Εξισώσεις Απλής Αρμονικής ταλάντωσης

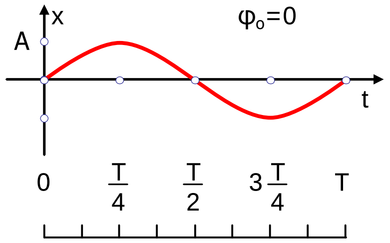
- Σχέση περιόδου - συχνότητας.

$$f\cdot T=1$$

- Γωνιακή ταχύτητα (γωνιακή ή κυκλική συχνότητα).

$$\omega=2\pi\cdot f=\frac{2\pi}{T}$$

- Χρονική εξίσωση απομάκρυνσης.



$$x=A\cdot \eta\mu(\omega t+\varphi_o)$$

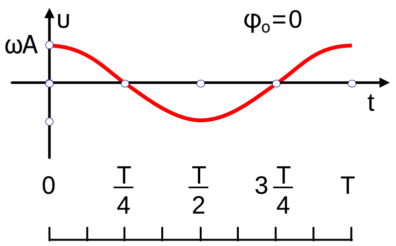
- Φάση ταλάντωσης.

$$\omega t+\varphi_o$$

- Αρχική φάση ταλάντωσης.

φ_o (☛ $\varphi_o=0$ αν για $t=0$, $x=0$ και $\upsilon>0$)

- Χρονική εξίσωση ταχύτητας.

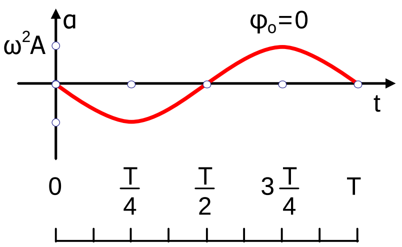


$$\upsilon=\omega A\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o)$$

- Μέγιστη τιμή (πλάτος) της ταχύτητας.

$$\upsilon_{max}=\omega A$$

- Χρονική εξίσωση επιτάχυνσης.



$$\alpha=-\omega^2 A\cdot \eta\mu(\omega t+\varphi_o)$$

- Μέγιστη τιμή (πλάτος) της επιτάχυνσης.

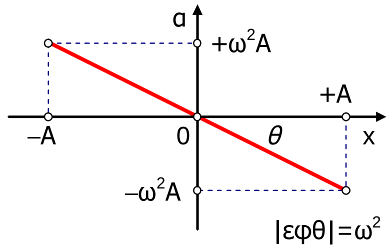
$$\alpha_{max}=\omega^2\cdot A$$

- ΜΗ χρονικές σχέσεις, στιγμιαίων τιμών (υ, α και x).

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2}=1$$

$$\upsilon=\pm\omega\cdot\sqrt{A^2-x^2}$$

$$\alpha=\pm\omega\cdot\sqrt{\upsilon_{max}^2-\upsilon^2}$$



$$\alpha=-\omega^2\cdot x$$

- Σταθερά ταλάντωσης (επαναφοράς).

$$D=m\cdot\omega^2$$

- Παράγωγες σχέσεις.

$$\omega=\sqrt{\frac{D}{m}} \qquad T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad f=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{D}{m}}$$

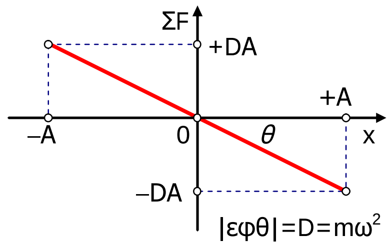
- Εξίσωση δύναμης επαναφοράς.

$$\Sigma F=m\cdot\alpha$$

$$\Sigma F=-m\omega^2\cdot A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$$

$$\Sigma F=-D\cdot A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$$

- Συνθήκη για την εκτέλεση Α.Α.Τ.



$$\Sigma F=-D\cdot x$$

Η δύναμη επαναφοράς $\Sigma F=m\cdot\alpha$, είναι αντίθετη και ανάλογη της ΤΥΧΑΙΑΣ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ x από την θέση ισορροπίας (Ο) της ταλάντωσης.

- Μέγιστη τιμή (πλάτος) της δύναμης.

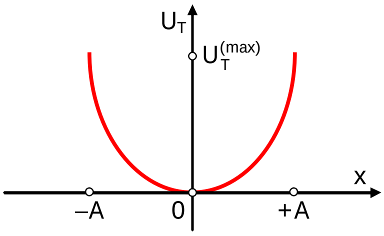
$$\Sigma F_{max}=D\cdot A$$

- Σταθερά ταλάντωσης (επαναφοράς).

$$D=\left|\frac{\Sigma F}{x}\right|=\left|\frac{\Sigma F_{max}}{A}\right|$$

Ενέργεια στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.



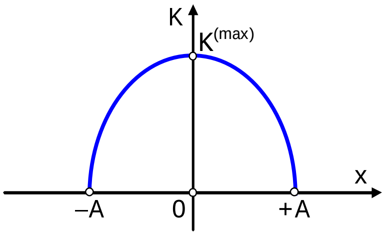
$$U_T=\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2$$

Το x (☛ ΠΡΟΣΟΧΗ), είναι η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

- Μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

$$U_T^{(max)}=\frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2$$

- Κινητική ενέργεια ταλάντωσης.



$$K=\frac{1}{2}\cdot m\cdot u^2$$

- Μέγιστη κινητική ενέργεια ταλάντωσης.

$$K^{(max)}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot u_{max}^2$$

- Ενέργεια ταλάντωσης.

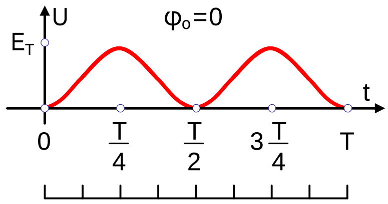
$$E_T=K+U_T$$

$$E_T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot u^2+\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2$$

$$E_T=\frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2$$

$$E_T=U_T^{(max)}=K^{(max)}$$

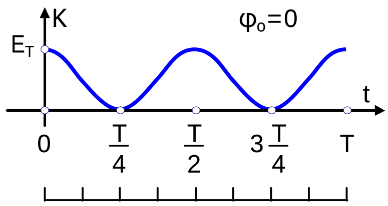
- Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.



$$U_T=E_T–K=K^{(max)}–K$$

$$U_T=\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2=\frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2\cdot ημ^2(ωt+φ_o)\Rightarrow U_T=E_T\cdot ημ^2(ωt+φ_o)$$

- Κινητική ενέργεια ταλάντωσης.



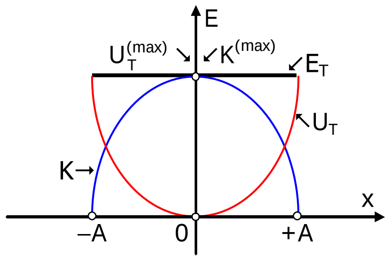
$$K=E_T–U_T=U_T^{(max)}–U_T$$

$$K=\frac{1}{2}\cdot m\cdot u^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot ω^2\cdot A^2\cdot συν^2(ωt+φ_o)\Rightarrow K=E_T\cdot συν^2(ωt+φ_o)$$

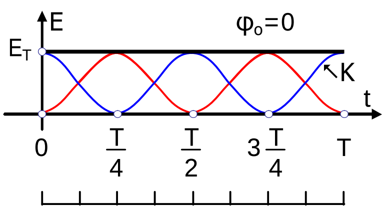
- Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ).

$$E_T=K+U_T=K^{(max)}=U_T^{(max)}=ct$$

$$E_T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot u^2+\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot u_{max}^2=\frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2=ct$$

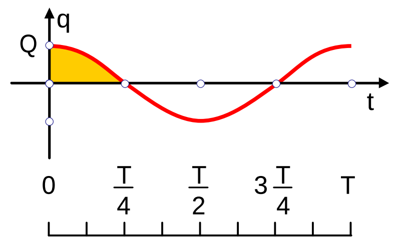


$$E_T=K+U_T=E_T\cdot συν^2(ωt+φ_o)+E_T\cdot ημ^2(ωt+φ_o)=ct$$



Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

- Εξίσωση ταλάντωσης του φορτίου.

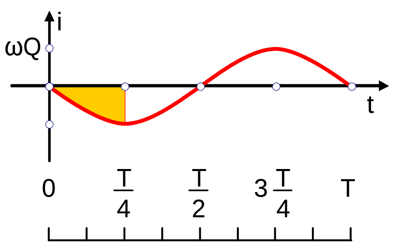


$$q=Q\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t$$

- Μέγιστο (αρχικό) φορτίο πυκνωτή.

$$Q=C\cdot V$$

- Εξίσωση ταλάντωσης του ρεύματος.



$$i=-I\cdot\eta\mu\omega t$$

- Πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος.

$$I=\omega\cdot Q$$

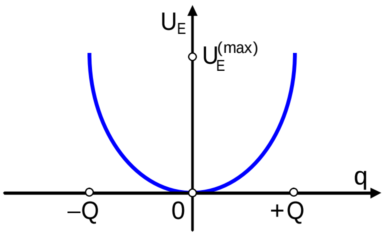
- Περίοδος, συχνότητα και κυκλική συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

$$T=2\pi\cdot\sqrt{LC} \qquad f=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{LC}} \qquad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- ΜΗ χρονικές σχέσεις, στιγμιαίων τιμών (i και q).

$$i=\pm\omega\cdot\sqrt{Q^2-q^2} \qquad q=\pm\frac{1}{\omega}\cdot\sqrt{I^2-i^2} \qquad \frac{q^2}{Q^2}+\frac{i^2}{I^2}=1$$

- Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.

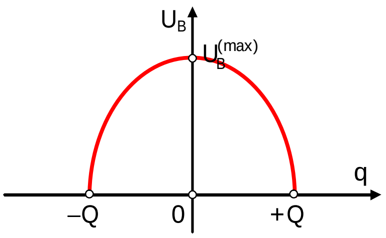


$$U_E=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}$$

- Μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.

$$U_E^{(max)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}$$

- Ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου.



$$U_B=\frac{1}{2}\cdot L\cdot i^2$$

- Μέγιστη ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

$$U_B^{(max)}=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2$$

- Ενέργεια ηλεκτρικής ταλάντωσης.

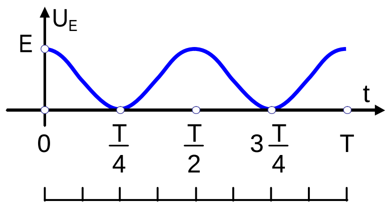
$$E=U_E+U_B$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}\cdot L\cdot i^2$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2$$

$$E=U_E^{(max)}=U_B^{(max)}$$

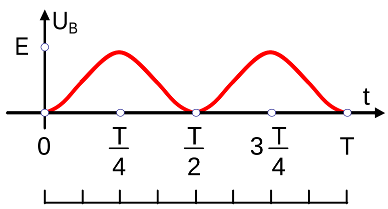
- Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.



$$U_E=E-U_B=U_E^{(max)}-U_E$$

$$U_E=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t}{C}\Rightarrow U_E=E\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t$$

- Ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου.



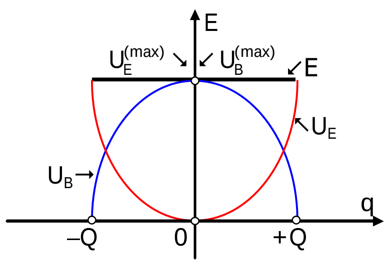
$$U_B=E-U_E=U_B^{(max)}-U_B$$

$$U_B=\frac{1}{2}\cdot L\cdot i^2=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2\cdot\eta\mu^2\omega t\Rightarrow U_B=E\cdot\eta\mu^2\omega t$$

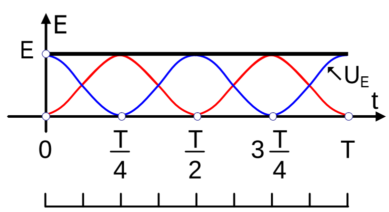
- Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (Α.Δ.Ε).

$$E=U_E+U_B=U_E^{(max)}=U_B^{(max)}=ct$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}\cdot L\cdot i^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2=ct$$



$$E=U_E+U_B=E\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t+E\cdot\eta\mu^2\omega t=ct$$



Φθίνουσες ταλαντώσεις

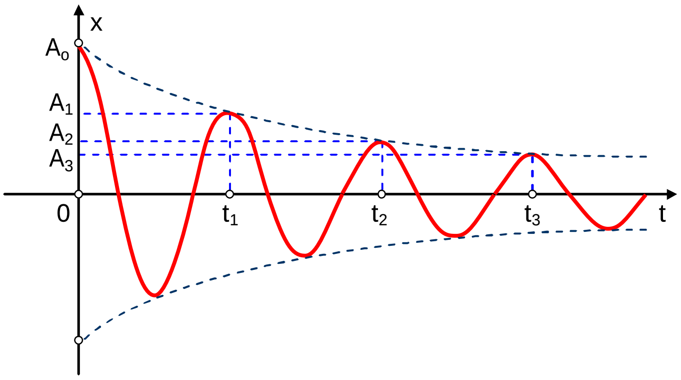
- Δύναμη αντίστασης.

$F' = -b \cdot \upsilon$, b=σταθερό

- Ελάττωση πλάτους.

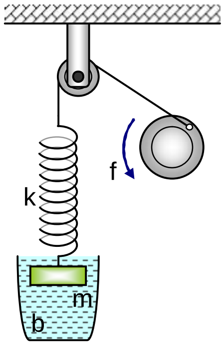
$A_K = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$ $\Lambda > 0$ $t = \kappa \cdot T$, $\kappa \in Z$

Προκύπτει : $\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \ldots = \frac{A_{\nu-2}}{A_{\nu-1}} = \frac{A_{\nu-1}}{A_\nu}$ =σταθερό$=e^{\Lambda \cdot t}$



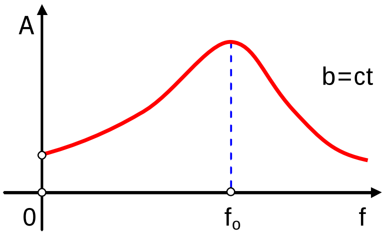
Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

- Ιδιοσυχνότητα του συστήματος ελατήριο - μάζα (καθώς εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση).



$$f_o = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Συνθήκη συντονισμού.



$f = f_o$

Σύνθεση ταλαντώσεων

- Σύνθεση ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας.

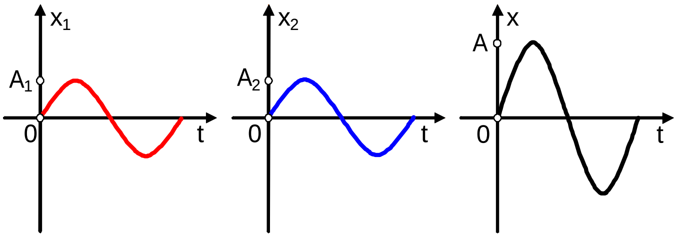
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A_1 \cdot \eta\mu\omega t \\ x_2 = A_2 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \theta)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

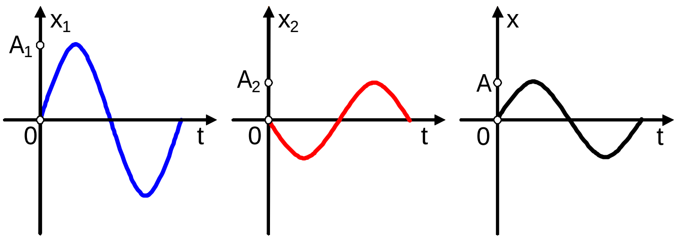
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2 \cdot \eta\mu\varphi}{A_1 + A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

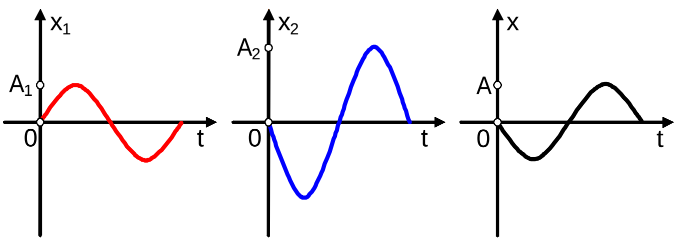
- Αν $\varphi=0^o$ τότε $A=A_1+A_2$ και $\theta=0^o$.



- Αν $\varphi=180^o$ και $A_1>A_2$ τότε $A=|A_1-A_2|$ και $\theta=0^o$.



- Αν $\varphi=180^o$ και $A_1<A_2$ τότε $A=|A_1-A_2|$ και $\theta=180^o$.



- Σύνθεση ταλαντώσεων ίδιου πλάτους αλλά διαφορετικής συχνότητας.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A \cdot \eta\mu\omega_1 t \\ x_2 = A \cdot \eta\mu\omega_2 t \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right),$$

δηλαδή είναι της μορφής $x=A' \cdot \eta\mu\,\bar{\omega}\,t$ (δεν είναι Α.Α.Τ).

☛ Αν $\omega_1 \simeq \omega_2 \Rightarrow$ **διακρότημα** συχνότητας $f_\delta=|f_1-f_2|$.