Μηχανικές ταλαντώσεις

Κεφάλαιο 1ο

- **Θεωρία**
  (ορισμοί – εξισώσεις – διαγράμματα – πίνακες)

Περιοδικά φαινόμενα

1. ***Ορισμός*** Καλούνται τα φαινόμενα τα οποία εξελίσσονται και επαναλαμβάνονται (με τον ίδιο ακριβώς τρόπο) σε σταθερά χρονικά διαστήματα.

2. ***Παραδείγματα*** οι κινήσεις των δεικτών ενός ρολογιού, η κίνηση της κούνιας σε παιδική χαρά, η ομαλή κυκλική κίνηση.

3. ***Χαρακτηριστικά μεγέθη***

α) ***Περίοδος (Τ)*** είναι ο χρόνος μέσα στον οποίο ολοκληρώνεται το περιοδικό φαινόμενο. Μετριέται σε **s**.

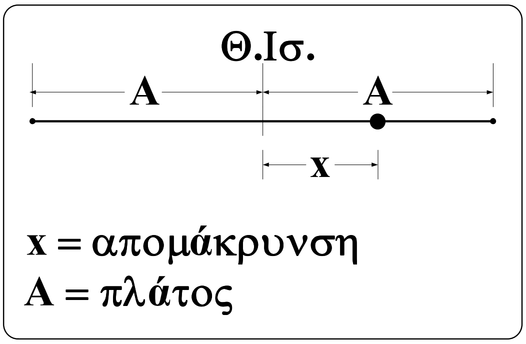
β) ***Συχνότητα (f)*** είναι ο αριθμός των επαναλήψεων του φαινομένου σε χρόνο **(t)** προς το χρόνο αυτό **(t)**.

Εξίσωση συχνότητας $\mathbf{f = \frac{N_{(t)}}{t}}$ ***μονάδα*** $\mathbf{s^{-1}}$ **(ή Hz)**

Σχέση συχνότητας και περιόδου Για **Ν = 1**, τότε **t = T** οπότε: $\mathbf{f = \frac{1}{T}}$.

4. ***Ταλάντωση*** ονομάζεται κάθε παλινδρομική κίνηση, όπου το σώμα κινείται ανάμεσα σε δύο ακραίες θέσεις.

5. ***Γραμμική αρμονική ταλάντωση*** είναι η ταλάντωση όπου το σώμα κινείται πάνω σε ευθεία τροχιά.

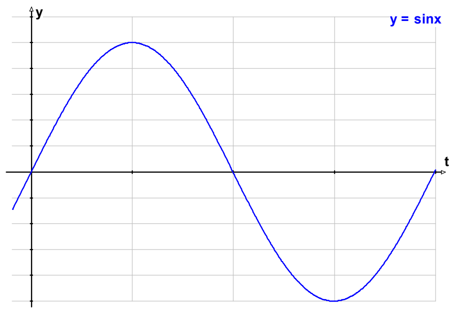


ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

1. Απομάκρυνση

$x_{(t)} = A \cdot ημ(ωt)$ **(Ορισμός Γ.Α.Τ.)** **(1)**

Γενικότερα: $x_{(t)} = A \cdot ημ(ω \cdot t + φ_o)$ **(1α)**

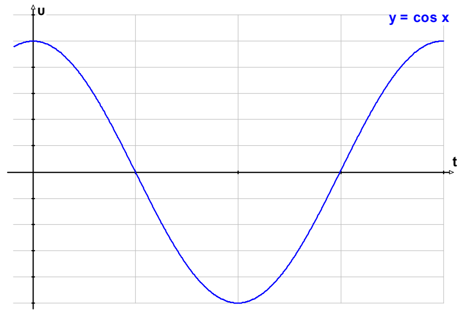


x = f(t)

2. Ταχύτητα $\left(υ = \frac{dx}{dt}\right)$

$υ_{(t)} = υ_{max} \cdot συν(ωt) = ω \cdot A \cdot συν(ωt)$ **(2)**

ή $υ_{(t)} = ω \cdot A \cdot ημ\left(ωt + \frac{π}{2}\right)$ **(2α)**



υ = f(t)

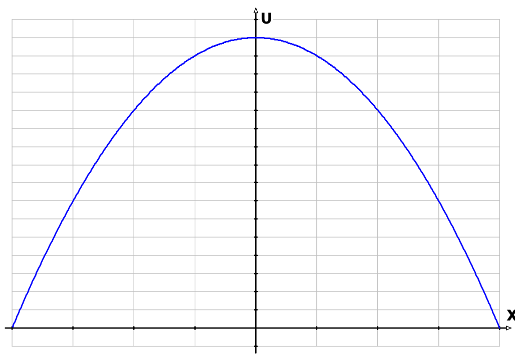
- **Σχέση μεταξύ $υ_{(t)}$ και $x_{(t)}$**

$(1) \Rightarrow ημ(ωt) = \frac{x_{(t)}}{A} \Rightarrow ημ^2(ωt) = \left(\frac{x_{(t)}}{A}\right)^2$ **(1')**

$(2) \Rightarrow συν(ωt) = \frac{υ_{(t)}}{ω \cdot A} \Rightarrow συν^2(ωt) = \left(\frac{υ_{(t)}}{ω \cdot A}\right)^2$ **(2')**

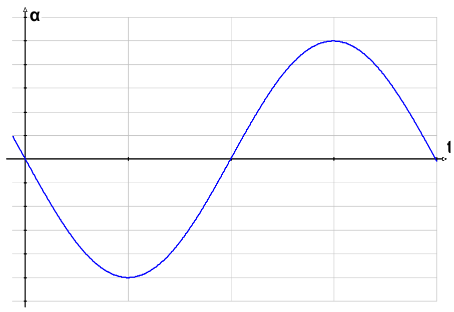
$(1') + (2') \Rightarrow 1 = \left(\frac{x_{(t)}}{A}\right)^2 + \left(\frac{υ_{(t)}}{ω \cdot A}\right)^2$

$\Rightarrow ..... \Rightarrow \boxed{υ_{(t)} = \pm ω \cdot \sqrt{A^2 - x_{(t)}^2}}$



υ = f(x)

3. *<u>Επιτάχυνση</u>* $\left(\alpha = \frac{d\upsilon}{dt}\right)$



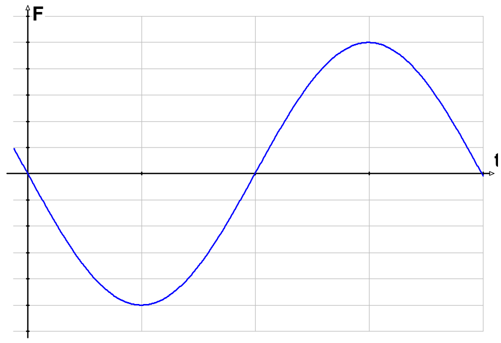
α = f(t)

$$\alpha_{(t)} = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu(\omega t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t) \qquad (3)$$

ή $$\alpha_{(t)} = \omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi) \qquad (3\alpha)$$

ή $$(1), (3) \Rightarrow \quad \alpha_{(t)} = -\omega^2 \cdot x_{(t)} \qquad (3\beta)$$

4. *<u>Δύναμη</u>*



$$F_{(t)} = m \cdot \alpha_{(t)} = -m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t) \qquad (4)$$

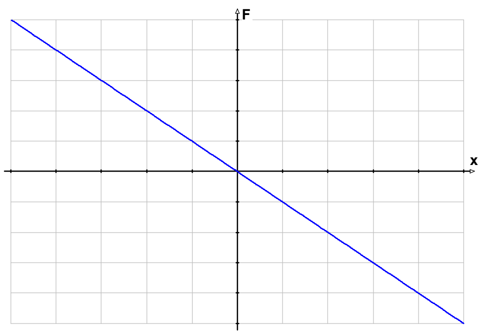
ή $$(1), (4) \Rightarrow \quad F_{(t)} = -m \cdot \omega^2 \cdot x_{(t)} \qquad (4\alpha)$$

Όμως:

$$F_{(t)} = \Sigma F_{[(\text{ΑΞ.ΤΑΛ/ΣΗΣ}(\text{Θ.ΕΚΤΡ.}\rightarrow\text{Θ.Ι.})]} = F_{\text{ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ}}$$

άρα: $$F_{\text{ΕΠΑΝ}(t)} = -m \cdot \omega^2 \cdot x_{(t)} \qquad (4\beta)$$

F = f(t)



$$m \cdot \omega^2 = D = \underline{\text{σταθερά επαναφοράς}} \qquad (4\gamma)$$

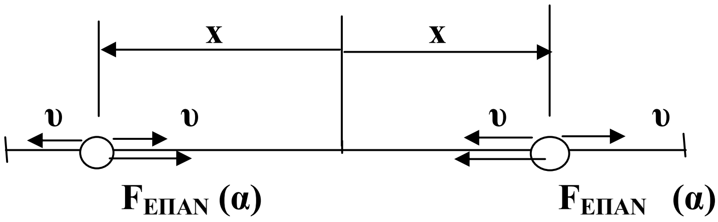
και $$F_{\text{ΕΠΑΝ}(t)} = -D \cdot x_{(t)} \qquad$$ ***<u>(Συνθήκη Γ.Α.Τ.)</u>*** (4δ)

5. *<u>Περίοδος</u>*

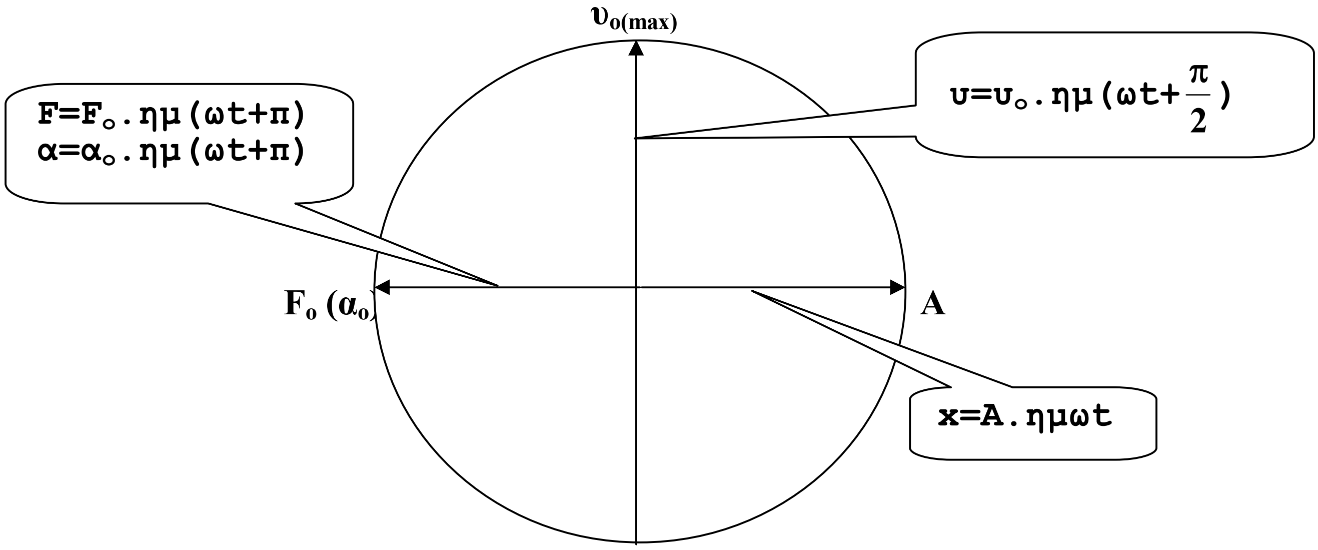
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}} \qquad (5)$$

$$(4\gamma) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$



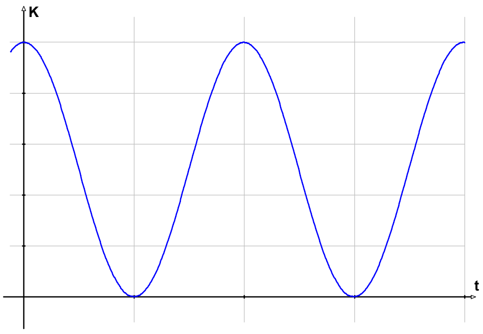
(σχηματική παράσταση)



(διάγραμμα «διανυσμάτων»)

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗ Γ.Α.Τ.

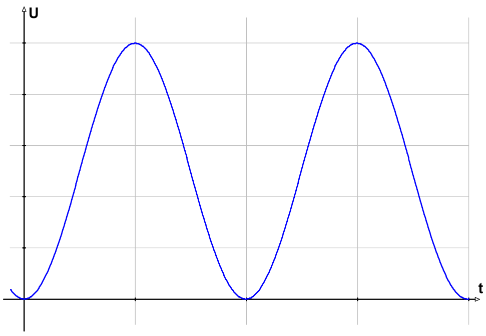
Κινητική



$$E_{KIN(t)} = K_{(t)} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_{(t)}^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \omega^2\cdot A^2\cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) \quad (1)$$

$$E_{KIN(t)} = K_{(t)} = \frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2\cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) \quad (1\alpha)$$

Δυναμική



$$E_{\Delta YN(t)} = U_{(t)} = |W(F_{E\Pi AN})^{(0\to x)}| = \frac{1}{2}\cdot D\cdot x_{(t)}^2 \quad (2)$$

$$E_{\Delta YN(t)} = U_{(t)} = \frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2\cdot \eta\mu^2(\omega t) \quad (2\alpha)$$

Ολική (μηχανική)

$$E_{O\Lambda(t)} = E_{KIN(t)} + E_{\Delta YN(t)} \quad \text{ή} \quad E_T = K_{(t)} + U_{(t)} \quad (3)$$

$$(3), (1\alpha), (2\alpha) \Rightarrow E_{O\Lambda(t)} = E_T = \frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2 \quad (3\alpha)$$

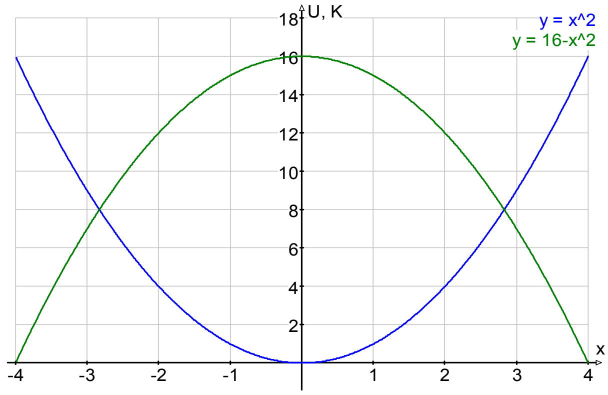
$E_{O\Lambda(t)}$ = σταθ. →
- → $E_{KIN(max)} = K_{max}$ (στη Θ.Ι.)
- → $E_{\Delta YN(max)} = U_{max}$ (στις «άκρες»)

(3β)

$E_{ΔΥΝ}$ = f(x)

$$E_{ΔΥΝ(x)} = U_{(x)} = \frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2 \qquad -A \leq x \leq +A$$

E_{KIN} = f(x) $\{ K_{(x)} = E_T - U_{(x)} \}$



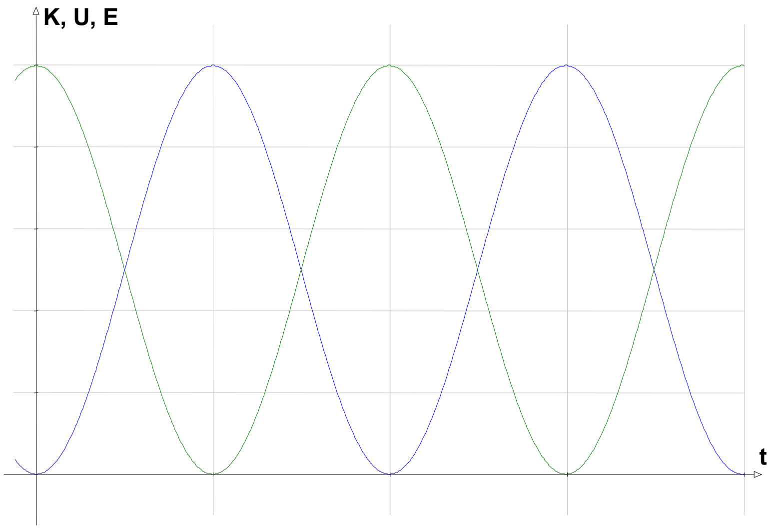
$$E_{KIN(x)} = E_{ΟΛ} - E_{ΔΥΝ(x)} = \frac{1}{2}\cdot D\cdot (A^2 - x^2)$$

Απόδειξη της σχέσης: $\upsilon_{(t)} = \pm\omega\cdot\sqrt{A^2 - x_{(t)}{}^2}$

$$E_{KIN} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_{(t)}{}^2$$

$$E_{KIN} = \frac{1}{2}\cdot D\cdot (A^2 - x_{(t)}{}^2) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \omega^2\cdot (A^2 - x_{(t)}{}^2)$$

$$\Rightarrow \ \ldots \ \Rightarrow \ \boxed{\upsilon_{(t)} = \pm\omega\cdot\sqrt{A^2 - x_{(t)}{}^2}}$$



Κοινό διάγραμμα ενεργειών

Ενέργεια στη Γ.Α.Τ. (σύνοψη)

Κινητική **(K)**	$\frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_{(t)}{}^2$ (*)	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t$	$\frac{1}{2}DA^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t$	$E_{o\lambda}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t$
Δυναμική **(U)**	$\frac{1}{2}\cdot D\cdot x_{(t)}{}^2$	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2\omega t$	$\frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2\omega t$	$E_{o\lambda}\cdot\eta\mu^2\omega t$
Ολική **($E_{o\lambda}$)**	**K+U**	$\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}Dx^2$	$\frac{1}{2}DA^2$	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ $\left\{\frac{1}{2}m\upsilon^2_{max}\right\}$
	(*)	**K=($E_{o\lambda}$ - U)**	$\frac{1}{2}D(A^2-x^2)$	$\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)$

Επιμέλεια:
Παναγιώτης Μόρφης
Μάιρα Μόρφη