Παναγιώτης Μόρφης - Μάιρα Μόρφη

1 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Λυμένες ασκήσεις

1. Σώμα, μάζας $m = 1Kg$, εκτελεί γ.α.τ. με πλάτος $A = 0,2m$ και συχνότητα $f = \frac{6}{\pi}Hz$. Τη στιγμή $t_0 = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +0,1\sqrt{2}m$ και $u > 0$. Να βρεθούν:

(i) η εξίσωση της απομάκρυνσης $x = f(t)$,

(ii) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που η απομάκρυνσή του είναι $x = +0,1m$,

(iii) το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τη στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας είναι $|u| = 1,2m/s$,

(iv) το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τη στιγμή που ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική του ενέργεια ειναι: $\frac{K}{U} = 3$,

(v) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική του ενέργεια ειναι: $\frac{K}{U} = 1$,

Λύση

(i) Επειδή τη στιγμή $t_0 = 0$ η απομάκρυνση του σώματος δεν είναι μηδέν, αυτό σημαίνει πως η γ.α.τ. θα έχει αρχική φάση. Δηλαδή η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι της μορφής:

$x = A\,\text{ημ}((\omega)t + \phi_0)$ (1).

Τη στιγμή $t_0 = 0$ η απομάκρυνση του σώματος, σύμφωνα με την εξίσωση (1) και την εκφώνηση, είναι:

$+0,1\sqrt{2} = 0,2\,\text{ημ}(\phi_0) \Rightarrow \text{ημ}\,\phi_0 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$

δηλαδή: $\phi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ και $\phi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$.

Θα δεχτούμε $k = 0$, επειδή η αρχική φάση έχει όρια: $0 < \phi < 2\pi$.

Άρα είναι $\phi_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{4}$.

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι:

$u = (wA)\,\text{συν}(wt + \phi_0)$.

Επειδή στην εκφώνηση δίνεται ότι τη στιγμή $t_0 = 0$ είναι $u > 0$, αυτό αντιστοιχεί στην τιμή: $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ (γιατί συν$(\frac{3\pi}{4}) < 0$).

Επίσης είναι: $\omega = 2(\pi)f \Rightarrow \omega = 2(\pi)(\frac{6}{\pi}) \Rightarrow \omega = 12(rad/s)$.

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης στη γ.α.τ. που εκτελεί το σώμα είναι: $x = 0,2\,$ημ$(12t + \frac{\pi}{4})$.

(ii) Κάθε στιγμή ισχύει η σχέση που συνδέει τις ενέργειες σε μια γ.α.τ.

$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2$ (2)

όπου: $D = m\omega^2$

άρα η εξίσωση (2) γίνεται: $u^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$ (3)

απ΄ όπου προκύπτει: $u = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ (4)

Τελικά: $u = 12\sqrt{0,2^2 - 0,1^2}$

ή $u = 1,2\sqrt{3}(m/s)$

(iii) Με μια πρώτη ματιά δεν υπάρχει (άμεση) σχέση μεταξύ επιτάχυνσης (α) και ταχύτητας (υ) του σώματος σε μια γ.α.τ.

Ο συνδετικός κρίκος είναι η απομάκρυνση (x).

Η ταχύτητα (υ) και η απομάκρυνση (x) συνδέονται με τη διαδικασία που καταλήξαμε στη σχέση (3):

$u^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$ (3)

Η επιτάχυνση (α) και η απομάκρυνση (x) συνδέονται με βάση τη σχέση:

$a = -\omega^2 x$ (5)

ή $|a| = \omega^2 x$ (5α)

Από την εξίσωση (3) προκύπτει:

$$|x| = \sqrt{A^2 - \frac{u^2}{\omega^2}}$$

απ΄ όπου προκύπτει: $|x| = 0,1\sqrt{3}(m)$

Τελικά από την εξίσωση (5α) προκύπτει:

$|a| = 12^2(0,1\sqrt{3}) \Rightarrow |a| = 14,4\sqrt{3}m/s^2$.

(iv) Το μέτρο της επιτάχυνσης (α) συνδέεται άμεσα με την απομάκρυνση (x) σύμφωνα με τη σχέση:

$|a| = \omega^2 x$ (5α)

Πρέπει να βρεθεί το μέτρο της απομάκρυνσης (x) τη στιγμή που ο λόγος των ενεργειών είναι: $\frac{K}{U} = 3$ (6)

Επειδή: $K + U = E$, τότε: $K = E - U$

Άρα η σχέση (6) γίνεται: $\frac{E-U}{U} = 3 \Rightarrow \frac{E}{U} - 1 = 3 \Rightarrow ... \Rightarrow \frac{E}{U} = 4$

ή $U = \frac{E}{4}$

Οπότε: $\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}DA^2) \Rightarrow ... \Rightarrow |x| = \frac{A}{2}$

Τελικά: $|a| = \omega^2(\frac{A}{2})$ (7)

Άρα: $|a| = 12^2(\frac{0,2}{2}) \Rightarrow |a| = 14,4m/s^2$.

2. Σώμα, μάζας (m), κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο, σταθεράς (K). Η πάνω άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη στο "ταβάνι", ενώ στην κάτω άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένο το σώμα. Το σώμα εκτελεί γ.α.τ. με πλάτος $A = 0,2m$. Τη στιγμή που η απομάκρυνση του σώματος έχει μέτρο $|x| = 0,1m$, τότε το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $|u| = \sqrt{3}m/s$. Να βρεθεί η περίοδος (Τ) της γ.α.τ. που εκτελεί το σώμα.

Λύση

Η περίοδος της γ.α.τ. που εκτελεί το σώμα βρίσκεται από τη σχέση:

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ (1) $[D = K \Rightarrow$ γ.α.τ. σώματος σε ελατήριο$]$

Παρατηρούμε ότι δεν γνωρίζουμε ούτε τη μάζα (m) του σώματος, ούτε τη σταθερά (K) του ελατηρίου.

Αν βρούμε το λόγο τους $(\dfrac{m}{K})$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο (T).

Επειδή γνωρίζουμε: πλάτος (A), απομάκρυνση (x) και ταχύτητα (u), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που συνδέει τις ενέργειες σε γ.α.τ.

$K + U = E \Rightarrow \dfrac{1}{2}mu^2 + \dfrac{1}{2}Dx^2 = \dfrac{1}{2}DA^2$ [με $D = K$]

$\Rightarrow mu^2 + Kx^2 = KA^2 \Rightarrow ... \Rightarrow$

$\Rightarrow u^2 = \dfrac{K}{m}(A^2 - x^2) \Rightarrow \dfrac{m}{K} = \dfrac{(A^2 - x^2)}{u^2}$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{m}{K}} = \dfrac{\sqrt{(A^2 - x^2)}}{u}$ (2)

Έτσι η εξίσωση (1) γίνεται:

$T = 2\pi\dfrac{\sqrt{(A^2 - x^2)}}{u}$ (3)

Από την οποία βρίσκουμε: $T = 2\pi\dfrac{\sqrt{(0,2^2 - 0,1^2)}}{\sqrt{3}} \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{5}sec$

3. Σώμα εκτελεί γ.α.τ. Αν ο λόγος της μέγιστης ταχύτητας u_{max} προς τη μέγιστη επιτάχυνση a_{max} του σώματος ειναι: $\frac{u_{max}}{a_{max}} = \frac{1}{\pi}(s)$, να βρεθεί η περίοδος (T) της γ.α.τ. που εκτελεί το σώμα.

Λύση

Οι σχέσεις που δίνουν τη μέγιστη ταχύτητα u_{max} και τη μέγιστη επιτάχυνση a_{max} του σώματος είναι:

$u_{max} = A\omega$ (1)

$a_{max} = A\omega^2$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

$\frac{u_{max}}{a_{max}} = \frac{1}{\omega}$ (3)

Αλλά: $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

οπότε η σχέση (3) γίνεται:

$\frac{u_{max}}{a_{max}} = \frac{T}{2\pi}$ (4)

Αφού από την εκφώνηση είναι: $\frac{u_{max}}{a_{max}} = \frac{1}{\pi}$,

τελικά από την εξίσωση (4) προκύπτει:

$T = 2(s)$