2.2 Διατήρηση της ενέργειας

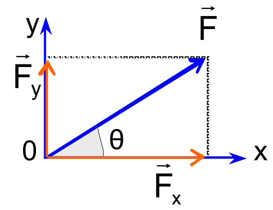
Θεωρία

1. Έργο

α) Ορισμός : Έργο (W) σταθερής δύναμης F η οποία μετατοπίζει ένα σώμα κατά την διεύθυνση της ονομάζεται το γινόμενο της δύναμης επί την μετατόπιση x δηλαδή είναι W = F·x.

Μονάδα έργου είναι το 1 J (joule) και 1 J = 1 N·m .

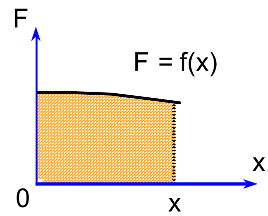
β) Έργο σταθερής δύναμης :



Το έργο σταθερής δύναμης που μετατοπίζει ένα σώμα κατά την διεύθυνση της είναι W = F·x ενώ το έργο δύναμης που είναι κάθετη στην μετατόπιση είναι ίσο με μηδέν. Αν έχουμε σταθερή δύναμη F που σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση της μετατόπισης $\vec{x}$ τότε αν αναλύσουμε την δύναμη σε δυο συνιστώσες όπως στο σχήμα θα έχουμε : $W_F = W_{Fx} + W_{Fy}$ Αλλά $W_{Fy} = 0$ και $F_x = F$·συνθ άρα για το έργο έχουμε $W_F = F$·x·συνθ.Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι το πρόσημο του έργου συμπίπτει με το πρόσημο του συνθ.

Αν $0 \le θ < π/2$ το έργο είναι θετικό (W > 0) ενώ αν $π/2 \le θ \le π$ το έργο είναι αρνητικό (W < 0).

γ) Έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου :



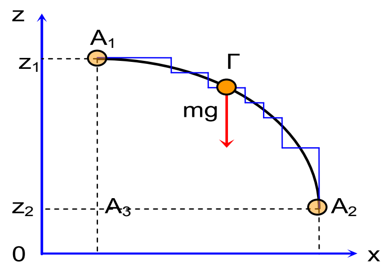
Αν η δύναμη είναι συνάρτηση της μετατόπισης τότε το έργο της υπολογίζεται ως εξής :

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα δύναμης – μετατόπισης. Το έργο της δύναμης για μετατόπιση κατά x είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται από το διάγραμμα F = f(x) , τον άξονα των x και τις καθέτους στον άξονα x οι οποίες αντιστοιχούν στην μετατόπιση x.

Παρατήρηση : Αν κάποιο τμήμα του διαγράμματος είναι κάτω από τον άξονα των x , τότε το έργο είναι αρνητικό για το τμήμα αυτό.

2. Βασικά Έργα

α) Έργο βάρους :



Θεωρούμε μικρή μετατόπιση του σώματος βάρους $m\vec{g}$ στο βαρυτικό πεδίο ώστε η επιτάχυνση $\vec{g}$ να μένει σταθερή. Η τυχαία διαδρομή $A_1ΓA_2$ του σώματος μετατρέπεται στην κλιμακωτή διαδρομή του σχήματος. Έργο του βάρους έχουμε μόνο στις κατακόρυφες μετατοπίσεις και είναι ίσο με το γινόμενο του βάρους επί το αλγεβρικό τους άθροισμα, δηλαδή $mg(A_1A_3)$. Αν τα σκαλοπάτια της κλίμακας γίνουν παρά πολύ μικρά και ταυτόχρονα αυξάνει ο αριθμός τους τότε η κλιμακωτή γραμμή έχει όριο την καμπύλη $A_1ΓA_2$ ενώ το έργο παραμένει σταθερό.

Αλλά η απόσταση $(A_1A_3) = z_1 - z_2$ άρα για το έργο του βάρους γράφουμε $W_{(1\to2)} = mg(z_1 - z_2)$. Δηλαδή το έργο του βάρους είναι ίσο με το γινόμενο του βάρους επί την διαφορά του αρχικού ύψους μείον το τελικό ύψος.

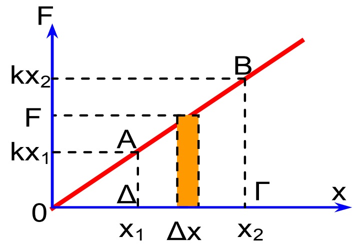
β) Έργο της τριβής ολίσθησης :

Σε μια ευθύγραμμη τροχιά για μετατόπιση $\vec{x}$ το έργο της τριβής ολίσθησης είναι $W_T = T$·x·συν$180^0 \Rightarrow W_T$ = - T·x. Το έργο αυτό είναι πάντα αρνητικό γιατί πάντα η τριβή είναι αντίθετη στην μετατόπιση. Άρα το έργο της τριβής ολίσθησης σε μια κλειστή διαδρομή δεν μπορεί να είναι ποτέ ίσο με μηδέν. Αυτού του είδους οι δυνάμεις λέγονται μη διατηρητικές.

Διατηρητικές (ή συντηρητικές) λέγονται οι δυνάμεις το έργο των οποίων σε μια κλειστή διαδρομή είναι ίσο με μηδέν. Τέτοια δύναμη είναι το βάρος.

Μη διατηρητικές (ή μη συντηρητικές) λέγονται οι δυνάμεις το έργο των οποίων σε μια κλειστή διαδρομή είναι διαφορετικό από μηδέν. Τέτοια δύναμη είναι η τριβή.

γ) Έργο δύναμης ελατήριου :



Η δύναμη η οποία μεταβάλλει το μήκος ελατήριου δίνεται από τον νόμο του Hooke $F = kx$, όπου k η σταθερά του ελατήριου και x η παραμόρφωση μετρημένη από το φυσικό του μήκος ℓ_0. Επειδή η δύναμη δεν είναι σταθερή δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω την $W = Fx$ για τον υπολογισμό του έργου για παραμόρφωση από x_1 έως x_2. Αν χωρίσω την παραμόρφωση σε μικρά κομμάτια Δx τότε η δύναμη θεωρείται σταθερή και το έργο είναι $\Delta W = F\Delta x$. Το άθροισμα αυτών των στοιχειωδών έργων είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν ΑΒΓΔ του τραπεζίου του σχήματος. Το τραπέζιο έχει βάσεις $ΑΔ = kx_1$ και $ΒΓ = kx_2$ και ύψος $x_2 - x_1$. Άρα $W(x_1 \to x_2) = (ΑΒΓΔ) \Rightarrow W_{(x_1 \to x_2)} = \dfrac{(ΑΔ + ΒΓ)ΓΔ}{2} \Rightarrow W(x_1 \to x_2) = \dfrac{(kx_2 + kx_1)\cdot(x_2 - x_1)}{2} \Rightarrow$

$$W(x_1 \to x_2) = \frac{k \times (x_2 + x_1)\cdot(x_2 - x_1)}{2} \Rightarrow W(x_1 \to x_2) = \frac{k \times (x_2^2 - x_1^2)}{2} \Rightarrow W(x_1 \to x_2) = \frac{1}{2}k\,x_2^2 - \frac{1}{2}k\,x_1^2.$$

Αν θεωρήσουμε ότι αρχικά το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος τότε $x_1 = 0$ και έχουμε $W(0 \to x) = \dfrac{1}{2}k\,x^2$. Οι σχέσεις αυτές ισχύουν και για συμπίεση και για επιμήκυνση του ελατήριου.

Παρατήρηση : Τα μήκη x_1 και x_2 είναι μετρημένα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου πάντα.

3. Κινητική Ενέργεια

α) Έργο και κινητική ενέργεια :

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα μάζας m που κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_0$. Κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη F η οποία έχει την διεύθυνση της ταχύτητας. Σε χρόνο t η δύναμη μετατοπίζει το σώμα κατά x. Για την ταχύτητα υ και την μετατόπιση x στο χρόνο t θα ισχύει : $υ = υ_0 + αt$ και $x = υ_0 t + \dfrac{1}{2}αt^2$. Λύνοντας την πρώτη ως προς t έχουμε $t = \dfrac{υ - υ_0}{α}$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη έχουμε

$$x = υ_0\frac{υ - υ_0}{α} + \frac{α}{2}\left(\frac{υ - υ_0}{α}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{υυ_0 - υ_0^2}{α} + \frac{α\left(υ^2 - 2υυ_0 + υ_0^2\right)}{2α^2} \Rightarrow x = \frac{2υυ_0 - 2υ_0^2}{2α} + \frac{υ^2 - 2υυ_0 + υ_0^2}{2α} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2υυ_0 - 2υ_0^2 + υ^2 - 2υυ_0 + υ_0^2}{2α} \Rightarrow x = \frac{υ^2 - υ_0^2}{2α}.$$

Αλλά για την δύναμη ισχύει $F = mα$ και για το έργο $W = F\cdot x$ και αντικαθιστώντας την δύναμη και την μετατόπιση στον τύπο του έργου έχουμε $W = mα\dfrac{υ^2 - υ_0^2}{2α} \Leftrightarrow W = m\dfrac{υ^2 - υ_0^2}{2} \Leftrightarrow W = m\dfrac{υ^2}{2} - m\dfrac{υ_0^2}{2}$.

Η ποσότητα $\dfrac{mυ^2}{2}$ λέγεται κινητική ενέργεια του σώματος και συμβολίζεται με K. Είναι $K = \dfrac{mυ^2}{2}$ άρα $W = K - K_0$. Άρα το έργο της δύναμης χρησιμοποιήθηκε για να αυξήσει την κινητική ενέργεια του σώματος.

β) Το θεώρημα (της μεταβολής) της κινητικής ενέργειας :

Όταν σε κινούμενο σώμα ασκούνται παραπάνω από μια δυνάμεις, κάθε μια από αυτές εκτελεί το έργο της ανεξάρτητα από τις άλλες. Το αλγεβρικό άθροισμα όλων των έργων λέγεται ολικό έργο $W_{ολ}$. Για τον υπολογισμό του έχουμε δυο επιλογές.

- Υπολογίζουμε το έργο κάθε δύναμης χωριστά και το αλγεβρικό άθροισμα των έργων δίνει το $W_{ολ}$ ή
- Υπολογίζουμε την συνιστάμενη δύναμη και το έργο της δίνει το $W_{ολ}$.

Γενικεύοντας την σχέση έργου και κινητικής ενέργειας που αποδείξαμε στο (β) έχουμε το θεώρημα (μεταβολής) της κινητικής ενέργειας : « Σε κάθε μετατόπιση το ολικό έργο των δυνάμεων που ασκήθηκαν στο σώμα είναι ίσο με την μεταβολή που παρουσίασε η κινητική ενέργεια του σώματος », δηλαδή $K_2 - K_1 = W_{ολ}$.

γ) Κινητική ενέργεια συστήματος υλικών σημείων :

Έχουμε ένα σύνολο από υλικά σημεία με μάζες m_1, m_2, m_3, ..., $m_ν$ και ταχύτητες $υ_1$, $υ_2$, $υ_3$, ..., $υ_ν$ αντίστοιχα. Σαν κινητική ενέργεια του συστήματος θεωρούμε το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των υλικών σημείων, δηλαδή $K_{ολ} = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_3υ_2^2 + \frac{1}{2}m_3υ_3^2 + ... + \frac{1}{2}m_νυ_ν^2$

4. Δυναμική Ενέργεια

α) Ορισμός : Δυναμική ενέργεια λέγεται η ενέργεια που έχουν αποθηκευμένη τα σώματα που μπορούν να εκτελέσουν έργο και να μεταδώσουν κίνηση.

β) Βαρυτική δυναμική ενέργεια : λέγεται η δυναμική ενέργεια που έχει ένα σώμα όταν βρίσκεται σε ορισμένο ύψος από το έδαφος και έχει βάρος. Έχουμε δείξει ότι το έργο του βάρους για μετακίνηση σώματος μάζας m από ύψος z_1 σε ύψος z_2 από το έδαφος είναι $W_{(1\to2)} = mg(z_1 - z_2)$ άρα $W_{(1\to2)} = mgz_1 - mgz_2$. Ονομάζοντας U = mgz δυναμική ενέργεια έχουμε $W_{(1\to2)} = U_1 - U_2$. Η ποσότητα U = mgz δίνει το έργο του βάρους για μετατόπιση z.

Γενικεύοντας ορίζουμε σαν δυναμική βαρυτική ενέργεια ενός σώματος την ποσότητα U = mgz όπου z η απόσταση του σώματος από κάποια οριζόντια επιφάνεια αναφοράς.

Από την $W_{(1\to2)} = U_1 - U_2 \Rightarrow W_w = -(U_2 - U_1) \Rightarrow W_w = -ΔU \Rightarrow ΔU = -W_w$. Δηλαδή η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετη από το έργο του βάρους.

γ) Δυναμική ενέργεια (γενίκευση) : Σε κάθε σύστημα σωμάτων που αλληλεπιδρούν και οι αλληλεπιδράσεις περιγράφονται με διατηρητικές δυνάμεις αντιστοιχεί κάποια δυναμική ενέργεια. Η τιμή της μεταβάλλεται εφόσον τα σώματα παρουσιάσουν σχετική μετακίνηση. Οι μεταβολές της είναι αντίθετες με το έργο των δυνάμεων που περιγράφουν την αλληλεπίδραση. Δηλαδή $ΔU = -W_{αλ}$.

δ) Ελαστική δυναμική ενέργεια ελατηρίου : θεωρούμε ένα ελατήριο τεντωμένο ή συσπειρωμένο κατά x από το φυσικό του μήκος. Για να ισορροπεί σε αυτή τη θέση το ελατήριο πρέπει να ασκείται εξωτερική δύναμη που δίνεται από τον νόμο του Hooke $F_{εξ} = kx$. Για μεταβολή της παραμόρφωσης από x_1 σε x_2 η εξωτερική δύναμη εκτελεί έργο το οποίο είναι $W_{εξ(x_1\to x_2)} = \frac{1}{2}k\,x_2^2 - \frac{1}{2}k\,x_1^2$. Αν δεχτούμε ότι η εξωτερική δύναμη ενεργεί αργά ώστε κατά την μεταβολή της παραμόρφωσης να έχουμε διαρκώς ισορροπία της εξωτερικής δύναμης και της δύναμης αλληλεπίδρασης από το ελατήριο, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι μηδέν. Από το θεώρημα κινητικής ενέργειας έχουμε :

$ΔK = W_{εξ(x1\to x2)} + W_{αλ(x1\to x2)} = 0 \Rightarrow W_{εξ(x1\to x2)} = -W_{αλ(x1\to x2)}$. Αλλά $W_{εξ(x_1\to x_2)} = \frac{1}{2}k\,x_2^2 - \frac{1}{2}k\,x_1^2$ άρα

$-W_{αλ(x_1\to x_2)} = \frac{1}{2}k\,x_2^2 - \frac{1}{2}k\,x_1^2 \Rightarrow W_{αλ(x_1\to x_2)} = \frac{1}{2}k\,x_1^2 - \frac{1}{2}k\,x_2^2 \Rightarrow W_{αλ(x1\to x2)} = U_1 - U_2$.

Ονομάσαμε $U = \frac{1}{2}k\cdot x^2$ την ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Αυτή δίνει το έργο που έχει την δυνατότητα να εκτελέσει ένα παραμορφωμένο ελατήριο μέχρι να επανέλθει στο φυσικό του μήκος ή το έργο που εκτελέσαμε για να γίνει αυτή η παραμόρφωση.

ε) Δυναμική ενέργεια και ισορροπία : Ένα σώμα που βρίσκεται σε ασταθή ισορροπία έχει την μέγιστη δυναμική ενέργεια και σε οποιαδήποτε μετατόπιση η δυναμική ενέργεια του μειώνεται. Ένα σώμα που βρίσκεται σε αδιάφορη ισορροπία έχει κάποια δυναμική ενέργεια και σε οποιαδήποτε μετατόπιση η ενέργεια αυτή παραμένει σταθερή. Ένα σώμα που βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια και σε οποιαδήποτε μετατόπιση η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται.

Γενικότερα ένα σύστημα , τα σώματα του οποίου αλληλεπιδρούν τείνει αυθόρμητα να μεταπέσει σε μια κατάσταση στην οποία η δυναμική του ενέργεια θα είναι ελάχιστη.

5. Μηχανική Ενέργεια

α) Ορισμός : Μηχανική ενέργεια (Ε) ονομάζεται το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος δηλαδή είναι : Ε = Κ + U β) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται : Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα σωμάτων στο οποίο δρουν μόνο εσωτερικές διατηρητικές δυνάμεις έχουμε $W_{ολ} = ΔK$ και $W_{αλ} = -ΔU$ και επιπλέον $W_{ολ} = W_{αλ}$. Άρα $ΔK = -ΔU \Rightarrow K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1) \Rightarrow K_2 - K_1 = -U_2 + U_1 \Rightarrow K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \Rightarrow E_2 = E_1$.

Το τελευταίο συμπέρασμα είναι η μαθηματική έκφραση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας « Σε κάθε κλειστό σύστημα , στο οποίο εμφανίζονται μόνο εσωτερικές διατηρητικές δυνάμεις , το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας (δηλαδή η μηχανική ενέργεια) διατηρείται σταθερό ».

6. Ισχύς - Απόδοση Μηχανής

α) Ισχύς (P) : ορίζεται το πηλίκο του έργου W που εκτελέστηκε σε κάποιο χρόνο t προς τον χρόνο αυτό. Η ισχύς εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο αποδίδεται η προσφέρεται ενέργεια. Δηλαδή $P = \frac{W}{t}$.

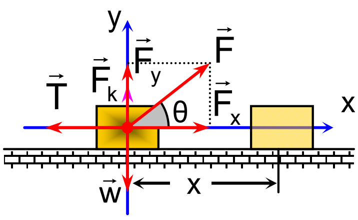
Μονάδα ισχύος είναι το 1 W (Watt) και 1 W = 1 J/s .

Παρατήρηση : Για την ισχύ σταθερής δύναμης έχουμε : Το έργο της δύναμης δίνεται από την σχέση $W = F\cdot x$ άρα η ισχύς είναι $P = \frac{W}{t}$ ή $P = \frac{F\cdot x}{t}$ αλλά $υ = \frac{x}{t}$ άρα $P = F\cdot υ$

β) Απόδοση μηχανής (α) : Η ισχύς που αποδίδει μια μηχανή όταν λειτουργεί ονομάζεται ωφέλιμη ισχύς ($P_{ωφ}$), ενώ η ισχύς με την οποία την τροφοδοτούμε ονομάζεται καταναλισκόμενη ισχύς ($P_{κατ}$). Συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής ονομάζεται ο λόγος της ωφέλιμης ισχύος προς την καταναλισκόμενη ισχύ : $α = \frac{P_{ωφ}}{P_{δαπ}}$. Ισχύει πάντα $0 \le α \le 1$.

Λυμένα Παραδείγματα

1. Σε σώμα μάζας m = 5 kg που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται σταθερή δύναμη με μέτρο F = 50 N που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια επιφάνεια. Για την γωνία θ ισχύει ημθ = 0.6 και συνθ = 0.8. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιφάνειας είναι μ = 0.5. Το σώμα μετατοπίζεται οριζόντια κατά x = 10 m. Να βρεθούν α) Το έργο κάθε δύναμης που ασκείται στο σώμα, β) το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων, γ) η συνισταμένη δύναμη και δ) το έργο της συνισταμένης δύναμης και να συγκριθεί με το αποτέλεσμα του (β).



Λύση

α) Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : Το βάρος $\vec{w}$, η δύναμη $\vec{F}$, η δύναμη στήριξης $\vec{F}_κ$ και η τριβή $\vec{T}$. Η δύναμη F αναλύεται στις συνιστώσες $F_x = Fσυνθ$ και $F_y = Fημθ$.Στον άξονα y έχουμε ισορροπία άρα $ΣF_y = 0$ άρα $F_y + F_κ - w = 0$ ή $F_κ = mg - Fημθ$ ή $F_κ = 5\cdot10 - 50\cdot0.6$ ή $F_κ = 20$ N.

Για την τριβή έχουμε $T = μF_κ$ ή $T = 0.5\cdot20$ ή T = 10 N.

Τα έργα των δυνάμεων είναι :

- $W_F = F\cdot x\cdot συνθ$ ή $W_F = 50\cdot10\cdot0.8$ ή $W_F = 400$ J
- $W_w = 0$ (Το βάρος είναι κάθετο στη μετατόπιση)
- $W_{F_κ} = 0$ (Η δύναμη στήριξης είναι κάθετη στη μετατόπιση)
- $W_T = -T\cdot x$ ή $W_T = -10\cdot10$ ή $W_T = -100$ J

β) Είναι $W_{ολ} = W_F + W_B + W_{F_κ} + W_T = 400 + 0 + 0 + (-100) = 300$ J

γ) Επειδή $ΣF_y = 0$ η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με F_x άρα $F_{ολ} = ΣF_x$ ή $F_{ολ} = F_x - T$ ή $F_{ολ} = Fσυνθ - T$ ή $F_{ολ} = 50\cdot0.8 - 10$ ή $F_{ολ} = 30$ N

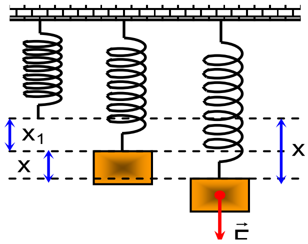
δ) $W_{ολ} = F_{ολ}\cdot x$ ή $W_{ολ} = 30\cdot10$ ή $W_{ολ} = 300$ J

Παρατηρούμε ότι : ‘‘ Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων είναι ίσο με το έργο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα ’’.

2. Το πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς κ = 200 N/m είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Στο κάτω άκρο κρέμεται ένα σώμα μάζας m = 4 kg και το κατεβάζουμε σιγά – σιγά μέχρι να ηρεμήσει σε κάποια θέση. α) Να βρεθεί η επιμήκυνση του ελατηρίου αν δίνεται $g = 10\ m/s^2$. β) Ασκούμε δύναμη F στο σώμα και το μετατοπίζουμε σιγά – σιγά προς τα κάτω κατά x = 0,1 m. Να υπολογιστεί το έργο του βάρους και το έργο της δύναμης του ελατηρίου για αυτή τη μετατόπιση.

Λύση

α) Στη θέση ισορροπίας στο σώμα ασκούνται : Το βάρος και η δύναμη από το ελατήριο. Από την συνθήκη ισορροπίας έχουμε ΣF = 0 ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $mg = kx_1$ ή $x_1 = \frac{mg}{k}$ ή $x_1 = \frac{4\cdot 10}{200}$ ή $x_1 = 0.2$ m.



β) Για την μετατόπιση x_2 το έργο του βάρους είναι $W_w = mgx_2$ ή $W_w = 4\cdot 10\cdot 0.1$ ή $W_w = 4$ J

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι $W_{ελ} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$.

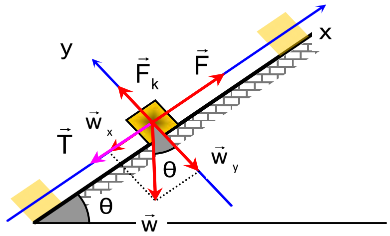
Αλλά $x_2 = x_1 + x = 0.2 + 0.1 = 0.3$ m άρα $W_{ελ} = \frac{1}{2}\cdot 400\cdot 0.2^2 - \frac{1}{2}\cdot 400\cdot 0.3^2$ ή $W_{ελ} = -5$ J.

3. Σώμα μάζας m = 2 kg μεταφέρεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου κλίσης θ , με ημθ = 0,6 και συνθ = 0,8 , στην κορυφή με την δράση δύναμης F. Η δύναμη έχει μέτρο F = 40 N και διεύθυνση παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο με φορά προς τα πάνω. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και το κεκλιμένο επίπεδο είναι μ = 0.5. Να βρεθεί το έργο της κάθε δύναμης για μετατόπιση x = 10 m αν $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις :

Το βάρος $\vec{w}$, η δύναμη $\vec{F}$, η δύναμη στήριξης από το δάπεδο $\vec{F}_κ$, και η τριβή $\vec{T}$. Θεωρούμε τον άξονα x (παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο) και τον άξονα y (κάθετο στον x). Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες την w_x = mgημθ και την w_y = mgσυνθ , όπως στο σχήμα.



Υπολογισμός τριβής :

Η συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y δίνει : $ΣF_y = 0$ ή $F_k - w_y = 0$ ή F_k = mgσυνθ ή $F_k = 2\cdot 10\cdot 0.8$ ή $F_k = 16$ N

Για την τριβή ισχύει $T = μ\cdot F_k$ ή $T = 0.5\cdot 16$ ή T = 8 N.

Υπολογισμός έργων των δυνάμεων :

Για το έργο της κάθε δύναμης έχουμε :

- Δύναμη F : $W = F\cdot x\cdot συν0^0$ ή $W = 40\cdot 10\cdot 1$ ή W = 400 J
- Βάρος w : $W = W_{w_x} + W_{w_y}$ ή $W = -mgημθ\cdot x + 0$ ή $W = -2\cdot 10\cdot 0.6\cdot 10$ ή W = – 120 J
- Τριβή T : $W = -T\cdot x$ ή $T = -8\cdot 10$ ή T = – 80 J
- Δύναμη στήριξης F_k : W = 0 (γιατί η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση)

4. Σε σώμα με μάζα m = 10 kg που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντια επιφάνεια ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F = 60 N. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι μ = 0.2. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που έχει διανύσει απόσταση x = 8 m. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα.

Υπολογισμός τριβής : Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί άρα $ΣF_y = 0$ επομένως $F_k - w = 0$ άρα $F_k = m\cdot g$. Για την τριβή ισχύει $T = μ\cdot F_k$ άρα $T = μ\cdot m\cdot g$ ή $T = 0.2\cdot 10\cdot 10$ ή T = 20 N

Θεώρημα της κινητικής ενέργειας :

$K_2 - K_1 = W_{ολ}$ άρα $\frac{1}{2}mυ^2 - 0 = W_F + W_T + W_w + W_{F_k}$ ❶

Υπολογισμός έργων των δυνάμεων :

- $W_F = F \cdot x$ ή $W_F = 60 \cdot 8$ άρα $W_F = 480$ J
- $W_T = -T \cdot x$ ή $W_T = -20 \cdot 8$ άρα $W_T = -160$ J
- $W_w = W_{F_k} = 0$

❶ $\Rightarrow \frac{1}{2}mυ^2 = W_F + W_T + W_w + W_{F_k}$ άρα $υ = \sqrt{\frac{2(W_F + W_T + W_w + W_{F_k})}{m}}$ άρα $υ = \sqrt{\frac{2(480 - 160 + 0 + 0)}{10}}$ ή υ = 8 m/s.

5. Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς κ είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο του. Στο πάνω άκρο του προσθέτουμε σώμα μάζας m = 2 kg και το συγκρατούμε ώστε το ελατήριο να είναι συμπιεσμένο κατά $x_1 = 0.3$ m. Όταν αφήσουμε ελεύθερο το σώμα , τότε αυτό κινείται προς τα πάνω και φθάνει σε ύψος h = 0.4 m πάνω από την αρχική του θέση. Να βρεθεί η σταθερά k του ελατηρίου. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

Παραμορφώσεις του ελατηρίου :

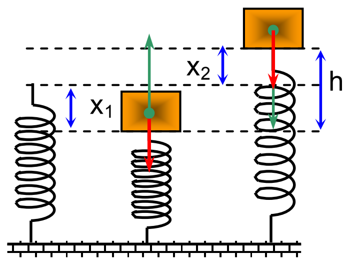
Στην αρχική θέση το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά x_1. Στην τελική θέση το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $x_2 = h - x_1 = 0.4 - 0.3$ άρα $x_2 = 0.1$ m.

☺ Οι παραμορφώσεις του ελατηρίου είναι πάντα μετρημένες από το φυσικό του μήκος ! ! !

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : Το βάρος του και η δύναμη από το ελατήριο.

Θεώρημα της κινητικής ενέργειας : $K_2 - K_1 = W_{ολ}$ άρα $0 - 0 = W_{ελ} + W_w$ ❶

Υπολογισμός έργων των δυνάμεων :



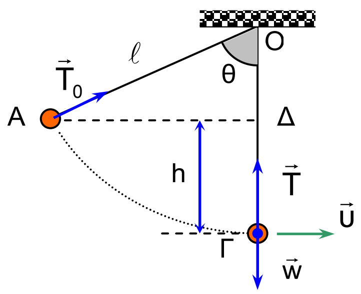
- $W_{ελ} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$
- $W_w = -mgh$

❶ $\Rightarrow W_{ελ} + W_w = 0$ άρα $\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + (-mgh) = 0$ ή $\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2) = mgh$

άρα $k = \frac{2mgh}{x_1^2 - x_2^2}$ ή $k = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0,4}{0.3^2 - 0.1^2}$ επομένως **k = 200 N/m**.

6. Προσδένουμε ένα μικρό σώμα μάζας m = 1 kg στην άκρη νήματος με μήκος ℓ = 0,4 m. Κρατάμε το νήμα τεντωμένο ώστε να σχηματίζει γωνία θ = 60^0 με τη κατακόρυφο. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν διέρχεται από τη χαμηλότερη θέση της τροχιά του. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση



Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : Το βάρος και η τάση του νήματος (Η τάση μεταβάλλεται συνέχεια κατά την κίνηση του σώματος , αλλά είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση γιατί έχει τη κατεύθυνση της ακτίνας , άρα δεν εκτελεί έργο).

Επειδή η μόνη δύναμη που εκτελεί έργο στο σώμα είναι το βάρος , η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Αν θεωρήσουμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την κατώτερη θέση του σώματος έχουμε :

$E_{(A)} = E_{(Γ)}$ άρα $K_A + U_A = K_Γ + U_Γ$ ή $0 + mgh = \frac{1}{2}mυ^2 + 0$ άρα $υ = \sqrt{2gh}$ ❶

Υπολογισμός της υψομετρικής διαφοράς :

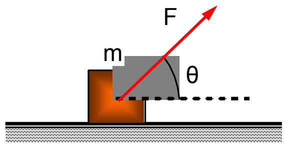
Από το τρίγωνο ΟΑΔ το τμήμα ΟΔ είναι : ΟΔ = ΑΟ·συνθ επομένως ΟΔ = ℓ·συνθ.

Για το h είναι : h = ΟΓ – ΟΔ άρα h = $\ell - \ell$·συνθ ή h = ℓ·(1 – συνθ) ❷

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στις περισσότερες περιπτώσεις που απαιτείται η υψομετρική διαφορά δύο θέσεων στην κίνηση εκκρεμούς.

Από τις σχέσεις ❶ και ❷ έχουμε : $\upsilon = \sqrt{2 \cdot g \cdot \ell \cdot (1 - \text{συν}\theta)}$ ή $\upsilon = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,5)}$ ή υ = 2 m/s.

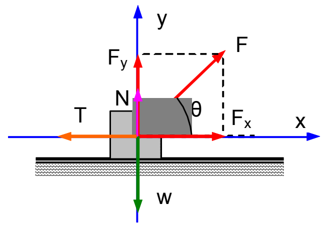
7. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει μ = 0,25. Ασκούμε στο σώμα δύναμη F , που η τιμή της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του σημείου εφαρμογής της , σύμφωνα με τη σχέση F = 10 + 5·x (x σε m , F σε N). Να υπολογίσετε :



α. Κατά πόσο θα μετακινηθεί το σώμα , πριν εγκαταλείψει το οριζόντιο επίπεδο ;
β. Την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο.
Δίνεται : ημθ = 0,8 , συνθ = 0,6 και g = 10 m/s^2.

Λύση

α. Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις : το βάρος w , η κάθετη αντίδραση N , η δύναμη της τριβής T και η δύναμη F.



Αναλύουμε τη δύναμη F στις συνιστώσες :

F_x = Fσυνθ ή $F_x = (10 + 5x)0,6$ άρα $F_x = 6 + 3x$ (S.I.)

F_y = Fημθ ή $F_y = (10 + 5x)0,8$ άρα $F_y = 8 + 4x$ (S.I.)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί , άρα ΣF = 0 ή N + F_y – w = 0 άρα N = mg – F_y επομένως N = 2 ·10 m/s^2 – (8 + 4x) N άρα $N = (12 - 4x)$ (S.I.) .

Η τριβή δίνεται από τον νόμο της τριβής ολίσθησης T = μ·N ή $T = 0,25 \cdot (12 - 4x)$ (S.I.) άρα $T = (3 - x)$ (S.I.) ❶

Το σώμα εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο όταν N = 0 άρα $12 - 4x = 0$ άρα $x = 3\,m$.

β. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για μετατόπιση του σώματος κατά Δx = 3 m άρα $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ}$, όπου $K_{τελ} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ και $K_{αρχ} = 0$ ❷

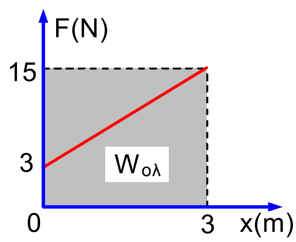
Η συνισταμένη δύναμη στον άξονα των x είναι ΣF_x = F_x – T άρα λόγω της ❶ έχουμε $\Sigma F_x = 6 + 3x - (3 - x)$ άρα $\Sigma F_x = (3 + 4x)$ (S.I.)

Το έργο της συνισταμένης δύναμης για μετατόπιση x = 3 m θα υπολογιστεί από το διάγραμμα ΣF_x – x.

Είναι $\Sigma F_x = (3 + 4x)$ (S.I.)

Για x = 0 είναι ΣF_x = 3 N

Για x = 3 m είναι ΣF_x = 15 N



Από το διάγραμμα $W_{ολ} = \frac{(3 + 15) \cdot 3}{2}$ άρα $W_{ολ}$ = 27 J.

Από τις σχέσεις ❷ έχουμε $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = W_{ολ}$ άρα $\upsilon^2 = \frac{2W_{ολ}}{m}$ ή $\upsilon = \sqrt{\frac{2W_{ολ}}{m}}$ άρα

$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 27\,J}{2\,kg}}$ επομένως $\upsilon = 3\sqrt{3}\,m/s$

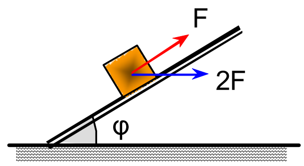
Άλυτες Ασκήσεις

1. Σε σώμα μάζας m = 10 kg που αρχικά ισορροπεί σε λείο και οριζόντιο δάπεδο ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη που το μετακινεί για χρόνο t = 10 s με επιτάχυνση α = 0,5 m/s^2. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης που ασκείται στο σώμα.

2. Σε σώμα μάζας m = 2 kg , που ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται στην αρχή μέτρησης των χρόνων σταθερή οριζόντια δύναμη F = 10 N. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F από τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 10$ s, αν ο συντελεστής τριβής σώματος - επιπέδου είναι $\mu = 0{,}1$. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

3. Σε σώμα μάζας m = 5 kg που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο , ασκείται οριζόντια δύναμη F = 15 N και το μετατοπίζει κατά διάστημα $x_1 = 2$ m. Στη συνέχεια καταργείται η δύναμη και το σώμα διανύει διάστημα $x_2 = 3$ m μέχρι να σταματήσει. Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

4. Σώμα μάζας m = 5 kg ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^o$ με την επίδραση δύο δυνάμεων με μέτρα F και 2F όπως στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής σώματος κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu = \sqrt{3}/5$ να υπολογιστεί το έργο κάθε δύναμης καθώς και το συνολικό έργο, για μετατόπιση του σώματος κατά x = 2 m. Δίνεται F = 100 N και $g = 10$ m/s^2.



5. Σώμα μάζας m = 20 kg ξεκινάει από την ηρεμία , σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F = 130 N. Το σώμα αποκτά ταχύτητα υ = 10 m/s όταν μετατοπιστεί κατά x = 20 m από την αρχική θέση. Να εξεταστεί αν υπάρχει τριβή και να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής. Δίνεται το $g = 10$ m/s^2.

6. Σώμα μάζας m αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου ύψους h = 5 m. Το σώμα ολισθαίνει , φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο , συνεχίζει την κίνησή του και τελικά σταματά σε σημείο Δ. Αν η απόσταση του Δ από την προβολή του σημείου που αφήνεται το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο απέχει απόσταση d = 10 m να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής μ , αν είναι ο ίδιος για όλες τις επιφάνειες.

7. Σώμα μάζας m = 0,2kg βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 100$ m/s. Σε κάποιο ύψος της κατακόρυφου συναντάει στρώμα παραφίνης πάχους d = 2cm , το οποίο διαπερνά και τελικά το σώμα ανέρχεται σε ύψος h = 400 m από το σημείο εκτόξευσης. Να υπολογιστεί η δύναμη F που άσκησε η παραφίνη στο σώμα αν θεωρηθεί σταθερή. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

8. Σώμα βάρους w = 100 N βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο και ηρεμεί. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F = 30 N και μετακινεί το σώμα και $x_1 = 4$ m και στη συνέχεια παύει να ενεργεί στο σώμα. Το σώμα μετατοπίζεται ακόμη κατά $x_2 = 2$ m και σταματάει.

α. Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής σώματος δαπέδου ,

β. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις υ = f(t) , α = f(t) και x = f(t).

9. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_o κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνιακής κλίσης φ , με το οποίο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής μ. Αν εφφ > μ , να υπολογίσετε την απώλεια ενέργειας ΔΕ μέχρι το σώμα να επιστρέψει στο σημείο από το οποίο εκτοξεύτηκε.

10. Σε ελατήριο εφαρμόζουμε δύναμη $F_1 = 50$ N και επιμηκύνεται κατά $\Delta l_1 = 0{,}2$ m. Πόση δυναμική ενέργεια έχει το ίδιο ελατήριο , όταν επιμηκυνθεί από δύναμη $F_2 = 80$ N.

11. Ελατήριο έχει φυσικό μήκος $l_o = 0{,}3$ m και σταθερά $k = 10^3$ N/m. Μια δύναμη αυξάνει το μήκος του ελατηρίου από $l_1 = 0{,}5$ m σε $l_2 = 0{,}6$ m. Πόσο έργο παράγει αυτή η δύναμη ;

12. Στο ελατήριο δυναμόμετρου εφαρμόζουμε δύναμη $F_1 = 100$ N και τότε το ελατήριο επιμηκύνεται κατά x_1. Στο ελατήριο του ίδιου δυναμόμετρου εφαρμόζουμε μαζί με την F_1 και μια άλλη δύναμη $F_2 = 200$ N που προκαλεί αύξηση της επιμήκυνσης του ελατηρίου κατά $x_2 = 20$ cm.

α. Πόσο έργο παράγεται κατά τη δεύτερη επιμήκυνση του ελατήριου

β. πόση είναι η ολική ενέργεια του τεντωμένου ελατηρίου.

13. Σφαίρα μάζας m = 0,5 kg αφήνεται να πέσει από ύψος h = 22 m πάνω από το έδαφος. Σε ύψος $h_1 = 2$ m από το έδαφος συναντά στρώμα παραφίνης πάχους s = 1 m το οποίο διαπερνά και βγαίνει από αυτό με υ = 4 m/s , ενώ στη συνέχεια πέφτει στο έδαφος. Ζητείται :

α. η απώλεια ενέργειας της σφαίρας μέσα στην παραφίνη.

β. η ταχύτητα υ΄ με την οποία η σφαίρα πέφτει στο έδαφος και

γ. η αντίσταση της παραφίνης αν θεωρηθεί σταθερή. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

14. Αυτοκίνητο μάζας m = 1000 kg και ισχύος P = 120 kW , αποκτά μέγιστη ταχύτητα υ = 72 km/h. Να υπολογιστεί η μέγιστη επιτάχυνση α με την οποία μπορεί να κινηθεί το αυτοκίνητο.