1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1. Προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι) και ορίζουμε τη θετική φορά.
2. Προσέχουμε να υπολογίσουμε σωστά τη συχνότητα της ταλάντωσης, αν αυτή δεν δίνεται άμεσα.

πχ 1 : Η ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται μηδενίζεται κάθε 0,2 sec ποια είναι η συχνότητα της ταλάντωσης;

Απ: Η ταχύτητα μηδενίζεται κάθε φορά που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση πράγμα που συμβαίνει κάθε T/2 (μισή περίοδο) , άρα $\frac{T}{2} = 0{,}2\ \text{sec} \Longrightarrow T = 0{,}4\text{sec}$.

Όμως $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5\ \text{Hz}$

πχ 2: Το σώμα που ταλαντώνεται διέρχεται από τη Θ.Ι 40 φορές κάθε δευτερόλεπτο, ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης;

Απ: Σε κάθε ταλάντωση το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας 2 φορές, άρα εκτελεί 20 ταλαντώσεις κάθε δευτερόλεπτο. Επομένως $f = \frac{N}{t} = \frac{20}{1} = 20\ \text{Hz}$.

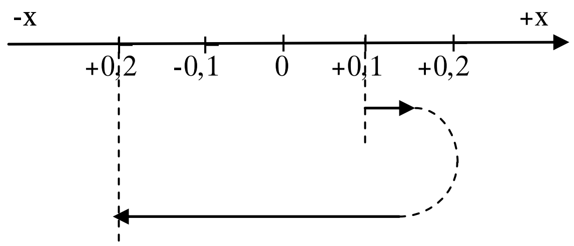
πχ 3: Η κινητική ενέργεια (K) γίνεται 3πλάσια της δυναμικής ενέργειας (U), 80 φορές κάθε δευτερόλεπτο. Ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης; Κάθε πόσο χρόνο διέρχεται το σώμα από τη Θ.Ι ;

Απ: Η σχέση K=3U (θα μπορούσε να είναι K=2U ή K=U) 4 φορές σε κάθε περίοδο άρα το σώμα εκτελεί $N = \frac{80}{4} = 20$ ταλαντώσεις , επομένως $f = \frac{N}{t} = \frac{20}{1} = 20\ \text{Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20}\text{sec}$

Το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κάθε $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{40}sec$

3. Δεν πρέπει να συγχέουμε σε μια ταλάντωση την απομάκρυνση, τη μετατόπιση και το διάστημα.

πχ :



Τη χρονική t_1 το σώμα έχει απομάκρυνση x_1=+0,1m ενώ τη χρονική στιγμή t_2 έχει απομάκρυνση x_2=-0,2m επομένως η μετατόπιση του κινητού είναι Δx= -0,3m ενώ το διάστημα που έχει διανύσει είναι S=0,5m.

4. Η απομάκρυνση , η ταχύτητα , η επιτάχυνση και η δύναμη επαναφοράς είναι αλγεβρικά μεγέθη άρα πρέπει να προσέχουμε το πρόσημό τους.

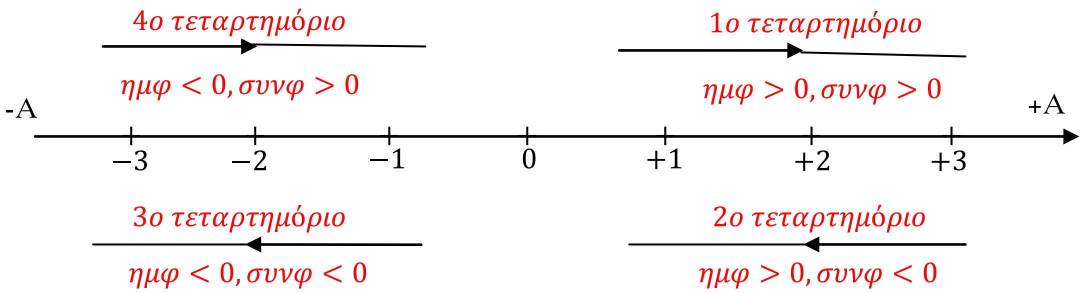
Από τις εξισώσεις της ταλάντωσης παρατηρούμε ότι:

x = A ημωt , δηλαδή η απομάκρυνση έχει το πρόσημο του ημιτόνου,

$\upsilon = \upsilon_{max}$ συνωt, δηλαδή η ταχύτητα έχει το πρόσημο του συνημίτονου,

$\alpha = -\alpha_{max}$ ημωt , $F = -F_{max}$ ημωt, δηλαδή η επιτάχυνση και η δύναμη επαναφοράς έχουν πάντοτε αντίθετο πρόσημο από την απομάκρυνση.

Άρα για μια ταλάντωση έχουμε:



πχ: Όταν το σώμα που ταλαντώνεται βρίσκεται στη θέση x=+2 και κατευθύνεται προς το +A έχει θετική ταχύτητα γιατί συνφ>0, ενώ όταν βρίσκεται στη θέση x=-1 και κατευθύνεται προς το –A έχει αρνητική ταχύτητα γιατί συνφ<0

● Όταν το σώμα εκτοξεύεται από τη Θ.Ι του το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης ισούται με την υ_{max} της ταλάντωσης.

● Όταν ένα σώμα αφήνεται να ξεκινήσει την ταλάντωση του από μια θέση όπου η ταχύτητά του είναι ίση με μηδέν τότε η θέση αυτή είναι μία από τις ακραίες θέσης της ταλάντωσης.

5. <u>Διαφορά φάσης μεταξύ x,υ,α</u>

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι x= Αημωt

Η εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon = \upsilon_{max}$συνωt μπορεί να γραφεί $\upsilon = \upsilon_{max}$ημ(ωt+ $\frac{\pi}{2}$) . Δηλαδή η ταχύτητα προηγείται της απομάκρυνσης κατά $\frac{\pi}{2}$ rad.

Η εξίσωση της επιτάχυνσης $\alpha = -\alpha_{max}$ημωt μπορεί να γραφεί $\alpha = \alpha_{max}$ημ(ωt+π) . Δηλαδή η επιτάχυνση προηγείται της ταχύτητας κατά $\frac{\pi}{2}$ rad ενώ προηγείται της απομάκρυνσης κατά π rad.

6. <u>Αν γνωρίζουμε μια από τις χρονικές εξισώσεις της ταλάντωσης πως υπολογίζουμε τις άλλες.</u>

Έστω δίνεται η εξίσωση της ταχύτητας υ= 2 συν(10t + $\frac{\pi}{3}$) (S.I).

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ισχύει $\upsilon = \upsilon_{max}$ συν(ωt+φο).

Η σύγκριση των δυο εξισώσεων δίνει: υ_{max}= 2m/s, ω=10 rad/s.

Όμως $\upsilon_{max} = \omega \cdot A \Longrightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} = 0{,}2m$, $\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A = 20 m/s^2$

Άρα οι υπόλοιπες εξισώσεις είναι: x= 0,2 ημ(10t + $\frac{\pi}{3}$) (S.I) και α= - 20ημ(10t + $\frac{\pi}{3}$) (S.I)

7. <u>Πως βρίσκουμε τι χρονική στιγμή που συμβαίνει κάτι για 1η ,2η,.. φορά.</u>

ΔΕΝ ξεχνάμε ότι 1η φορά είναι πάντοτε η 1η θετική τιμή του χρόνου που βρίσκουμε λύνοντας την κατάλληλη τριγωνομετρική εξίσωση.

πχ: Αν έχουμε την εξίσωση x=Αημ(10t+ $\frac{4\pi}{3}$) και θέλουμε να βρούμε ποια χρονική στιγμή το σώμα θα αποκτήσει για τρίτη φορά απομάκρυνση x= +A/2 ακολουθούμε τη διαδικασία.

x=Aημ(10t+ $\frac{4\pi}{3}$)$\Longrightarrow \frac{A}{2} = $ Aημ$\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} =$ ημ$\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right) \Longrightarrow$ ημ$\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right) =$ ημ$\frac{\pi}{6}$

Άρα $10t + \frac{4\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ (1) ή $10t + \frac{4\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ (2)

Για κ=0 από την (1) προκύπτει $t = -\frac{7\pi}{60} < 0$ *απορρίπτεται*

Για κ=0 από την (2) προκύπτει $t = -\frac{3\pi}{60} < 0$ *απορρίπτεται*

Για κ=1 από την (1) προκύπτει $t = \frac{5\pi}{60} > 0$ *1η φορά*

Για κ=1 από την (2) προκύπτει $t = \frac{9\pi}{60} > 0$ *2η φορά*

Για κ=2 από την (1) προκύπτει $t = \frac{17\pi}{60} > 0$ *3η φορά*

Αν μας ενδιαφέρει και το πρόσημο της ταχύτητας τότε στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι:

για $t = \frac{5\pi}{60}$sec η ταχύτητα είναι υ= υ_{max} συν(10t+ $\frac{4\pi}{3}$)=υ_{max}συν(10$\frac{5\pi}{60}$+$\frac{4\pi}{3}$)⇒ υ= υ_{max}συν($\frac{13\pi}{6}$) >0

για $t = \frac{9\pi}{60}$sec η ταχύτητα είναι υ= υ_{max} συν(10t+ $\frac{4\pi}{3}$)=υ_{max}συν(10$\frac{9\pi}{60}$+$\frac{4\pi}{3}$)⇒ υ= υ_{max}συν($\frac{17\pi}{6}$) <0

Δηλαδή διέρχεται από τη θέση x=+A/2 για δεύτερη μεν φορά αλλά για πρώτη φορά με αρνητική ταχύτητα.

8. <u>Πως προσδιορίζουμε την αρχική φάση μιας ταλάντωσης.</u>

Η αρχική φάση είναι γωνία με τιμές $0 \leq \varphi_o < 2\pi$

Για να προσδιορίσουμε την αρχική φάση μιας ταλάντωσης έχουμε πληροφορίες για τη θέση και την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t=0. Από τις πληροφορίες αυτές βρίσκουμε το πρόσημο του ημιτόνου και του συνημίτονου για να καταλάβουμε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η αρχική φάση.

πχ. Ένα σώμα που εκτελεί α.α.τ πλάτους A=0,4m τη χρονική στιγμή t=0 διέρχεται από τη θέση x= -0,2m και το μέτρο της ταχύτητας του μειώνεται. Ποια είναι η αρχική του φάση;

Απ: Από την εξίσωση x= Aημ(ωt + φ_o) και τα δεδομένα προκύπτει

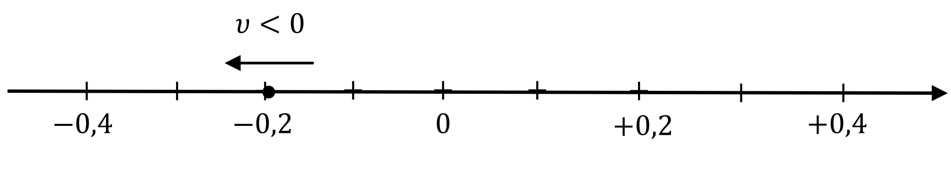
-0,2=0,4ημφ_o $\Longrightarrow \eta\mu\varphi_o = -\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \eta\mu\frac{7\pi}{6}$ άρα $\varphi_o = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$(1) ή $\varphi_o = 2\kappa\pi + \pi - \frac{7\pi}{6}$(2)

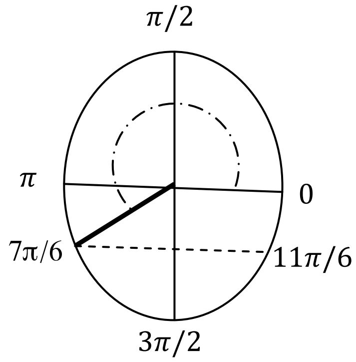
● από την (1) για κ=0 προκύπτει $\varphi_o = \frac{7\pi}{6}rad$ και από την εξίσωση της ταχύτητας

υ= υ_{max} συν(ωt + φ_o) για t=0 προκύπτει υ= υ_{max}συν$\frac{7\pi}{6}$ < 0 (3)

● από την (2) για κ=1 (το κ=0 δίνει t<0 απορρίπτεται) προκύπτει $\varphi_o = \frac{11\pi}{6}rad$ και από την εξίσωση της ταχύτητας υ= υ_{max}συν$\frac{11\pi}{6}$ > 0 (4)

Από τα δεδομένα παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι αρνητική άρα δεκτή η (3) δηλαδή $\varphi_o = \frac{7\pi}{6}rad.$





9. Το πλάτος μιας ταλάντωσης μπορεί να υπολογιστεί αν:
   Α) Γνωρίζουμε διάφορα μεγέθη με βάση τα δεδομένα
   πχ. Αν δίνεται η εξίσωση της επιτάχυνσης α= - 8ημ(2t + π/2). Συγκρίνοντας την εξίσωση με την α= -α_{max}ημ(ωt+φο) έχουμε : ω= 2 rad/s , α_{max}=8 ⇒ ω^2·A=8 ⇒ A= 2m.
   Β) Μας δίνεται ότι εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας (πχ κατά 10cm) και το αφήνουμε ελεύθερο τότε το πλάτος της ταλάντωσης είναι A=10 cm.
   Γ) Μας δίνεται ότι οι δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης απέχουν πχ d=20cm τότε d=2A άρα A=10cm.
   Δ) Γνωρίζουμε το έργο της δύναμης που ασκούμε ώστε από την ηρεμία να διεγείρουμε το σώμα για να κάνει α.α.τ (δηλαδή γνωρίζουμε την ολική ενέργεια της ταλάντωσης) τότε:

$$W_F = E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}DA^2 \Longrightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{D}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\boldsymbol{E_{\tau\alpha\lambda} = K_{max} = U_{max}}$

   Ε) Γνωρίζουμε για κάποια απομάκρυνση x την ταχύτητα υ που έχει , οπότε εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Ταλ)

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

10.
   Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Ταλ) και χρησιμοποιώντας τη σχέση D= mω^2 προκύπτει:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow m\omega^2A^2 = m\upsilon^2 + m\omega^2x^2 \Rightarrow \omega^2A^2 = \upsilon^2 + \omega^2x^2$$

   Δηλαδή προκύπτει μια σχέση που συνδέει τα μεγέθη x, υ, A, ω , αν γνωρίζουμε οποιαδήποτε τρία από αυτά μπορούμε να βρούμε το τέταρτο.

11. Πως υπολογίζουμε σε ποια θέση ή ποια χρονική στιγμή ισχύει μια δεδομένη σχέση μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας.
   πχ1. Ένα σώμα κάνει α.α.τ, σε ποιές θέσεις ισχύει K=3U;
   Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης $E = K + U \Rightarrow U_{max} = K + U \Rightarrow$

$U_{max} = 3U + U \Rightarrow U_{max} = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2}$

πχ2. Ένα σώμα κάνει α.α.τ (χωρίς αρχική φάση) , για ποιες χρονικές στιγμές ισχύει K=3U;

Αφού καταλήξουμε στην προηγούμενη σχέση $x = \pm\frac{A}{2}$ ακολουθούμε τη διαδικασία.

Στην εξίσωση x= A ημωt θέτουμε όπου x μια φορά το $x = +\frac{A}{2}$ και μια φορά το $x = -\frac{A}{2}$

● $+\frac{A}{2} = $ Α ημωt $\Rightarrow \frac{1}{2} = $ ημω$t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \eta\mu\frac{\pi}{6}$ οπότε

► $\omega t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega}$

► $\omega t = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{5\pi}{6\omega}$

● $-\frac{A}{2} = $ Α ημωt $\Rightarrow -\frac{1}{2} = $ ημω$t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \eta\mu\frac{7\pi}{6}$ οπότε

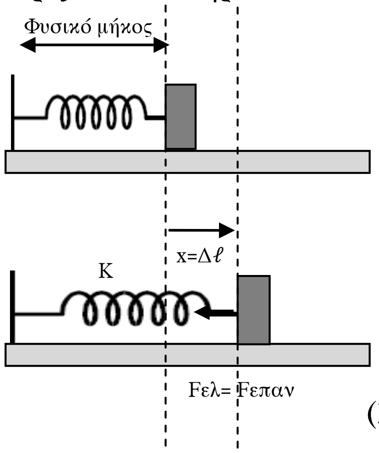
► $\omega t = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_3 = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{7\pi}{6\omega}$

► $\omega t = 2k\pi + \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_4 = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{11\pi}{6\omega}$

12. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης και η κινητική ενέργεια του σώματος μεγιστοποιούνται ή μηδενίζονται κάθε μισή περίοδο ($\frac{T}{2}$) της ταλάντωσης. Επομένως η περίοδος μεγιστοποίησης ή μηδενισμού τους ισούται με $T' = \frac{T}{2}$, οπότε η αντίστοιχη συχνότητα είναι: $f' = \frac{1}{T'} = \frac{2}{T} = 2f$

13. ΕΛΑΤΗΡΙΑ

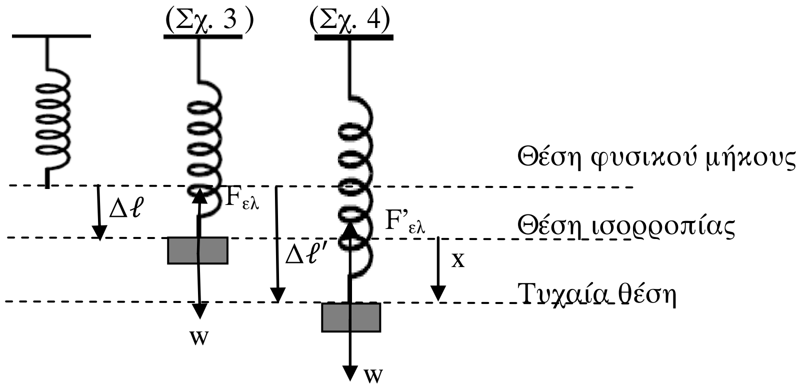
Οριζόντιο ελατήριο



(Σχ. 1)

(Σχ. 2)

Κατακόρυφο ελατήριο



Φυσικό μήκος είναι το μήκος που έχει το ελατήριο όταν δεν ασκείται πάνω του καμιά δύναμη. Το φυσικό μήκος είναι το ίδιο είτε το ελατήριο είναι οριζόντιο είτε κατακόρυφο γιατί θεωρούμε τα ελατήρια αβαρή. Στο οριζόντιο ελατήριο η θέση φυσικού μήκους και η θέση ισορροπίας ταυτίζονται.
Σταθερά ελαστικότητας ελατηρίου (K) μέγεθος χαρακτηριστικό για κάθε ελατήριο , μονάδα μέτρησης το 1N/m.

Νόμος του Hook : $F_{ελ} = K \cdot \Delta\ell$ (**δύναμη παραμορφωμένου ελατηρίου**)
● Υπολογίζουμε τη δύναμη που ασκεί κάθε παραμορφωμένο ελατήριο σε κάθε σώμα που βρίσκεται σε επαφή με αυτό και είναι ανάλογη της παραμόρφωσης $\Delta\ell$ δηλαδή της απόστασης από το φυσικό μήκος.
● Η $F_{ελ}$ έχει πάντοτε φορά προς το φυσικό μήκος.
● Στη θέση ισορροπίας στο κατακόρυφο ελατήριο ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow w = F_{ελ}$
● Σε μια τυχαία θέση η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης είναι : $\Sigma F = w - F'_{ελ}$
● Για την **δύναμη επαναφοράς** ισχύει $\Sigma F = -D \cdot x$, όπου x η απόσταση από τη θέση ισορροπίας.
● Η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης έχει πάντοτε φορά προς τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.
● Στις περιπτώσεις που η ταλάντωση γίνεται σε οριζόντιο επίπεδο τότε η αλλαγή του σώματος που ταλαντώνεται δεν επηρεάζει τη Θ.Ι αν όμως η ταλάντωση γίνεται σε κατακόρυφό ή κεκλιμένο επίπεδο η αλλαγή του σώματος που ταλαντώνεται σημαίνει και αλλαγή της Θ.Ι

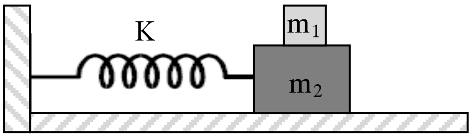
● Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου εξαρτάται από την παραμόρφωση $U_{ελ} = \frac{1}{2} K \cdot \Delta\ell^2$
● Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης εξαρτάται από την απομάκρυνση $U_{ταλ} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$
● Το έργο της δύναμης ελατηρίου ισούται με : $W_{Fελ} = U_{ελ,αρχ} - U_{ελ,τελ}$
● Το έργο της δύναμης επαναφοράς ισούται με : $W_{Fεπ} = U_{αρχ} - U_{τελ}$

14. Πως αποδεικνύουμε ότι ένα σώμα εκτελεί α.α.τ και υπολογίζουμε την σταθερά D της ταλάντωσης.

Α) Στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου (Σχ. 2) ισχύει: $\Sigma F = -F_{ελ} = -K\, \Delta x$ (1).
Ένα σώμα εκτελεί α.α.τ όταν $\Sigma F = -D \cdot x$ (2) .
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει D=K

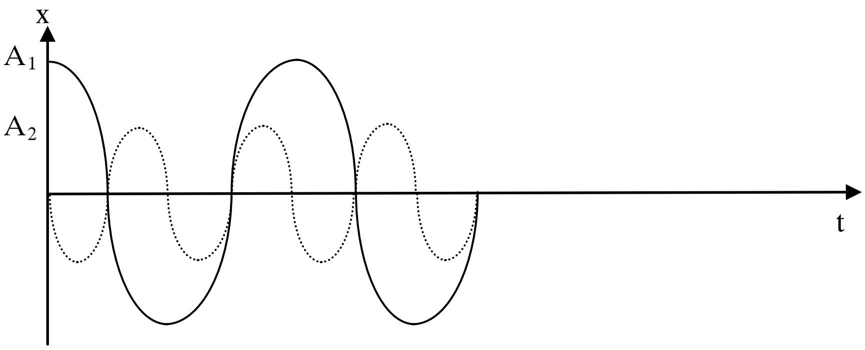
Β) Στην περίπτωση κατακόρυφου ελατηρίου : Στο (Σχ. 3) έχουμε ισορροπία άρα ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow w = K \cdot \Delta\ell$ (3)
Στο (Σχ. 4) για την συνισταμένη των δυνάμεων ισχύει:
$\Sigma F = w - F_{ελ}' \Rightarrow \Sigma F = w - K(\Delta\ell + x) \Rightarrow \Sigma F = w - K\Delta\ell - Kx \overset{(3)}{\Rightarrow} \Sigma F = -K \cdot x$ (4)
Ένα σώμα εκτελεί α.α.τ όταν $\Sigma F = -D \cdot x$ (2) .
Από τις σχέσεις (4) και (2) προκύπτει D=K

15.



Όταν δύο σώματα που βρίσκονται σε επαφή κάνουν κοινή α.α.τ τότε έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega=\omega_1=\omega_2$.
Κάθε σώμα έχει την δική του σταθερά ταλάντωσης $D_1= m_1\cdot\omega^2$ και $D_2= m_2\cdot\omega^2$, ενώ για το σύστημα ισχύει $D= (m_1+m_2)\cdot\omega^2$. Άρα $D=D_1+D_2$

16.



Όταν μας δίνουν γραφικές παραστάσεις μπορούμε να βγάλουμε διάφορα συμπεράσματα. Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτουν τα εξής:

- $A_1=2A_2$
- $T_1=2T_2$

Επειδή ισχύει $\omega=\frac{2\pi}{T}$ προκύπτει ότι $\omega_2=2\omega_1$

- Για τις ταχύτητες ταλάντωσης ισχύει:

$$\frac{\upsilon_{01}}{\upsilon_{02}}=\frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2}=\frac{\omega_1 2A_2}{2\omega_1 A_2}=1$$

- Για τις επιταχύνσεις ισχύει:

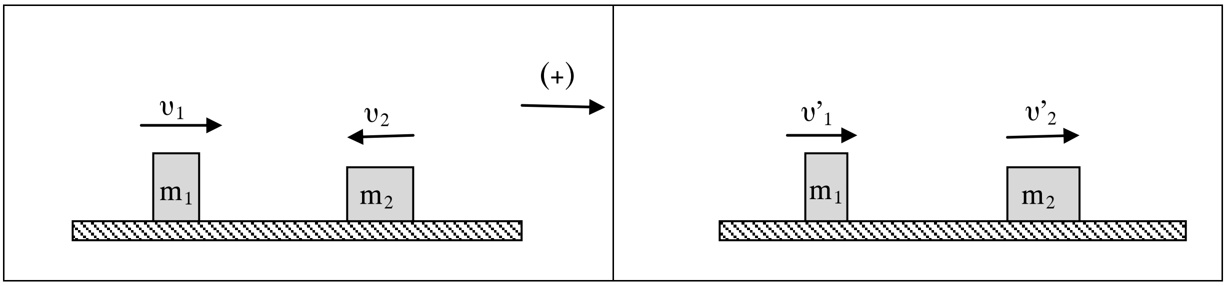
$$\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{02}}=\frac{\omega_1^2 A_1}{\omega_2^2 A_2}=\frac{\omega_1^2 2A_2}{4\omega_1^2 A_2}=\frac{1}{2}$$

- Η αρχική φάση της ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος είναι: $\varphi_{01}=\frac{\pi}{2}\ (rad)$

ενώ της ταλάντωσης με το μικρότερο πλάτος είναι : $\varphi_{02}=\pi\ (rad)$

17. **Κρούση και ταλάντωση**
Σε όλα τα είδη των κρούσεων (ελαστικές και ανελαστικές) ισχύει η αρχή διατήρηση της ορμής (Α.Δ.Ο).

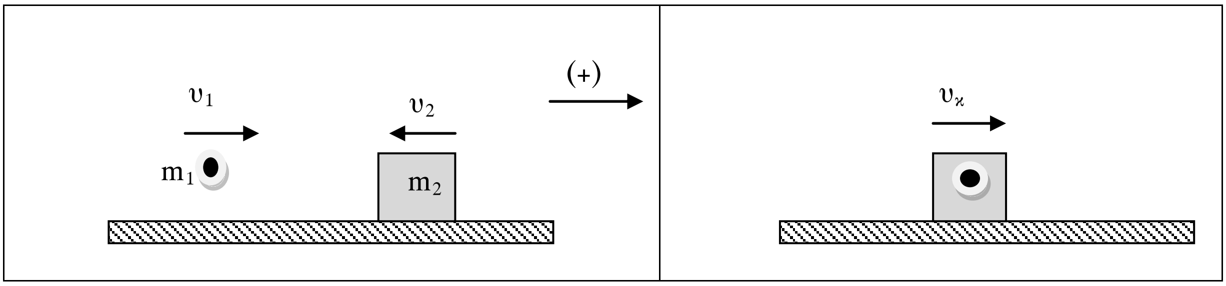
● Σε μια μετωπική κρούση εφαρμόζομε την Α.Δ.Ο αφού πρώτα ορίσουμε την θετική φορά.



πριν την κρούση μετά την κρούση

$\vec{P}\,ολ(αρχ) = \vec{P}\,ολ(τελ)$ ή $\vec{P}\,1(αρχ) + \vec{P}\,2(αρχ) = \vec{P}\,1(τελ) + \vec{P}\,2(τελ)$ ή με βάση τη θετική φορά που ορίσαμε : $m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2 = m_1 \cdot υ'_1 + m_2 \cdot υ'_2$

● Σε μια κεντρική πλαστική κρούση όταν εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο έχουμε:

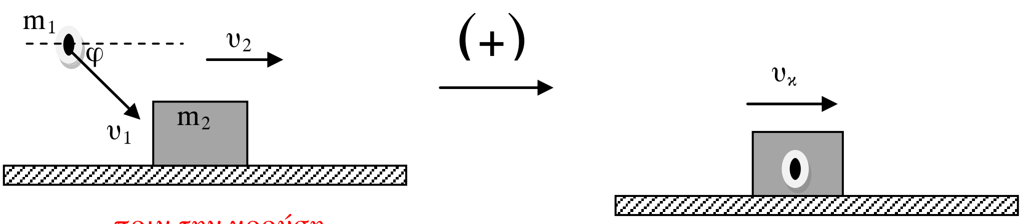


πριν την κρούση μετά την κρούση

$\vec{P}\,ολ(αρχ) = \vec{P}\,ολ(τελ)$ ή $\vec{P}\,1(αρχ) + \vec{P}\,2(αρχ) = \vec{P}\,(τελ)$ ή

$m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2 = (m_1 + m_2) \cdot υ_κ$ ή $υ_κ = \dfrac{m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2}{(m_1 + m_2)}$

● Σε πλάγια πλαστική κρούση όταν εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο έχουμε:



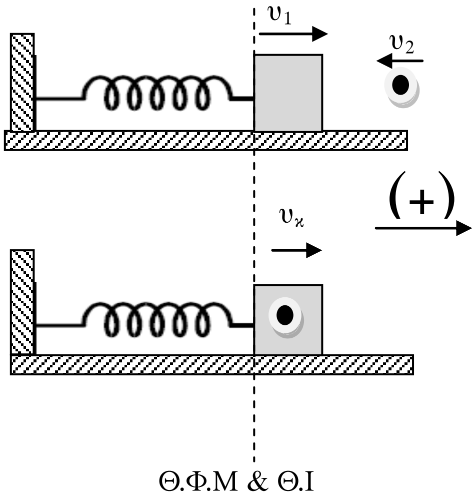
πριν την κρούση

μετά την κρούση

$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)}$ ή $\vec{P}_{1(αρχ)} + \vec{P}_{2(αρχ)} = \vec{P}_{(τελ)}$ ή

$m_1 \cdot \upsilon_1 \cdot συνφ + m_2 \cdot \upsilon_2 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 \cdot συνφ + \cdot \upsilon_2}{(m_1 + m_2)}$

● Πλαστική κρούση με οριζόντιο ελατήριο



► Η Θ.Φ.Μ είναι και Θ.Ι και δεν αλλάζουν πριν και μετά την κρούση.
► Η πλαστική κρούση έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της ταχύτητας ταλάντωσης και υπολογίζετε αν εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο :

$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)}$ ή

$\vec{P}_{1(αρχ)} + \vec{P}_{2(αρχ)} = \vec{P}_{(τελ)}$ ή

$m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon_\kappa$ ή

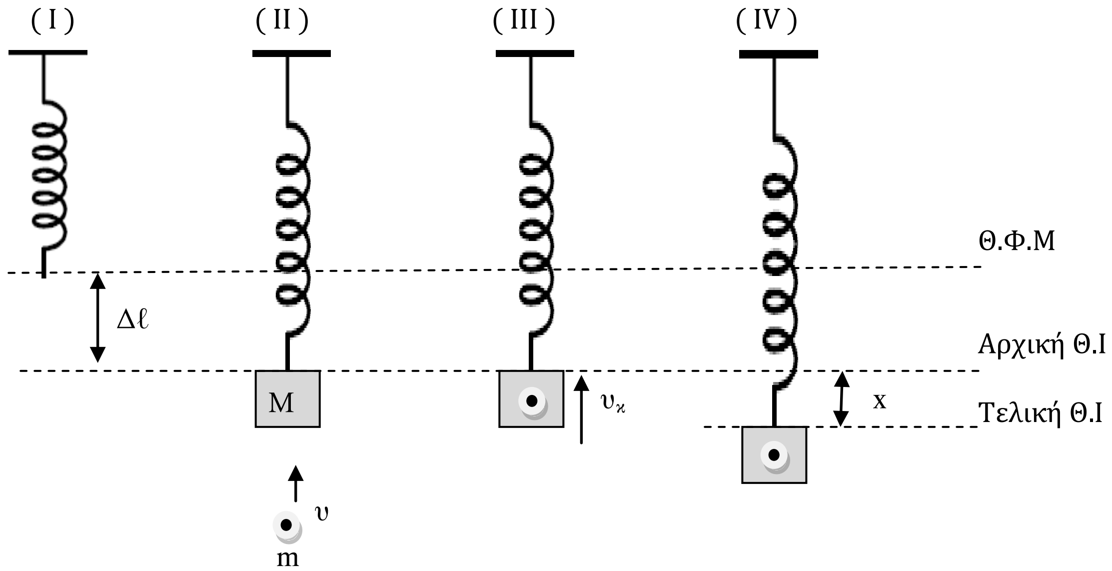
$$\upsilon_\kappa = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2}{(m_1 + m_2)}$$

► Η πλαστική κρούση έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή του πλάτους της ταλάντωσης που υπολογίζετε εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε για την νέα ταλάντωση.

► Η περίοδος της ταλάντωσης του m_1 πριν την κρούση είναι $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K}}$

Η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}}$

● Πλαστική κρούση με κατακόρυφο ελατήριο.



► Αλλάζει η Θ.Ι λόγω αύξησης του βάρους.

► Στο παραπάνω σχήμα στην Αρχική Θ.Ι (σχ. ΙΙ) ισχύει: $\Sigma F=0 \Rightarrow Mg=K\cdot\Delta\ell$

Στην Τελική Θ.Ι ισχύει: $\Sigma F=0 \Rightarrow (M+m)g= K(\Delta\ell+x)$

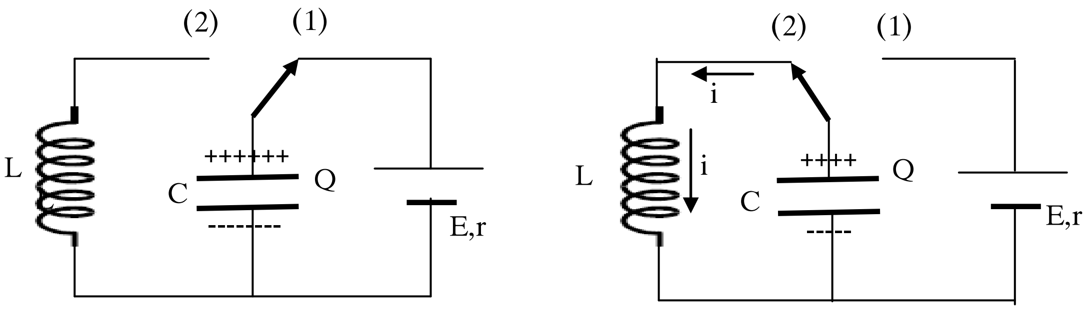
► Αλλάζει το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης και περίοδος της νέας ταλάντωσης.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

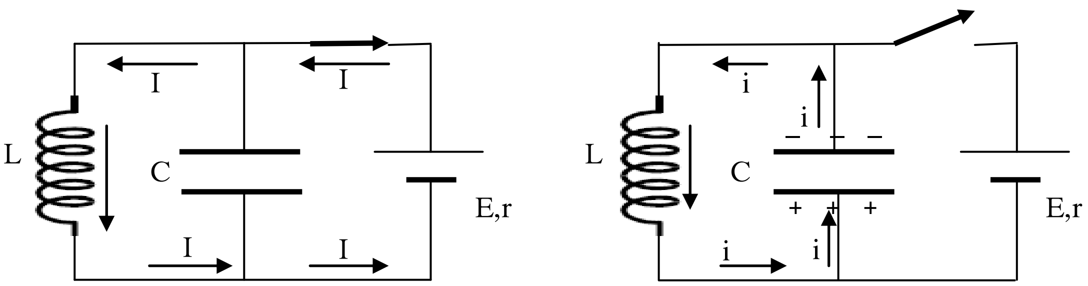
1. Ένας πυκνωτής διαρρέεται από ρεύμα μόνο για όσο χρονικό διάστημα φορτίζεται ή εκφορτίζεται. Αν το κύκλωμα βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση ο πυκνωτής δεν επιτρέπει τον κλάδο που βρίσκεται να διαρρέεται από ρεύμα , δηλαδή λειτουργεί σαν ανοικτός διακόπτης.

2. Ένα ιδανικό πηνίο (δηλαδή πηνίο χωρίς ωμική αντίσταση) εμφανίζει τάση στα άκρα του μόνο όσο χρονικό διάστημα διαρρέεται από ρεύμα που μεταβάλλεται. Όταν το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης έχει μηδενική τάση στα άκρα του.

3. Χρονικές εξισώσεις φορτίου – έντασης.
   Α)



Στο παραπάνω κύκλωμα ο μεταγωγός αρχικά τη χρονική στιγμή **t=0** βρίσκεται στη θέση (1) . Η τάση του πυκνωτή είναι $\mathbf{V_{max}=E}$, το φορτίο του μέγιστο ίσο με Q και όπως είπαμε το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα. Ακαριαία ο μεταγωγός μεταφέρεται στη θέση (2) οπότε αρχίζει ο πυκνωτής να εκφορτίζεται μέσω του πηνίου και ξεκινά η ηλεκτρική ταλάντωση με αρχικές τιμές για το φορτίο και το ρεύμα q=Q και i=0 αντίστοιχα.
Για την ταλάντωση αυτή ισχύουν οι χρονικές εξισώσεις
q= Q· συν(ωt) για το φορτίο και **i= -I·ημ(ωt)** για το ρεύμα. Όπου **I= ω·Q**
Β)



Στο παραπάνω κύκλωμα όσο ο διακόπτης είναι κλειστός το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα $I = \frac{E}{r}$. Επειδή το ρεύμα είναι σταθερό η τάση του πηνίου είναι μηδέν άρα και του πυκνωτή. Επομένως ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Μόλις ανοίξουμε τον διακόπτη το ρεύμα στο πηνίο μειώνεται αλλά λόγω αυτεπαγωγής δεν μηδενίζεται

ακαριαία με αποτέλεσμα να φορτίζει τον πυκνωτή. Με βάση τη φορά του ρεύματος θετικά φορτίζεται ο κάτω οπλισμός. Η Ηλεκτρική ταλάντωση αυτή θεωρείται ηλεκτρική ταλάντωση με αρχική φάση σε σχέση με την περίπτωση (Α) γιατί:
Για t=0 ,i=+I, q=0
i= -I ημ(ωt+φ_o) $\overset{t=0}{\Longrightarrow}$ I= -I ημφ_o ⇒ ημφ_o= -1⇒ ημφ_o=ημ$\frac{3\pi}{2}$ ⇒ φ_o= $\frac{3\pi}{2}$ rad
Επομένως οι εξισώσεις για το φορτίο και το ρεύμα είναι:
$q = Q \cdot συν\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$ ή $\boldsymbol{q = Q \cdot ημ(\omega t)}$ και $i = -I \cdot ημ\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$ ή $\boldsymbol{i = I \cdot συν(\omega t)}$

Γ)

Αρχική φάση έχουμε και στην περίπτωση που τη στιγμή t=0 έχει φορτίο ο πυκνωτής και συγχρόνως διαρρέεται το πηνίο από ρεύμα, οπότε ισχύουν οι εξισώσεις:
$q = Q \cdot συν(\omega t + \varphi_o)$ και $i = -I \cdot ημ(\omega t + \varphi_0)$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>:

● Αν κατά την διάρκεια μιας λύσης προκύπτει θετικό φορτίο σημαίνει ότι εκείνη τη στιγμή είναι θετικά φορτισμένος ο οπλισμός του πυκνωτή που τη στιγμή t=0 είχε θετικό φορτίο.

● Η ένταση του ρεύματος θεωρείται θετική αν το ρεύμα έχει φορά προς τον οπλισμό που τη στιγμή t=0 ήταν θετικά φορτισμένος.

● Ρεύμα που η ένταση του αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή, κατευθύνεται προς τον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή ενώ ρεύμα που η έντασή του μειώνεται κατ' απόλυτη τιμή κατευθύνεται προς τον θετικό οπλισμό του πυκνωτή.

● Επειδή το πηνίο σε κύκλωμα LC είναι ιδανικό και έχει κοινά άκρα με τον πυκνωτή, η Η.Ε.Δ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο είναι ίση κάθε στιγμή με την τάση στα άκρα του πυκνωτή. $\boldsymbol{E_{αυτ} = V_C = \frac{q}{C}}$

4. Μπορούμε να βρούμε μια σχέση που συνδέει τα μεγέθη q,i,Q,I,ω εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. Ταλάντωσης.
$U_E + U_B = E$ (1) *όπου* $E = U_{E,max} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ή $E = U_{B,max} = \frac{1}{2}LI^2$
Από τη σχέση (1) ⇒ $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \frac{q^2}{LC} + i^2 = I^2$ (2) *και επειδή*
$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ *η σχέση (2) γράφεται* $\boldsymbol{q^2\omega^2 + i^2 = I^2}$
Με ανάλογη διαδικασία προκύπτει: $\boldsymbol{i^2\omega^2 + q^2 = Q^2}$

5. Πως υπολογίζουμε για ποια τιμή του φορτίου q ή ποιες χρονικές στιγμές ισχύει μια σχέση μεταξύ της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή U_E και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου U_B.
πχ για ποια τιμή του φορτίου του πυκνωτή ισχύει $U_E=3U_B$ (1) αν είναι γνωστό το μέγιστο φορτίο Q του πυκνωτή.
Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε της ταλάντωσης έχουμε:

$$U_E + U_B = U_{E,max} \overset{(1)}{\Rightarrow} U_E + \frac{U_E}{3} = U_{E,max} \Rightarrow \frac{4}{3}U_E = U_{E,max} \Rightarrow \frac{4}{3}\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow$$

$q^2 = \frac{3}{4}Q^2 \Rightarrow \boldsymbol{q = \pm\frac{\sqrt{3}\,Q}{2}}$ (2)

Αν θέλουμε να βρούμε τις χρονικές στιγμές που ισχύει η σχέση (2) τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση **q= Q· $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(\omega t)}$** η οποία σε συνδυασμό με τη σχέση (2) γράφεται:

● $+\frac{\sqrt{3}\ Q}{2} = \mathrm{Q}\cdot\ \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow\ +\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\ \Longrightarrow \omega t = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$

Οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $t_1 = \frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}}{\omega}$, $t_2 = \frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}}{\omega}$

● $-\frac{\sqrt{3}\ Q}{2} = \mathrm{Q}\cdot\ \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}\ \Longrightarrow \omega t = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $t_3 = \frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}{\omega}$, $t_4 = \frac{2\kappa\pi-\frac{5\pi}{6}}{\omega}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν ζητείται το φορτίο του πυκνωτή ή η ένταση του ρεύματος κάποια χρονική στιγμή τότε:
● αν δίνεται η χρονική στιγμή , χρησιμοποιούμε τις χρονικές εξισώσεις
● αν δεν προσδιορίζεται η χρονική στιγμή, χρησιμοποιούμε συνήθως την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης.

6. Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων ή μηδενισμών της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή ή της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου ισούται με $\frac{T}{2}$.

<u>ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ</u>

1. Σε κάθε φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής F=-bυ, το ποσοστό μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης και το ποσοστό μείωσης της ενέργειας ταλάντωσης ανά περίοδο είναι σταθερό.

Έστω ότι το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης μετά από Ν ταλαντώσεις είναι A_N ενώ μετά από Ν+1 ταλαντώσεις είναι A_{N+1}. Το ποσοστό μείωσης του πλάτους είναι:

$$\frac{A_N - A_{N+1}}{A_N}100\% = \left(1 - \frac{A_{N+1}}{A_N}\right)100\%$$

Από την θεωρία όμως γνωρίζουμε ότι $\frac{A_{N+1}}{A_N} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$, άρα και το ποσοστό είναι σταθερό.

Ανάλογη απόδειξη ισχύει και για την ενέργεια αφού $E = \frac{1}{2}DA^2$.

πχ: Κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου μιας φθίνουσας ταλάντωσης το πλάτος μειώνεται κατά 20%. Αν είναι γνωστό ότι μετά από 4 περιόδους το πλάτος είναι 10cm πόσο είναι το πλάτος μετά από 5 περιόδους;

Απ: Αφού το ποσοστό μείωσης του πλάτους παραμένει σταθερό ίσο με 20% σημαίνει ότι το νέο πλάτος θα είναι ίσο με το 80% του προηγούμενου άρα A_5=0,8 A_4=0,8· 10= 8cm.

2. Αν σε μια φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής F=-bυ θέλουμε να υπολογίσουμε σε πόσο χρόνο το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται k φορές μικρότερο του αρχικού τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση $A = A_O e^{-\Lambda t}$.

πχ: Έστω ότι το αρχικό πλάτος μιας ταλάντωσης είναι Αο=40cm και Λ=2sec-1. Σε πόσο χρόνο το πλάτος θα γίνει Α=10cm;

Απ: $A = A_O e^{-\Lambda t} \Rightarrow e^{-\Lambda t} = \frac{A}{A_O} \Rightarrow e^{-\Lambda t} = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{\Lambda t} = 4 \Rightarrow \Lambda t = \ell n4 \Rightarrow t = \frac{\ell n4}{\Lambda}$

$\Rightarrow t = \frac{2\ell n2}{2} \Rightarrow t = \ell n2\ sec$

3. Αν σε μια φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής F=-bυ γνωρίζουμε το πλάτος A_1 της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 και θέλουμε να βρούμε το πλάτος A_2 μια άλλη χρονική στιγμή t_2 τότε για τη λύση εκμεταλλευόμαστε τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

πχ: Έστω ότι σε μια φθίνουσα ταλάντωση τη χρονική στιγμή t=0 το πλάτος της είναι A_o=25cm. Αν μετά από t_1=20sec το πλάτος της γίνεται A_1=16cm, πόσο θα είναι το πλάτος της A_2 μετά από t_2=30sec από η στιγμή που άρχισε η ταλάντωση;

Απ: $A_1 = A_O e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \frac{A_1}{A_o} \Rightarrow \Lambda t_1 = \ell n\left(\frac{A_1}{A_O}\right) \Rightarrow \Lambda = \frac{1}{t_1}\ \ell n\left(\frac{A_1}{A_O}\right)$

$A_2 = A_O e^{-\Lambda t_2} = A_o e^{-\frac{t_2}{t_1}\ell n\left(\frac{A_1}{A_O}\right)} = A_o e^{\ell n\left(\frac{A_O}{A_1}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}} = A_o\left(\frac{A_1}{A_o}\right)^{\frac{t_2}{t_1}} \Rightarrow A_2 = 25\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{30}{20}} = 25\left(\frac{4}{5}\right)^{2\frac{3}{2}}$

$A_2 = 25\left(\frac{4}{5}\right)^3 \Rightarrow A_2 = 12{,}8cm$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν υπάρχουν ασκήσεις με ερωτήσεις ανάλογες με τις προηγούμενες αλλά αναφέρονται σε ενέργειες ακολουθούμε τις εντελώς ανάλογες διαδικασίες χρησιμοποιώντας τους τύπους της ενέργειας $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_O^2 e^{-2\Lambda t}$

4. Σε κάθε φθίνουσα μηχανική ταλάντωση το έργο της δύναμης αντίστασης δίνεται από τη σχέση: $\boldsymbol{W_F = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi}}$

5. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

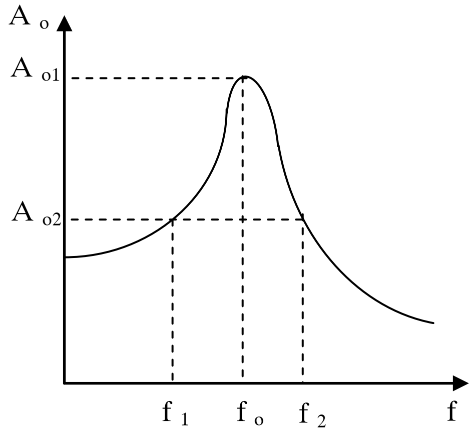
$$e^{\ln a} = a$$
$$\ln e^a = a$$
$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$
$$\ln\frac{a}{b} = -\ln\frac{b}{a}$$
$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$
$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1. Η συχνότητα μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι πάντοτε ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη.
Μόνο όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού έχει συχνότητα ταλάντωσης ίση με την ιδιοσυχνότητα, δηλαδή $f = f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$

2.

Όταν αυξάνουμε τη συχνότητα του διεγέρτη και πλησιάζουμε στην κατάσταση συντονισμού το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από τη συχνότητα συντονισμού το πλάτος μειώνεται.
Για απαντήσουμε στις ερωτήσεις πάντοτε σχεδιάζουμε το διπλανό διάγραμμα.
Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικέ συχνότητες για τις οποίες το πλάτης εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι το ίδιο. Η ιδιοσυχνότητα βρίσκεται μεταξύ αυτών των δύο συχνοτήτων.



3. Οι χρονικές εξισώσεις μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι οι ίδιες με αυτές της ελεύθερης ταλάντωσης.
$x= A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$, $\upsilon= \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi o)$, $\alpha= -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t+\varphi o)$, $F_{\alpha\pi}=-b\cdot\upsilon=-b\cdot\omega A\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o)$
ΠΡΟΣΟΧΗ: $\omega=\omega_\delta=2\pi f_\delta$, όπου f_δ η συχνότητα του διεγέρτη.
Για τη δυναμική ενέργεια ισχύει: $U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}m\omega_o^2x^2$
ΠΡΟΣΟΧΗ: $\omega=\omega_o=2\pi f_o$, όπου f_o η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.
Η δυναμική ενέργεια εκφράζει το έργο των συντηρητικών δυνάμεων άρα το έργο της δύναμης επαναφοράς και όχι το έργο της διεγείρουσας δύναμης και της δύναμης απόσβεσης που δεν είναι συντηρητικές .
Για την κινητική ενέργεια ισχύει: $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$

4. Στην κατάσταση συντονισμού η δύναμη διέγερσης είναι κάθε στιγμή αντίθετη από τη δύναμη απόσβεσης, δηλαδή $F_\delta=-F_{\alpha\pi}$ δηλαδή κατά τον συντονισμό $F_\delta=b\upsilon$.
Αυτό εννοούμε όταν λέμε ότι προσφέρεται ενέργεια κατά τον βέλτιστο τρόπο.
Σε οποιαδήποτε άλλη συχνότητα η σχέση $F_\delta=-F_{\alpha\pi}$ ισχύει μόνο όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, δηλαδή για χ=0.

5. Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δεν είναι ίση με την μέγιστη κινητική παρά μόνο στην κατάσταση συντονισμού όπου $\omega=\omega_o$.

$$U_{max}=\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}m\omega_o^2A^2$$
$$K_{max}=\frac{1}{2}m\upsilon_o^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

Από τις παραπάνω σχέσεις διαπιστώνουμε ότι όταν $\omega>\omega_o$ τότε $K_{max}>U_{max}$.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

1. Σύνθεση δυο α.α.τ με την ίδια συχνότητα

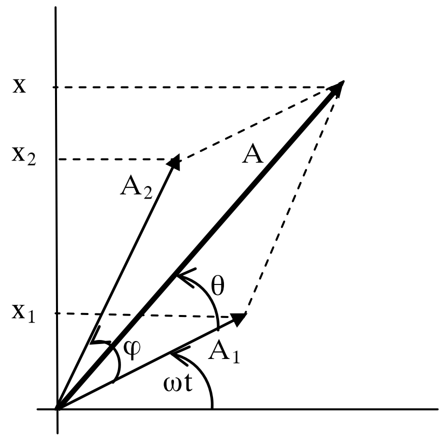
$x_1=A_1\eta\mu(\omega t)$
$x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\varphi)$

Η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθεσης των δυο ταλαντώσεων είναι:

$x=A\eta\mu(\omega t+\theta)$

Όπου $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$



Προσέχουμε ποια από τις δύο ταλαντώσεις που συντίθενται έχει τη μεγαλύτερη φάση γιατί η σύνθετη ταλάντωση προηγείται κατά θ της ταλάντωσης με τη μικρότερη φάση.

2.

● Οι στιγμιαίες τιμές απομάκρυνσης , ταχύτητας και επιτάχυνσης προστίθενται αλγεβρικά, δηλαδή:

1η ταλάντωση	2η ταλάντωση	Σύνθετη ταλάντωση
x_1	x_2	$x=x_1+x_2$
υ_1	υ_2	$\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2$
α_1	α_2	$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

● Τα πλάτη των παραπάνω προστίθενται διανυσματικά

1η ταλάντωση	2η ταλάντωση	Σύνθετη ταλάντωση
A_1	A_2	$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$
υ_{o1}	υ_{o2}	$\upsilon_0=\sqrt{\upsilon_{01}^2+\upsilon_{02}^2+2\upsilon_{01}\upsilon_{02}\sigma\upsilon\nu\varphi}$
α_{01}	α_{02}	$\alpha_0=\sqrt{\alpha_{01}^2+\alpha_{02}^2+2\alpha_{01}\alpha_{02}\sigma\upsilon\nu\varphi}$

3. Ενέργεια κατά την σύνθεση ταλαντώσεων

● Η σταθερά επαναφοράς D δίνεται από τη σχέση $D=m\omega^2$ και είναι ίδια για κάθε συνιστώσα ταλάντωση κα για τη σύνθετη.

$E_1=\frac{1}{2}DA_1^2$ η ολική ενέργεια, αν το σώμα εκτελούσε μόνο του την πρώτη ταλάντωση

$E_2=\frac{1}{2}DA_2^2$ η ολική ενέργεια, αν το σώμα εκτελούσε μόνο του την δεύτερη ταλάντωση

$E\ =\frac{1}{2}DA^2$ η ολική ενέργεια, της σύνθετης ταλάντωσης.

● Κατά την σύνθεση ταλαντώσεων δεν ισχύει γενικά ότι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών των δυο ταλαντώσεων. Αυτό ισχύει για το σώμα δεν αποκλεισμένο από το περιβάλλον του άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Έστω E_1 είναι η ενέργεια που θα είχε το σώμα λόγω της πρώτης ταλάντωσης και E_2 είναι η ενέργεια που θα είχε το σώμα λόγω της δεύτερης ταλάντωσης. Αν οι δύο ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης φ, τότε η ολική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης θα είναι: $E \; = \frac{1}{2}DA^2 \; = \frac{1}{2}D(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 + DA_1A_2συνφ$

$\Rightarrow E = E_1 + E_2 + DA_1A_2συνφ$ (1)

Όμως $E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{D}}$ (2) και $E_2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{D}}$ (3)

οπότε η σχέση (1) λόγω της(2) και της (3)γράφεται:

$E = E_1 + E_2 + \sqrt{4E_1E_2}συνφ \;\Rightarrow\; E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}συνφ$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης εξαρτάται όχι μόνο από ην ολική ενέργεια λόγω της κάθε ταλάντωσης, αλλά και από την διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων.

Αν η διαφορά φάσεις είναι φ=π/2 ή φ=90° τότε μόνο ισχύει $E = E_1 + E_2$

4. Όταν έχουμε σύνθεση δύο α.α.τ που η διαφορά των συχνοτήτων είναι αρκετά μικρή σε σχέση με το άθροισμά τους , προκύπτουν διακροτήματα.

● Η περίοδος του διακροτήματος είναι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης και βρίσκεται από τη σχέση:

$$T_δ = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right|} = \frac{T_1T_2}{|T_1 - T_2|}$$

● Η περίοδος της συνισταμένης ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση:

$$T = \frac{2\pi}{\overline{\omega}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{4\pi}{2\pi(f_1 + f_2)} = \frac{2}{f_1 + f_2}$$

5. Ο αριθμός N των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι:

$$N = \frac{T_δ}{T} = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|}$$

6. Σε ένα διακρότημα με συχνότητα $f_δ = |f_1 - f_2|$, μπορούμε να αυξήσουμε τη μικρότερη από τις συχνότητες ή να μειώσουμε την μεγαλύτερη έτσι ώστε να μην αλλάξει η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους με αποτέλεσμα να μην αλλάξει η συχνότητα του διακροτήματος.