ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1 : ΔΥΝΑΜΗ ΚαΙ ΚΙΝΗΣΗ

1.1 Ευθύγραμμη κίνηση

ΘΕΩΡΙΑ

1. Χρονική στιγμή t και χρονική διάρκεια Δt

Χρονική στιγμή t είναι η μέτρηση του χρόνου και δείχνει πότε συμβαίνει ένα γεγονός.

Χρονική διάρκεια Δt είναι η διαφορά δύο χρονικών στιγμών t_2 , t_1 ($t_2 > t_1$) δηλαδή $\Delta t = t_2 - t_1$. Η χρονική διάρκεια δείχνει πόσο διαρκεί ένα γεγονός.

Συνήθως θεωρούμε $t_1 = 0$ και $t_2 = t$ άρα $\Delta t = t$

2. Τροχιά κινητού

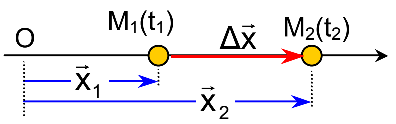
Τροχιά ενός κινητού (υλικού σημείου) ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς ονομάζεται η συνεχής (νοητή) γραμμή που αποτελεί το σύνολο των θέσεων του κινητού κατά την κίνησή του.

Η μορφή της τροχιάς δίνει και το όνομα στην κίνηση.

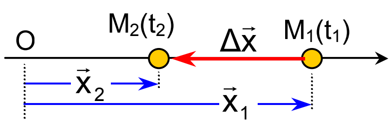
- Αν η τροχιά είναι ευθεία έχουμε ευθύγραμμη κίνηση.
- Αν η τροχιά είναι κύκλος έχουμε κυκλική κίνηση.
- Αν η τροχιά είναι καμπύλη έχουμε καμπυλόγραμμη κίνηση.

3. Μετατόπιση Δx

Μετατόπιση ενός κινητού ονομάζεται το διάνυσμα $\Delta\vec{x}$ που έχει αρχή την αρχική θέση του κινητού και τέλος την τελική θέση.



Εικόνα 1



Εικόνα 2

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης είναι : $\Delta x = x_2 - x_1$

Παρατήρηση : Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης είναι θετική όταν το κινητό κινείται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα (όχι υποχρεωτικά στο θετικό τμήμα) όπως στην εικόνα 1 και αρνητική όταν το κινητό κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα (όχι υποχρεωτικά στο αρνητικό τμήμα) όπως στην εικόνα 2.

4. Διάστημα s

Διάστημα s ονομάζεται το μήκος της τροχιάς του κινητού. Αν το κινητό κάνει ευθύγραμμη κίνηση και δεν έχει αλλάξει φορά κίνησης είναι $s = |\Delta\vec{x}|$

Παρατήρηση : Αν το κινητό αλλάξει φορά κίνησης τότε το διάστημα που έχει διανύσει είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της μετατόπισης , άρα $s > |\Delta\vec{x}|$

5. Εξίσωση κίνησης

Είναι η μαθηματική σχέση που δίνει την θέση ενός κινητού σαν συνάρτηση του χρόνου κίνησης , δηλαδή σχέση της μορφής : $x = f(t)$, $y = f(t)$.

6. Εξίσωση τροχιάς

Είναι η μαθηματική σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες θέσης ενός κινητού , δηλαδή σχέση της μορφής : $y = f(x)$

7. Ταχύτητα

Η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος. Το μέτρο της μας δείχνει πόσο γρήγορα κινείται ένα σώμα. Η κατεύθυνση της ταχύτητας μας δείχνει προς τα που μετατοπίστηκε το σώμα. Μονάδα ταχύτητας στο σύστημα μονάδων S.I. είναι το 1 m/s. Χρησιμοποιείται και η μονάδα 1km/h (χιλιόμετρα ανά ώρα).

α) <u>Μέση διανυσματική ταχύτητα</u> $\vec{υ}_μ$: Είναι το πηλίκο της μετατόπισης $Δ\vec{x}$ προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt.
Είναι $\vec{υ}=\dfrac{Δ\vec{x}}{Δt}$. Το μέτρο είναι $υ=\dfrac{|x_2 - x_1|}{t_2 - t_1}$. Η κατεύθυνση συμπίπτει με την κατεύθυνση της μετατόπισης $Δ\vec{x}$

β) <u>Μέση αριθμητική ταχύτητα</u> $υ_α$: Είναι το πηλίκο του διαστήματος s που διανύει το κινητό σε χρόνο Δt προς τον χρόνο αυτό $υ_α=\dfrac{s}{Δt}$.

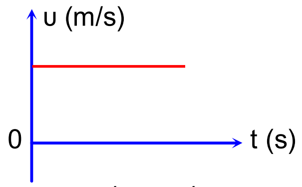
8. <u>Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση</u>

α) <u>Ορισμός</u> : Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι η κίνηση που γίνεται σε ευθεία γραμμή και στην οποία η ταχύτητα είναι χρονικά σταθερή.

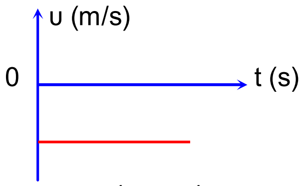
β) <u>Νόμοι της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης</u> :

❶ <u>Νόμος της ταχύτητας</u> : υ = σταθερή

Η ταχύτητα είναι θετική όταν το κινητό κινείται προς τα θετικά του άξονα ανεξάρτητα από τη θέση του ή αρνητική αν το κινητό κινείται προς τα αρνητικά του άξονα.



Η ταχύτητα είναι σταθερή και υ > 0



Η ταχύτητα είναι σταθερή και υ < 0

❷ <u>Εξίσωση κίνησης (ή εξίσωση της μετατόπισης)</u> : $x = x_0 + υ(t - t_0)$

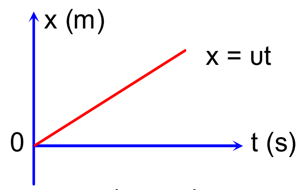
Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας αν χρησιμοποιήσουμε την αλγεβρική τιμή θα είναι $υ=\dfrac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow$

$x - x_0 = υ(t - t_0) \Rightarrow x = x_0 + υ(t - t_0)$

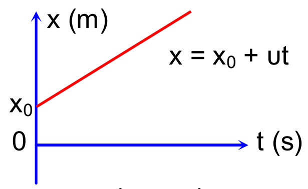
Αν θεωρήσουμε ότι $t_0 = 0$ η εξίσωση παίρνει την πιο απλή μορφή $x = x_0 + υ\cdot t$.

Αν θεωρήσουμε ότι $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$ η εξίσωση παίρνει την πιο απλή μορφή $x = υ\cdot t$.

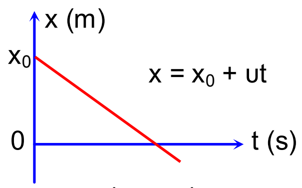
Οι γραφικές παραστάσεις για $t_0 = 0$ φαίνονται παρακάτω.



Η ταχύτητα είναι σταθερή και υ > 0

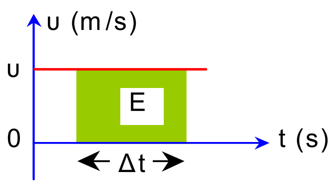


Η ταχύτητα είναι σταθερή και υ > 0



Η ταχύτητα είναι σταθερή και υ < 0

❸ <u>Η μετατόπιση από διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου</u>



Από την γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο παρατηρούμε ότι το γινόμενο υ·Δt είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν Ε δηλαδή :

“ Το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης ταχύτητας – χρόνου και του άξονα των χρόνων ισούται αριθμητικά με την μετατόπιση Δx του σώματος ”

Αυτό ισχύει γενικότερα , όποια μορφή και να έχει η καμπύλη ταχύτητας – χρόνου.

9. Επιτάχυνση

Η επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος. Το μέτρο της μας δείχνει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η ταχύτητα ενός σώματος. Η κατεύθυνση της μεταβολής της ταχύτητας είναι η κατεύθυνση της. Μονάδα επιτάχυνσης στο σύστημα μονάδων S.I. είναι το $1\ m/s^2$.

Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$: Είναι το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας $\Delta\vec{\upsilon}$ προς την χρονική διάρκεια Δt στην οποία έγινε η μεταβολή. Είναι διάνυσμα και έχει την κατεύθυνση της μεταβολής της ταχύτητας.

$$\overline{\alpha}=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$$

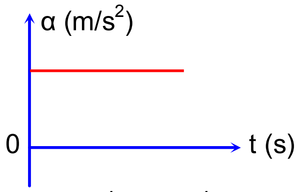
παρατήρηση : αν η επιτάχυνση προκύψει με αρνητικό πρόσημο τότε ονομάζεται επιβράδυνση και προκαλεί μείωση της ταχύτητας.

10. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

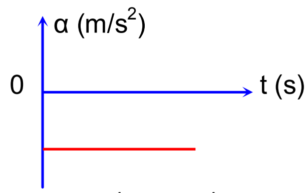
α) Ορισμός : Είναι η κίνηση που γίνεται σε ευθεία γραμμή και σε ίσα χρονικά διαστήματα συμβαίνουν ίσες μεταβολές της ταχύτητας. Άρα η επιτάχυνση είναι σταθερή και η στιγμιαία επιτάχυνση συμπίπτει με την μέση επιτάχυνση.

β) Νόμοι της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης :

❶ Νόμος επιτάχυνσης : α = σταθερή



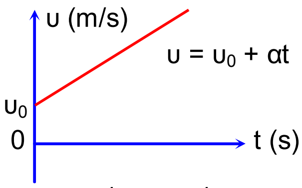
Η επιτάχυνση είναι σταθερή και α > 0



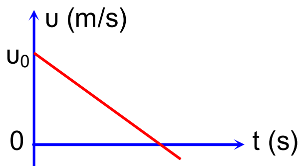
Η επιτάχυνση είναι σταθερή και α < 0

❷ Νόμος της ταχύτητας : $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha(t - t_0)$

Αν τις χρονικές στιγμές t_0 και t ένα κινητό έχει ταχύτητες υ_0 και υ αντίστοιχα ισχύει : $\alpha=\alpha_\mu=\dfrac{\upsilon-\upsilon_0}{t-t_0} \Rightarrow$ $\upsilon - \upsilon_0 = \alpha(t - t_0) \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + \alpha(t - t_0)$. Αν δεχτούμε ότι $t_0 = 0$ τότε έχουμε : $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$



Η επιτάχυνση είναι σταθερή και α > 0



Η επιτάχυνση είναι σταθερή και α < 0

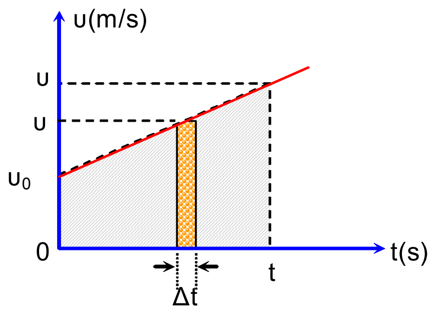
Αν ένα κινητό ξεκινάει από την ηρεμία και κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση τότε ο νόμος της ταχύτητας γίνεται :

$$\upsilon = \alpha\, t$$

❸ Εξίσωση κίνησης (ή εξίσωση της μετατόπισης) : $x = \upsilon_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

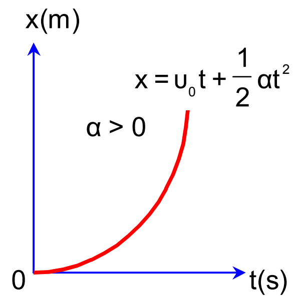
Αν θεωρήσουμε το διάγραμμα ταχύτητας –χρόνου τότε για μικρή χρονική διάρκεια Δt η ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και το έντονα γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι $\Delta x = \upsilon \cdot \Delta t$, δηλαδή αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση Δx.

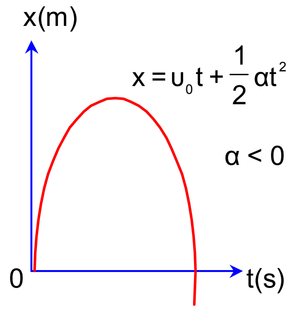
Άρα γενικότερα το εμβαδόν του τραπεζίου του διαγράμματος θα είναι αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση x. Αν θεωρήσουμε ότι $t_0 = 0$ τότε $\Delta t = t$. Άρα θα έχουμε : x = (Εμβαδόν τραπεζίου) δηλαδή $x=\dfrac{(\upsilon_0+\upsilon)t}{2}$. Αλλά για την ταχύτητα υ ισχύει $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ άρα αν αντικαταστήσουμε είναι $x=\dfrac{(\upsilon_0+\upsilon_0+\alpha t)t}{2} \Rightarrow x=\dfrac{(2\upsilon_0+\alpha t)t}{2} \Rightarrow$



$x = \dfrac{2\upsilon_0 t + \alpha t^2}{2} \Rightarrow$ $x = \upsilon_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$. Αυτή είναι η εξίσωση κίνησης για την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Αν το κινητό τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρισκόταν στην θέση x_0 τότε η εξίσωση κίνησης γράφεται : $x = x_0 + \upsilon_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$.

Η γραφική παράσταση της σχέσης $x = \upsilon_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$ είναι :





γ) <u>Σχέση ταχύτητας και μετατόπισης στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση</u> :

Η ταχύτητα του κινητού δίνεται από την σχέση $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\Delta t$. Αν λύσουμε αυτή την σχέση ως προς την χρονική διάρκεια Δt έχουμε : $\Delta t = \dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha}$ ➊

Η μετατόπιση του κινητού δίνεται από την σχέση $\Delta x = \upsilon_0 \Delta t + \dfrac{1}{2}\alpha\Delta t^2$. Αν σ' αυτή αντικαταστήσουμε την ➊ έχουμε : $\Delta x = \upsilon_0 \left(\dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha}\right) + \dfrac{1}{2}\alpha\left(\dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \Delta x = \dfrac{\upsilon\upsilon_0 - \upsilon_0^2}{\alpha} + \dfrac{1}{2}\alpha\dfrac{\upsilon^2 - 2\upsilon\upsilon_0 + \upsilon_0^2}{\alpha^2} \Rightarrow$

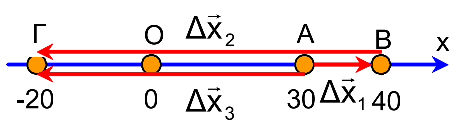
$2\alpha\Delta x = 2\upsilon\upsilon_0 - 2\upsilon_0^2 + \upsilon^2 - 2\upsilon\upsilon_0 + \upsilon_0^2 \Rightarrow 2\alpha\Delta x = \upsilon^2 - \upsilon_0^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\alpha\Delta x$. Άρα $\boldsymbol{\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\alpha\Delta x}$

Λυμένα παραδείγματα στο Κεφ 1.1

Παράδειγμα 1. Μετατόπιση και διάστημα

Ένα κινητό ξεκινάει από τη θέση $x_0 = 0$ (σημείο Ο) και κινείται κατά μήκος του άξονα x μέχρι τη θέση $x_1 = 30$ m (σημείο Α) και συνεχίζει μέχρι τη θέση $x_2 = 40$ m (σημείο Β). Στη συνέχεια κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση μέχρι τη θέση $x_3 = -20$ m (σημείο Γ). Να υπολογιστεί η μετατόπιση και το διάστημα στις μετακινήσεις : α) Α→Β , β) Β→Γ , γ) Α→Β→Γ , δ) Ο→Β→Ο.

<u>Λύση</u>



α) Κίνηση Α→Β

Μετατόπιση : $\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 40\ m - 30\ m = 10\ m$

Διάστημα : s_1 = μήκος τροχιάς (ΑΒ) = 10 m

Ισχύει $\Delta x_1 = s_1$ (συνεχώς θετική φορά)

β) Κίνηση Β→Γ

Μετατόπιση : $\Delta x_2 = x_3 - x_2 = -20\ m - 40\ m = -60$ m. Διάστημα : s_2 = μήκος τροχιάς (ΒΓ) = 60 m

Ισχύει $\Delta x_1 = -s_2$ (συνεχώς αρνητική φορά)

γ) Κίνηση Α→Β→Γ

Μετατόπιση : $\Delta x_3 = x_3 - x_1 = -20\ m - 30\ m = -50$ m.

Διάστημα : s_3 = μήκος τροχιάς (ΑΒΓ) = (ΑΒ) + (ΒΓ) = 10 m + 60 m = 70 m

Ισχύει $\Delta x_3 < s_3$ (έχουμε αλλαγή φοράς)

δ) Κίνηση Ο→Β→Ο

Μετατόπιση : $\Delta x_4 = x_0 - x_0 = 0 - 0 = 0$

Διάστημα : s_4 = μήκος τροχιάς (ΟΒΟ) = (ΟΒ) + (ΒΟ) = 40 m + 40 m = 80 m

Ισχύει $\Delta x_4 < s_4$ (έχουμε αλλαγή φοράς)

Παράδειγμα 2. Μέση ταχύτητα

Ένα κινητό κινείται κατά μήκος του άξονα x. Το κινητό βρίσκεται στις θέσεις που φαίνονται στον πίνακα τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές.

Θέση	Ο	Α	Β	Ο	Γ
x (m)	0	4	10	0	- 6
t (s)	0	2	4	8	12

Να υπολογιστεί η μέση διανυσματική ταχύτητα στη χρονική διάρκεια :
α) Από 0 έως 2 s , β) από 2 s έως 4 s , γ) από 0 έως 8 s , δ) από 2 s έως 12 s

Λύση

α) Χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 2$ s

Οι αντίστοιχες θέσεις είναι $x_0 = 0$ και $x_1 = 4$ m. Άρα $\bar{\upsilon} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{4\,m - 0}{2\,s - 0} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{4\,m}{2\,s} \Rightarrow \bar{\upsilon} = 2\frac{m}{s}$

β) Χρονική διάρκεια από $t_1 = 2$ s έως $t_2 = 4$ s

Οι αντίστοιχες θέσεις είναι $x_1 = 4$ m και $x_2 = 10$ m. Άρα $\bar{\upsilon} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{10\,m - 4\,m}{4\,s - 2\,s} \Rightarrow \bar{\upsilon} = 3\frac{m}{s}$

γ) Χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t_3 = 8$ s

Οι αντίστοιχες θέσεις είναι $x_0 = 0$ και $x_3 = 0$. Άρα $\bar{\upsilon} = \frac{x_3 - x_0}{t_3 - t_0} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{0 - 0}{8\,s - 0} \Rightarrow \bar{\upsilon} = 0$

δ) Χρονική διάρκεια από $t_1 = 2$ s έως $t_4 = 12$ s

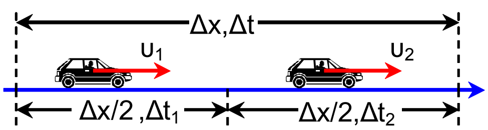
Οι αντίστοιχες θέσεις είναι $x_1 = 4$ m και $x_4 = -6$ m. Άρα $\bar{\upsilon} = \frac{x_4 - x_1}{t_4 - t_1} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{-6\,m - 4\,m}{12\,s - 2\,s} \Rightarrow \bar{\upsilon} = -1\frac{m}{s}$

Παράδειγμα 3. Μέση ταχύτητα

Ένα κινητό κινείται ευθύγραμμα και διανύει δύο ίσες διαδοχικές μετατοπίσεις με ταχύτητες $\upsilon_1 = 40$ m/s και $\upsilon_2 = 60$ m/s αντίστοιχα με την ίδια φορά. Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα για ολόκληρη τη διαδρομή.

Λύση

Θεωρούμε ότι Δx είναι η συνολική μετατόπιση του κινητού στη συνολική χρονική διάρκεια Δt και Δx/2 , Δx/2 οι μετατοπίσεις του κινητού στην πρώτη χρονική διάρκεια Δt_1 και στην δεύτερη χρονική διάρκεια Δt_2 αντίστοιχα.



Είναι $\Delta x/2 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x}{2\upsilon_1}$ και $\Delta x/2 = \upsilon_2 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{2\upsilon_2}$

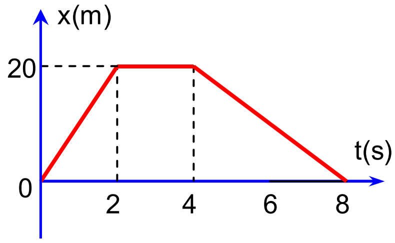
Η ολική χρονική διάρκεια είναι $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{2\upsilon_1} + \frac{\Delta x}{2\upsilon_2}$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x \cdot \upsilon_2 + \Delta x \cdot \upsilon_1}{2\upsilon_1\upsilon_2} \Rightarrow \Delta t = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)\Delta x}{2\upsilon_1\upsilon_2}$$

Η μέση ταχύτητα είναι $\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)\Delta x}{2\upsilon_1\upsilon_2}} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{\Delta x 2\upsilon_1\upsilon_2}{(\upsilon_1 + \upsilon_2)\Delta x} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$.

Άρα $\overline{\upsilon} = \dfrac{2 \cdot 40\,m/s \cdot 60\,m/s}{40\,m/s + 60\,m/s} \Rightarrow \upsilon_\mu = 48$ m/s.

Παράδειγμα 4. Διαγράμματα



Το διάγραμμα της θέσης ενός σώματος που κινείται πάνω στον άξονα x, σε συνάρτηση με το χρόνο , φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να σχεδιαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

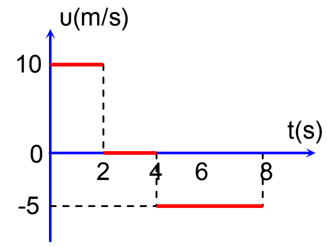
Λύση

Από το διάγραμμα θέσης – χρόνου βλέπουμε ότι το σώμα εκτελεί τρεις διαδοχικές κινήσεις.
Η πρώτη κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.
Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $\Delta t_1 = t_1 - t_0 \Rightarrow \Delta t_1 = 2\text{ s} - 0 \Rightarrow \Delta t_1 = 2$ s.
Η μετατόπιση σ' αυτή τη χρονική διάρκεια είναι $\Delta x_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow \Delta x_1 = 20\text{ m} - 0 \Rightarrow \Delta x_1 = 20$ m.

Άρα η μέση ταχύτητα είναι $\upsilon_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \upsilon_1 = \dfrac{20\,m}{2\,s} \Rightarrow \upsilon_1 = 10$ m/s

Στην δεύτερη φάση το σώμα παραμένει ακίνητο.
Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $\Delta t_2 = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t_2 = 4\text{ s} - 2\text{ s} \Rightarrow \Delta t_2 = 2$ s.
Η μετατόπιση σ' αυτή τη χρονική διάρκεια είναι $\Delta x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x_2 = 20\text{ m} - 20\text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 0$.

Άρα η μέση ταχύτητα είναι $\upsilon_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \upsilon_2 = \dfrac{0}{2\,s} \Rightarrow \upsilon_2 = 0$

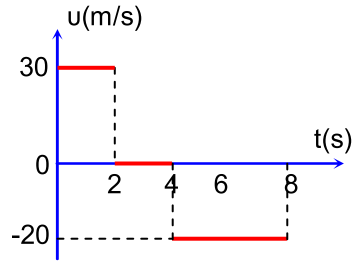


Η τρίτη κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.
Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $\Delta t_3 = t_3 - t_2 \Rightarrow \Delta t_3 = 8\text{ s} - 4\text{ s} \Rightarrow \Delta t_3 = 4$ s.
Η μετατόπιση σ' αυτή τη χρονική διάρκεια είναι $\Delta x_3 = x_3 - x_2 \Rightarrow \Delta x_3 = 0 - 20$ m $\Rightarrow \Delta x_3 = -20$ m.

Άρα η μέση ταχύτητα είναι $\upsilon_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \Rightarrow \upsilon_3 = \dfrac{-20\,m}{4\,s} \Rightarrow \upsilon_3 = -5$ m/s

Το αντίστοιχο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Παράδειγμα 5. Διαγράμματα



Σώμα κινείται πάνω στον άξονα x. Η ταχύτητά του σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από το διάγραμμα του διπλανού σχήματος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$.

α) Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα θέσης – χρόνου.
β) Να υπολογιστεί η μετατόπιση του σώματος από 0 έως 8 s.
γ) Να υπολογιστεί το διάστημα από 0 έως 8 s.
δ) Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα στις χρονικές διάρκειες 0 έως 8 s και 0 έως 4 s.

Λύση

α) Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης υ – t και του άξονα t είναι αριθμητικά ίσο με την αντίστοιχη μετατόπιση Δx. Η θέση του σώματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$.

- Χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 2$ s :

Δx_1 = Εμβαδόν $\Rightarrow \Delta x_1 = (30\text{ m/s} - 0)\cdot(2\text{ s} - 0) \Rightarrow \Delta x_1 = 60$ m. Άρα $x_1 = x_0 + \Delta x_1 \Rightarrow x_1 = 0 + 60\text{ m} \Rightarrow x_1 = 60$ m

- Χρονική διάρκεια από $t_1 = 2$ s έως $t_2 = 4$ s :

Δx_2 = Εμβαδόν $\Rightarrow \Delta x_2 = 0\cdot(4\text{ s} - 2\text{ s}) \Rightarrow \Delta x_2 = 0$. Άρα $x_2 = x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow x_2 = 60\text{ m} + 0 \Rightarrow x_2 = 60$ m

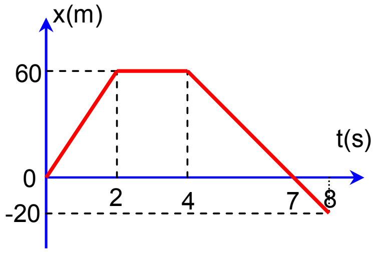
- Χρονική διάρκεια από $t_2 = 4$ s έως $t_3 = 8$ s :

Δx_3 = Εμβαδόν $\Rightarrow \Delta x_3 = (0 - 20\text{ m/s})\cdot(8\text{ s} - 4\text{ s}) \Rightarrow \Delta x_3 = -80$ m.

Άρα $x_3 = x_2 + \Delta x_3 \Rightarrow x_3 = 60\ m + (-80\ m) \Rightarrow x_3 = -20\ m$

Από τις θέσεις που προσδιορίσαμε κατασκευάζουμε τον πίνακα θέσης – χρόνου και από αυτόν το διάγραμμα θέσης – χρόνου

Χρόνος t (s)	0	2	4	8
Θέση x (m)	0	60	60	- 20



β) Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και $t_3 = 8$ s οι αντίστοιχες θέσεις του σώματος είναι $x_0 = 0$ και $x_3 = -20$ m. Άρα η μετατόπιση είναι $\Delta x = x_3 - x_0 \Rightarrow \Delta x = -20\ m - 0 \Rightarrow \Delta x = -20$ m.

γ) Το διάστημα s είναι ίσο με το μήκος της τροχιάς που διαγράφει το σώμα. Θα το υπολογίσουμε από τη σχέση $s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3|$. Άρα $s = |60\,m| + |0| + |-80\,m| \Rightarrow s = 60\ m + 0 + 80\ m \Rightarrow s = 140$ m.

δ) Η μέση ταχύτητα είναι $\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

- <u>Χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t_3 = 8$ s</u>:

$\Delta t = t_3 - t_0 \Rightarrow \Delta t = 8\ s - 0 \Rightarrow \Delta t = 8$ s. $\Delta x = x_3 - x_0 \Rightarrow \Delta x = -20\ m - 0 \Rightarrow \Delta x = -20$ m

Άρα $\upsilon_1 = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon_1 = \dfrac{-20\,m}{8\,s} \Rightarrow \upsilon_1 = -2{,}5\dfrac{m}{s}$

- <u>Χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t_2 = 4$ s</u>:

$\Delta t = t_2 - t_0 \Rightarrow \Delta t = 4\ s - 0 \Rightarrow \Delta t = 4$ s. $\Delta x = x_2 - x_0 \Rightarrow \Delta x = 60\ m - 0 \Rightarrow \Delta x = 60$ m

Άρα $\upsilon_2 = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon_2 = \dfrac{60\,m}{4\,s} \Rightarrow \upsilon_2 = 15\dfrac{m}{s}$

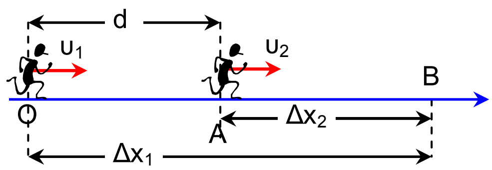
Παράδειγμα 6. Συνάντηση κινητών

Δύο πεζοπόροι κινούνται στον ίδιο ευθύγραμμο δρόμο με σταθερές ταχύτητες που έχουν μέτρα $\upsilon_1 = 5$ m/s και $\upsilon_2 = 3$ m/s αντίστοιχα. Σε κάποια στιγμή περνούν από τις θέσεις Ο και Α αντίστοιχα που απέχουν απόσταση d = 120 m. Οι δύο πεζοπόροι κινούνται στην ίδια κατεύθυνση (Ο → Α).

α) Πότε και που θα συναντηθούν οι δύο πεζοπόροι.

β) Να γίνει κοινό διάγραμμα απόστασης από το Ο – χρόνου

Λύση



α) Θεωρούμε σαν αρχή του άξονα x το σημείο Ο και αρχή μέτρησης χρόνου όταν οι πεζοπόροι είναι στα σημεία Ο και Α. Οι πεζοπόροι συναντώνται στο σημείο Β τη χρονική στιγμή t.

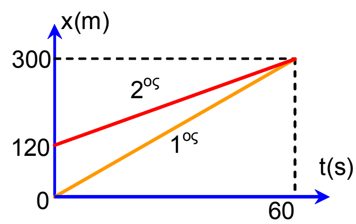
Ο 1^{ος} πεζοπόρος την $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ (σημείο Ο). Ο πεζοπόρος σε χρόνο t φθάνει στο σημείο Β (θέση x) και η μετατόπισή του είναι $\Delta x_1 = \upsilon_1 t$ ❶

Ο 2^{ος} πεζοπόρος την $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_1 = d$ (σημείο Α). Ο πεζοπόρος σε χρόνο t φθάνει στο σημείο Β (θέση x) και η μετατόπισή του είναι $\Delta x_2 = \upsilon_2 t$ ❷

Αλλά από το σχήμα είναι $\Delta x_1 - \Delta x_2 = d$ και με τις σχέσεις ❶ και ❷ έχουμε : $\upsilon_1 t - \upsilon_2 t = d \Rightarrow (\upsilon_1 - \upsilon_2)t = d$

$\Rightarrow t = \dfrac{d}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \Rightarrow t = \dfrac{120\,m}{5\,m/s - 3\,m/s} \Rightarrow t = \dfrac{120\,m}{2\,m/s} \Rightarrow t = 60$ s.

Από την σχέση ❶ έχουμε $\Delta x_1 = \upsilon_1 t \Rightarrow \Delta x_1 = (5\ m/s)\cdot 60\ s \Rightarrow \Delta x_1 = 300$ m



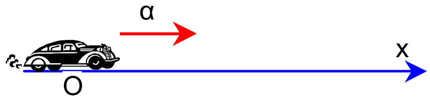
β) Από τα στοιχεία για την κίνηση των δύο πεζοπόρων κατασκευάζουμε το κοινό διάγραμμα θέσης – χρόνου.

Παράδειγμα 6. Κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα

Ένα κινητό ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ χωρίς αρχική ταχύτητα και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με επιτάχυνση $\alpha = 4\ m/s^2$.

α) Να βρεθεί η θέση και η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t = 4 s.
β) Που θα βρίσκεται το κινητό τη στιγμή που η ταχύτητά του είναι υ = 20 m/s.

Λύση



Θεωρούμε σαν αρχή του άξονα το σημείο από το οποίο ξεκινάει το κινητό. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 0$ και $υ_0 = 0$.

α) Η θέση του κινητού δίνεται από την $x = \frac{1}{2}αt^2$ $x = \frac{1}{2}\left(4\,m/s^2\right)\cdot\left(4\,s\right)^2 \Rightarrow x = 32$ m.

Η ταχύτητα του κινητού δίνεται από τη σχέση υ = αt $\Rightarrow υ = (4\ m/s^2)\cdot(4\ s) \Rightarrow υ = 16$ m/s.

β) Από την σχέση υ = αt $\Rightarrow t = \frac{υ}{α} \Rightarrow t = \frac{20\,m/s}{4\,m/s^2} \Rightarrow t = 5$ s.

Η θέση του κινητού δίνεται από την $x = \frac{1}{2}αt^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(4\,m/s^2\right)\cdot\left(5\,s\right)^2 \Rightarrow x = 50$ m.

Παράδειγμα 7. Επιβραδυνόμενη κίνηση

Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύ δρόμο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ με ταχύτητα $υ_0 = 20$ m/s και σταθερή επιτάχυνση $α = -5\ m/s^2$.
α) Να υπολογιστεί σε ποια χρονική στιγμή θα μηδενιστεί η ταχύτητά του.
β) Να υπολογιστεί σε ποια θέση θα μηδενιστεί η ταχύτητά του.

Λύση

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 0$ και $υ_0 = 20$ m/s.
α) Η ταχύτητα του αυτοκινήτου δίνεται από την σχέση $υ = υ_0 + αt$. Όταν το αυτοκίνητο σταματήσει η ταχύτητά του είναι ίση με μηδέν (υ = 0). Από την εξίσωση $υ = υ_0 + αt$ για υ = 0 έχουμε $0 = υ_0 + αt \Rightarrow$ $αt = -υ_0 \Rightarrow t = -\frac{υ_0}{α}$. Η αριθμητική εφαρμογή δίνει $t = -\frac{20\,m/s}{-5\,m/s^2} \Rightarrow t = 4$ s.

β) Η θέση του αυτοκινήτου δίνεται από την σχέση $x = υ_0 t + \frac{1}{2}αt^2$.

Αντικαθιστώντας την τιμή χρόνου $t = -\frac{υ_0}{α}$ έχουμε $x = υ_0\left(-\frac{υ_0}{α}\right) + \frac{1}{2}α\left(-\frac{υ_0}{α}\right)^2 \Rightarrow x = -\frac{υ_0^2}{α} + \frac{1}{2}α\frac{υ_0^2}{α^2} \Rightarrow$

$x = -\frac{υ_0^2}{α} + \frac{υ_0^2}{2α} \Rightarrow x = -\frac{2υ_0^2}{2α} + \frac{υ_0^2}{2α} \Rightarrow x = -\frac{υ_0^2}{2α}$.

Η αριθμητική εφαρμογή δίνει $x = -\frac{\left(20\,m/s\right)^2}{2\left(-5\,m/s^2\right)} \Rightarrow x = -\frac{400\,m^2/s^2}{-10\,m/s^2} \Rightarrow x = 40$ m.

Παρατήρηση

Οι σχέσεις $t = -\frac{υ_0}{α}$ και $x = -\frac{υ_0^2}{2α}$ δίνουν την χρονική στιγμή και την θέση ενός σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση την στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του.
Να χρησιμοποιούνται πάντα αφού πρώτα τις αποδείξετε.
Αν χρησιμοποιήσουμε την απόλυτη τιμή της επιτάχυνσης $|α|$ οι σχέσεις μπορούν να γραφούν :

$t = \frac{υ_0}{|α|}$ και $x = \frac{υ_0^2}{2|α|}$

Παράδειγμα 8. Πολλές κινήσεις

Ένα λεωφορείο ξεκινάει από κάποιο σταθμό από την ηρεμία και επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση $α_1 = 2\ m/s^2$ για χρόνο $Δt_1 = 10$ s. Στη συνέχεια κινείται με την ταχύτητα που απέκτησε για χρόνο $Δt_2 = 10$ s

και μετά επιβραδύνεται με επιτάχυνση $α_3 = – 4\ m/s^2$ μέχρι να σταματήσει στον επόμενο σταθμό.
α) Να υπολογιστεί η διάρκεια της κίνησης του λεωφορείου.
β) Να υπολογιστεί η ολική απόσταση που κάλυψε το λεωφορείο.
γ) Να γίνουν τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου , ταχύτητας – χρόνου και θέσης – χρόνου.

Λύση

α) Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη : Θεωρούμε ότι το λεωφορείο ξεκινάει την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από την θέση $x_0 = 0$. Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $Δt_1 = t_1 – t_0 \Rightarrow t_1 = t_0 + Δt_1 \Rightarrow t_1 = 0 + 10\ s \Rightarrow t_1 = 10\ s$. Η ταχύτητα που έχει το κινητό στο τέλος του δέκατου δευτερολέπτου είναι $υ = υ_0 + α_1Δt_1 \Rightarrow υ = 0 + (2\ m/s^2)\cdot(10\ s) \Rightarrow υ = 20\ m/s$.

Η μετατόπιση είναι : $Δx_1 = υ_0 \cdot Δt_1 + \frac{1}{2}α_1 \cdot Δt_1^2 \Rightarrow x_1 - x_0 = υ_0 \cdot Δt_1 + \frac{1}{2}α_1 \cdot Δt_1^2 \Rightarrow x_1 = x_0 + υ_0 \cdot Δt_1 + \frac{1}{2}α_1 \cdot Δt_1^2$

$\Rightarrow x_1 = 0 + 0\cdot(10\,s) + \frac{1}{2}(2\,m/s^2)\cdot(10\,s)^2 \Rightarrow x_1 = 100\ m$.

Κίνηση ευθύγραμμη ομαλή : Το λεωφορείο κινείται με την ταχύτητα υ που απέκτησε. Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $Δt_2 = t_2 – t_1 \Rightarrow t_2 = t_1 + Δt_2 \Rightarrow t_2 = 10\ s + 10\ s \Rightarrow t_2 = 20\ s$.Η μετατόπιση είναι $Δx_2 = υ\cdotΔt_2 \Rightarrow x_2 – x_1= υ\cdotΔt_2 \Rightarrow x_2 = x_1+ υ\cdotΔt_2 \Rightarrow x_2 = 100\ m + (20\ m/s)\cdot(10\ s) \Rightarrow x_2 = 300\ m$.

Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη : Το λεωφορείο έχει ταχύτητα $υ = 20\ m/s$ και την χρονική στιγμή $t_2 = 20\ s$ βρίσκεται στην θέση $x_2 = 300\ m$ και αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση $α_3 = – 4\ m/s^2$. Η χρονική διάρκεια για να σταματήσει δίνεται από την σχέση $Δt_3 = -\frac{υ}{α}$ (πχ 7) άρα

$Δt_3 = -\frac{20\,m/s}{-4\,m/s^2} \Rightarrow Δt_3 = 5\ s$. Η χρονική στιγμή που σταματάει υπολογίζεται από την $Δt_3 = t_3 – t_2 \Rightarrow t_3 = t_2 + Δt_3 \Rightarrow t_3 = 20\ s + 5\ s \Rightarrow t_3 = 25\ s$.

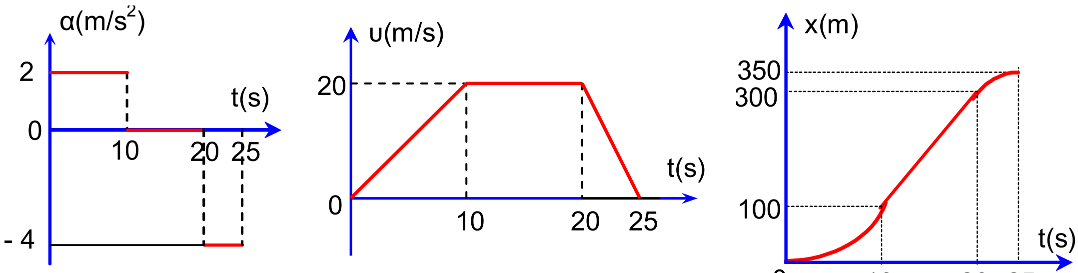
Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $Δt_{ολ} = t_3 – t_0 \Rightarrow Δt_{ολ} = 25\ s – 0 \Rightarrow Δt_{ολ} = 25\ s$

β) Η μετατόπιση είναι : $Δx_3 = υ \cdot Δt_3 + \frac{1}{2}α_3 \cdot Δt_3^2 \Rightarrow x_3 - x_2 = υ \cdot Δt_3 + \frac{1}{2}α_3 \cdot Δt_3^2 \Rightarrow x_3 = x_2 + υ \cdot Δt_3 + \frac{1}{2}α_3 \cdot Δt_3^2$

$\Rightarrow x_3 = 300\,m + (20\,m/s)\cdot(5\,s) + \frac{1}{2}(-4\,m/s^2)\cdot(5\,s)^2 \Rightarrow x_3 = 350\ m$.

Η ολική απόσταση που κάλυψε το λεωφορείο είναι ίση με την ολική μετατόπιση αφού δεν έχουμε αλλαγή στην κατεύθυνση της κίνησης , άρα $s = Δx_{ολ} \Rightarrow s = x_3 – x_0 \Rightarrow s = 350\ m – 0 \Rightarrow s = 350\ m$.

γ) Από τα αποτελέσματα για τις διάφορες χρονικές στιγμές έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα



Διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου

Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου

Διάγραμμα θέσης - χρόνου

Παράδειγμα 9. Χρόνος αντίδρασης οδηγού

Ο χρόνος αντίδρασης ενός οδηγού είναι $t_1 = 0{,}7\ s$ (ο χρόνος αντίδρασης είναι η χρονική διάρκεια που μεσολαβεί από την χρονική στιγμή που θα αντιληφθούμε ένα εμπόδιο , μέχρι τη χρονική στιγμή που θα πατήσουμε το φρένο). Αν η αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι $υ_0 = 20\ m/s$ και η επιτάχυνση που αποκτά με το φρένο είναι $α = – 5\ m/s^2$:
α) Να υπολογιστεί η ολική απόσταση που θα διανύσει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει.
β) Να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

Λύση

α) Η κίνηση του αυτοκινήτου γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και στην δεύτερη ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη μέχρι να σταματήσει.

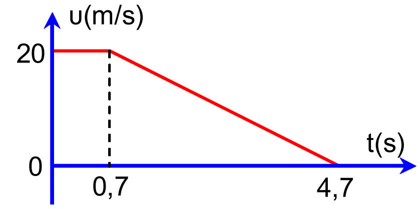
ευθύγραμμη ομαλή κίνηση Για χρόνο $t_1 = 0{,}7$ s (χρόνος αντίδρασης) το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_0 = 20$ m/s και μετατοπίζεται κατά $\Delta x_1 = \upsilon_0 t_1 \Rightarrow \Delta x_1 = (20\ \text{m/s})\cdot(0{,}7\ \text{s}) \Rightarrow \Delta x_1 = 14$ m.

ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση Το αυτοκίνητο κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι να σταματήσει. Σύμφωνα με το παράδειγμα 7 ο χρόνος για να σταματήσει το αυτοκίνητο είναι : $t_2 = -\dfrac{\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow t_2 = -\dfrac{20\,\text{m/s}}{-5\,\text{m/s}^2} \Rightarrow t_2 = 4$ s.

Το αυτοκίνητο στο χρόνο αυτό μετατοπίζεται κατά $\Delta x_2 = \upsilon_0 t_2 + \dfrac{1}{2}\alpha t_2^2 \Rightarrow$

$\Delta x_2 = (20\,\text{m/s})\cdot(4\,\text{s}) + \dfrac{1}{2}(-5\,\text{m/s}^2)\cdot(4\text{s})^2 \Rightarrow \Delta x_2 = 80\ \text{m} - 40\ \text{m} \Rightarrow \Delta x_2 = 40$ m.

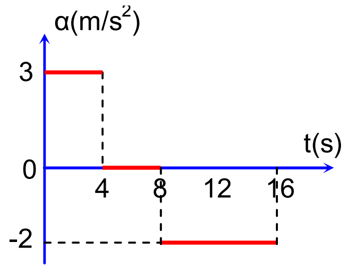
Άρα η συνολική μετατόπιση του αυτοκινήτου είναι :
$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x = 14\ \text{m} + 40\ \text{m} \Rightarrow \Delta x = 54$ m.



β) Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = 0{,}7\ \text{s} + 4\ \text{s} \Rightarrow t = 4{,}7$ s

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα κατασκευάζουμε το διπλανό διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου

Παράδειγμα 10. Διαγράμματα



Ένα αυτοκίνητο κινείται πάνω στον άξονα x. Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι στο διπλανό σχήμα. Να σχεδιαστούν τα αντίστοιχα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου και θέσης – χρόνου αν την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $\upsilon_0 = 4$ m/s και $x_0 = 40$ m.

Λύση

Διακρίνουμε τρεις φάσεις στην κίνηση του σώματος.

- Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση 3 m/s^2

Το κινητό τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_0 = 40$ m και έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = 4$ m/s.
Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $\Delta t_1 = t_1 - t_0 \Rightarrow \Delta t_1 = 4\ \text{s} - 0 \Rightarrow \Delta t_1 = 4$ s. Η επιτάχυνση είναι $\alpha_1 = 3$ m/s^2 και η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s είναι $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_1\Delta t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 4\ \text{m/s} + (3\ \text{m/s}^2)\cdot(4\ \text{s}) \Rightarrow \upsilon_1 = 16$ m/s

Η μετατόπιση του σώματος είναι : $\Delta x_1 = \upsilon_0\cdot\Delta t_1 + \dfrac{1}{2}\alpha_1\cdot\Delta t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = (4\,\text{m/s})(4\,\text{s}) + \dfrac{1}{2}(3\,\text{m/s}^2)(4\,\text{s})^2 \Rightarrow$
$\Delta x_1 = 40$ m. Είναι $\Delta x_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x_1 \Rightarrow x_1 = 40\ \text{m} + 40\ \text{m} \Rightarrow x_1 = 80$ m.

- Κίνηση χωρίς επιτάχυνση

Το κινητό τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s βρίσκεται στη θέση $x_1 = 80$ m και έχει σταθερή ταχύτητα $\upsilon_1 = 16$ m/s.
Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $\Delta t_2 = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t_2 = 8\ \text{s} - 4\ \text{s} \Rightarrow \Delta t_2 = 4$ s
Η μετατόπιση του σώματος δίνεται από την σχέση $\Delta x_2 = \upsilon_1\cdot\Delta t_2 \Rightarrow \Delta x_2 = (16\,\text{m/s})\cdot(4\,\text{s}) \Rightarrow \Delta x_2 = 64$ m. Είναι $\Delta x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow x_2 = 80\ \text{m} + 64\ \text{m} \Rightarrow x_2 = 144$ m.

- Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση – 2 m/s^2

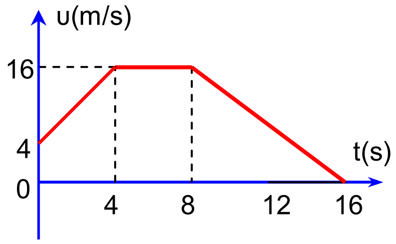
Το κινητό τη χρονική στιγμή $t_2 = 8$ s βρίσκεται στη θέση $x_2 = 144$ m και έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 16$ m/s.
Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $\Delta t_3 = t_3 - t_2 \Rightarrow \Delta t_3 = 16\ \text{s} - 8\ \text{s} \Rightarrow \Delta t_3 = 8$ s.
Η επιτάχυνση είναι $\alpha_3 = -2$ m/s^2 και η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_3 = 16$ s είναι $\upsilon_3 = \upsilon_1 + \alpha_3\Delta t_3 \Rightarrow \upsilon_3 = 16\ \text{m/s} + (-2\ \text{m/s}^2)\cdot(8\ \text{s}) \Rightarrow \upsilon_3 = 0$.

Η μετατόπιση του σώματος είναι $\Delta x_3 = \upsilon_1\cdot\Delta t_3 + \dfrac{1}{2}\alpha_3\cdot\Delta t_3^2 \Rightarrow \Delta x_3 = (16\,\text{m/s})(8\,\text{s}) + \dfrac{1}{2}(-2\,\text{m/s}^2)(8\,\text{s})^2 \Rightarrow$
$\Delta x_3 = 64$ m. Είναι $\Delta x_3 = x_3 - x_2 \Rightarrow x_3 = x_2 + \Delta x_3 \Rightarrow x_3 = 144\ \text{m} + 64\ \text{m} \Rightarrow x_3 = 208$ m.

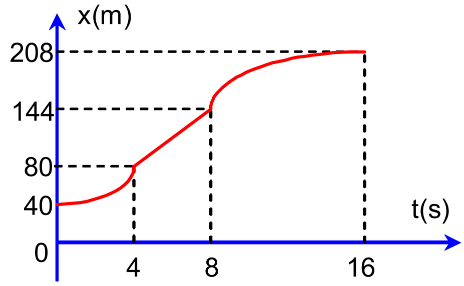
Από τα αποτελέσματα αυτά έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος	$t_0 = 0$	$t_1 = 4$ s	$t_2 = 8$ s	$t_3 = 16$ s
Ταχύτητα	$υ_0 = 4$ m/s	$υ_1 = 16$ m/s	$υ_1 = 16$ m/s	$υ_3 = 0$
Θέση	$x_0 = 40$ m	$x_1 = 80$ m	$x_2 = 144$ m	$x_3 = 208$ m

Από τον πίνακα κατασκευάζουμε τα διαγράμματα

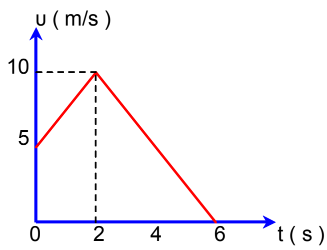


διάγραμμα
ταχύτητας - χρόνου



Διάγραμμα θέσης - χρόνου

Παράδειγμα 11. Διαγράμματα



Κινητό κινείται ευθύγραμμα και η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα. Να γίνουν τα αντίστοιχα διαγράμματα της επιτάχυνσης και της θέσης με το χρόνο. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η αρχική θέση του κινητού είναι $x_0 = 0$ και η αρχική ταχύτητα $υ_0 = 5$ m/s.

Λύση

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το κινητό εκτελεί :

- Από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 2$ s ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $υ_0 = 5$ m/s και

τελική $υ_1 = 10$ m/s. Είναι $α_1 = \frac{Δυ_1}{Δt_1} \Rightarrow α_1 = \frac{υ_1 - υ_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow α_1 = \frac{10\,m/s - 5\,m/s}{2\,s - 0} \Rightarrow α_1 = 2{,}5\ m/s^2$.

Η μετατόπιση του κινητού είναι : $Δx_1 = υ_0 \cdot Δt_1 + \frac{1}{2}α_1 \cdot Δt_1^2 \Rightarrow Δx_1 = 5\,m/s \cdot 2\,s + \frac{1}{2}2{,}5\,m/s^2 \cdot (2\,s)^2 \Rightarrow$

$Δx_1 = 15$ m. Είναι $Δx_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + Δx_1 \Rightarrow x_1 = 0 + 15\ m \Rightarrow x_1 = 15$ m.

- Από $t_1 = 2$ s έως $t_2 = 6$ s ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $υ_1 = 10$ m/s και τελική $υ_2 = 0$.

Είναι $α_2 = \frac{Δυ_2}{Δt_2} \Rightarrow α_2 = \frac{υ_2 - υ_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow α_2 = \frac{0 - 10\,m/s}{6\,s - 2\,s} \Rightarrow α_2 = -2{,}5\ m/s^2$.

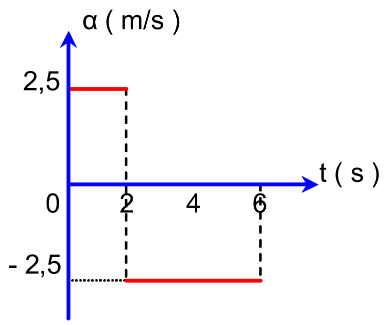
Η μετατόπιση του κινητού είναι : $Δx_2 = υ_1 \cdot Δt_2 + \frac{1}{2}α_2 \cdot Δt_2^2 \Rightarrow Δx_2 = 10\,m/s \cdot 4\,s + \frac{1}{2}\left(-2{,}5\,m/s^2\right) \cdot (4\,s)^2 \Rightarrow$

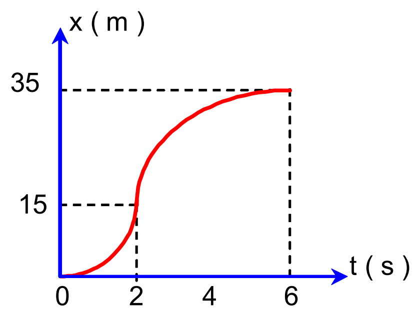
$Δx_2 = 40\ m - 20\ m \Rightarrow Δx_2 = 20$ m. Είναι $Δx_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + Δx_2 \Rightarrow x_2 = 15\ m + 20\ m \Rightarrow x_2 = 35$ m.

Η επιτάχυνση από 0 έως 2 s είναι σταθερή ίση με $α_1 = 2{,}5\ m/s^2$, ενώ από 2 s έως 6 s είναι σταθερή ίση με $α_2 = -2{,}5\ m/s^2$.

Οι θέσεις του κινητού είναι : Την $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 0$, την $t_1 = 2$ s είναι $x_1 = 15$ m την $t_2 = 6$ s είναι $x_2 = 35$ m.

Τα αντίστοιχα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου και θέσης – χρόνου είναι :





Παράδειγμα 12. Κίνηση σε κάποιο δευτερόλεπτο

Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύ δρόμο με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2\ m/s^2$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αυτοκίνητο έχει αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\ m/s$. Πόση απόσταση διανύει το αυτοκίνητο στη διάρκεια του έκτου δευτερόλεπτου της κίνησής του.

Λύση

Το έκτο δευτερόλεπτο της κίνησης είναι η χρονική διάρκεια από $t_1 = 5\ s$ έως $t_2 = 6\ s$.

Η θέση του αυτοκινήτου δίνεται από τη σχέση $x = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$ άρα:

$$x_1 = \upsilon_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2}\alpha \cdot t_1^2 \Rightarrow x_1 = (10\,m/s)(5\,s) + \frac{1}{2}(2\,m/s^2)(5\,s)^2 \Rightarrow x_1 = 75\ m.$$

$$x_2 = \upsilon_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2}\alpha \cdot t_2^2 \Rightarrow x_2 = (10\,m/s)(6\,s) + \frac{1}{2}(2\,m/s^2)(6\,s)^2 \Rightarrow x_2 = 96\ m.$$

Άρα $\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 96\ m - 75\ m \Rightarrow \Delta x = 21\ m$.

Άλυτες Ασκήσεις στο Κεφάλαιο 1.1

1. Ένα κινητό κινείται κατά μήκος του άξονα x και έχει τις παρακάτω θέσεις σε διάφορες χρονικές στιγμές :

t (s)	0	5	15	20
x(m)	10	40	10	– 20

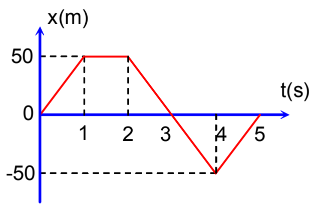
Να υπολογιστεί η τιμή της μέσης ταχύτητας :
α) Από 0 έως 5 s , β) από 5 έως 20 s , γ) από 0 έως 15 s , δ) από 0 έως 20 s.

2. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο και διανύει ορισμένη μετατόπιση. Το αυτοκίνητο διανύει τη μισή μετατόπιση με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_1 = 20\ m/s$ τη δε υπόλοιπη μετατόπιση με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_2 = 30\ m/s$. Αν η συνολική μετατόπιση είναι $\Delta x = 1200\ m$, να υπολογιστούν :
α) Οι χρόνοι κίνησης του αυτοκινήτου σε κάθε κίνηση.
β) Η μέση ταχύτητα σε όλη τη διαδρομή.

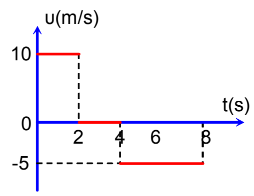
3. Ένα αυτοκίνητο πρέπει να διανύσει μετατόπιση $\Delta x = 400\ km$ σε χρόνο $t = 5\ h$. Αρχικά μετατοπίζεται κατά $\Delta x_1 = 100\ km$ με ταχύτητα $\upsilon_1 = 50\ km/h$. Με ποια ταχύτητα πρέπει να διανύσει την υπόλοιπη μετατόπιση.

4. Αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με ταχύτητα $\upsilon_1 = 20\ m/s$ και μετατοπίζεται κατά $\Delta x_1 = 2000\ m$ και στη συνέχεια με ταχύτητα $\upsilon_2 = 10\ m/s$ μετατοπίζεται κατά Δx_2. Αν ο χρόνος κίνησης του αυτοκίνητου για ολόκληρη την διαδρομή είναι $t = 500\ s$ να υπολογιστούν :
α) Οι χρόνοι κίνησης του αυτοκινήτου σε κάθε κίνηση και η μετατόπιση Δx_2.
β) Η μέση ταχύτητα του αυτοκίνητου.

5. Κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση στην οποία το διάγραμμα θέσης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνεται στο σχήμα.
α) Σε ποιους χρόνους το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα και σε ποιους κατά την αρνητική φορά.
β) Να βρεθεί η μετατόπιση του κινητού.
γ) Να βρεθεί το διάστημα που διήνυσε το κινητό.



6. Κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση στην οποία το διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα.
α) Να γίνει το διάγραμμα της μετατόπισης σε συνάρτηση με το χρόνο.
β) Να υπολογιστεί η μετατόπιση και το διάστημα που διάνυσε το κινητό.



γ) Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του κινητού από 0 έως 4 s.

7. Μοτοσικλετιστής κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $υ_Μ$ = 20 m/s. Ένα περιπολικό αρχίζει να καταδιώκει με ταχύτητα μέτρου $υ_π$ = 30 m/s το μοτοσικλετιστή τη στιγμή t_0 = 0 που βρίσκεται σε απόσταση d = 500 m πίσω από το μοτοσικλετιστή.
α) Σε ποια χρονική στιγμή και σε ποια απόσταση από την αρχική του θέση το περιπολικό θα φθάσει τον μοτοσικλετιστή.
β) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα θέσης – χρόνου για τα δύο σώματα.

8. Δυο κινητά βρίσκονται στα σημεία Α και Β μιας ευθείας και απέχουν απόσταση d = 120 m. Τα δυο κινητά ξεκινούν ταυτόχρονα και κινούνται ομόρροπα με σταθερές ταχύτητες $υ_1$ = 4 m/s και $υ_2$ = 1 m/s αντίστοιχα. Σε πόσο χρόνο τα δυο κινητά
α) Θα συναντηθούν.
β) Θα απέχουν πάλι απόσταση d.

9. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την ηρεμία. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 βρίσκεται στη θέση x_0 = 0. Τη χρονική στιγμή t = 10 s έχει ταχύτητα υ = 5 m/s. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση και η θέση του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t = 10 s.

10. Ένα αεροπλάνο μετακινήθηκε κατά Δx = 800 m στο διάδρομο πριν απογειωθεί. Αν ξεκίνησε από την ηρεμία , κινήθηκε με σταθερή επιτάχυνση και απογειώθηκε σε χρόνο t = 20 s να υπολογιστούν :
α) Η επιτάχυνση.
β) Η ταχύτητα τη στιγμή της απογείωσης.

11. Ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 βρίσκεται στη θέση x_0 = 0 και έχει ταχύτητα $υ_0$ = 0 . Τη χρονική στιγμή που βρίσκεται στη θέση x = 32 m έχει ταχύτητα υ = 8 m/s. Να υπολογιστούν :
α) Η επιτάχυνση
β) Η χρονική στιγμή στην οποία βρίσκεται στη θέση x = 32 m.

12. Ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 βρίσκεται στη θέση x_0 = 10 m και έχει ταχύτητα $υ_0$ = 30 m/s. Τη χρονική στιγμή t = 6 s βρίσκεται στη θέση x = 100 m. Να υπολογιστούν :
α) Η επιτάχυνση.
β) Η θέση του τη χρονική στιγμή t = 4 s

13. Ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση α = – 3 m/s^2. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 βρίσκεται στη θέση x_0 = 0 με ταχύτητα $υ_0$ = 20 m/s. Σε ποια χρονική στιγμή θα βρίσκεται στη θέση x = 56 m και ποια ταχύτητα θα έχει τότε.

14. Αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_0$ = 30 m/s σε ευθύγραμμο δρόμο. Τη στιγμή που το αυτοκίνητο βρίσκεται σε απόσταση d = 72 m από ένα εμπόδιο ο οδηγός πατάει φρένο και το αυτοκίνητο αποκτά σταθερή αρνητική επιτάχυνση. Σε χρόνο Δt = 4 s το αυτοκίνητο πέφτει πάνω στο εμπόδιο. Να βρεθούν :
α) Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου.
β) Η ταχύτητα του αυτοκινήτου τη στιγμή της σύγκρουσης.

15. Ένας δρομέας των 100 m ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται με επιτάχυνση α = 5 m/s^2 μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα υ = 10 m/s. Στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα υ = 10 m/s.
α) Να υπολογιστεί η χρονική διάρκεια της κίνησης.
β) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου και θέσης – χρόνου.

16. Αυτοκίνητο ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση $α_1$ = 2 m/s^2 για χρονική διάρκεια $Δt_1$ = 10 s. Στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα για χρονική διάρκεια $Δt_2$ = 6 s και μετά με επιτάχυνση $α_3$ = – 5 m/s^2 μέχρι να σταματήσει. Να υπολογιστούν :
α) Η ολική διάρκεια της κίνησης
β) Η συνολική μετατόπιση του αυτοκινήτου
γ) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου , ταχύτητας – χρόνου και θέσης – χρόνου αν για t_0 = 0 είναι x_0 = 0

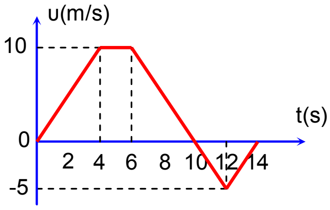
17. Ο χρόνος που χρειάζεται για να αντιδράσει ένας οδηγός από την στιγμή που θα αντιληφθεί τον κίνδυνο μέχρι να πατήσει φρένο είναι 0,7 s. Το αυτοκίνητο αποκτά σταθερή επιτάχυνση $\alpha = -5\ m/s^2$.

α) Να βρεθεί η ολική μετατόπιση του αυτοκινήτου μέχρι να σταματήσει αν η αρχική του ταχύτητα είναι $\upsilon_0 = 20\ m/s$.

β) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα: επιτάχυνσης – χρόνου , ταχύτητας – χρόνου και θέσης – χρόνου.

18. Κινητό ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 5\ m/s^2$. Το κινητό περνάει από δυο σημεία που απέχουν απόσταση d = 100 m με διάφορα χρόνου Δt = 4 s. Να υπολογιστεί η θέση του δεύτερου σημείου από την αρχή της κίνησης.

19. Κινητό κινείται ευθύγραμμα και η γραφική παράσταση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το κινητό βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$.



α) Να υπολογιστεί η ολική μετατόπιση και το ολικό διάστημα.

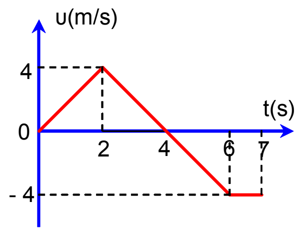
β) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα: επιτάχυνσης – χρόνου και θέσης – χρόνου.

20. Κινητό ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_1 = 5\ m/s^2$ για χρόνο $t_1 = 4$ s. Στην συνεχεία κινείται με την ταχύτητα που απέκτησε για χρόνο $t_2 = 6$ s. Μετά κινείται με σταθερή επιβράδυνση μέχρι να σταματήσει μετά από χρόνο $t_3 = 10$ s.

α) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα: ταχύτητας – χρόνου , επιτάχυνσης – χρόνου και θέσης – χρόνου.

β) Ποια είναι η θέση του κινητού την χρονική στιγμή t = 15 s.

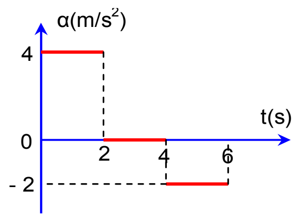
21. Κινητό κινείται ευθύγραμμα και η γραφική παράσταση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το κινητό βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$.



α) Να υπολογιστεί η ολική μετατόπιση και το ολικό διάστημα.

β) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα: επιτάχυνσης – χρόνου και θέσης – χρόνου.

22. Ένα αυτοκίνητο κινείται πάνω στον άξονα x. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου του αυτοκινήτου. Το αυτοκίνητο την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_0 = 4$ m και έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = 4\ m/s$.



α) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου και θέσης – χρόνου.

β) Να υπολογιστεί η ολική μετατόπιση και το ολικό διάστημα.

23. Μοτοσικλετιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα υ = 20 m/s σε ευθύγραμμο δρόμο. Τη στιγμή που ο μοτοσικλετιστής περνάει μπροστά από ακίνητο τροχονόμο , ο τροχονόμος αρχίζει να τον καταδιώκει με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 4\ m/s^2$.

α) Μετά από πόσο χρόνο και σε ποια απόσταση από την αρχική του θέση και με ποια ταχύτητα θα φθάσει ο τροχονόμος τον μοτοσικλετιστή.

β) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου και θέσης – χρόνου για τα δύο οχήματα.

γ) Αν ο τροχονόμος είχε τη μισή επιτάχυνση θα έφτανε τον μοτοσικλετιστή ; Αν ναι , μετά από πόσο χρόνο , σε ποια απόσταση και με ποια ταχύτητα.

24. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την ηρεμία τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 4\ m/s^2$. Ποια θα είναι η μετατόπισή του κατά τη διάρκεια του τρίτου δευτερόλεπτου της κίνησής του.

25. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2\ m/s^2$ και μετατοπίζεται κατά Δx = 17 m κατά τη διάρκεια του τέταρτου δευτερόλεπτου της κίνησής του. Να υπολογιστεί η αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου.