Μηχανικές Ταλαντώσεις

Κεφάλαιο 5ο (γ.α .τ. « με κρούση»)

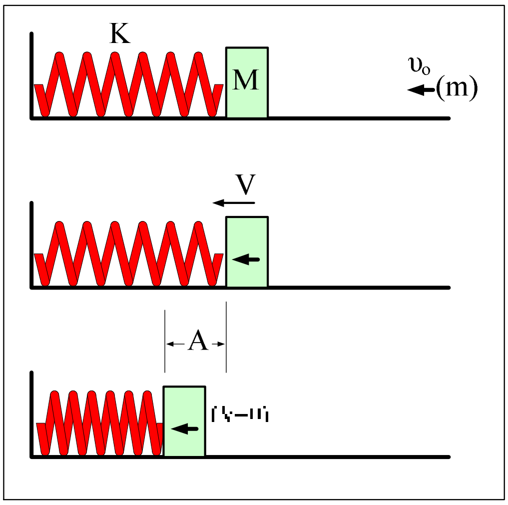
Περιέχει:

- ***Λυμένες ασκήσεις***
- ***Ασκήσεις για λύση***

* Ασκήσεις υπολογισμού πλάτους ταλάντωσης (μετά από κρούση)

Παράδειγμα 1

Σώμα, μάζας **M=2,8 Kg**, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στη μία άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθερής **K=300 N/m**, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο.
'Ενα βλήμα, μάζας **m=0,2Kgr**, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα **$υ_o$=60 m/sec** σφηνώνεται στο σώμα.
Να βρεθούν:
α) Το πλάτος της ταλάντωσης που θα κάνει το συσσωμάτωμα.
β) Η περίοδος της ταλάντωσης.
γ) Η ταχύτητα του συσσωματώματος τη στιγμή που περνάει από το μισό του πλάτους της ταλάντωσης.



Λύση

α) Πλαστική κρούση - υπολογισμός ταχύτητας συσσωματώματος

Α.Δ.Ο. $\mathbf{m.υ_o + 0 = (m+M).V \;\Rightarrow\; V = 4\ m/sec}$

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση αρχίζει την Γ.Α.Τ. με σταθερά **D=K**.
Για τη θέση αμέσως μετά την κρούση εφαρμόζουμε τη σχέση που συνδέει τις ενέργειες στη Γ.Α.Τ., δηλαδή:

$$E_{KIN} + E_{ΔΥΝ} = E_{ΟΛ} \qquad (1)$$

Η κινητική ενέργεια είναι: $E_{KIN} = \frac{1}{2}.(m+M).V^2 \qquad (2)$

Η δυναμική ενέργεια (του συστήματος στη Γ.Α.Τ.) είναι **μηδέν** (γιατί αυτό βρίσκεται στη **θέση ισορροπίας της Γ.Α.Τ.**).

Η ολική ενέργεια είναι ίση με τη **μέγιστη δυναμική** (που έχει στις "άκρες"), δηλαδή:

$$E_{ΟΛ} = \frac{1}{2}.K.A^2 \qquad (3)$$

Έτσι: **(1), (2), (3)** $\Rightarrow \frac{1}{2}\mathbf{.(m+M).V^2} = \frac{1}{2}\mathbf{.K.A^2}$

$$\Rightarrow\Rightarrow \quad \mathbf{A = V.}\sqrt{\frac{(m+M)}{K}} \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{A = 0{,}4\ m}}$$

β) Η περίοδος της Γ.Α.Τ. είναι:

$$\mathbf{T = 2\pi}\cdot\sqrt{\frac{(m+M)}{K}} \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{T = 0{,}2\pi\ sec}} \quad ή \quad \underline{\mathbf{T = 0{,}628\ sec}}$$

γ) Για να βρούμε την ταχύτητα του συσσωματώματος στη ζητούμενη θέση θα εφαρμόσουμε πάλι τη σχέση για τις ενέργειες στη Γ.Α.Τ., δηλαδή

$$\mathbf{E_{KIN} + E_{\Delta YN} = E_{O\Lambda}} \qquad \text{όπου:}$$

$$\mathbf{E_{KIN}} = \frac{1}{2}\mathbf{.(m+M).V_1{}^2}, \quad \mathbf{E_{\Delta YN}} = \frac{1}{2}\mathbf{.K}\cdot\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}\right)^2, \quad \mathbf{E_{O\Lambda}} = \frac{1}{2}\mathbf{.K.A^2}$$

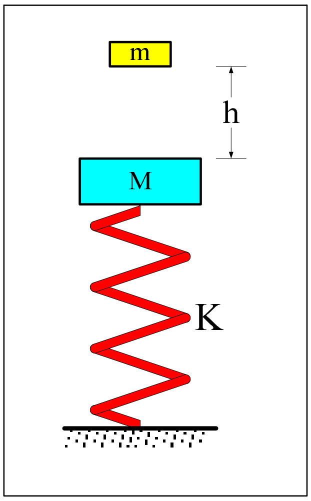
Έτσι: $$\frac{1}{2}\mathbf{.(m+M).V_1{}^2} + \frac{1}{2}\mathbf{.K}\cdot\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\mathbf{.K.A^2}$$

$$\mathbf{V_1 = 2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}} \Rightarrow$$

———————

Παράδειγμα 2

Σώμα, μάζας **M=3 Kg**, είναι δεμένο στην πάνω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη στο έδαφος.
Σώμα, μάζας **m=1 Kg**, αφήνεται από ύψος **h=0,6 m** πάνω από το σώμα **(M)**, με το οποίο συγκρούεται πλαστικά.
Αν η σταθερά του ελατηρίου είναι **K=100 N/m**, να βρεθούν:
α) Το πλάτος της ταλάντωσης που θα κάνει το συσσωμάτωμα.
β) Η μέγιστη ταχύτητα του συσσωματώματος στη γ.α.τ. που θα κάνει.



γ) Ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι το συσσωμάτωμα να φτάσει από τη θέση της κρούσης μέχρι τη στιγμή που σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά (ή μέχρι να φτάσει στην ***πρώτη άκρη*** της ταλάντωσης).

δ) Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια **(K/U)** της **γ.α.τ.** που εκτελεί το συσσωμάτωμα, τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $\mathbf{U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = 12{,}5\ J}$.

ε) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, τη στιγμή που η ταχύτητά του συσσωματώματος καθώς κατεβαίνει, αμέσως μετά την κρούση, είναι $\mathbf{\upsilon = 0{,}5\ m/s}$.

Λύση

α) i) Κάθοδος σώματος (m)-υπολογισμός ταχύτητας πριν την κρούση

Θ.Μ.Κ.Ε. $W_{(B)} = \Delta E_{KIN} \Rightarrow \Rightarrow \quad +m\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon^2$

$$\Rightarrow \Rightarrow \ \upsilon = \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \ \upsilon = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

ii) Πλαστική κρούση - υπολογισμός κοινής ταχύτητας συσσωματώματος

Α.Δ.Ο. $m\cdot\upsilon + 0 = (m+M)\cdot V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m\cdot\upsilon}{(M+m)} \Rightarrow \quad V = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$

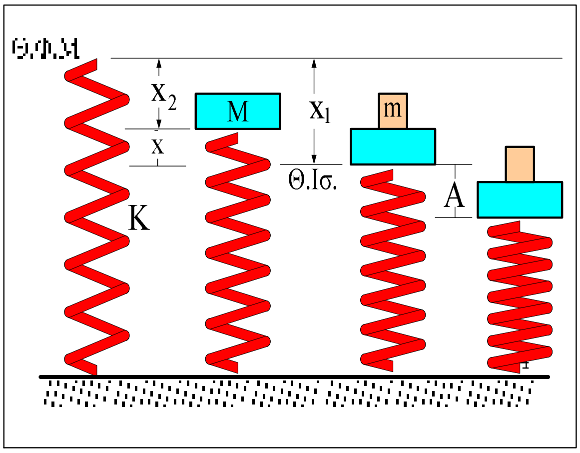
iii) Ταλάντωση - υπολογισμός πλάτους ταλάντωσης

Για τη θέση αμέσως μετά την κρούση εφαρμόζουμε τη σχέση για τις ενέργειες στη **γ.α.τ.**

$$E_{KIN} + E_{\Delta YN} = E_{O\Lambda} \quad (1) \qquad (\text{ή} \quad K+U=E_T)$$

όπου: $E_{KIN} = \frac{1}{2}\cdot(m+M)\cdot V^2 \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad E_{KIN} = 1{,}5\ J$

Η θέση αμέσως μετά την κρούση **δεν είναι η θέση ισορροπίας της γ.α.τ.** Η θέση ισορροπίας της γ.α.τ. είναι πιο κάτω κατά **x**, όπου **x** η **διαφορά των συσπειρώσεων του ελατηρίου από τα δύο σώματα**, δηλαδή:



$$x = x_1^{(m+M)} - x_2^{(M)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(M+m)\cdot g}{K} - \frac{M\cdot g}{K} = \frac{m\cdot g}{K} = 0{,}1\,m$$

Έτσι: $E_{\Delta YN} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\Delta YN} = 0{,}5\ J$

Επίσης: $E_{O\Lambda} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2$,

όπου **Α = πλάτος της γ.α.τ.**

ή $E_{O\Lambda} = 50\cdot A^2$ (δηλ. **η μέγιστη δυναμική ενέργεια**)

Από **(1)** $\Rightarrow$ $1{,}5\ J + 0{,}5\ J = 50\cdot A^2\ (J) \quad \Rightarrow \quad$ **A = 0,2 m**

$\Rightarrow$

β) Η μέγιστη ταχύτητα του συσσωματώματος στη γ.α.τ. που κάνει, είναι τη στιγμή ***που περνάει από τη θέση ισορροπίας της γ.α.τ.*** και βρίσκεται ως εξής:

α΄ τρόπος: $V_{max} = \omega\cdot A$, με $\omega = \sqrt{\frac{D}{(M+m)}} = \sqrt{\frac{K}{(M+m)}} = 5\,\frac{rad}{s}$

$$\Rightarrow \quad V_{max} = 1\ \frac{m}{s}$$

β΄ τρόπος: Από τη σχέση με τις ενέργειες στη γ.α.τ.

$$E_{KIN} + E_{\Delta YN} = E_{O\Lambda}$$

σαν $E_{O\Lambda}$ θα δεχτούμε την **μέγιστη κινητική ενέργεια**, δηλαδή

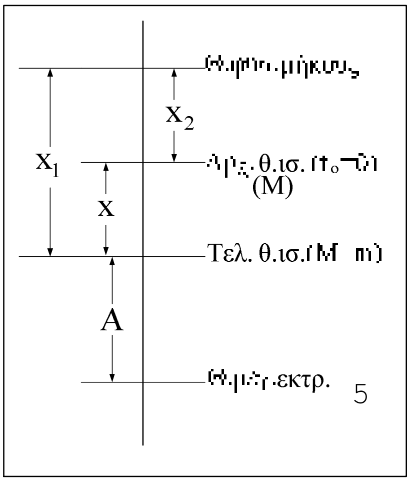
$$E_{O\Lambda} = \frac{1}{2}\cdot (m+M)\cdot V^2_{max} = 2\cdot V^2_{max}$$

Έτσι: $1{,}5\ J + 0{,}5\ J = 2\cdot V_{max}{}^2 \quad \Rightarrow \quad V_{max} = 1\ \frac{m}{s}$

γ) Ο ζητούμενος χρόνος θα βρεθεί ως εξής:

α΄ τρόπος:

Θεωρούμε $t_o=0$ τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση, όπου



αρχίζει η γ.α.τ. Τη στιγμή αυτή το συσσωμάτωμα δεν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της γ.α.τ., άρα η εξίσωση **x=f(t)** που περιγράφει την γ.α.τ. θα έχει αρχική φάση, δηλαδή

$$x_{(t)} = A \cdot ημ(ωt+φ_o) \quad \text{και} \quad υ_{(t)} = ω \cdot A \cdot συν(ωt+φ_o)$$

με $ω = 5\dfrac{rad}{s}$

Για $t_o=0$ το $x=+0{,}1m$ (τόσο απέχει από τη Θ.Ι. της γ.α.τ.). 'Ετσι:

$$+0{,}1 = 0{,}2 \cdot ημφ_o \Rightarrow\Rightarrow ημφ_o = \frac{1}{2} \Rightarrow φ_o = \frac{π}{6} \text{ ή } φ_o = \frac{5π}{6}$$

Αλλά επειδή το σύστημα "κατεβαίνει" ($υ_{(t)} = ω \cdot A \cdot συν(φ_o) < 0$) θα είναι: $φ_o = \dfrac{5π}{6}$.

Έτσι η εξίσωση **x=f(t)** γίνεται: $x_{(t)} = 0,2 \cdot ημ(5t + \frac{5π}{6})$.

Τη στιγμή που το σύστημα σταματάει στιγμιαία (κάτω άκρη) είναι: $x = -A = -0,2m$

'Ετσι: $-0,2 = 0,2 \cdot ημ(5t + \frac{5π}{6}) \Rightarrow -1 = ημ(5t + \frac{5π}{6}) \Rightarrow 5t + \frac{5π}{6} = \frac{3π}{2}$

$$\Rightarrow t = \frac{2π}{15} sec$$

<u>β΄ τρόπος</u>:

Ο ζητούμενος χρόνος είναι αυτός που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση από την **<u>αρχική θέση ισορροπίας</u>** (θέση που ισορροπούσε το **Μ**) μέχρι τη **<u>θέση της μέγιστης εκτροπής</u>** (θέση που σταματάει στιγμιαία). Δηλαδή, το άθροισμα του χρόνου t_1 (για να διανύσει την απόσταση **(x)**, ανάμεσα στην αρχ. θέση ισορ. και την τελ. θέση ισορ.) και του χρόνου t_2 (για να διανύσει την απόσταση από την τελ. θέση ισοροπίας μέχρι τη θέση μέγιστης εκτροπής - που είναι και το πλάτος της γ.α.τ.).

'Ετσι: $t = t_1 + t_2$ **(1)**

Αλλά: $t_2 = \dfrac{T}{4}$ (ο χρόνος από τη Θ.Ι. στη θέση μέγιστης εκτροπής-πλάτος)

όπου $T = \dfrac{2π}{ω}$ ή $T = \dfrac{2π}{5} sec \Rightarrow \Rightarrow t_2 = \dfrac{π}{10} sec$

Υπολογισμός χρόνου (t_1)

Ο χρόνος για να πάει το συσ/μα από την αρχ. θέση ισορ. μέχρι την τελ. θέση ισορ. είναι **ίδιος με το χρόνο για να πάει από την τελική θέση ισορ. (Θ.Ι. της γ.α.τ.) μέχρι την αρχ. θέση ισορ.**. Έτσι όμως δεν έχουμε αρχική φάση και η εξίσωση **x=f(t)** είναι:

$$x_{(t)} = A \cdot \eta\mu\omega t_1 \quad \acute{\eta} \quad 0,1 = 0,2 \cdot \eta\mu(5t_1) \Rightarrow \eta\mu(5t_1) = \frac{1}{2} \Rightarrow 5t_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{30}\,\text{sec}$$

Άρα από **(1)** $\Rightarrow\Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{10} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\pi}{15}\,\text{sec}$.

δ) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta\ell^2$

$$\Rightarrow \quad 12{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \Delta\ell^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = 0{,}5(m)$$

Αυτή είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου και δίνει την απόσταση ανάμεσα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και στη θέση που αναφέρεται στο ερώτημα. Δηλαδή:

$\Delta\ell = x_1 + x_3$, όπου $x_1 = \frac{(M+m) \cdot g}{K} = \ldots = 0{,}4(m)$ (από σχήμα προηγούμενου ερωτήματος). Άρα: $x_3 = 0{,}1$ m .

Ο ζητούμενος λόγος είναι: $\frac{K}{U} = \frac{E_T - U}{U} = \frac{E_T}{U} - 1 = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2\right)}{\left(\frac{1}{2} \cdot K \cdot x_3^2\right)} - 1 = \left(\frac{A}{x_3}\right)^2 - 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{K}{U} = \left(\frac{0{,}2}{0{,}1}\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{K}{U} = 3}$$

ε) ***Υπολογισμός «θέσης» όπου η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι υ***

Για τη θέση που μας ενδιαφέρει, μετά την κρούση, εφαρμόζουμε τη σχέση για τις ενέργειες στη **γ.α.τ.** του συσσωματώματος.

$$E_{KIN} + E_{\Delta YN} = E_{O\Lambda} \quad (1) \qquad (\acute{\eta} \quad K+U=E_T)$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{M}+\mathbf{m})\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}_4^2=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{A}^2$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{x}_4=\pm\sqrt{\mathbf{A}^2-\frac{(\mathbf{M}+\mathbf{m})\cdot\upsilon^2}{\mathbf{K}}}\qquad\Rightarrow\ \mathbf{x}_4=\pm\frac{\sqrt{3}}{10}(\mathbf{m})\simeq\pm 0{,}173(\mathbf{m})$$

Το « $\mathbf{x_4}$ » είναι η ***απομάκρυνση*** του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της **γ.α.τ.**

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θέλει την ***παραμόρφωση*** του ελατηρίου σ' αυτή τη
θέση.

Η παραμόρφωση $(\Delta\ell')$ του ελατηρίου δίνει την απόσταση ανάμεσα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και στη θέση που βρήκαμε. Δηλαδή:

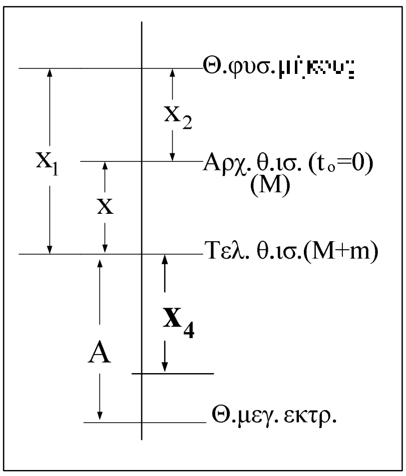
$$\Delta\ell'=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_4\qquad\Rightarrow\ \Delta\ell'=0{,}4\pm\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{4\pm\sqrt{3}}{10}(\mathbf{m})$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{U}=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{K}\cdot(\Delta\ell')^2$

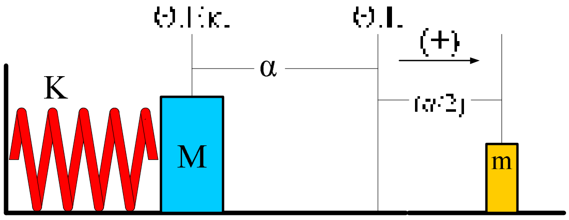
$$\Rightarrow\ \mathbf{U}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot\left(\frac{4\pm\sqrt{3}}{10}\right)^2=\frac{\left(4\pm\sqrt{3}\right)^2}{2}(\mathbf{J})\quad\Rightarrow\ \mathbf{U}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=\left(9{,}5\pm 4\sqrt{3}\right)(\mathbf{J})$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{U}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}\simeq 16{,}428(\mathbf{J})\ \ (\alpha)\qquad \text{και}\qquad \mathbf{U}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}\simeq 2{,}5718(\mathbf{J})\quad(\beta)$$

Σημείωση: Οι δύο τιμές της $\mathbf{U}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}$ οφείλονται στο γεγονός ότι η απομάκρυνση $(\mathbf{x_4})$ αντιστοιχεί σε θέση ***κάτω*** από τη (νέα) θέση ισορροπίας του συστήματος, οπότε η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ***μεγάλη***, αλλά και ***πάνω*** από τη (νέα) θέση ισορροπίας του συστήματος, οπότε η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ***μικρή***.



Παράδειγμα 3



Σώμα, μάζας **M=2Kgr**, είναι δεμένο στη μία άκρη οριζόντιου ελατηρίου, σταθερής **K=200N/m**, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο. Αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους **(Θ.Φ.Μ.)** του ελατηρίου. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση αυτή κατά **α=0,4m** προς τ' αριστερά και το αφήνουμε ελεύθερο. Στη συνέχεια το σώμα **(M)** συγκρούεται πλαστικά με σώμα, μάζας **m=1Kgr**, που βρίσκεται σε απόσταση **(α/2)** δεξιά της Θ.Φ.Μ.

Να βρεθούν:

α) Το πλάτος της γ.α.τ. που θα κάνει το συσσωμάτωμα.

β) Ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι το συσσωμάτωμα να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

Λύση

α) i) Υπολογισμός ταχύτητας του (M) πριν την κρούση

Αφήνοντας το σώμα **(M)** ελεύθερο από τη θέση **A** αυτό κάνει γ.α.τ. με πλάτος την αρχική εκτροπή **(α)**.

'Ετσι στη θέση **Γ** εφαρμόζουμε τη σχέση για τις ενέργειες στη γ.α.τ.:

$$\mathbf{K+U=E_{O\Lambda}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon^2+\frac{1}{2}\cdot K\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot K\cdot\alpha^2$$

$$\Rightarrow \quad M\cdot\upsilon^2=K\cdot\left(\frac{3\alpha^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon=\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\frac{3K}{M}}}$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon = \frac{0,4\text{m}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 200(\text{N/m})}{2\text{Kg}}} = 2\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,464\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

<u>Σημείωση</u>: Φυσικά η ταχύτητα του **(Μ)** στη θέση **Γ** υπολογίζεται και με εφαρμογή του **Θ.Μ.Κ.Ε.** μεταξύ των θέσεων **Α** και **Γ**.

$$W(F_{E\Lambda}) = \Delta E_{KIN} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \cdot K \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \upsilon^2 - 0$$

$$\Rightarrow \;\ldots\ldots \;\Rightarrow \quad \upsilon = 2\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ii) <u>Υπολογισμός ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση</u>

<u>Α.Δ.Ο.</u> : $M \cdot \upsilon + 0 = (M + m) \cdot V \quad \Rightarrow \quad V = \dfrac{M \cdot \upsilon}{(M + m)}$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,31\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

iii) <u>Υπολογισμός πλάτους της (νέας) γ.α.τ.</u>

Η θέση **(Ο)** (Θ.Φ.Μ.) είναι και η θέση ισορροπίας της γ.α.τ. του συσσωματώματος. Έτσι, αν **Α** είναι το ζητούμενο πλάτος, θα εφαρμόσουμε τη σχέση για τις ενέργειες της γ.α.τ. για τη θέση **Γ**, αμέσως μετά την κρούση:

$$K + U = E_{O\Lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{K \cdot \alpha^2 + 4 \cdot (M + m) \cdot V^2}{K}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \frac{4 \cdot (M + m) \cdot V^2}{K}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(0,4\text{m})^2 + \frac{4 \cdot 3(\text{Kg}) \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{200(\text{N/m})}} = 0,3464\text{m}$$

β) Ο ζητούμενος χρόνος θα βρεθεί ως εξής:
Θεωρούμε $\mathbf{t_o=0}$ τη στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση του συσσωματώματος (τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση). Αφού λοιπόν το σύστημα τη στιγμή $\mathbf{t_o=0}$ δεν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της γ.α.τ. τότε η εξίσωση της απομάκρυνσης γράφεται:

$$\mathbf{x_{(t)} = A\cdot ημ(ωt+φ_o)} \quad \mathbf{(1)}$$ όπου $\mathbf{φ_o}$ είναι η αρχική φάση

και $$ω=\sqrt{\frac{D}{(M+m)}}=\sqrt{\frac{K}{(M+m)}} \Rightarrow ω=\sqrt{\frac{200(N/m)}{3Kg}}=10\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{rad}{s} \quad (2)$$

<u>**Υπολογισμός $φ_o$**</u>

Για $\mathbf{t_o=0}$ είναι $\mathbf{x=+\frac{α}{2}}$. Έτσι από την εξίσωση **(1)** προκύπτει:

$$\mathbf{+\frac{α}{2}=A\cdot ημφ_o \Rightarrow ημφ_o=\frac{α}{2A}=0,577 \Rightarrow φ_o=35,24^o} \quad ή \quad \mathbf{φ_o=0,1957π} \quad \mathbf{(3)}$$

Στο ζητούμενο χρόνο είναι $\mathbf{x=+A}$ και έτσι η **(1)** με τη **(3)** δίνουν:

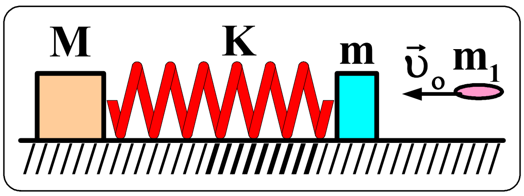
$$\mathbf{+A=A\cdot ημ(ωt+0,1957π) \Rightarrow +1=ημ(ωt+0,1957π)}$$

$$\mathbf{\Rightarrow ωt+0,1957π=\frac{π}{2} \Rightarrow ωt=0,3043π \Rightarrow t=\frac{0,3043π}{ω}}$$

$\Rightarrow$ (με βάση την τιμή της **ω** από την **(2)**) $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{t=0,1168\,sec}}$

— — — — — —

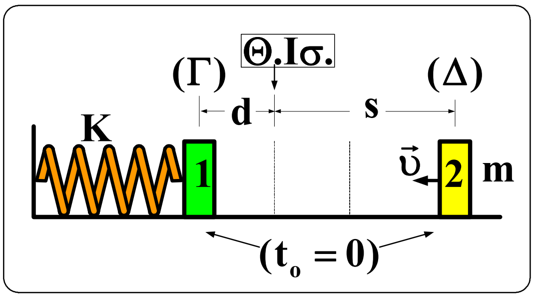
Άσκηση για λύση (3.1)



Στη διάταξη του σχήματος τα δύο σώματα είναι στερεωμένα στα άκρα του οριζόντιου ελατηρίου. Το σώμα **(M)** έχει μάζα **10 Kg**, ενώ το σώμα **(m)** έχει μάζα **1 Kg**. Το ελατήριο έχει σταθερά **K=100 N/m**. Το σώμα **(M)** παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής με το δάπεδο **μ=0,25**. Ένα βλήμα, μάζας $\mathbf{m_1=0,2\ Kg}$, κινούμενο οριζόντια σφηνώνεται στο σώμα **(m)** με ταχύτητα $\mathbf{υ_o}$. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon_o}$, ώστε το συσσωμάτωμα **(m+m$_1$)** να εκτελεί **γ.α.τ.** χωρίς το σώμα **M** να γλυστρά στο δάπεδο.

[Απ. $\upsilon_o \le 12{,}5\sqrt{1{,}2}$ m/s (=13,693 m/s)]

Άσκηση για λύση (3.2)



Στη διάταξη του σχήματος τα δύο σώματα **(1)** και **(2)** την ίδια μάζα **m=2 Kg**. Το σώμα **(1)** είναι στερεωμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς **K=(200π^2) N/m**, το οποίο έχουμε φέρει με το χέρι μας από τη θέση ισορροπίας στη θέση **Γ**, συμπιέζοντάς το κατά **d=0,2 m**. Το σώμα **(2)** αρχικά βρίσκεται στη θέση **Δ** και απέχει κατά **s=1 m** από τη θέση ισορροπίας. Την ίδια στιγμή **(t_o=0)** αφήνουμε ελεύθερο το σώμα **(1)** και «εκτοξεύουμε» το σώμα **(2)** με ταχύτητα **υ**.

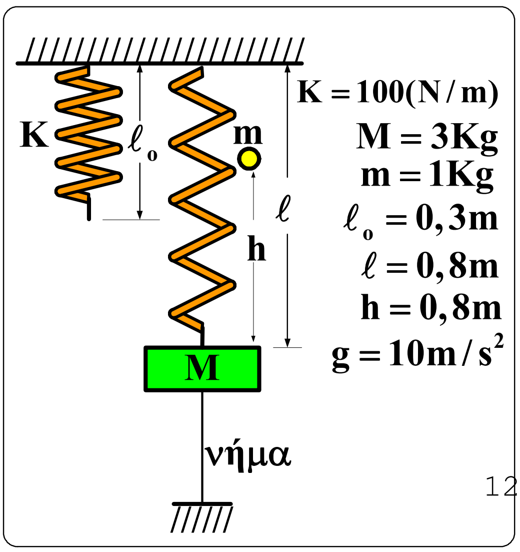
α) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας **υ**, ώστε τα δύο σώματα να συγκρουστούν στη θέση όπου το σώμα **(1)** σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά.

β) Όταν συγκρούονται τα δύο σώματα συσσωματώνονται. **(i)** Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης που θα κάνει το συσσωμάτωμα των δύο σωμάτων, **(ii)** η ταχύτητα του συσ-

σωματώματος, τη στιγμή που αυτό φθάνει στη θέση **Γ**. ($\pi^2 \simeq 10$)

[Απ. α) υ=8 m/s , β) $A = \dfrac{\sqrt{8+\pi^2}}{5\pi} \simeq 0{,}27$ m , γ) 4 m/s]

Παράδειγμα 4



Στη διάταξη του σχήματος το ελατήριο, σταθεράς **K**, έχει φυσικό μήκος ℓ_o. Στο ελεύθερο άκρο του έχουμε κρεμάσει ένα σώμα, μάζας **M**, και με τη βοήθεια νήματος (στερεωμένου στο έδαφος) έχουμε επιμηκύνει το ελατήριο σε μήκος ℓ. Από ύψος **h** αφήνουμε να πέσει πάνω στο σώμα **M** ένα μικρότερο σώμα, μάζας **m**, το οποίο ενσωματώνεται μ' αυτό. Μετά την ενσω-

μάτωση των δύο σωμάτων κόβουμε το νήμα.
Να βρεθεί το πλάτος της **γ.α.τ.** που θα εκτελέσει το σύστημα των σωμάτων.

Υπόδειξη λύσης

Κάθοδος σώματος (m): $\upsilon = \sqrt{2gh} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \upsilon = 4\ m/s$ **(Α.Δ.Μ.Ε. ή Θ.Μ.Κ.Ε.)**

Πλαστική κρούση (M-m): $V_K = \dfrac{m \cdot \upsilon}{M+m} \Rightarrow \ldots \Rightarrow V_K = 1\ m/s$ **(Α.Δ.Ο.)**

(Αρχική) θέση ισορροπίας (M): $x_1 = \dfrac{M \cdot g}{K} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1 = 0{,}3\ m$

Επιπλέον επιμήκυνση ελατηρίου: $d = (\ell - \ell_o) - x_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow d = 0{,}2\ m$

(Νέα) θέση ισορροπίας (M-m): $x_2 = \dfrac{(M+m) \cdot g}{K} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_2 = 0{,}4\ m$

Αλλαγή θέσης ισορροπίας: $\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \Delta x = 0{,}1\ m$

Γ.α.τ. συστήματος (M-m): $K + U = E_T \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot (M+m) \cdot V_K^2 + \dfrac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \dfrac{1}{2} \cdot K \cdot A^2$

όπου: $x = d - \Delta x = 0{,}1m$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{10}\ m = 0{,}2236\ m$$

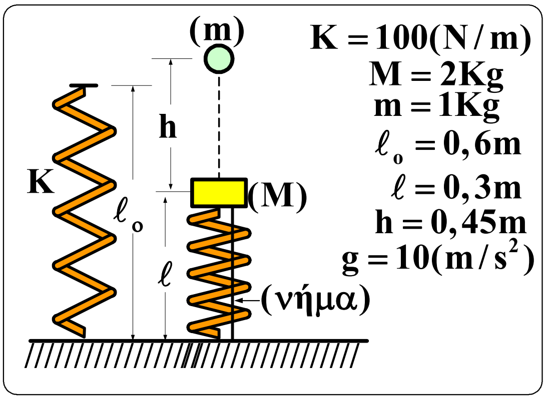
Άσκηση για λύση (4.1)

Να λυθεί το ***παράδειγμα 4***, για την περίπτωση όπου η μάζα **m=2 Kg**. Στη συνέχεια να υπολογιστεί μετά από πόσο χρόνο, από τη στιγμή της κρούσης, το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία για δεύτερη φορά.

[Απ. $A = 0{,}16\sqrt{5}(m) = 0{,}3577\ m$, $t = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}(s) = 0{,}3354(s)$ **]**

Άσκηση για λύση (4.2)

Στη διάταξη του σχήματος το ελατήριο, σταθεράς **K**, έχει φυσικό μήκος ℓ_o. Στο ελεύθερο άκρο του έχουμε στερεώσει ένα σώμα, μάζας **M**, και με τη βοήθεια νήματος (στερεωμένου στο έδαφος) έχουμε συσπειρώσει το ελατήριο σε μήκος ℓ. Από ύψος **h** αφήνουμε να πέσει πάνω στο σώμα **M** ένα μικρότερο σώμα, μάζας **m**, το οποίο ενσωματώνεται μ' αυτό. Μετά την ενσωμάτωση των δύο σωμάτων κόβουμε το νήμα. Να βρεθεί το πλάτος της **γ.α.τ.** που θα εκτελέσει το σύστημα των σωμάτων.



[Απ. $A = \frac{\sqrt{3}}{10}$ m = 0,1732 m]

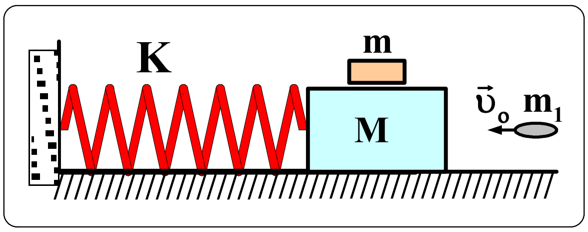
Άσκηση για λύση (4.3)

Να λυθεί η *άσκηση (4.2)*, για την περίπτωση όπου το μήκος του ελατηρίου με τη βοήθεια (¨τράβηγμα¨) του νήματος είναι ℓ=**0,2 m** .

[Απ. A=0,2 m]

Άσκηση για λύση (4.4)

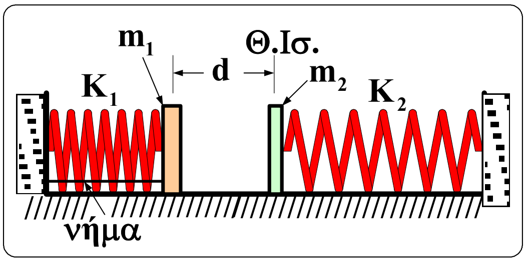
Στη διάταξη του σχήματος το σώμα **M(=2 Kg)**
είναι στερεωμένο στο οριζόντιο ελατήριο, σταθεράς **K=300 N/m**. Πάνω στο σώμα **M** είναι ακουμπισμένο (απλή επαφή) το σώμα **m(= 0,8 Kg)**. Μεταξύ των δύο αυτών σωμάτων υ-



πάρχει τριβή, με μέγιστο συντελεστή στατικής τριβής **μ**. Ένα βλήμα, μάζας **m_1(=0,2 Kg)**, κινούμενο με ταχύτητα **υ_o(=9 m/s)** σφηνώνε-ται στο σώμα **M**. Να υπολογίσετε το συντελεστή τριβής **μ**, ώστε το σύστημα των σωμά-των **(M+m+m_1)** να εκτελεί γ.α.τ. χωρίς το σώμα **m** να γλυστρά πάνω στο σώμα **M(+m_1)**.

[Απ. μ=0,6]

Άσκηση για λύση (4.5)



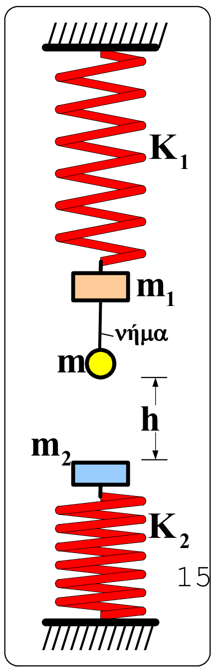
Στη διάταξη του σχήματος τα δύο σώματα **m_1** και **m_2** είναι στερεωμένα στα οριζόντια ελατήρια **K_1** και **K_2**, αντίστοιχα. Τα δύο σώματα αρχικά εφά-πτονται στη θέση φυσικού μήκους των δύο ελα-τηρίων, η οποία ταυτίζεται με τη θέση ισορροπί-ας των σωμάτων. Με τη βοήθεια νήματος συσπει-ρώνουμε το ελατήριο **K_1** κατά **d**. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Κατά τη σύγκρουση των δύο σωμάτων **(t_o=0)** αυτά συσσωματώνονται και κινούνται σαν ένα σώμα. Δίνονται: **m_1=1 Kg, m_2=2 Kg, K_1=100 N/m, K_2=200 N/m , d=0,3 m .** Να βρεθούν:

α) Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

β) Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά από χρόνο $t=\frac{11\pi}{60}(\text{sec})$.

[Απ. α) A=0,1 m , β) $\upsilon=+\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{m/s})$ **]**

Άσκηση για λύση (4.6)



Στη διάταξη του σχήματος τα δύο συστήματα **[K_1-(m_1+m)]** και **[K_2-m_2]** βρίσκονται σε ισορροπία στις θέσεις που φαίνονται. Κά-ποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Το σώμα **(m)** διανύει την απόστα-ση **h** και συγκρούεται πλαστικά (συσσωματώνεται) με το σώμα **m_2**. Δίνονται: **m_1 = 1 Kg , m=1 Kg , K_1=100 N/m , m_2 = 3 Kg , K_2=200 N/m , h = 0,8 m .** Να βρεθούν:

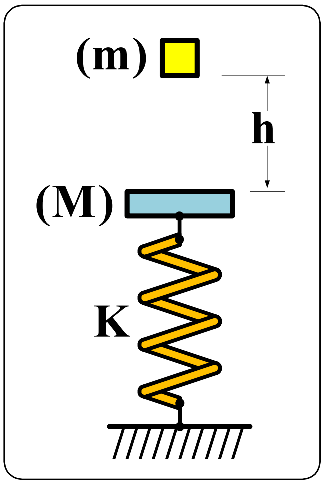
α) Το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος **[K_1 – m_1]**.

β) Το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος **[K_2 – (m_2+m)]**.

γ) Η ταχύτητα του συσσωματώματος **(m_2+m)** (στο ελατήριο **K_2**) τη στιγμή που αυτό έχει μετατοπιστεί κατά **0,15 m** από τη θέση της κρούσης.

[Απ. α) $A_1 = 0{,}1$ m , β) $A_2 = 0{,}15$ m , γ) $\upsilon = \dfrac{\sqrt{2{,}5}}{2} = 0{,}79$ m/s]

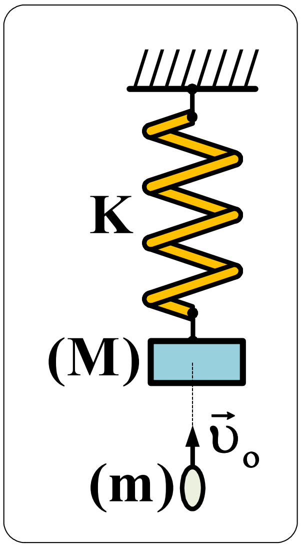
Άσκηση για λύση (4.7)



Σώμα, μάζας **M = 2 Kg**, είναι δεμένο στην πάνω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη στο έδαφος.
Σώμα, μάζας **m=1 Kg**, αφήνεται από ύψος **h** πάνω από το σώμα **(M)**, με το οποίο συγκρούεται ***πλαστικά***.
Αν η σταθερά του ελατηρίου είναι **K=100 N/m**, να βρεθεί το ύψος **h** ώστε:
α) στη θέση όπου η κινητική ενέργεια της **γ.α.τ.** που εκτελεί το συσσωμάτωμα είναι μηδέν για **2η** φορά, να είναι μηδέν και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου,
β) στη θέση όπου η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μηδέν, να ισχύει $K_{γατ} = U_{γατ}$ για την **γ.α.τ.** που εκτελεί το συσσωμάτωμα.

[Απ. α) h = 1,2 m , β) h = 2,55 m]

Άσκηση για λύση (4.8)



Στη διάταξη του σχήματος το σώμα μάζας **(M)** είναι στερεωμένο στην κάτω άκρη του κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς **K**, η επάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη στην οροφή. Ένα βλήμα, μάζας **(m)**, κινούμενο με ταχύτητα **(υ_o)**, σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα **(M)**.
α) Να δείξετε ότι η ταχύτητα υ_o δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_o = \frac{g}{m}\cdot\sqrt{\frac{(M+m)\cdot M\cdot(M+2m)}{K}}$$

αν στη θέση όπου η κινητική ενέργεια της **γ.α.τ.** που εκτελεί το συσσωμάτωμα είναι μηδέν (στιγμιαία) για **1η** φορά, είναι μη-

δέν και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
β) Να δείξετε ότι η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_o}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_o = \frac{g}{m} \cdot \sqrt{\frac{(M+m)}{K} \cdot \left[2(M+m)^2 - m^2\right]}$$

αν στη θέση όπου η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μηδέν, να ισχύει $\mathbf{K_{\gamma\alpha\tau} = U_{\gamma\alpha\tau}}$,

για **1^η^** φορά, στη **γ.α.τ.** που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
Να γίνει εφαρμογή για: **M = 2 Kg , m = 0,2 Kg , K = 100 N/m , g = 10 m/s^2**.
Σημείωση: Μπορεί το αποτέλεσμα να βρεθεί δουλεύοντας «βήμα – βήμα» τα διάφορα στάδια εξέλιξης του συνολικού φαινομένου.

[Απ. α) $\upsilon_o \simeq 14{,}071$ m/s , β) $\upsilon_o \simeq 19{,}95$ m/s]