Μηχανικές ταλαντώσεις

Μηχανικές ταλαντώσεις

Κεφάλαιο 2ο

- ***Απόδειξη ότι ένα σώμα εκτελεί γ.α.τ. σε διάφορα συστήματα ελατηρίων***

* ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΤΕΛΕΣΗ Γ.Α.Τ.

i. **Σχεδιάζουμε** τις **δυνάμεις** που ασκούνται στο σώμα (ή σύστημα) στη θέση ισορροπίας **(Θ.Ι.)** και **γράφουμε** τη σχετική **συνθήκη ισορροπίας**.

ii. Απομακρύνουμε (εκτρέπουμε) το σώμα κατά **x** από τη **Θ.Ι.** και σχεδιάζουμε πάλι τις δυνάμεις σ' αυτό. Πρέπει η συνισταμένη αυτών να έχει:

α) φορέα την ευθεία που πρόκειται να κινηθεί αμέσως μετά το σώμα,

β) φορά αντίθετη από τη **φορά εκτροπής** του σώματος (που την θεωρούμε σαν **θετική**, οπότε οι δυνάμεις έχουν ανάλογα πρόσημα),

γ) μέτρο ανάλογο της απομάκρυνσης **x**.

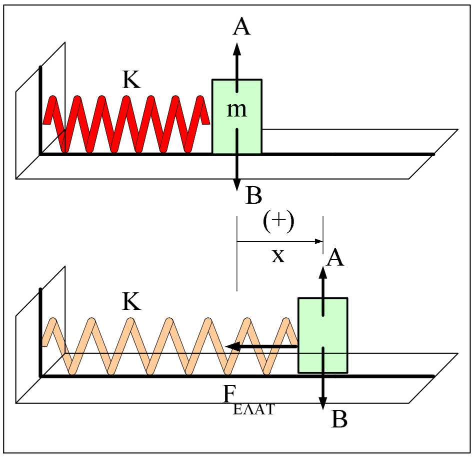
Η συνισταμένη αυτή δύναμη αποτελεί την απαραίτητη **δύναμη επαναφοράς**.

$$\mathbf{F_{ΕΠΑΝ} = ΣF^{(Θ.ΕΚΤΡ.\to Θ.Ι.)}_{(ΑΞ.ΤΑΛΑΝ/ΣΗΣ)} = -m \cdot \omega^2 \cdot x = -D \cdot x}$$

Σημείωση 1: Αν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη Θ.Ι. δεν συμμετέχουν στην δύναμη επαναφοράς, τότε δεν χρειάζεται η διαδικασία **(i)** και πάμε αμέσως στη διαδικασία **(ii)**.
(π.χ. για το σώμα σε "οριζόντιο ελατήριο", το βάρος του και η αντίδραση του επιπέδου στήριξης δεν "μετράνε" για την Γ.Α.Τ. που θα κάνει).

Σημείωση 2: Στο σύστημα **"σώμα-ελατήριο"**, όπου ο άξονας ταλάντωσης είναι: **α)** οριζόντιος, **β)** κατακόρυφος, **γ)** σε κεκλιμένο επίπεδο, η **σταθερά επαναφοράς** είναι: **D=K**.

Παράδειγμα 1



Σώμα, μάζας **m**, ισορροπεί σε οριζόντιο λείο επίπεδο δεμένο στη μία άκρη (οριζόντιου) ελατηρίου, σταθερής **K**, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο.
Αν εκτρέψουμε το σώμα κατά **x** από τη θέση ισορροπίας του και το αφήσουμε ελεύθερο, να δειχτεί ότι θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση και να βρεθεί η περίοδός της.

Λύση

ΑΡΧΙΚΑ: $\mathbf{B = A}$ (δεν χρειάζεται).

ΘΕΣΗ ΕΚΤΡΟΠΗΣ: $\mathbf{F_{ΕΠΑΝ} = ΣF_{(ΑΞ.ΤΑΛ.)} = -F_{ΕΛΑΤ} = -K \cdot x}$

'Αρα το σώμα εκτελεί **Γ.Α.Τ.** με σταθερά επαναφοράς **D=K**.

Η περίοδος υπολογίζεται από τη σχέση: $\mathbf{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}}} \{\neq \mathbf{f(x)}\}$.

Άσκηση για λύση (1.1)

Σώμα, μάζας **m=2 Kg**, είναι δεμένο στη δεξιά άκρη οριζόντιου ελατηρίου, σταθερής **K=200 N/m**, ενώ η αριστερή άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο. Εκτρέπουμε το σώμα κατά **x=0,2 m** από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο **(t_o=0)**. Να βρεθούν:

α) Οι εξισώσεις απομάκρυνσης **x=f(t)** και ταχύτητας **υ=f(t)** για την γ.α.τ. που θα ακολουθήσει.

β) Ο χρόνος για να πάει από τη θέση με $\mathbf{x_1=(+x_o/2)}$ μέχρι τη θέση $\mathbf{x_2=(-x_o/2)}$, για πρώτη φορά.

γ) Η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που περνάει από τη θέση $\mathbf{x=(+x_o \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})}$.

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος, για τη μετατόπισή του από τη θέση με $\mathbf{x_3=+x_o}$ **(υ<0)** μέχρι τη θέση με $\mathbf{x_4=(-x_o \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})}$ **(υ<0)**.

[Απ. α) $\mathbf{x_{(t)} = 0{,}2.ημ(10t + \frac{\pi}{2})}$, $\mathbf{υ_{(t)} = 2.συν(10t + \frac{\pi}{2})}$, **β)** $\mathbf{t = \frac{\pi}{30}}$ **sec ,**

γ) $\mathbf{υ = \sqrt{2}}$ **m/sec , δ)** $\mathbf{Δp = -2\ N \cdot sec}$ **]**

Παράδειγμα 2

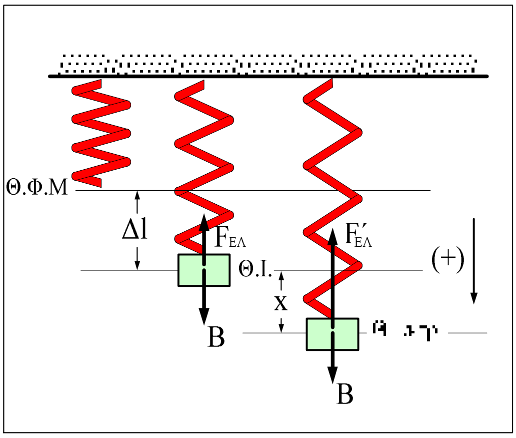
Σώμα, μάζας **m**, είναι δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου, σταθερής **K**, η άλλη (πάνω) άκρη του οποίου είναι στερεωμένη.
Αν εκτρέψουμε το σώμα κατά **x** από τη θέση ισορροπίας του και το αφήσουμε ελεύθερο, να δειχτεί ότι θα εκτελέσει Γ.Α.Τ. και να βρεθεί η περίοδός της.

Λύση

ΑΡΧΙΚΑ: $\mathbf{B = F_{ΕΛ} \Rightarrow B = K \cdot \Delta\ell}$ **(1)**

($\Delta\ell$=η αρχική παραμόρφωση (επιμήκυνση) του ελατηρίου, εξαιτίας του βάρους του).

ΘΕΣΗ ΕΚΤΡΟΠΗΣ:



$$\mathbf{F_{ΕΠΑΝ} = \Sigma F_{(ΑΞ.ΤΑΛ.)} = +B - F'_{ΕΛ}}$$

$$\mathbf{(1) \Rightarrow \quad F_{ΕΠΑΝ} = +B - F'_{ΕΛ} = +K \cdot \Delta\ell - K \cdot (\Delta\ell + x)}$$

$$\mathbf{F_{ΕΠΑΝ} = -K \cdot x}$$

'Αρα το σώμα εκτελεί **Γ.Α.Τ.** με σταθερά επαναφοράς **D=K** .

Η περίοδος υπολογίζεται από τη σχέση: $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$ $\{\neq \mathbf{f(x)}\}$.

Σημείωση: Η «πρόσθετη» δύναμη του ελατηρίου ήταν η $\mathbf{F_{ΕΠΑΝ}}$.

Άσκηση για λύση (2.1)

Σώμα, μάζας **m=2 Kg**, είναι δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου, σταθερής **K=200 N/m**, η επάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο. Μετακινούμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας προς τα επάνω κατά **x=0,2 m** και το αφήνουμε ελεύθερο ($\mathbf{t_o=0}$). Να βρεθούν:

α) Οι εξισώσεις **x=f(t)** , $\mathbf{F_{ΕΠΑΝ}=f(t)}$, $\mathbf{F_{ΕΛΑΤ}=F(t)}$. (θετική φορά προς τα επάνω).

β) Ο χρόνος για τη μετατόπιση από τη θέση με $\mathbf{x_1=+x_o}$ μέχρι τη θέση με $\mathbf{x_2=(+x_o/2)}$.

γ) Το έργο του βάρους του σώματος και της δύναμης του ελατηρίου, για τη μετατόπιση από τη θέση με $\mathbf{x_3=(+A\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})}$ μέχρι τη θέση με $\mathbf{x_4=(-\frac{A}{2})}$.

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος για τη μετατόπιση από τη θέση με $\mathbf{x_5=(+A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})}$

για πρώτη φορά μέχρι τη θέση με $\mathbf{x_6=0}$.

$$[\ \textbf{ΑΠ.}\ \ \alpha)\ x_{(t)} = 0{,}2\cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})\ ,\ \ F_{ΕΠΑΝ} = -40\cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})\ ,$$

$$F_{ΕΛΑΤ} = -20 + 40\cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})\ ,\ \beta)\ \frac{\pi}{30}\ \sec\ ,\ \gamma)\ W_{(B)} = +2\cdot(\sqrt{2}+1)\ J\ ,$$

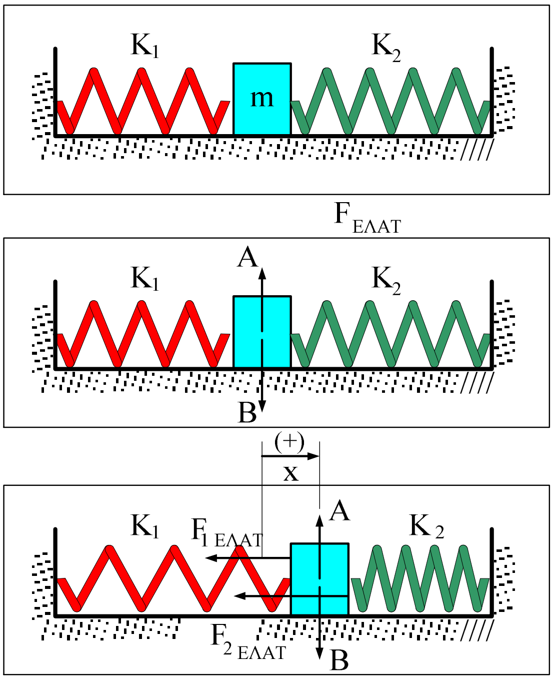
$$W(F_{ΕΛΑΤ}) = -2\cdot(1+2\cdot\sqrt{2})\ J\ ,\ \ \delta)\ \ \Delta p = 2\cdot\left(\frac{\pi}{3}-1\right)(N\cdot s)\ ]$$

Παράδειγμα 3

Σώμα, μάζας **m=6Kgr**, ισορροπεί στη διάταξη του σχήματος, ανάμεσα στα δύο ελατήρια σταθερών $\mathbf{K_1=200\ N/m}$ και $\mathbf{K_2=400\ N/m}$, αντίστοιχα. Τα ελατήρια στη θέση ισορροπίας έχουν το φυσικό τους μήκος. Αν εκτρέψουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας και το αφήσουμε ελεύθερο,

α) να δείξετε ότι αυτό θα εκτελέσει Γ.Α.Τ. και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β) αν η εκτροπή είναι **x=0,1 m**, με πόση ταχύτητα περνάει από τη Θ.Ι. του;



Λύση

α) **<u>ΑΡΧΙΚΑ</u>**: **Β=Α** **(1)**

<u>ΘΕΣΗ ΕΚΤΡΟΠΗΣ</u>:

$$F_{ΕΠΑΝ} = \Sigma F_{(x)} = -F_{1(ΕΛΑΤ)} - F_{2(ΕΛΑΤ)} = -K_1\cdot x - K_2\cdot x = -(K_1+K_2)\cdot x$$

$$\Rightarrow \qquad F_{ΕΠΑΝ} = -\ (K_1+K_2).x$$

'Αρα το σώμα εκτελεί Γ.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $\mathbf{D = K_1+K_2}$.
'Ετσι η περίοδός της θα είναι:

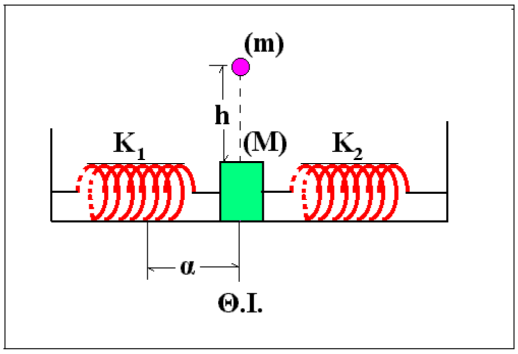
$$\boxed{T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{(K_1+K_2)}}} \Rightarrow T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{6Kg}{(200+400)(N/m)}} \Rightarrow \underline{T = 0{,}2\pi\ sec}\ .$$

β) Η ταχύτητα που έχει το σώμα περνώντας από τη Θ.Ι. του είναι:

$$\upsilon = \upsilon_{max} = \omega\cdot x = \sqrt{\frac{(K_1+K_2)}{m}}\cdot x \quad (\text{από } m\cdot\omega^2 = D) \Rightarrow \underline{\upsilon = 1\ m/s}$$

================

Άσκηση για λύση (3.1)



Σώμα, μάζας **M=3 Kg**, ισορροπεί ανάμεσα στα δύο οριζόντια ελατήρια της διάταξης του σχήματος **(K_1=100 N/m , K_2=200 N/m)**. Εκτρέπουμε το σώμα (M) από τη θέση ισορροπίας του κατά **α=0,2 m** προς τα δεξιά και το αφήνουμε ελεύθερο **(t_o=0)**.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ταλάντωσης του (M).

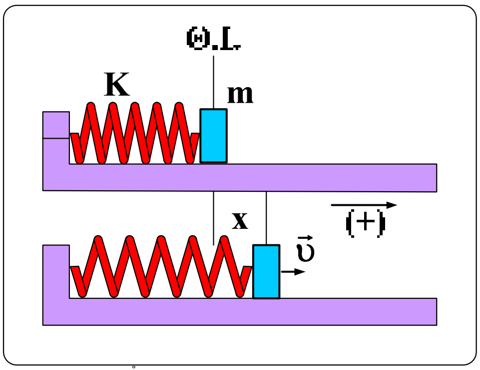
β) Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται ώστε το (M) να φτάσει (για πρώτη φορά) σε σημείο που απέχει **x_1=0,1 m** δεξιά της θέσης ισορροπίας του.

γ) Αν τη στιγμή **(t_o=0)** που αφήνουμε ελεύθερο το **(M)**, αφήσουμε ελεύθερη σφαίρα μάζας **m=1 Kg** από ύψος **h** πάνω από τη θέση ισορροπίας του **(M)**, αυτό συσσωματώνεται με το **(M)** τη στιγμή που το **(M)** περνάει από τη θέση ισορροπίας του. Να βρεθεί: **(i)** η εξίσωση της νέας ταλάντωσης του συστήματος **(M+m)** **[(t_o'=0)** η θέση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση], **(ii)** η ταχύτητα του συσσωματώματος τη στιγμή που αυτό περνάει από τη θέση με **x_2=0,05$\cdot\sqrt{3}$ m** (δεξιά της θέσης ισορροπίας), **(iii)** ο χρόνος που χρειάζεται ώστε το συσσωμάτωμα να φτάσει για πρώτη φορά σε θέση με **x_3=0,15 m** (δεξιά της θέσης ισορροπίας, κινούμενο προς τα δεξιά). **(iv)** το ύψος **h**.

[ΑΠ. α) $x_{(t)} = 0{,}2.\ \eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})$ **, β)** $t_1 = \frac{\pi}{15}$ **sec , γ) (i)** $x'_{(t)} = 0{,}1\cdot\sqrt{3}.\eta\mu(5\cdot\sqrt{3}\,t)$ **,**

(ii) $\upsilon = 0{,}25\cdot\sqrt{3}$ **m/sec , (iii)** $t_2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{45}$ **sec , (iv)** $h = \frac{\pi^2}{80}$ **m]**

Παράδειγμα 4



Σώμα, μάζας **m=1 Kg**, είναι δεμένο στη μία άκρη οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς **K=100 N/m**, και ισορροπεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Εκτρέπουμε το σώμα, προς τα δεξιά, κατά **x=0,1 m** και ταυτόχρονα **(t_o=0)** του δίνουμε ταχύτητα μέτρου **$\upsilon=\sqrt{3}$ m/s** (προς τα δεξιά). Να βρεθούν:

α) το πλάτος της **γ.α.τ.** που θα εκτελέσει το σώμα,

β) η εξίσωση της απομάκρυνσης **$x_{(t)}$** της **γ.α.τ.**,

γ) το έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη στιγμή **t_o=0** μέχρι τη στιγμή όπου το σώμα σταματά στιγμιαία, για πρώτη φορά.

Λύση

α) Εφαρμόζοντας τη σχέση που συνδέει τις ενέργειες σε μια γ.α.τ. βρίσκουμε:

$$K + U = E_T \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2 + \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2 = \frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2$$

$$\Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow \ A = \sqrt{x^2 + \frac{m\cdot\upsilon^2}{K}} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{0,1^2 + \frac{1\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{100}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0,2m} \ .$$

β) Αφού για **t_o=0** είναι **x=+0,1 m** προκύπτει ότι υπάρχει αρχική φάση. Έτσι η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$x_{(t)} = A\cdot \eta\mu(\omega t + \phi_o) \quad (1) \ \text{και} \ \upsilon_{(t)} = (\omega A)\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_o)$$

Για **t_o=0** $\Rightarrow \ +0,1 = 0,2\cdot \eta\mu\phi_o \quad \Rightarrow \quad \eta\mu\phi_o = +\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \eta\mu\phi_o = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \ \phi_o = \frac{\pi}{6}$ ή $\phi_o = \frac{5\pi}{6}$. Αφού **υ>0** $\Rightarrow \ \phi_o = \frac{\pi}{6}$.

Επίσης: $D = K = m\cdot\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 (r/s)$.

Έτσι η εξίσωση **(1)** γράφεται:

$$\boxed{x_{(t)} = 0,2\cdot \eta\mu\left(10\cdot t + \frac{\pi}{6}\right)} \qquad (2)$$

γ) Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα στον άξονα της γ.α.τ. είναι η $F_{ΕΛΑΤ}$. Άρα: $F_{ΕΠΑΝ} = F_{ΕΛΑΤ}$.

Έτσι: $\mathbf{W_{(F_{ΕΛΑΤ})} = W_{(F_{ΕΠΑΝ})} = -\frac{1}{2}\cdot K\cdot\left(x_2^2 - x_1^2\right)}$ με $\mathbf{x_1=+0,1\ m}$ και $\mathbf{x_2=+A=+0,2\ m}$

$$\Rightarrow\ \mathbf{W_{(F_{ΕΛΑΤ})} = -\frac{1}{2}\cdot 100\cdot\left(0,2^2 - 0,1^2\right)}\ \Rightarrow\ \boxed{\mathbf{W_{(F_{ΕΛΑΤ})} = -1,5(J)}}\ .$$

Σημείωση: Αφού είναι $\mathbf{ΣF=F_{ΕΛΑΤ}}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το **Θ.Μ.Κ.Ε.** Έτσι:

$$\mathbf{W_{(F_{ΕΛΑΤ})} = ΣW = ΔK}\quad (\text{επειδή}\ \mathbf{K_1+U_1 = E_T = K_2+U_2})\ \Rightarrow$$

$$\mathbf{ΔK = K_2 - K_1 = U_1 - U_2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{ΔK = \frac{1}{2}\cdot\left(x_1^2 - x_2^2\right)}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{W_{(F_{ΕΛΑΤ})} = \frac{1}{2}\cdot\left(x_1^2 - x_2^2\right)}\quad\Rightarrow \ldots \Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{W_{(F_{ΕΛΑΤ})} = -1,5(J)}}\ .$$

Άσκηση για λύση (4.1)

Στη διάταξη του σχήματος στο ***παράδειγμα 4***, αν δώσουμε στο σώμα ταχύτητα $\mathbf{υ=\sqrt{3}}$ **m/s** προς τα ***αριστερά***, με θετική φορά προς τα δεξιά, να βρεθούν:
α) το πλάτος της **γ.α.τ.** που θα εκτελέσει το σώμα,
β) η εξίσωση της απομάκρυνσης $\mathbf{x_{(t)}}$ της **γ.α.τ.**,
γ) το έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη στιγμή $\mathbf{t_o=0}$ μέχρι τη στιγμή όπου το σώμα σταματά στιγμιαία, για πρώτη φορά.

[**Απ. α) A=0,2 m , β)** $\mathbf{x_{(t)} = 0,2\cdot ημ\left(10\cdot t + \frac{5π}{6}\right)}$ **, γ)** $\mathbf{W_{(F_{ΕΛΑΤ})} = -1,5(J)}$]

Άσκηση για λύση (4.2)

Στη διάταξη του σχήματος στο ***παράδειγμα 4***, πόση ταχύτητα πρέπει να δώσουμε στο σώμα προς τα δεξιά, ώστε αυτό στη συνέχεια να εκτελέσει **γ.α.τ.** με εξίσωση απομάκρυνσης: $\mathbf{x_{(t)} = 0,4\cdot ημ\left(10\cdot t + \frac{π}{4}\right)}$. Να πάρετε $\mathbf{x = +0,2\sqrt{2}\ m}$ (δεν χρειάζεται).

[**Απ.** $\mathbf{υ = 2\sqrt{2}}$ **m/s**]

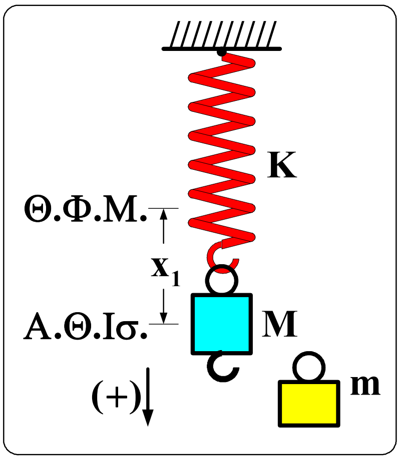
Άσκηση για λύση (4.3)

Στη διάταξη του σχήματος το σώμα, μάζας **M=2 Kg**, ισορροπεί κρεμασμένο από την κάτω άκρη του κατάκόρυφου ελατηρίου, σταθεράς **K=200 N/m**. Στη συνέχεια κρεμάμε από το σώμα **(M)** ένα μικρότερο σώμα, μάζας **m=2 Kg**. Να βρείτε:

α) το πλάτος της **γ.α.τ.** που θα εκτελέσει το σύστημα,

β) την εξίσωση της απομάκρυνσης $x_{(t)}$ που περιγράφει την γ.α.τ. του συστήματος (με $t_o=0$ τη στιγμή που κρεμάσαμε το μικρό σώμα),

γ) την ταχύτητα του σώματος **(M)** τη στιγμή που περνά από θέση κατά **h=0,15 m** κάτω από τη θέση που κρεμάσαμε το μικρό σώμα **(m)**.



[**Απ. α)** **A=0,1 m , β)** $x_{(t)} = 0,1 \cdot ημ\left(5\sqrt{2} \cdot t + \frac{3π}{2}\right)$ **, γ) υ=0,6124 m/s**]

Άσκηση για λύση (4.4)

Στη διάταξη του σχήματος το ελατήριο, σταθεράς **K=100 N/m**, έχει φυσικό μήκος $\ell_o = 0,6\text{m}$. Στη συνέχεια κρεμάσαμε στο κάτω μέρος του ελατηρίου ένα σώμα, μάζας **m=2 Kg**, και με τη βοήθεια νήματος, στερεωμένο στο έδαφος, επιμηκύναμε το ελατήριο σε μήκος $\ell = 1\text{m}$. Τη στιγμή $t_o=0$ κόβουμε το νήμα. Να βρείτε:

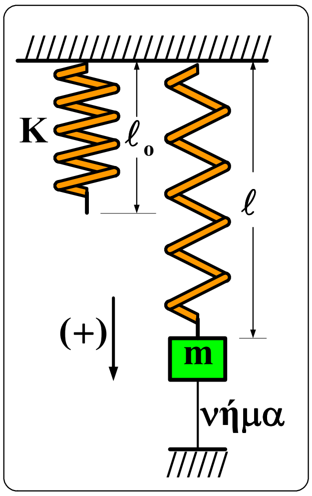
α) το πλάτος της **γ.α.τ.** που θα εκτελέσει το σώμα,

β) την εξίσωση της απομάκρυνσης $x_{(t)}$ που περιγράφει την γ.α.τ. του σώματος,

γ) την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που φθάνει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου,

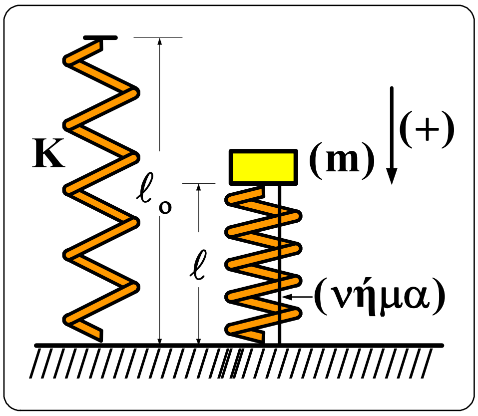
δ) την επιτάχυνση του σώματος μετά από χρόνο $t = \frac{π\sqrt{2}}{10}\text{sec}$ από τη στιγμή που κόψαμε το νήμα.

Δίνεται **g=10 m/s²**.



[**Απ. α)** **A=0,2 m , β)** $x_{(t)} = 0,2 \cdot ημ\left(5\sqrt{2} \cdot t + \frac{π}{2}\right)$ **, γ) υ=0 , δ) α=10 m/s²**]

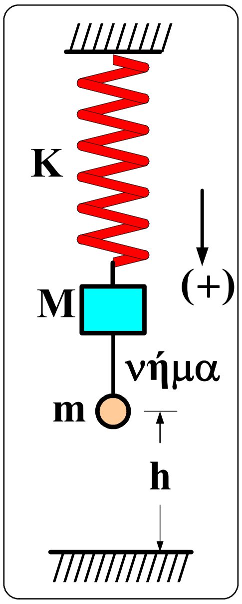
Άσκηση για λύση (4.5)



Στη διάταξη του σχήματος το ελατήριο, σταθεράς **K=100 N/m**, έχει φυσικό μήκος $\ell_o = 0,6\mathbf{m}$. Στη συνέχεια τοποθετήσαμε στο πάνω μέρος του ελατηρίου ένα σώμα, μάζας **m=1 Kg**, και με τη βοήθεια νήματος, στερεωμένο στο έδαφος,συσπειρώσαμε το ελατήριο σε μήκος $\ell = 0,4\mathbf{m}$. Τη στιγμή $t_o=0$ κόβουμε το νήμα.
Να βρείτε:
α) το πλάτος της **γ.α.τ.** που θα εκτελέσει το σώμα,
β) την εξίσωση της απομάκρυνσης $x_{(t)}$ που περιγράφει την **γ.α.τ.** του σώματος,
γ) την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που φθάνει, για πρώτη φορά, στη θέση στην οποία το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell = 0,05\mathbf{m}$,
δ) την επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή που το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια $U = 0,5(J)$.
Δίνεται **g=10 m/s²**.

[Απ. α) A=0,1 m , β) $x_{(t)} = 0,1\cdot ημ\left(10\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$ **, γ) υ=**$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **m/s ,δ) α=0]**

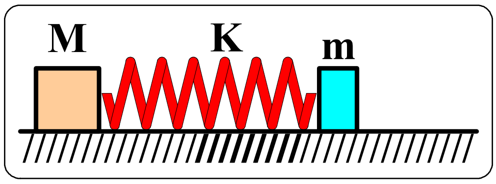
Άσκηση για λύση (4.6)



Στη διάταξη του σχήματος το ελατήριο έχει άγνωστη σταθερά **K**. Το σώμα που είναι στερεωμένο στο ελατήριο έχει μάζα **M=4 Kg**, ενώ το σώμα που κρέμεται από το νήμα έχει μάζα **m=2 Kg**. Το σώμα **(m)** απέχει από το έδαφος απόσταση **h=(π²/5) m**. Κάποια στιγμή **(t_o=0)** κόβουμε το νήμα. Μέχρις ότου το σώμα **(m)** να φθάσει στο έδαφος το σώμα **(M)** έχει φθάσει, για πρώτη φορά, σε θέση όπου έχει ταχύτητα μηδέν (μετά το κόψιμο του νήματος).
Να βρείτε:
α) τη σταθερά **K** του ελατηρίου,
β) την εξίσωση της απομάκρυνσης $x_{(t)}$ που περιγράφει την γ.α.τ. του σώματος **(M)**,
γ) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος **(M),** τη στιγμή που το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell = 0,3\mathbf{m}$,
δ) τη θέση του σώματος **(M)** τη στιγμή που το σώμα **(m)**, καθώς πέφτει, απέχει από το έδαφος απόσταση **h_1=(3π²/20) m**.
Δίνεται **g=10 m/s²**.

[Απ. α) K=100 N/m , β) $x_{(t)} = 0,2\cdot ημ\left(5\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$ **, γ)** $υ = 0,5\sqrt{3}$ **m/s , δ) x=0, υ<0]**

Άσκηση για λύση (4.7)



Στη διάταξη του σχήματος τα δύο σώματα είναι στερεωμένα στα άκρα του οριζόντιου ελατηρίου, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος.
Το σώμα **(M)** έχει μάζα **10 Kg**, ενώ το σώμα **(m)** έχει μάζα **1 Kg**. Το ελατήριο έχει σταθερά **K=100 N/m**. Το σώμα **(M)** παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής με το δάπεδο **μ=0,25**. Να βρεθεί το πλάτος της **γ.α.τ.** που μπορεί να κάνει το σώμα **(m)** χωρίς το σώμα **(M)** να γλυστρά.

[Απ. A=0,25 m]

Άσκηση για λύση (4.8)

Στη διάταξη της ***άσκησης (4.7)***, την τριβή την παρουσιάζει μόνο το σώμα **(m)** ενώ στο σώμα **(M)** δίνουμε ταχύτητα **υ** προς τ' αριστερά. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της ταχύτητας **υ** ώστε το σώμα **(M)** να εκτελεί γ.α.τ. χωρίς το σώμα **(m)** να γλυστρά.

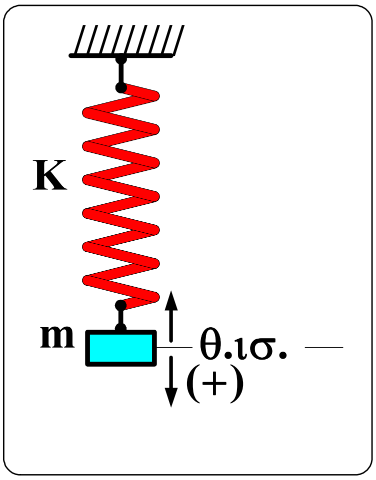
[Απ. $\mathbf{\upsilon = 0{,}025\sqrt{10}\ m/s}$ **]**

Άσκηση για λύση (4.9)

Στη διάταξη της ***άσκησης (4.7)***, το σώμα **(M)** παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής με το δάπεδο **μ=0,25** ενώ το επίπεδο δεξιά του **(M)** είναι λείο. Αν δώσουμε στο σώμα **(m)** ταχύτητα με μέτρο **υ=2 m/s** προς τ' αριστερά **(t_o=0)**, να βρεθεί πόσο θα απέχουν τα δύο σώματα μεταξύ τους μετά από χρόνο **t=(π/5) sec**, με την προϋπόθεση ότι τα δύο σώματα απλά εφάπτονται στο ελατήριο και δεν είναι στερεωμένα σ' αυτό. Δίνεται το φυσικό μήκος του ελατηρίου $\ell_o = \mathbf{0{,}5\ m}$ και **π=3,14** .

[Απ. $\mathbf{s = \left(0{,}5 + \frac{\pi}{5}\right) = 1{,}128\ m}$ **]**

Παράδειγμα 5



Στη διάταξη του σχήματος το σώμα, μάζας **m = x Kg**, είναι στερεωμένο στην κάτω άκρη του κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς **K = y (N/m)**. Το σώμα εκτελεί γ.α.τ., κατακόρυφα. Ο χρόνος «αρχίζει» να μετρά από τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα κάτω ($\mathbf{t_o = 0}$). Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται στο διάγραμμα $\mathbf{U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = f(t)}$. Θετική φορά προς τα κάτω.

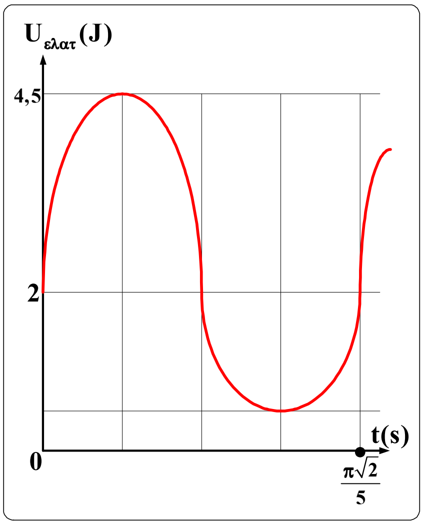
α) Να βρεθεί η μάζα **x (Kg)** του σώματος.

β) Να βρεθεί το πλάτος της γ.α.τ. που εκτελεί το σώμα.

γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

δ) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι **3,125 J**.

ε) Να βρεθεί το ελάχιστο χρονικό διάστημα, που μεσολαβεί ώστε η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου να έχει δύο (διαδοχικές) φορές την τιμή **1,125 J**.



Λύση

α) Στη θέση ισορροπίας του σώματος (με το ελατήριο) ισχύει:

$$F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = mg \quad \Rightarrow \quad K \cdot \Delta\ell = mg$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\ell = \frac{mg}{K} \qquad (1)$$

Από το διάγραμμα $\mathbf{U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = f(t)}$ προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, στη θέση ισορροπίας είναι $\mathbf{U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = 2\ J}$.

Για τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (στη θέση ισορροπίας) ισχύει:

$$U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}\cdot K \cdot \Delta\ell^2 \quad \Rightarrow (1) \Rightarrow \quad U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}\cdot K \cdot \left(\frac{mg}{K}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2\cdot g^2}{K} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m}{K}\right)\cdot m\cdot 10^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m}{K}\right)\cdot m = \frac{4}{100} \quad (2)$$

Από το διάγραμμα επίσης προκύπτει ότι η περίοδος της γ.α.τ. είναι: $\mathbf{T = \frac{\pi\sqrt{2}}{5}(s)}$.

Η περίοδος δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{m}{K} = \frac{T^2}{4\pi^2}} \quad \Rightarrow \ldots$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{\frac{m}{K} = \frac{2}{100}} \quad \mathbf{(3)}$$

Από τις εξισώσεις **(2)** και **(3)** προκύπτει: $\boxed{\mathbf{m = 2(Kg)}}$.

Από την εξίσωση **(3)**, τώρα, προκύπτει: $\boxed{\mathbf{K = 100(N/m)}}$.

β) Αφού το σώμα τη στιγμή $\mathbf{(t_o = 0)}$ κινείται προς τα κάτω, αυτό σημαίνει ότι αυξάνεται η επιμήκυνση (και η δυναμική ενέργεια) του ελατηρίου. Στην «κάτω άκρη» της γ.α.τ. η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι: $\mathbf{x_{max} = \Delta\ell + A}$.
Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, με βάση το διάγραμμα, είναι $\mathbf{U^{max}_{ελατ} = 4,5(J)}$ και ισχύει:

$$\mathbf{U^{max}_{ελατ} = \frac{1}{2}\cdot K \cdot x^2_{max} \quad \Rightarrow \quad U^{max}_{ελατ} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot(\Delta\ell + A)^2 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad (\Delta\ell + A)^2 = \frac{9}{100}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \quad (\Delta\ell + A) = \frac{3}{10}(m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0,1(m)}}.$$

Σημείωση: Γενικά η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$\mathbf{U_{ελατ} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot\left(\Delta\ell + x\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot K\cdot\left(\Delta\ell + A\cdot ημ(\omega t)\right)^2 \quad (4)}$$

γ) Το πλάτος **Α** της γ.α.τ. είναι μικρότερο από την αρχική επιμήκυνση $\mathbf{\Delta\ell}$ του ελατηρίου (στη θέση ισορροπίας του). Στην «πάνω άκρη» της γ.α.τ. η παραμόρφωση (ακόμη επιμήκυνση) του ελατηρίου είναι: $\mathbf{x_{min} = \Delta\ell - A}$.
Από την εξίσωση **(1)** προκύπτει: $\mathbf{\Delta\ell = 0,2\ m}$. Άρα: $\mathbf{x_{min} = 0,1(m)}$.
Έτσι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$\mathbf{U^{min}_{ελατ} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2_{min} \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad \boxed{U^{min}_{ελατ} = 0,5(J)}}.$$

δ) Αφού η τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου **(3,125 J)** είναι μεγαλύτερη από την αρχική τιμή **(2 J)** της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, αυτό σημαίνει ότι το σώμα βρίσκεται «κάτω» από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου. Άρα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση:

$$U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot(\Delta\ell + x_1)^2 \quad \Rightarrow \quad 3{,}125 = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot(0{,}2 + x_1)^2 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$x_1 = 0{,}05(m).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση που συνδέει τις ενέργειες σε γ.α.τ., προκύπτει:

$$K + U = E_T \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2 = \frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2 \quad (5) \quad \Rightarrow$$

$$2\cdot\upsilon_1^2 + 100\cdot 0{,}05^2 = 100\cdot 0{,}1^2 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_1 = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}(m/s)}.$$

ε) Με βάση τα προηγούμενα η τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου **(1,125 J)** δηλώνει ότι το σώμα βρίσκεται «πάνω» από τη θέση ισορροπίας.
Αφού ο χρόνος της γ.α.τ. αρχίζει να μετρά από τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα κάτω **($t_o = 0$)**, αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση που περιγράφει την γ.α.τ. είναι: $x_{(t)} = A\cdot \eta\mu(\omega t)$ (με $\varphi_o = 0$).

Βρήκαμε ότι: $A = 0{,}1\ m$ και $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \ldots = 5\sqrt{2}(rad/s)$.

Οπότε: $x_{(t)} = 0{,}1\cdot \eta\mu(5\sqrt{2}t)$ **(6)**

Άρα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση:

$$U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot(\Delta\ell - x_2)^2 \quad \Rightarrow \quad 1{,}125 = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot(0{,}2 - x_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}2 - x_2) = \pm 0{,}15 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad x_2 = 0{,}05(m).$$ (ψάξτε το «±»)

Επειδή όμως συμπεράναμε ότι κινείται προς τα «πάνω», θα θεωρήσουμε:

$$x_2 = -0{,}05(m).$$

Από την εξίσωση **(6)** προκύπτει: $-0{,}05 = 0{,}1\cdot\eta\mu(5\sqrt{2}t) \quad \Rightarrow \quad \eta\mu(5\sqrt{2}t) = -\frac{1}{2}$

Οι δυνατές λύσεις, για το ελάχιστο χρονικό διάστημα, είναι:

$$5\sqrt{2}\cdot t_1 = \pi + \frac{\pi}{6} \quad (7) \quad \text{και} \quad 5\sqrt{2}\cdot t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} \quad (8)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη **[(8) - (7)]** $\Rightarrow 5\sqrt{2}\cdot(t_2 - t_1) = \frac{4\pi}{6}$, $[\, t_2 - t_1 = \Delta t \,]$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{\pi\sqrt{2}}{15}(s)}.$$

Άσκηση για λύση (5.1)

Στη διάταξη του σχήματος, του ***παραδείγματος 5*** , να βρεθούν οι τιμές της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, τη στιγμή που το σώμα (στη γ.α.τ. που εκτελεί) έχει ταχύτητα με μέτρο $\left|\upsilon_2\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **m/s** .

Υπόδειξη λύσης: Από προσαρμογή της εξίσωσης **(5)** θα βρεθούν «οι τιμές» της απομάκρυνσης $\mathbf{x_2}$ (κίνηση «πάνω – κάτω»). Στη συνέχεια από την εξίσωση **(4)** θα υπολογισθούν οι τιμές της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Σημείωση: Αυτό το μέτρο της ταχύτητας του σώματος «υπάρχει» σε ***δύο θέσεις*** της κίνησης (γ.α.τ.) (προς τα πάνω και προς τα κάτω), αλλά ***τέσσερις χρονικές στιγμές*** («πήγαινε – έλα»).

[Απ. 4,107 J και 0,64295 J]
