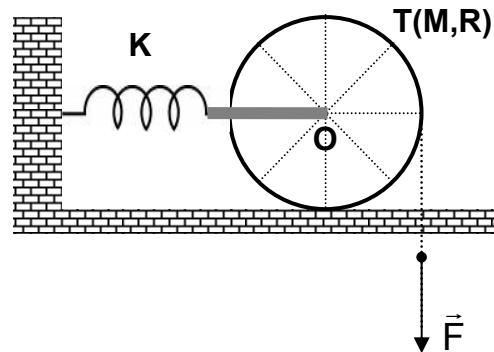


ΘΕΜΑ Δ

Ομογενής κυκλικός τροχός T ακτίνας R και μάζας $M=10\text{Kg}$ εφάπτεται σε οριζόντιο επίπεδο. Στην περιφέρεια του τροχού T είναι τυλιγμένο αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους. Ο άξονας O του τροχού είναι συνδεδεμένος μέσω οριζόντιας άκαμπτης αβαρούς ράβδου με το ελεύθερο άκρο ιδανικού οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο. Η διάταξη αρχικά ηρεμεί.



A. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος εφαρμόζουμε σταθερή κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F=10\text{N}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το νήμα ξετυλίγεται κατακόρυφα χωρίς να γλιστρά ενώ τροχός T κυλιέται χωρίς ολίσθηση.

A1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του άξονα του τροχού T σε συνάρτηση με την επιμήκυνση του ελατηρίου.

A2. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ τροχού και δαπέδου είναι $\mu_s=0,5$ να υπολογίσετε τη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου για την οποία ο τροχός T δεν ολισθαίνει.

A3. Να υπολογίσετε το ποσοστό της ενέργειας που παρέχει η δύναμη F , το οποίο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια περιστροφής του τροχού T , αν το ελατήριο υποστεί επιμήκυνση $\Delta x=0,1\text{m}$.

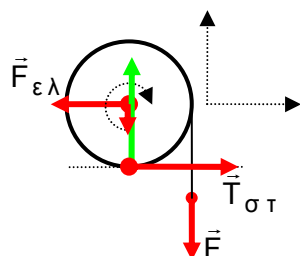
B. Να δείξετε ότι αν καταργηθεί η δύναμη F , ενώ το ελατήριο έχει υποστεί επιμήκυνση, ο άξονας του τροχού T εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς.

Μεταξύ της ράβδου και του τροχού δεν εμφανίζονται τριβές. Θεωρήστε ότι η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του. Η διάταξη βρίσκεται διαρκώς στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Συνοπτικές απαντήσεις

A1

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:



$$\Sigma F_x = Ma_{cm}$$

$$T_{\sigma\tau} - F_{\varepsilon\lambda} = Ma_{cm}$$

$$T_{\sigma\tau} - K\Delta x = Ma_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma T_{cm} = I_{cm}a_R, a_R = a_{cm} / R$$

$$FR - T_{\sigma\tau}R = MR^2 \frac{a_{cm}}{R}$$

$$F - T_{\sigma\tau} = Ma_{cm} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$F - K\Delta x = 2Ma_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{F - K\Delta x}{2M}$$

Τελικά:

$$a_{cm} = 0,5 - 5\Delta x \text{ (S. I.)}$$

όπου Δx η επιμήκυνση του ελατηρίου και η μετατόπιση του άξονα του τροχού.

A2

Στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N = F + Mg$$

Επίσης από (1) και (2)

$$T_{\sigma\tau} - K\Delta x = F - T_{\sigma\tau}$$

$$2T_{\sigma\tau} = F + K\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{2T_{\sigma\tau} - F}{K}$$

$$(\Delta x)_{max} = \frac{2T_{\sigma\tau,max} - F}{2}$$

$$(\Delta x)_{max} = \frac{2\mu_s N - F}{K}$$

$$(\Delta x)_{max} = \frac{2\mu_s(F + Mg) - F}{K}$$

$$(\Delta x)_{max} = \frac{F(2\mu_s - 1) + 2\mu_s Mg}{K}$$

$$(\Delta x)_{max} = 1m$$

A3

Η παρεχομένη ενέργεια μέσω έργου της δύναμης \vec{F} είναι:

$$W_F = FR\Delta\varphi, \Delta\varphi = \Delta x / R$$

$$W_F = F\Delta x = 1J$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = 0 - \frac{1}{2}K(\Delta x)^2$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -0,5J$$

Για την κινητική ενέργεια του τροχού T έχουμε:

$$\frac{K_{\pi\epsilon\rho}}{K_{\mu\epsilon\tau}} = \frac{1}{2}I\omega^2 / \frac{1}{2}Mu_{cm}^2 = 1$$

$$K_{\pi\epsilon\rho} = K_{\mu\epsilon\tau}$$

$$K = K_{\pi\epsilon\rho} + K_{\mu\epsilon\tau} = 2K_{\pi\epsilon\rho}$$

$$\Delta K = 2\Delta K_{\pi\epsilon\rho}$$

Από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας:

$$\Sigma W = \Delta K = 2\Delta K_{\pi\epsilon\rho}$$

$$\Delta K_{\pi\epsilon\rho} = \Sigma W / 2 = 0,25J$$

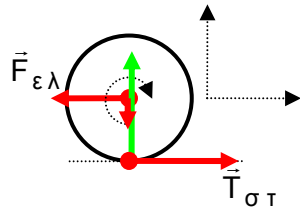
Τελικά το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi = \left(\frac{\Delta K_{\pi\epsilon\rho}}{W_F} 100 \right) \%$$

$$\Pi = 25\%$$

B.

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:



$$\Sigma F_x = Ma_{cm}$$

$$T_{στ} - F_{ελ} = Ma_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma T_{cm} = I_{cm} a_R, a_R = a_{cm} / R$$

$$-T_{στ} R = MR^2 \frac{a_{cm}}{R}$$

$$-T_{στ} = Ma_{cm} \quad (2)$$

Από (1) και (2)

$$T_{στ} - F_{ελ} = -T_{στ}$$

$$2T_{στ} = F_{ελ}$$

$$T_{στ} = \frac{F_{ελ}}{2}$$

Άρα το κέντρο μάζας εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς

$$D = \frac{K}{2} = 50 \text{ N/m}$$

Έστω $x=0$ η θέση ισορροπίας του κέντρου μάζας του τροχού. Σε τυχαία θέση x έχουμε:

$$\Sigma F_x = T_{στ} - F_{ελ}$$

$$\Sigma F_x = \frac{F_{ελ}}{2} - F_{ελ}$$

$$\Sigma F_x = -\frac{F_{ελ}}{2}$$

$$\Sigma F_x = -\frac{K}{2} x$$

Κ. Μυσίρης