1.2 και 1.3 Δυναμική σε μία διάσταση και στο επίπεδο

ΘΕΩΡΙΑ

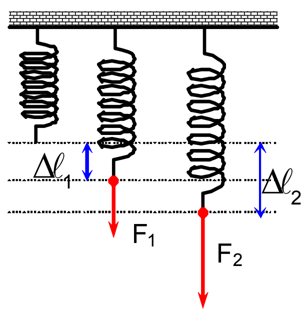
1. Δύναμη

α) Έννοια : Δύναμη (F) είναι η αιτία για τις επιταχύνσεις και τις παραμορφώσεις που προκαλούνται στα σώματα.

Μονάδα δύναμης είναι το 1 N (Newton).

β) Ο διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης : Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος άρα για την περιγραφή της χρειάζονται τρία στοιχεία , το σημείο εφαρμογής (το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη) , το μέτρο και η κατεύθυνση (ευθεία ενέργειας και φορά).

γ) Μέτρηση της δύναμης : Η μέτρηση της δύναμης γίνεται συνήθως με το δυναμόμετρο η λειτουργία του οποίου στηρίζεται στον νόμο των ελαστικών παραμορφώσεων του Hooke : « οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι ανάλογες προς τις αιτίες που τις προκαλούν ». Αν το σώμα που παραμορφώνεται είναι ένα ελατήριο σκληρότητας κ , τότε ισχύει $F = \kappa \Delta\ell$ όπου F η δύναμη και $\Delta\ell$ η παραμόρφωση (μεταβολή του μήκους) του ελατηρίου. Αν με την επίδραση της δύναμης F_1 το ελατήριο παραμορφώνεται κατά $\Delta\ell_1$ και με την επίδραση της δύναμης F_2 το ελατήριο παραμορφώνεται κατά $\Delta\ell_2$, τότε για τις δυνάμεις ισχύει $\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}$. Αν μετρήσουμε τις παραμορφώσεις και ξέρουμε τη μία δύναμη , μπορούμε να υπολογίσουμε την άλλη.



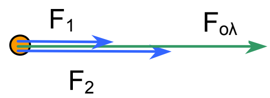
2. Συνισταμένη δυνάμεων

Σύνθεση δυο δυνάμεων :

Αν σε ένα σημείο ασκούνται δύο δυνάμεις μπορούν να αντικατασταθούν από μια δύναμη που προκαλεί τα ίδια αποτελέσματα με αυτές. Η δύναμη αυτή λέγεται συνιστάμενη και η εργασία για την εύρεση της , σύνθεση των δυο δυνάμεων.

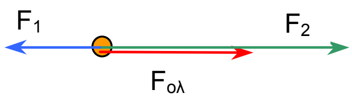
Δυνάμεις με ίδια κατεύθυνση :

Η συνιστάμενη έχει την ίδια κατεύθυνση με τις δυνάμεις και μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους. $F = F_1 + F_2$.



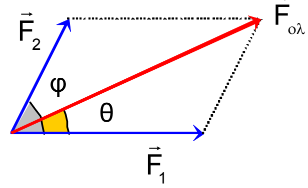
Δυνάμεις με αντίθετες κατευθύνσεις :

Η συνιστάμενη τους έχει την κατεύθυνση της μεγαλύτερης δύναμης και μέτρο ίσο με την απόλυτη διαφορά των μέτρων τους. $F = |F_1 - F_2|$.



Σύνθεση δύο συντρεχουσών δυνάμεων :

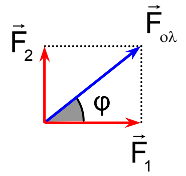
Η συνιστάμενη δυο δυνάμεων F_1 και F_2 που σχηματίζουν γωνία φ προσδιορίζεται με την μέθοδο του παραλληλόγραμμου όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο της συνιστάμενης και η γωνία θ που σχηματίζει η συνιστάμενη με την δύναμη F_1 υπολογίζονται από τις σχέσεις :



$$F_{ολ}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 συνφ \quad ή \quad F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 συνφ}$$

$$ημθ = \frac{F_2 ημφ}{F_{ολ}} \quad ή \quad εφθ = \frac{F_2 ημφ}{F_1 + F_2 συνφ} .$$

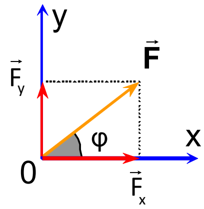
Κάθετες δυνάμεις :



Όταν οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες οι σχέσεις απλοποιούνται και έχουμε :

$$F_{ολ}^2 = F_1^2 + F_2^2 \quad ή \quad F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad και \quad ημφ = \frac{F_2}{F_{ολ}} \quad ή \quad εφφ = \frac{F_2}{F_1}\ .$$

Ανάλυση δύναμης σε δύο κάθετες συνιστώσες :



Σε τυχαίο ορθογώνιο σύστημα αξόνων η δύναμη F σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x. Αυτή με την μέθοδο των προβολών αναλύεται σε δυο συνιστώσες τις Fx και Fy. Για τις συνιστώσες ισχύει :

F_x = Fσυνφ και F_y = Fημφ

3. 1ος νόμος Newton

α) Αδράνεια : Είναι η ιδιότητα των υλικών σωμάτων να διατηρούν την κινητική τους κατάσταση σταθερή και να αντιστέκονται σε κάθε μεταβολή της.

β) 1ος νόμος Newton : « Κάθε σώμα διατηρεί την κατάσταση ακινησίας ή ευθύγραμμης ομαλής κίνησης εφόσον δεν ασκείται σ' αυτό δύναμη ».

παρατήρηση :

Ο νόμος αυτός εισάγει μια ισοδυναμία ανάμεσα στην κατάσταση « ακινησίας » και « ευθύγραμμης ομαλής κίνησης ». Δηλαδή τα συστήματα σταθερής ταχύτητας είναι ισοδύναμα. Η τιμή της σταθερής ταχύτητας $υ = 0$ ή $υ \neq 0$ εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς.

γ) Ισορροπία : Όταν ένα υλικό σημείο ισορροπεί η συνιστάμενη όλων των δυνάμεων F_1 , F_2.....$F_ν$ που ασκούνται σ' αυτό είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή $\vec{F}_{ολ} = \Sigma\vec{F}_ν = 0$.

Αν με ΣF συμβολίσουμε το άθροισμα των αλγεβρικών τιμών των συνιστωσών όλων των δυνάμεων στον άξονα x τότε μπορούμε να γράψουμε :

$$\Sigma\vec{F} = 0 \quad ή \quad \Sigma F = 0$$

Αυτή είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ισορροπία συγγραμμικών δυνάμεων.

4. 2ος νόμος Newton

α) Επιτάχυνση και δύναμη : Αν ασκήσουμε δύναμη σε ένα σώμα αυτό αποκτά επιτάχυνση και μάλιστα η επιτάχυνση είναι ανάλογη με την δύναμη και έχει την ίδια διεύθυνση με αυτήν. Μπορούμε επομένως να γράψουμε τη σχέση : $\vec{α} = \frac{1}{m}\vec{F}$. Ο συντελεστής αναλογίας m ονομάζεται μάζα αδράνειας του σώματος ή απλά μάζα.

β) Αδράνεια και μάζα : Ο λόγος των μαζών δυο σωμάτων είναι ίσος με το αντίστροφο του λόγου των επιταχύνσεων που θα αποκτήσουν με την επίδραση μιας κοινής δύναμης. Άρα μπορούμε να γράψουμε $\frac{m_1}{m_2} = \frac{α_2}{α_1}$. Αν το ένα από τα δυο σώματα είναι ένα πρότυπο μάζας (πχ το πρότυπο kg) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα του αλλού σώματος.

γ) Θεμελιώδης νόμος της δυναμικής ή 2ος νόμος Newton : Για οποιοδήποτε σώμα μάζας m στο οποίο ασκείται δύναμη $\vec{F}$ προσδίδεται επιτάχυνση $\vec{α}$ με την κατεύθυνση της δύναμης και ισχύει :

$$\vec{α} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{α}$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να ορίσουμε την μονάδα δύναμης 1Ν :

«1 N (newton) είναι η δύναμη η οποία ασκούμενη σε σώμα μάζας 1 kg προκαλεί επιτάχυνση 1 m/s^2 ».

παρατήρηση :

Στην σχέση $\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$ το σύμβολο $\vec{F}$ παριστάνει την συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

δ) Διερεύνηση της σχέσης $\vec{F} = m\vec{\alpha}$

- Αν η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα είναι μηδέν:

Από τη σχέση $\vec{F} = m\vec{\alpha}$ συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι μηδέν άρα το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. (Αν το σώμα αρχικά ήταν ακίνητο θα συνεχίσει να είναι ακίνητο ή αν το σώμα αρχικά είχε ταχύτητα θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση)

- Αν η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα είναι σταθερή:

Από τη σχέση $\vec{F} = m\vec{\alpha}$ συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι σταθερή άρα το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

- Αν η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα δεν είναι σταθερή:

Από τη σχέση $\vec{F} = m\vec{\alpha}$ συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ δεν είναι σταθερή άρα το σώμα κάνει μη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

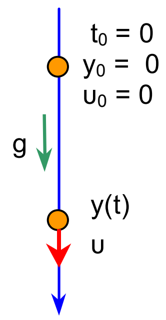
ε) Το βάρος και η μάζα : Βάρος ενός σώματος λέγεται η ελκτική δύναμη που ασκεί η Γη στο σώμα. Αν στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος τότε αυτό αποκτά επιτάχυνση g (επιτάχυνση της βαρύτητας). Αν εφαρμόσουμε τον 2^o νόμο Newton έχουμε : w = m·g. Για δύο σώματα ισχύει $\frac{m_2}{m_1} = \frac{w_2}{w_1}$. Άρα μπορούμε να μετρήσουμε την μάζα ενός σώματος (δηλ. το λόγο της ως προς μία άλλη που είναι η μονάδα μέτρησης) από το λόγο των δύο βαρών.

Η μάζα ενός σώματος είναι σταθερή , ενώ το βάρος μεταβάλλεται από τόπο σε τόπο. Η μάζα που προκύπτει από την μέτρηση της δύναμης του βάρους ονομάζεται βαρυτική μάζα. Η βαρυτική μάζα και η μάζα αδράνειας ταυτίζονται.

5. Ελεύθερη πτώση

α) Ορισμός :

Ελεύθερη πτώση λέγεται η κίνηση που κάνει ένα σώμα όταν σε αυτό ασκείται μόνο το βάρος του. Το βάρος του σώματος θεωρείται σταθερό και οι αντιστάσεις του αέρα μηδενικές.



Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με φορά προς τα κάτω.

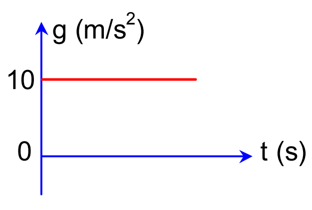
Η επιτάχυνση είναι σταθερή αλλά διαφορετική για κάθε τόπο και ονομάζεται επιτάχυνση της βαρύτητας g. Για την επιφάνεια της θάλασσας και σε Γεωγραφικό Πλάτος 45^0 είναι $g = 9{,}81\ m/s^2$.

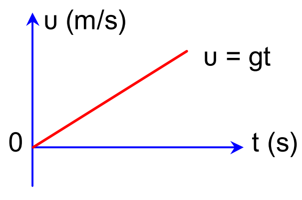
β) Εξισώσεις και διαγράμματα :

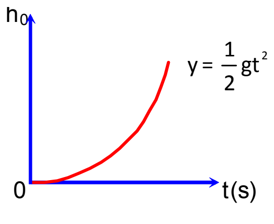
Οι εξισώσεις της προκύπτουν από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης στον άξονα y , αν θεωρήσουμε τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχική ταχύτητα $υ_0 = 0$ στη θέση $y_0 = 0$ και αν αντικαταστήσουμε την επιτάχυνση α με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Άρα

$$\alpha = g = 10\ m/s^2 \quad , \quad υ = g \cdot t \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις είναι :







6. Αλληλεπίδραση σωμάτων – Δυνάμεις

α) Σύστημα σωμάτων :

Ονομάζεται μία ομάδα σωμάτων , που τα μελετάμε σαν ένα σώμα. Κάθε σώμα που δεν ανήκει στο σύστημα λέμε ότι ανήκει στο εξωτερικό περιβάλλον του συστήματος.

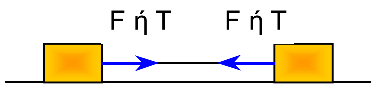
Οι δυνάμεις που ασκούνται από σώματα του συστήματος σε άλλα σώματα του ίδιου συστήματος ονομάζονται εσωτερικές δυνάμεις , ενώ οι δυνάμεις που ασκούνται από σώματα έξω από το σύστημα σε σώματα του συστήματος ονομάζονται εξωτερικές δυνάμεις.

β) Δυνάμεις επαφής και δυνάμεις από απόσταση :

Οι δυνάμεις διακρίνονται σε δυνάμεις επαφής (δύναμη από νήμα , δύναμη στήριξης , τριβή , δύναμη ελατηρίου , άνωση ....) και σε δυνάμεις από απόσταση ή δυνάμεις από πεδίο (βάρος , ηλεκτρική δύναμη ....).

Δύναμη στήριξης : Είναι μία δύναμη επαφής που εμφανίζεται όταν δύο σώματα είναι σε επαφή άρα αλληλοσυμπιέζονται. Είναι κάθετη στην κοινή επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων , παριστάνεται με ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στην κοινή επιφάνεια με κατεύθυνση προς το μέρος του σώματος στο οποίο ασκείται. Ονομάζεται και κάθετη αντίδραση ($\vec{F}_k$ ή $\vec{N}$).

Δύναμη από νήμα : Είναι δύναμη επαφής που ασκείται στα δύο άκρα τεντωμένου νήματος και έχει κατεύθυνση από το σώμα προς το νήμα.



γ) Ο 3ος νόμος Newton :

Αναφέρεται σε δύο σώματα που αλληλεπιδρούν , δηλαδή ασκούν το ένα στο άλλο δυνάμεις. Η διατύπωσή του είναι :

« Η αλληλεπίδραση ανάμεσα σε δύο σώματα Α και Β μπορεί να περιγράφεται με δύο δυνάμεις $\vec{F}_{AB}$ και $\vec{F}_{BA}$ τέτοιες ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να ισχύει $\vec{F}_{AB} = - \vec{F}_{BA}$ » .

Η μια δύναμη λέγεται δράση και η άλλη αντίδραση.

Μια ισοδύναμη διατύπωση του νόμου είναι : « Σε μια δράση αντιτίθεται πάντα μια ίση αντίδραση ».

παρατήρηση :

- Οι δυνάμεις δράση και αντίδραση μολονότι είναι αντίθετες δεν έχουν μηδενική συνισταμένη γιατί ασκούνται σε διαφορετικά σώματα.
- Αν έχω σύστημα σωμάτων τότε όλες οι εσωτερικές δυνάμεις είναι ζεύγη δράση – αντίδραση , άρα για το σύστημα σαν σύνολο και μόνο τότε δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

7. Τριβή

Τριβή είναι μια δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ή στην τάση για κίνηση ενός σώματος όταν αυτό βρίσκεται σε επαφή με ένα άλλο σώμα και συνυπάρχει πάντα με την δύναμη στήριξης. Εμφανίζεται σαν στατική τριβή ή σαν τριβή ολίσθησης. Είναι παράλληλη στην επιφάνεια επαφής με φορά αντίθετη από την φορά κίνησης του σώματος. Η τριβή οφείλεται στις ανωμαλίες που παρουσιάζουν οι επιφάνειες των δύο σωμάτων που έρχονται σε επαφή.

α) Στατική τριβή – Οριακή τριβή :

Στατική τριβή T_σ : Εμφανίζεται στις επιφάνειες δυο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή , βρίσκονται σε σχετική ισορροπία και το ένα τείνει να κινηθεί ως προς το άλλο. Δεν έχει σταθερό μέτρο αλλά είναι διαρκώς αντίθετη με την δύναμη που τείνει να κινήσει το σώμα

β) Τριβή ολίσθησης :

Εμφανίζεται στις επιφάνειες δυο αντικειμένων που βρίσκονται σε επαφή , ενώ τα σώματα βρίσκονται σε σχετική κίνηση. Έχει σταθερό μέτρο που δίνεται από την σχέση $T = \mu F_\kappa$ όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Νόμος της τριβής ολίσθησης : « Η Τριβή ολίσθησης :

❶ Είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν συνεπαφής.

❷ Είναι ανεξάρτητη από την σχετική ταχύτητα των δυο σωμάτων.

❸ Εξαρτάται από την φύση των επιφανειών επαφής που τρίβονται

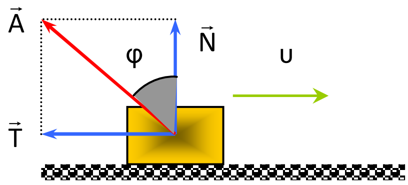
❹ Είναι ανάλογη με το μέτρο της δύναμης που πιέζει κάθετα τις επιφάνειες που τρίβονται »

Όλα αυτά εκφράζονται με την σχέση $T = \mu F_\kappa$ (ή $T = \mu F_\kappa$) όπου T η τριβή ολίσθησης , μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που εξαρτάται από την φύση των επιφανειών επαφής και F_κ (ή N) η κάθετη αντίδραση.

Για κάθε δυάδα επιφανειών σε επαφή είναι $\mu_{op} > \mu$ ή $\mu_{op}F_\kappa > \mu F_\kappa$ άρα $T_{op} > T$.

παρατήρηση :

Όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε επίπεδο , το επίπεδο του ασκεί την τριβή T και την κάθετη αντίδραση N. Άρα το επίπεδο ασκεί στο σώμα την συνισταμένη δύναμη A που σχηματίζει γωνία φ με την κάθετη στο επίπεδο. Για την γωνία φ ισχύει $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{T}{N} = \mu$



Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Μέτρηση δύναμης

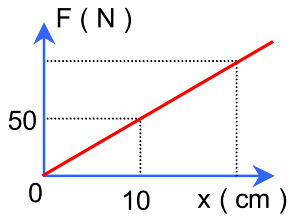
Για ένα ελατήριο που ακολουθεί τον νόμο των ελαστικών παραμορφώσεων (νόμος Hooke) πήραμε τον παρακάτω πίνακα μετρήσεων για την δύναμη και την παραμόρφωση :

x (cm)	0	5	10	
F (N)	0		50	100

Να γίνει διάγραμμα με βάση αυτές τις τιμές και να συμπληρωθεί ο πίνακας.

Λύση

Η σταθερά αναλογίας μεταξύ δύναμης και παραμόρφωσης βρίσκεται αν χρησιμοποιήσω το 3ο ζεύγος τιμών , άρα $\kappa = \frac{F}{x}$ άρα $k = \frac{50\,N}{10\,cm}$ ή κ = 5 N/cm.



Διάγραμμα δύναμης - παραμόρφωσης

Το διάγραμμα που προκύπτει φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Από την σχέση $F = k\cdot x$ θα υπολογίσουμε τις τιμές που λείπουν στον πίνακα :

Για x = 5 cm : F = (5 N/cm)· (5 cm) ή F = 25 N

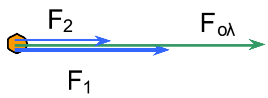
Για F = 100 N : $F = k\cdot x$ ή $x = \frac{F}{\kappa}$ ή $x = \frac{100\,N}{5\,N/cm}$ ή x = 20 cm.

Παράδειγμα 2. Σύνθεση δυνάμεων

Να βρεθεί η συνιστάμενη δυο δυνάμεων με μέτρα $F_1 = 8$ N και $F_2 = 6$ N οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και οι φορείς τους σχηματίζουν γωνία α) $\varphi = 0^0$, β) 180^0.

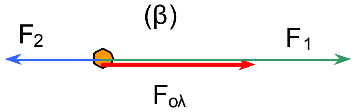
Λύση

(α)



α) Όταν $\varphi = 0^0$ οι δυνάμεις είναι ομόρροπες , άρα η συνισταμένη τους είναι : $F_{o\lambda} = F_1 + F_2$ ή $F_{o\lambda}$ = 8 N + 6 N άρα $F_{o\lambda}$ = 14 N

(β)

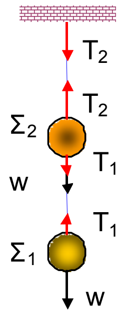


β) Όταν $\varphi = 180^0$ οι δυνάμεις είναι αντίρροπες , άρα η συνισταμένη τους είναι : $F_{o\lambda} = F_1 - F_2$ ή $F_{o\lambda}$ = 8 N – 6 N άρα $F_{o\lambda}$ = 2 N

Οι κατευθύνσεις των δυνάμεων φαίνονται στα αντίστοιχα σχήματα.

Παράδειγμα 3. Νόμοι Newton

Μέσω δυο νημάτων κρέμονται δυο σφαίρες όπως στο σχήμα με βάρος w = 10 N η κάθε μια. Να υπολογιστούν : α) Οι δυνάμεις με τις οποίες τείνοντα τα νήματα και β) Η δύναμη που ασκείται στην οροφή.

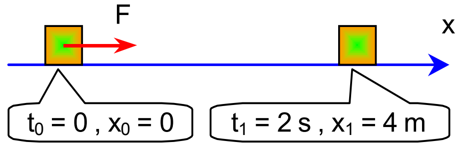


Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στα νήματα και τις σφαίρες φαίνονται στο σχήμα.
Από την ισορροπία της σφαίρας $Σ_1$ έχουμε : $Σ\vec{F} = 0$ ή $T_1 - B = 0$ ή $T_1 = B$ άρα $T_1 = 10$ N.
Η δύναμη που ασκείται στην οροφή είναι η T_2. Από την ισορροπία της σφαίρας $Σ_2$ έχουμε :
$Σ\vec{F} = 0$ ή $T_2 - B - T_1 = 0$ ή $T_2 = B + T_1$ ή $T_2 = 10\ N + 10\ N$ άρα $T_2 = 20$ N.

Παράδειγμα 4. Νόμοι Newton

Σώμα με μάζα m είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη με μέτρο F = 10 N και το σώμα σε χρόνο Δt = 2 s μετατοπίζεται κατά Δx = 4 m. Να βρεθεί η μάζα του σώματος.



Λύση

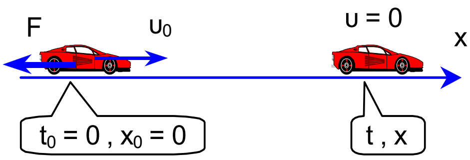
Αν θέσουμε $υ_0 = 0$ στην εξίσωση κίνησης $Δx = υ_0 Δt + \frac{1}{2}α(Δt)^2$ έχουμε $Δx = \frac{1}{2}α(Δt)^2$ ή $α = \frac{2 \cdot Δx}{(Δt)^2}$ ή $α = \frac{2 \cdot 4\,m}{(2\,s)^2}$ άρα $α = 2\ m/s^2$.

Στον οριζόντιο άξονα εφαρμόζουμε τον $2^{ο}$ νόμο του Newton και έχουμε F = m·α ή $m = \frac{F}{α}$ ή $m = \frac{10\,N}{2\,m/s^2}$ άρα m = 5 kg.

Παράδειγμα 5. Νόμοι Newton

Ένα αυτοκίνητο με μάζα m = 1000 kg κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $υ_0 = 20$ m/s. Ο οδηγός πατάει φρένο , οπότε ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη , αντίθετη στην ταχύτητα με μέτρο F = 4000 N. Να υπολογιστούν : α) Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου και β) Σε πόσο χρόνο και σε ποιά απόσταση θα σταματήσει το αυτοκίνητο.

Λύση



α) Στον οριζόντιο άξονα εφαρμόζουμε τον $2^{ο}$ νόμο του Newton για το αυτοκίνητο και έχουμε F = m·α ή $α = \frac{F}{m}$ ή $α = \frac{-4000\,N}{1000\,kg}$ άρα $α = -4\ m/s^2$.

β) Το αυτοκίνητο σταματάει όταν υ = 0 , επομένως από την εξίσωση της ταχύτητας $υ = υ_0 + α \cdot (t - t_0)$ για $t_0 = 0$ είναι $0 = υ_0 + α \cdot t$ ή $t = \frac{-υ_0}{α}$ ή $t = \frac{-20\,m/s}{-4\,m/s^2}$ άρα t = 5 s.

Η θέση του σώματος όταν σταματήσει δίνεται από την εξίσωση κίνησης

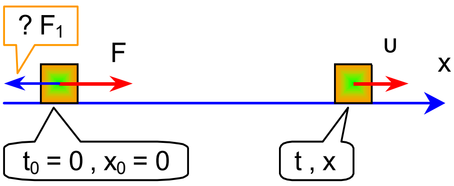
$Δx = υ_0 Δt + \frac{1}{2}α(Δt)^2$ ή $Δx = (20\,m/s)(5\,s) + \frac{1}{2}(-4\,m/s^2)(5\,s)^2$ άρα Δx = 50 m.

Παράδειγμα 6. Νόμοι Newton

Σώμα μάζας m = 10 kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη με μέτρο

F = 50 N. Παρατηρούμε ότι το σώμα αποκτά ταχύτητα υ = 10 m/s όταν έχει μετατοπιστεί κατά Δx = 25 m. Να εξετάσετε αν στο σώμα ασκείται άλλη δύναμη. Αν ναι , να υπολογίσετε την τιμή της.

Λύση



Είναι $υ_0 = 0$ την $t_0 = 0$. Από την εξίσωση $α = \dfrac{υ^2 - υ_0^2}{2 \cdot Δx}$ έχουμε

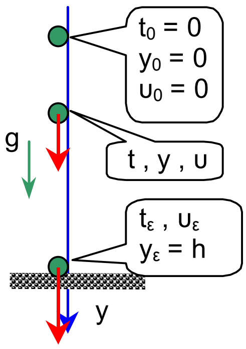
$$α = \frac{(10\,m/s)^2 - 0^2}{2 \cdot (25\,m)} \text{ ή } α = 2\ m/s^2.$$

Από τον 2ο νόμο Newton βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα : ΣF = m·α ή ΣF = (10 kg)·(2 m/s^2) άρα ΣF = 20 N. Η συνισταμένη δύναμη είναι μικρότερη από την δύναμη F , άρα στο σώμα ασκείται και άλλη δύναμη , αντίθετη της F.
Έχουμε ΣF = F – F_1 ή F_1 = F – ΣF ή F_1 = 50 N – 20 N άρα F_1 = 30 N.

Παράδειγμα 7. Ελεύθερη πτώση

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ένα σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h = 80 m. α) Ποιά είναι η ταχύτητα και η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t = 2 s. β) Πόση απόσταση έχει διανύσει το σώμα τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα υ = 30 m/s. γ) Ποιά χρονική στιγμή φτάνει στο έδαφος και με ποιά ταχύτητα. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση



α) Η ταχύτητα δίνεται από την υ = g·t ή υ = (10 m/s^2)·(2 s) άρα υ = 20 m/s.

Η θέση του σώματος δίνεται από τη σχέση $y = \dfrac{1}{2} g \cdot t^2$ ή $y = \dfrac{1}{2}\left(10\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot(2\,s)^2$ άρα

y = 20 m.

β) Είναι υ = g·t ή $t = \dfrac{υ}{g}$ ή $t = \dfrac{30\,m/s}{10\,m/s^2}$ άρα t = 3 s.

και $y = \dfrac{1}{2} g \cdot t^2$ ή $y = \dfrac{1}{2}\left(10\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot(3\,s)^2$ άρα y = 30 m.

γ) Στο έδαφος y = h ή $\dfrac{1}{2} g \cdot t^2 = h$ ή $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ή $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 80\,m}{10\,m/s^2}}$ άρα t = 4 s.

Η ταχύτητα δίνεται από την υ = g·t ή υ = (10 m/s^2)·(4 s) άρα υ = 40 m/s.

Μεθοδολογία σύνθεσης και ισορροπίας δυνάμεων

α) Βασικές δυνάμεις :

- Σε όλα τα σώματα ασκούνται οι δυνάμεις επαφής και οι πεδιακές δυνάμεις όπως βάρος , δύναμη Coulomb κλπ.
- Το τεντωμένο νήμα ασκεί ίσες κατά μέτρο δυνάμεις στα σώματα που έχει δεθεί.
- Η σταθερή τροχαλία αλλάζει την διεύθυνση μιας δύναμης χωρίς να αλλάζει το μέτρο της.

β) Σύνθεση δυνάμεων :

- *Για δυο δυνάμεις χρησιμοποιούμε το παραλληλόγραμμο και ισχύουν οι σχέσεις :*

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συνφ} \quad \textit{και} \quad εφθ = \frac{F_2 ημφ}{F_1 + F_2 συνφ} \quad \textit{ή} \quad ημθ = \frac{F_2 ημφ}{F}$$

- *Για πολλές δυνάμεις :*
  ❶ Εκλέγουμε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων ,
  ❷ Αναλύουμε τις δυνάμεις στους άξονες

❸ *Βρίσκουμε τα ΣF_x και ΣF_y*

❹ *Η συνιστάμενη δίνεται από τις* $F = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2}$ *και* $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

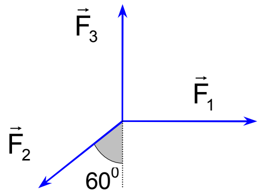
γ) Ισορροπία υλικού σημείου :

Οι συνθήκες είναι $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$

δ) Ισορροπία στερεού σώματος :

Αν ένα στερεό σώμα με διαστάσεις ισορροπεί και σε αυτό ασκούνται τρεις δυνάμεις , τότε οι δυνάμεις αυτές διέρχονται από το ίδιο σημείο.

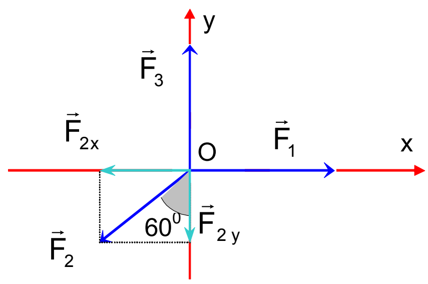
Παράδειγμα 8. Συνισταμένη δύναμη



Το υλικό σημείο Ο δέχεται τρεις δυνάμεις F_1 , F_2 και F_3 όπως στο σχήμα που έχουν μέτρα $F_1 = 50\sqrt{3}$ N , $F_2 = 150$ N , $F_3 = 50$ N. Να βρεθεί η συνιστάμενη των δυνάμεων.

Λύση

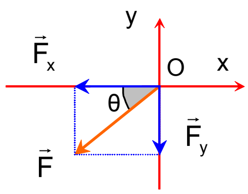
Εκλέγουμε σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy και αναλύουμε τις δυνάμεις στους άξονες. Η δύναμη F_2 αναλύεται στις συνιστώσες : $F_{2x} = F_2 \eta\mu 60^0 = 150\ N \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$ N και $F_{2y} = F_2 \sigma\upsilon\nu 60^0 = 150\ N \cdot \dfrac{1}{2} = 75$ N .



Υπολογίζουμε την συνιστάμενη δύναμη σε κάθε άξονα , όποτε έχουμε : $\Sigma F_x = F_1 - F_{2x} = 50\sqrt{3}\ N - 75\sqrt{3}\ N = -25\sqrt{3}$ N

$\Sigma F_y = F_3 - F_{2y} = 50\ N - 75\ N = -25$ N

(Το « - » δείχνει ότι η δύναμη έχει φορά προς τα αρνητικά του άξονα).



Το μέτρο της συνιστάμενης δύναμης F είναι :

$$F = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{\left(-25\sqrt{3}\right)^2 + \left(-25\right)^2} \Rightarrow$$

$$F = \sqrt{25^2 \cdot 3 + 25^2} \Rightarrow F = \sqrt{25^2 \cdot 4} \Rightarrow F = 50\ N.$$

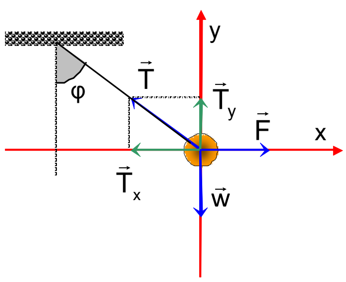
Για την γωνία θ που σχηματίζει η συνιστάμενη με τον άξονα Οx έχουμε :

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{-25\,N}{-25\sqrt{3}\,N} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^0.$$

Παράδειγμα 9. Ισορροπία σώματος

Μικρή σφαίρα που έχει βάρος Β = 10 N είναι κρεμασμένη με σχοινί από οροφή. Όταν στη σφαίρα ενεργήσει μια οριζόντια δύναμη $F = w\sqrt{3}$, το σχοινί εκτρέπεται κατά γωνία φ από την κατακόρυφη θέση του. Να υπολογιστεί η γωνία φ.

Λύση



α) Θεωρούμε σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy όπως στο σχήμα. Αναλύουμε την δύναμη Τ (τάση του νήματος) η οποία σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Oy. Οι συνιστώσες είναι $T_x = T\eta\mu\varphi$ και $T_y = T\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Η σφαίρα ισορροπεί άρα $\Sigma\vec{F} = 0$. Για κάθε άξονα έχουμε :

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - T_x = 0 \Rightarrow T\eta\mu\varphi = w\sqrt{3}$ ❶ (γιατί $F = w\sqrt{3}$) και

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - w = 0 \Rightarrow T\sigma\upsilon\nu\varphi = w$ ❷

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις ❶ και ❷ έχουμε : $\dfrac{Tημφ}{Tσυνφ} = \dfrac{w\sqrt{3}}{w} \Rightarrow εφφ = \sqrt{3} \Rightarrow φ = 60^0$.

Παράδειγμα 10. 2ος νόμος Newton

Δυο άνθρωποι που βρίσκονται στις όχθες ποταμού τραβούν ταυτόχρονα βάρκα με μάζα m = 100 kg μέσω σχοινιών ασκώντας δυνάμεις που έχουν το ίδιο μέτρο F = 80 N και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $φ = 120^0$. Να υπολογιστούν : α) Η επιτάχυνση της βάρκας , β) Η διεύθυνση κίνησης της βάρκας και γ) Η ταχύτητα που αποκτά η βάρκα σε χρόνο t = 5 s μετά από την εφαρμογή των δυνάμεων και το διάστημα που διανύει στο χρόνο αυτό.

Λύση

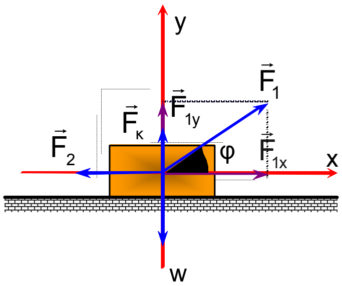
α) Η συνιστάμενη των δυνάμεων είναι : $F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συν120^0} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2(-\frac{1}{2})} \Rightarrow$ $F_{ολ} = \sqrt{F^2 + F^2 - F^2} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{F^2} \Rightarrow F_{ολ} = F$. Άρα η συνιστάμενη δύναμη στη βάρκα είναι $F_{ολ}$ = 80 N. Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε $F = m \cdot α \Rightarrow α = \dfrac{F}{m} \Rightarrow α = \dfrac{80\,N}{100\,kg} \Rightarrow α = 0{,}8\ m/s^2$.

β) Η διεύθυνση κίνησης της βάρκας συμπίπτει με την διεύθυνση της συνιστάμενης δύναμης. Αυτή δίνεται από την : $εφθ = \dfrac{Fημ120^0}{F + Fσυν120^0} \Rightarrow εφθ = \dfrac{F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{F \cdot [1 + (-\frac{1}{2})]} \Rightarrow εφθ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow εφθ = \sqrt{3} \Rightarrow θ = 60^0$.

γ) Η βάρκα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η ταχύτητα της βάρκας μετά από χρόνο t , για $t_0 = 0$ και $υ_0 = 0$ δίνεται από την $υ = α \cdot t \Rightarrow υ = 0.8\ m/s^2 \cdot 5\ s \Rightarrow υ = 4\ m/s$.

Η μετατόπιση στον ίδιο χρόνο, για $t_0 = 0$ και $υ_0 = 0$, δίνεται από την $Δx = \dfrac{1}{2}αt^2 \Rightarrow Δx = \dfrac{1}{2} \cdot (0.8\dfrac{m}{s^2}) \cdot (5\,s)^2$ $\Rightarrow Δx = 10$ m.

Παράδειγμα 11. 2ος νόμος Newton



Σώμα μάζας m = 2 kg κινείται σε λείο και οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση των δυνάμεων F_1 = 20 N που σχηματίζει γωνία $φ = 60^0$ με το επίπεδο και F_2 = 10 N όπως στο σχήμα. Το σώμα σε χρόνο $Δt_1$ = 5 s μετατοπίζεται κατά $Δx_1$ = 40 m. Να υπολογιστούν : α) Το μέτρο της δύναμης F_k που ασκείται από το δάπεδο στο σώμα και β) Σε πόσο χρόνο το σώμα θα μετατοπιστεί κατά $Δx_2$ = 160 m. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : το βάρος w , η δύναμη από το δάπεδο F_k και οι δυνάμεις F_1 και F_2. Εκλέγουμε κατάλληλο σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα και αναλύουμε την δύναμη F_1 στις F_{1x} και F_{1y} . Είναι

$$F_{1x} = F_1συν60^0 \Rightarrow F_{1x} = 20 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow F_{1x} = 10\,N \text{ και } F_{1y} = F_1ημ60^0 \Rightarrow F_{1y} = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F_{1y} = 10\sqrt{3}\,N$$

α) Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί άρα $ΣF_y = 0 \Rightarrow F_{1y} + F_k - B = 0 \Rightarrow F_k = mg - F_{1y} \Rightarrow F_k = 2 \cdot 10 - 10\sqrt{3} \Rightarrow$ $F_k = 10(2 - \sqrt{3})$ N

β) Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον άξονα x και έχουμε $ΣF_x = mα \Rightarrow$

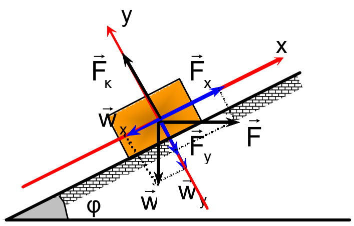
F_{1x} - F_2 = mα $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{F_{1x} - F_2}{m}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{10-10}{2}$ $\Rightarrow$ α = 0. Άρα το σώμα στον άξονα x κάνει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\upsilon = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$ $\Rightarrow$ $\upsilon = \frac{40\,m}{5\,s}$ $\Rightarrow$ υ = 8 m/s. Επομένως σε χρόνο Δt_2 μετατοπίζεται κατά Δx_2 και είναι $\Delta x_2 = \upsilon \cdot \Delta t_2$ $\Rightarrow$ $\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{\upsilon}$ $\Rightarrow$ $\Delta t_2 = \frac{160\,m}{8\,m/s}$ $\Rightarrow$ $\Delta t_2 = 20$ s.

Παράδειγμα 12. Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Σώμα μάζας m = 3 kg ανέρχεται κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ = 30^0 με την επίδραση οριζόντιας δύναμης F και έχει σταθερή επιτάχυνση α = 2 m/s^2. Να υπολογιστούν : α) Το μέτρο της δύναμης F , β) Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το δάπεδο στο σώμα. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : το βάρος w , η οριζόντια δύναμη F , και η αντίδραση F_κ από το δάπεδο. Εκλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων από τους οποίους ο ένας είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο και αναλύουμε τις δυνάμεις στο σύστημα αυτό. Η δύναμη F σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Οx άρα F_x = Fσυνφ και F_y = Fημφ. Η δύναμη του βάρους σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Οy άρα w_x = wημφ και w_y = wσυνφ.



Για τον άξονα Οx έχουμε : ΣF_x = mα $\Rightarrow$ F_x - w_x = mα $\Rightarrow$ Fσυν30^0 = mα + mgημ30^0 $\Rightarrow$ $F\frac{\sqrt{3}}{2} = 12 + 30\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$F = \frac{42}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $F = 14\sqrt{3}\,N$

Για τον άξονα Οy έχουμε : ΣF_y = 0 $\Rightarrow$ F_k - F_y - B_y = 0 $\Rightarrow$ F_k = Fημ30^0 + mgσυν30^0 $\Rightarrow$

$F_k = 14\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $F_k = 22\sqrt{3}\,N$.

Παράδειγμα 13. Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Σώμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ = 30^0 προς τα πάνω παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα υ_0 = 10 m/s. Να βρεθούν : α) Η επιβράδυνση του σώματος και β) Ο μέγιστος χρόνος ανόδου και η μέγιστη μετατόπιση του σώματος μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητα του. Τριβή δεν υπάρχει και δίνεται g = 10 m/s^2.

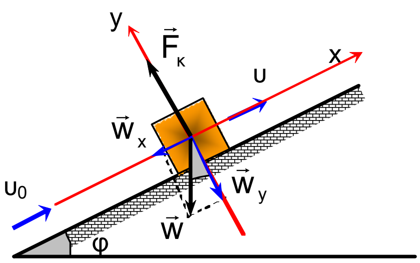
Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : Το βάρος w και η αντίδραση F_κ από το επίπεδο. Εκλέγουμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με τον ένα άξονα παράλληλο στην διεύθυνση της κίνησης.

Το βάρος σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Οy. Αναλύουμε το βάρος w στις συνιστώσες w_x και w_y.

Είναι : w_x = wημφ $\Rightarrow$ w_x = mgημφ και w_y = wσυνφ $\Rightarrow$ w_y = mgσυνφ.

Στον άξονα Οx ισχύει : ΣF_x = mα $\Rightarrow$ - w_x = mα $\Rightarrow$ - mgημφ = mα $\Rightarrow$ α = - gημφ $\Rightarrow$ α = - 10ημ30^0 $\Rightarrow$ α = - 5 m/s^2.



Το σώμα σταματάει στιγμιαία όταν υ = 0. Επειδή το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, για t_0 = 0 ισχύει υ = υ_0 + αt. Άρα $\upsilon_0 + \alpha t_{max} = 0$ $\Rightarrow$ $t_{max} = -\frac{\upsilon_0}{\alpha}$ $\Rightarrow$ $t_{max} = -\frac{10\,m/s}{-5\,m/s^2}$ $\Rightarrow$ t_{max} = 2 s.

Η μετατόπιση του σώματος δίνεται από την σχέση :

$$x_{max} = υ_0 t + \frac{1}{2}αt^2 \Rightarrow x_{max} = 10m/s \cdot 2s + \frac{1}{2}\cdot\left(-5m/s^2\right)\cdot(2s)^2 \Rightarrow x_{max} = 10 \text{ m}.$$

Μεθοδολογία ασκήσεων με τριβή

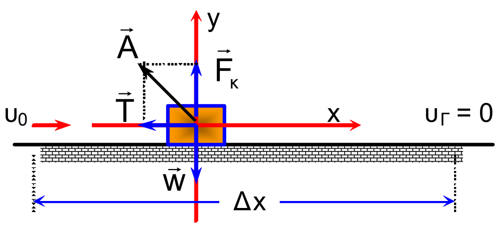
α) Η δύναμη της τριβής είναι αντίθετη στην ολίσθηση των σωμάτων και όχι κατ' ανάγκη στην κίνηση των σωμάτων.
β) Όταν δεν γίνεται διάκριση ανάμεσα στον συντελεστή οριακής τριβής και τον συντελεστή τριβής ολίσθησης θα θεωρούμε ότι έχουν την ίδια τιμή.
γ) Σε προβλήματα με τριβή ολίσθησης εφαρμόζεται η μεθοδολογία για δυνάμεις σε κινούμενα ή ακίνητα σώματα και επιπλέον : ❶ Από την συνθήκη $ΣF_y = 0$ βρίσκουμε την κάθετη δύναμη αντίδρασης $F_κ$ ❷ Από την σχέση $T = μ\cdot F_κ$ βρίσκουμε την τριβή T και ❸ Από την σχέση $ΣF_x = m\cdot α$ βρίσκουμε τη επιτάχυνση (ή επιβράδυνση) α , αν το σώμα κάνει μεταβαλλόμενη κίνηση.

Παράδειγμα 14. Κίνηση ενός σώματος

Σώμα ρίχνεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $υ_0$ = 20 m/s σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0.2. Να βρεθούν : α) Η επιβράδυνση του σώματος, β) Ο χρόνος κίνησης του σώματος μέχρι να σταματήσει και γ) Η μετατόπισή του τότε. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : Το βάρος w και η δύναμη A από το δάπεδο που αναλύεται σε δυο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους , την $F_κ$ που είναι κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο και την τριβή T που είναι παράλληλη στο οριζόντιο επίπεδο.



Στον άξονα y το Σώμα ισορροπεί άρα $ΣF_y = 0 \Rightarrow F_κ - w = 0 \Rightarrow F_κ = w$.
Αλλά $T = μ\cdot F_κ \Rightarrow T = μ\cdot w \Rightarrow T = μmg$.
Στον άξονα y ισχύει $ΣF_x = mα \Rightarrow -T = mα \Rightarrow -μmg = mα \Rightarrow α = -μg \Rightarrow α = -0.2\cdot 10 \Rightarrow α = -2$ m/s^2.
Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και θα σταματήσει όταν $υ = 0 \Rightarrow υ_0 - αt = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{υ_0}{α} \Rightarrow t = \frac{20}{2} \Rightarrow t = 10 \text{ s}.$$

Η μετατόπιση του σώματος μέχρι να σταματήσει είναι $x = υ_0 t - \frac{1}{2}αt^2 \Rightarrow x = 20\cdot 10 - \frac{1}{2}2\cdot 10^2 \Rightarrow x = 100$ m.

Παράδειγμα 15. Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Σώμα εκτοξεύεται από την βάση κεκλιμένου επιπέδου με γωνία κλίσης φ = 30^0 με ταχύτητα $υ_0$ = 20 m/s παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του σώματος με το επίπεδο είναι $μ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Δίνεται g = 10 m/s^2.
α) Να βρεθεί η επιβράδυνση του σώματος και
β) Να υπολογιστεί ο χρόνος κίνησης του σώματος και η μετατόπισή του μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

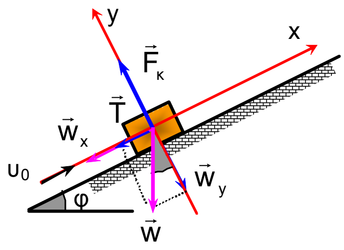
Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : Το βάρος w που αναλύεται σε δυο κάθετες συνιστώσες w_x και w_y με w_x = wημφ και w_y = wσυνφ και την αντίδραση του επιπέδου που αναλύεται στην κάθετη αντίδραση F_k και την τριβή T.
Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί άρα $ΣF_y = 0 \Rightarrow F_k - w_y = 0 \Rightarrow F_k = wσυνφ$.
Για την τριβή ισχύει : $T = μF_k \Rightarrow T = μwσυνφ \Rightarrow T = μmgσυνφ$.

Στον άξονα x το σώμα κάνει μεταβαλλόμενη κίνηση άρα :

$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow -T - w_x = m\alpha \Rightarrow -\mu m g \sigma \upsilon \nu \varphi - m g \eta \mu \varphi = m\alpha \Rightarrow m\alpha = -mg(\mu \sigma \upsilon \nu \varphi + \eta \mu \varphi) \Rightarrow$

$\alpha = -g(\mu \sigma \upsilon \nu \varphi + \eta \mu \varphi) \Rightarrow \alpha = -10 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha = -10\ m/s^2.$



Το σώμα εκτελεί ευθ. ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Η ταχύτητα του δίνεται από την σχέση $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$. Όταν σταματήσει στιγμιαία είναι $\upsilon = 0$

άρα : $\upsilon_0 + \alpha t = 0 \Rightarrow t = -\frac{\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow t = -\frac{20\ m/s}{-10\ m/s^2} \Rightarrow t = 2\ s.$

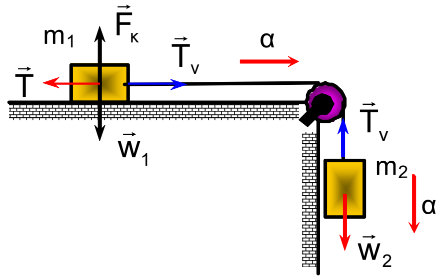
Το σώμα όταν σταματήσει θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow$

$x = 20 \cdot 2 + \frac{1}{2}(-10) \cdot 2^2 \Rightarrow \Delta x = 20\ m.$

Παράδειγμα 16. Κίνηση συστήματος σωμάτων

Το σύστημα των σωμάτων του σχήματος κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2\ m/s^2$. Ο συντελεστής τριβής του σώματος με το δάπεδο είναι $\mu = 0.2$. Δίνεται $m_1 = 10$ kg και $g = 10\ m/s^2$. Να βρεθούν : α) Η δύναμη της τριβής , β) Η δύναμη T_ν που τείνεται το νήμα και γ) Το βάρος w_2.

Λύση



Το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί στον άξονα y άρα $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_k - w_1 = 0 \Rightarrow$ $F_k = m_1 g$ άρα η τριβή $T = \mu F_k \Rightarrow T = \mu m_1 g \Rightarrow T = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow T = 20$ N.

Στον άξονα x είναι : $\Sigma F_x = m_1\alpha \Rightarrow T_\nu - T = m_1\alpha \Rightarrow T_\nu = m_1\alpha + T \Rightarrow$ $T_\nu = 10 \cdot 2 + 20 \Rightarrow T_\nu = 40$ N.

Για το σώμα μάζας m_2 ισχύει :

$\Sigma F = m_2\alpha \Rightarrow w_2 - T_\nu = m_2\alpha \Rightarrow w_2 - T_\nu = \frac{w_2}{g}\alpha \Rightarrow B_2 g - T_\nu g = w_2\alpha \Rightarrow$

$w_2 \cdot (g - \alpha) = T_\nu g \Rightarrow w_2 = \frac{T_\nu g}{g - \alpha} \Rightarrow w_2 = \frac{40 \cdot 10}{10 - 2} \Rightarrow w_2 = 50$ N.

Άλυτες Ασκήσεις

17. Δύο δυνάμεις έχουν μέτρα $F_1 = 100$ N και $F_2 = 60$ N. Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης , αν οι δυνάμεις έχουν : α) ίδια κατεύθυνση και β) αντίθετες κατευθύνσεις.

18. Τρεις δυνάμεις με μέτρα $F_1 = 10$ N και $F_2 = 10$ N με κατεύθυνση προς τα δεξιά και $F_3 = 20$ N με κατεύθυνση προς τα αριστερά έχουν κοινό σημείο εφαρμογής. Να βρεθεί η συνισταμένη τους.

19. Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη με μέτρο F = 100 N. Το σώμα σε χρόνο Δt = 10 s αποκτά ταχύτητα υ = 20 m/s. Να βρεθεί η μάζα του σώματος.

20. Αυτοκίνητο με μάζα m = 1200 kg κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_0 = 72$ Km/h. Ξαφνικά ο οδηγός φρενάρει όποτε το αυτοκίνητο σταματάει αφού μετατοπιστεί κατά Δx = 40 m. Να υπολογιστούν α) Το μέτρο της δύναμης που ασκήθηκε στους τροχούς κατά το φρενάρισμα και β) Η χρονική διάρκεια της κίνησης μέχρι να σταματήσει το αυτοκίνητο.

21. Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F = 20 N. Το σώμα αποκτά ταχύτητα υ = 20 m/s όταν έχει μετατοπιστεί κατά Δx = 100 m. Να βρεθεί η μάζα του σώματος.

22. Σε σώμα μάζας m = 5 kg που κινείται με ταχύτητα $υ_0$ = 5 m/s σε λείο και οριζόντιο επίπεδο ασκείται σταθερή δύναμη συγγραμμική και ομόρροπη της ταχύτητας. Αν το κινητό σε χρόνο Δt = 5 s αποκτά ταχύτητα υ = $5υ_0$ να υπολογιστούν : α) Το μέτρο της δύναμης F και β) Η μετατόπιση του σώματος στον χρόνο Δt.

23. Σώμα μάζας m = 4 kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη F_1. Το σώμα όταν μετατοπιστεί κατά $Δx_1$ = 25 m αποκτά ταχύτητα υ = 10 m/s. Τότε η δύναμη F_1 καταργείται και στο σώμα ασκείται σταθερή δύναμη F_2 αντίθετης κατεύθυνσης. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται όταν το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά $Δx_2$ = 125 m από την αρχική θέση ηρεμίας. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις F_1 και F_2.

24. Σώμα μάζας m = 5 kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκούνται δύο οριζόντιες δυνάμεις F_1 = 20 N και F_2 = 10 N με αντίθετες κατευθύνσεις. Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος σε χρόνο Δt = 4 s.

25. Σώμα μάζας m = 2 kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη F = 4 N στην χρονική διάρκεια από t_0 = 0 έως t_1 = 2 s. Από t_1 = 2 s έως t_2 = 6 s παύει να ασκείται η δύναμη. Από την χρονική στιγμή t_2 = 6 s και μετά ασκείται στο σώμα η ίδια δύναμη. Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος την χρονική στιγμή t_3 = 8 s.

26. Να βρεθεί η συνιστάμενη δυο δυνάμεων με μέτρα F_1 = 8 N και F_2 = 6 N οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και οι φορείς τους σχηματίζουν γωνία α) φ = 0^0, β) 180^0.

27. Να βρεθεί η συνιστάμενη δυο δυνάμεων με μέτρα F_1 = 8 N και F_2 = 6 N οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και η φορείς τους σχηματίζουν ορθή γωνία.

28. Σώμα με μάζα m = 20 kg βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και ηρεμεί. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F = 50 N οπότε το σώμα αποκτά ταχύτητα υ = 6 m/s αφού διανύσει διάστημα x = 18 m. Να εξετάσετε αν υπάρχει τριβή ανάμεσα στο σώμα και το δάπεδο και να υπολογιστεί το μέτρο της.

29. Ένας κύβος με μάζα m = 10 kg σύρεται με οριζόντια δύναμη F σε οριζόντιο επίπεδο με επιτάχυνση α = 2,5 m/s^2. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του κύβου και του επίπεδου είναι μ = 0,2 να υπολογιστούν :

α. Η κάθετη δύναμη που ασκεί το οριζόντιο επίπεδο στο σώμα και
β. Η δύναμη F. Δίνεται g = 10 m/s^2.

30. Ένα σώμα μάζας m κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,2. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 το σώμα έχει ταχύτητα $υ_0$ και βρίσκεται στη θέση x_0 = 0. Σε χρόνο t το σώμα σταματάει. Η μετατόπισή του τότε είναι Δx = 25 m. Αν g = 10 m/s^2 να υπολογιστούν :

α. Η επιβράδυνση του σώματος
β. Η αρχική ταχύτητα $υ_0$
γ. Ο χρόνος κίνησης t

31. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5. Στο σώμα ασκείται τη χρονική στιγμή t_0 = 0 δύναμη F = 20 N η οποία σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ με συνφ = 0,8 και ημφ = 0,6. Αν g = 10 m/s^2 να υπολογιστούν :

α. Η δύναμη της τριβής T και η επιτάχυνση α που αποκτά το σώμα
β. Ο χρόνος t που απαιτείται για να αποκτήσει το σώμα ταχύτητα υ = 30 m/s
γ. Η μετατόπιση του σώματος τότε

32. Σώμα αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα σε ένα σημείο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ = 30^0. Το σώμα κατεβαίνει ολισθαίνοντας. Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος και το διάστημα που διανύει σε χρόνο t = 2 s. α) Αν δεν υπάρχει τριβή και β) Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

33. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα σε ένα σημείο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ με συνφ = 0,8 και ημφ = 0,6. Το σώμα παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5 με το επίπεδο. Αν $g = 10\ m/s^2$ να υπολογιστούν :

α. Η δύναμη της τριβής Τ

β. Η επιτάχυνση α που αποκτά το σώμα

γ. Ο χρόνος t που απαιτείται για να μετατοπιστεί το σώμα κατά Δx = 100 m

δ. Η ταχύτητα του σώματος τότε

34. Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi = 30^0$ και ύψους h = 2 m αφήνουμε να ολισθήσει από το ανώτατο σημείο ένα σώμα. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ να υπολογιστούν : α) Η επιτάχυνση του σώματος και β) Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

35. Ένα σώμα μάζας m = 1 kg εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\ m/s$ προς τα πάνω παράλληλα στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\phi = 30^0$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ και δίνεται $g = 10\ m/s^2$, να υπολογιστούν :

α. Η δύναμη της τριβής Τ και η επιβράδυνση α που αποκτά το σώμα

β. Ο χρόνος t που απαιτείται για να σταματήσει στιγμιαία το σώμα

γ. Η μετατόπιση του σώματος τότε

δ. Θα ξεκινήσει το σώμα να κινείται προς τα κάτω ;

36. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg ανεβαίνει προς τα πάνω παράλληλα στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ με τη βοήθεια δύναμης F = 30 N της οποίας η διεύθυνση είναι παράλληλη στην επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι μ = 0,5 , δίνεται $g = 10\ m/s^2$ και συνφ = 0,8 , ημφ = 0,6 και την $t_0 = 0$ είναι $\upsilon_0 = 0$, να υπολογιστούν :

α. Η δύναμη της τριβής Τ.

β. Η επιτάχυνση α που αποκτά το σώμα.

γ. Ο χρόνος t και η μετατόπιση Δx για να αποκτήσει το σώμα υ = 40 m/s.

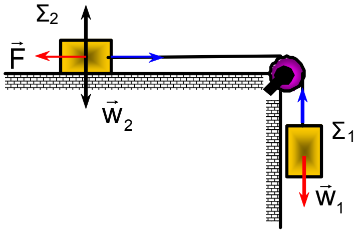
37. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg ανεβαίνει προς τα πάνω παράλληλα στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ με τη βοήθεια δύναμης F = 60 N της οποίας η διεύθυνση είναι **οριζόντια.** Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι μ = 0,5 , συνφ = 0,8 , ημφ = 0,6 , δίνεται $g = 10\ m/s^2$ και την $t_0 = 0$ είναι $\upsilon_0 = 0$, να υπολογιστούν :

α. Η δύναμη της τριβής Τ.

β. Η επιτάχυνση α που αποκτά το σώμα.

γ. Ο χρόνος t και η μετατόπιση Δx για να αποκτήσει το σώμα υ = 20 m/s.

38. Στη διάταξη του σχήματος τα βάρη των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι αντίστοιχα $w_1 = 60$ N και $w_2 = 40$ N , ενώ ο συντελεστής τριβής του σώματος Σ_2 με το δάπεδο είναι μ = 0,2.



α. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F που πρέπει να ασκηθεί οριζόντια στο σώμα Σ_2 ώστε το σώμα Σ_1 να ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 0{,}5\ m/s^2$.

β. Με ποια δύναμη τείνεται το νήμα τότε. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.