0 \rightarrow N = mg \sin \theta \\ T = \mu N &\rightarrow \mathbf{T = \mu mg \sin \theta} \end{aligned}$$

**B)**



$$\begin{aligned} \Sigma F_x = ma &\rightarrow F_x - B_x - T = ma \\ \Sigma F_y = 0 &\rightarrow N + F_y - B_y = 0 \rightarrow N = mg \sin \theta - F_y \\ T = \mu N &\rightarrow \mathbf{T = \mu (mg \sin \theta - F_y)} \end{aligned}$$

## Παράδειγμα: Περίπτωση 1 Β.

Σώμα μάζας  $m = 5 \text{ kg}$  βρίσκεται ακίνητο πάνω οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu = 0,4$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου  $F = 30 \text{ N}$ .

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα  $v$  και τη μετατόπιση του σώματος τη χρονική στιγμή  $t_1 = 10 \text{ s}$ .

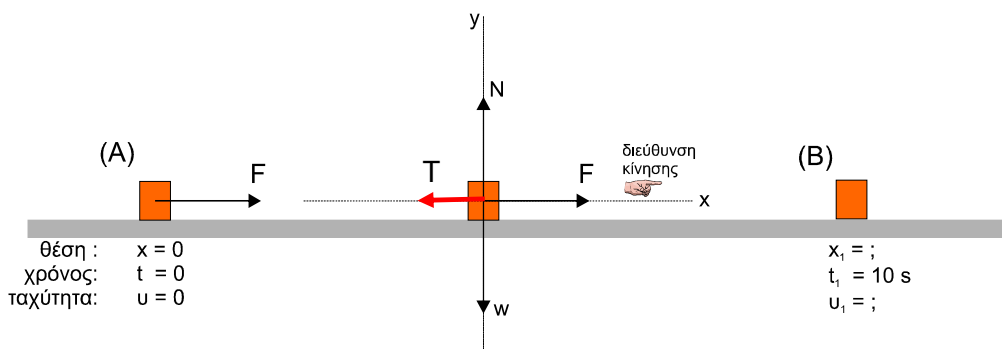
β) Να κάνετε τα διαγράμματα  $v - t$  και  $x - t$ , από την  $t = 0$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

Να θεωρήσετε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ταυτίζεται με το συντελεστή οριακής τριβής.

**1<sup>ο</sup> Βήμα:** Κατασκευάζουμε ένα σχήμα με το σώμα, που θεωρούμε ως υλικό σημείο, δηλαδή σώμα αμελητέων διαστάσεων, σε μια αρχική θέση (A) και μια τελική θέση (B) αντίστοιχα της ευθύγραμμης διαδρομής του. Στις δύο θέσεις σημειώνουμε πληροφορίες που αφορούν τη θέση  $x$ , τη χρονική στιγμή  $t$  και την ταχύτητα  $v$  του σώματος πάνω στην ευθεία.



**2<sup>ο</sup> Βήμα:** Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το σώμα σε μια ενδιάμεση θέση της διαδρομής του όπου σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που δέχεται. Επιλέγουμε το κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων, με άξονα  $xx'$  να συμπίπτει με τη διεύθυνση της κίνησης. Φυσικά αν χρειάζεται αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες.



**3<sup>ο</sup> Βήμα:** Στη διεύθυνση  $yy'$  που το σώμα δεν κινείται, εφαρμόζουμε τον 1<sup>ο</sup> Νόμο του Νεύτωνα δηλαδή  $\Sigma F_y = 0$ , οπότε λαμβάνοντας μια θετική φορά, γράφουμε τις δυνάμεις που βρίσκονται στη διεύθυνση αυτή με τις αλγεβρικές τους τιμές:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = w \Leftrightarrow N = mg \quad (1)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) υπολογίζουμε το μέτρο της τριβής ολίσθησης:

$$T = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g = 20 \text{ N}$$

**4<sup>ο</sup> Βήμα:** Στη διεύθυνση της κίνησης  $xx'$  εφαρμόζουμε το 2<sup>ο</sup> Νόμο του Νεύτωνα  $\Sigma F_x = ma$ . Θεωρούμε και πάλι μια θετική φορά (συνήθως ορίζουμε ως θετική, τη φορά προς τα δεξιά του

άξονα) και σημειώνουμε τις δυνάμεις με την αλγεβρική τους τιμή, έτσι υπολογίζουμε την επιτάχυνση  $a$  που αποκτά το σώμα:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow F - T = ma \Leftrightarrow 30 - 20 = 5 \cdot a \Leftrightarrow a = 2 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

**Παρατήρηση:** Αν το μέτρο της  $F$  προκύψει μικρότερο ή ίσο με το μέτρο της  $T$  τότε η τριβή  $T$  είναι στατική και το σώμα δεν πρόκειται να μετακινηθεί στη διεύθυνση του άξονα  $xx'$ .

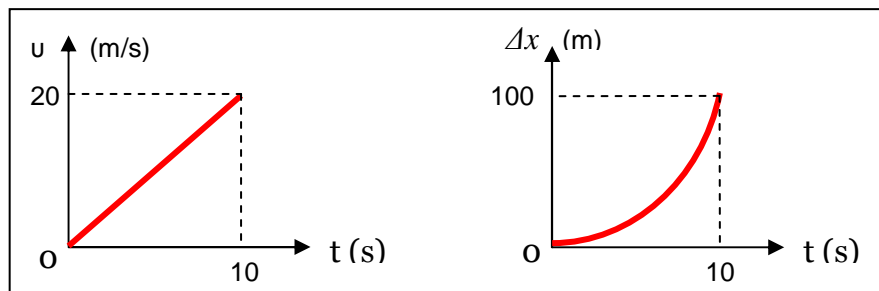
**5<sup>ο</sup> Βήμα:** Εφόσον γνωρίζουμε την επιτάχυνση  $a$ , μπορούμε να καταφύγουμε στις αντίστοιχες εξισώσεις της κίνησης και να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος και τη μετατόπισή του.

Στην περίπτωσή μας η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε οι σχέσεις για την ταχύτητα και τη μετατόπιση που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} \Leftrightarrow a = \frac{u}{t_1} \Leftrightarrow u = a \cdot t_1 \xrightarrow{(2)} u = 2 \cdot 10 \Leftrightarrow u = 20 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 \Leftrightarrow \Delta x = 100 \text{ m}$$

**6<sup>ο</sup> Βήμα:** Κατασκευάζουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις κατά τα γνωστά :



Μαρούσης Βαγγέλης  
Φυσικός