Μηχανικές ταλαντώσεις

Κεφάλαιο $8^{ο}$

- ***Ασκήσεις για λύση***

Ασκήσεις μηχανικών ταλαντώσεων (Γ.Α.Τ.)

1. Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος **A=0,2 m** και συχνότητα $\mathbf{f=\frac{10}{\pi}}$ **Hz**. Τη στιγμή $\mathbf{t_o=0}$ το σώμα έχει απομάκρυνση **x=+0,1 m** και θετική ταχύτητα. Να βρεθούν:
   α) Η εξίσωση της κίνησης του σώματος,
   β) η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος,
   γ) ο χρόνος που μεσολαβεί, ώστε το σώμα να πάει για **1η** φορά από τη θέση με απομάκρυνση $\mathbf{x_1 = +0{,}1\sqrt{2}(m)}$ (και $\mathbf{\upsilon > 0}$) μέχρι τη θέση με απομάκρυνση $\mathbf{x_2 = +0{,}2(m)}$,
   δ) η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος ανάμεσα στις θέσεις με απομάκρυνση $\mathbf{x_3 = +0{,}2(m)}$ και $\mathbf{x_4 = +0{,}1(m)}$ (και $\mathbf{\upsilon < 0}$). Δίνεται η μάζα του σώματος $\mathbf{m = 1\ Kg}$.

[Απ. α) $\mathbf{x_{(t)} = 0{,}2 \cdot ημ(20t + \frac{\pi}{6})}$ **, β)** $\mathbf{\upsilon_{(t)} = 4 \cdot συν(20t + \frac{\pi}{6})}$,
γ) $\mathbf{\Delta t = \frac{\pi}{40}(s)}$ **, δ)** $\mathbf{\Delta K = 6\ J}$ **]**

2. Μικρό αντικείμενο εκτελεί Γ.Α.Τ. με εξίσωση της ταχύτητας: $\mathbf{\upsilon_{(t)} = -20 \cdot ημ40t}$. Να βρεθούν:
   α) Η εξίσωση της απομάκρυνσης **[x = f(t)]**,
   β) η εξίσωση της επιτάχυνσης **[α = f(t)]**,
   γ) ο χρόνος που μεσολαβεί, ώστε το σώμα να πάει για **1η** φορά από τη θέση με απομάκρυνση $\mathbf{x_1 = +0{,}25(m)}$ (και $\mathbf{\upsilon < 0}$) μέχρι τη θέση με απομάκρυνση $\mathbf{x_2 = 0(m)}$ (και $\mathbf{\upsilon > 0}$).

[Απ. Α) $\mathbf{x_{(t)} = 0{,}5 \cdot συν40t}$**, β)** $\mathbf{\alpha_{(t)} = -800 \cdot συν40t}$ **, γ)** $\mathbf{\Delta t = \frac{5\pi}{160}(s)}$ **]**

3. Μικρό αντικείμενο, μάζας **m=0,1 Kg**, εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση ταχύτητας: $\mathbf{\upsilon_{(t)} = 8 \cdot συν(20t + \frac{\pi}{4})}$ **(S.I.)**. Να βρεθούν:
   α) Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.
   β) Το μέτρο της δύναμης τη στιγμή **t = 25π (ms)**.
   γ) Το μέτρο της επιτάχυνσης τη στιγμή όπου η $\mathbf{E_{KIN} = \frac{3}{4}E_{ΟΛ}}$.

[Απ. α) $\mathbf{x_{(t)} = 0{,}4 \cdot ημ(20t + \frac{\pi}{4})}$**, β)** $\mathbf{|F| = 8 \cdot \sqrt{2}\ N}$ **, γ)** $\mathbf{|\alpha| = 80\ \frac{m}{s^2}}$ **]**

4. Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Τη στιγμή που έχει απομάκρυνση $\mathbf{x_1=+0,3\ m}$ το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $\mathbf{\upsilon_1=2\sqrt{7}\ \frac{m}{s}}$, ενώ τη στιγμή που έχει απομάκρυνση $\mathbf{x_2=-0,2\ m}$ το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $\mathbf{\upsilon_2=4\sqrt{3}\ \frac{m}{s}}$. Να βρεθούν: **α)** το πλάτος και **β)** η περίοδος της Α.Α.Τ.

[Απ. α) A=0,4 m , β) T=0,1π s]

5. Σώμα, μάζας **m=0,1 Kg**, εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος **A=0,4 m** και συχνότητα **f=10 Hz**. Να βρεθούν:

α) Το μέτρο της δύναμης στο σώμα τη στιγμή που έχει ταχύτητα $\mathbf{\upsilon=4\pi\ \frac{m}{s}}$.

β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που είναι **U=3K**.

[Απ. α) $\mathbf{|F| = 8\pi^2\sqrt{3}\ N}$ **, β)** $\mathbf{|\upsilon|=4\pi\ \frac{m}{s}}$ **]**

6. Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης: $\mathbf{x_{(t)} = 0,2 \cdot \eta\mu(20t + \frac{\pi}{3})}$.

Να βρεθούν:

α) Ο λόγος $\mathbf{\frac{K}{U}}$ τη στιγμή $\mathbf{t = \frac{\pi}{60}\ s}$.

β) Οι χρονικές στιγμές, μέσα σε μια περίοδο, όπου **K=U**.

[Απ. α) $\mathbf{\frac{K}{U} = \frac{1}{3}}$ **, β)** $\mathbf{\frac{5\pi}{240}s, \frac{11\pi}{240}s, \frac{17\pi}{240}s, \frac{23\pi}{240}s}$ **]**

7. Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης: $\mathbf{x_{(t)} = 0,4 \cdot \eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{6})}$.

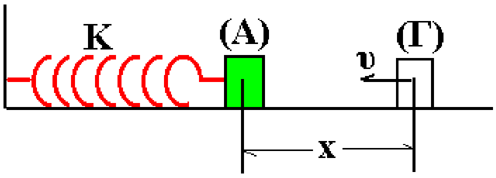
Να βρεθούν:

α) Ο χρόνος που μεσολαβεί ώστε το σώμα να πάει, για πρώτη φορά, από θέση με απομάκρυνση $\mathbf{x_1=+0,2\ m}$ και $\mathbf{\upsilon>0}$ σε θέση με απομάκρυνση $\mathbf{x_2 = +0,2\sqrt{3}\ m}$ και $\mathbf{\upsilon>0}$.

β) Ο χρόνος που μεσολαβεί ώστε το σώμα να πάει, για πρώτη φορά, από θέση με $\mathbf{x_3=+0,4\ m}$ σε θέση με $\mathbf{x_4=-0,2\ m}$ και $\mathbf{\upsilon<0}$.

[Απ. α) $\mathbf{\frac{1}{60}\ s}$ **, β)** $\mathbf{\frac{1}{15}\ s}$ **]**

8. Σώμα, μάζας **m=1 Kg**, είναι στερεωμένο στη μια άκρη οριζόντιου ελατηρίου, σταθερής **K=100 N/m**. Εκτρέπουμε το σώμα προς τα δεξιά (θέση **Γ**) κατά **x=0,2 m**. Τη στιγμή **t_o=0** εκτοξεύουμε το σώμα προς τ' αριστερά με ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{5}$ **m/s**. Να βρεθούν:



α) Το πλάτος της Α.Α.Τ. που θα εκτελέσει το σώμα.

β) Η ταχύτητα του σώματος, τη στιγμή που περνάει από σημείο το οποίο απέχει **x_1=0,1 m** αριστερά του **Α (θέση ισορροπίας)**.

γ) Ποιο θα ήταν το πλάτος της Α.Α.Τ. αν το σώμα εκτοξευόταν από τη θέση **(Γ)** προς τα δεξιά με την ίδια ταχύτητα **υ**;

[Απ. α) A=0,3 m , β) $\upsilon_1 = 2\sqrt{2}$ m/s , γ) A_1=0,3 m]

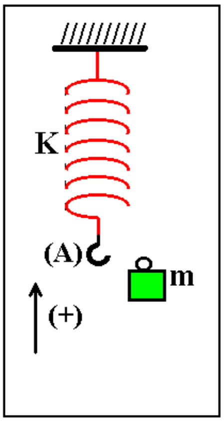
9. Στη διάταξη της ***<u>άσκησης 8</u>***, αν το σώμα εκτοξευόταν από τη θέση **Α** (προς τα δεξιά ή τ' αριστερά), πόση ταχύτητα πρέπει να αποκτούσε ώστε:

α) Να εκτελούσε Α.Α.Τ. με πλάτος **A=0,3 m** .

β) Στην Α.Α.Τ. που θα εκτελούσε να περνούσε από σημείο **Δ**, το οποίο απέχει από το σημείο **Α** κατά **x_2=0,2 m**, με ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{8}$ **m/s** .

[Απ. α) 3 m/s , β) $2\sqrt{3}$ m/s]

10. Σώμα, μάζας **m=0,5 Kg**, που έχει ένα κρίκο στο επάνω μέρος του, κρεμιέται από το άγκιστρο του κατακόρυφου ελατηρίου του σχήματος, σταθερής **K=50 N/m**, τη στιγμή **t_o=0**. Να βρεθούν:



α) Το πλάτος της Α.Α.Τ. που θα εκτελέσει το σώμα.

β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την **γ.α.τ.**

γ) Η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που αυτό έχει κατέβει από την αρχική θέση **(Α)** κατά **h=0,15 m**.

Δίνεται **g=10 m/s²** .

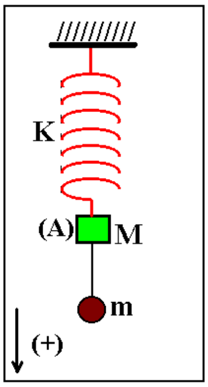
[Απ. α) A=0,1 m , β) $x_{(t)} = 0{,}1 \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$, γ) $\upsilon = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s]

11. Στη διάταξη του σχήματος το σώμα, μάζας **M=2 Kg**, είναι στερεωμένο στο ελατήριο, σταθερής **K=100 N/m**. Κάτω από το σώμα **(M)** κρέμεται με νήμα μικρότερο σώμα, μάζας **m=1 Kg**. Τη στιγμή $t_o=0$ κόβουμε το νήμα. Να βρεθούν:

α) Το πλάτος της Α.Α.Τ. που θα κάνει το σώμα **(M)**.

β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την Α.Α.Τ.

γ) Η επιτάχυνση του σώματος **(M)**, τη στιγμή που έχει μετατοπιστεί προς τα επάνω κατά **h=0,15 m**.



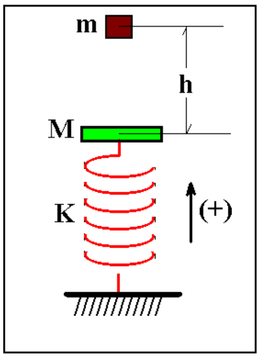
[Απ. α) A=0,1 m , β) $\mathbf{x_{(t)} = 0{,}1 \cdot ημ(5\sqrt{2} \cdot t + \frac{\pi}{2})}$**, γ) α=2,5 m/s^2]**

12. Στη διάταξη του σχήματος σώμα, μάζας **M=3 Kg**, ισορροπεί στερεωμένο στο επάνω μέρος κατακόρυφου ελατηρίου, σταθερής **K=200 N/m**. Ένα δεύτερο σώμα, μάζας **m=1 Kg**, αφήνεται ελεύθερο από ύψος **h=0,8 m** να πέσει επάνω στο σώμα **(M)**, με το οποίο και ενσωματώνεται.
Να βρεθούν:

α) Το πλάτος της Α.Α.Τ. που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα **(M+m)**.

β) Σε πόση απόσταση από το σημείο της κρούσης η ταχύτητα του συσσωματώματος **(M+m)** είναι **V=0,5 m/s**;

γ) Η εξίσωση για την δύναμη του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο.



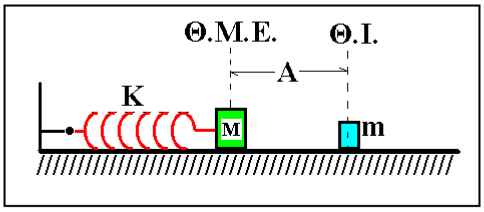
[Απ. α) A=0,15 m , β) 0,182 m , γ) $\mathbf{F_{ΕΛ} = 40 - 30 \cdot ημ(5\sqrt{2} \cdot t + \varphi_o)}$**,**

όπου $\mathbf{ημ\varphi_o = \frac{1}{3}}$ **]**

13. Για τη διάταξη του σχήματος της **<u>άσκησης 12</u>**, από ποιο ύψος $\mathbf{h_1}$ πρέπει να αφήσουμε ελεύθερο το σώμα **(m)**, ώστε το συσσωμάτωμα να εκτελέσει στη συνέχεια Α.Α.Τ. με πλάτος $\mathbf{A = \frac{\sqrt{2}}{20}}$ **m** $\mathbf{(= 0{,}05\sqrt{2}}$ **m)**;

[Απ. $\mathbf{h_1}$=0,1 m]

14. Σώμα, μάζας **m=2 Kg**, είναι στερεωμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου, σταθερής **K=200 N/m**. Το σώμα **(M)** αρχικά βρίσκεται στη θέση ισορροπίας **(Θ.Ι.)** (και θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου). Εκτρέπουμε το σώμα **(M)** κατά **A=0,4 m** προς τ'αριστερά (**Θ**έση **Μ**έγιστης **Ε**κτροπής) και το αφήνουμε ελεύθερο. Τη στιγμή που επιστρέφει στη **Θ.Ι.** συναντά και συσσωματώνεται με άλλο σώμα, μάζας **m=2 Kg** (θεωρείστε τη στιγμή αυτή $\mathbf{t_o = 0}$). Να βρεθούν:



α) Το πλάτος της Α.Α.Τ. που θα εκτελέσει στη συνέχεια το συσσωμάτωμα.
β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης $\mathbf{x_{(t)}}$.

$$[\ \text{Απ. α) } A' = \frac{\sqrt{2}}{5}\ \text{m}\ ,\ \text{β) } x_{(t)} = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot \eta\mu 5\sqrt{2}\cdot t\ ]$$

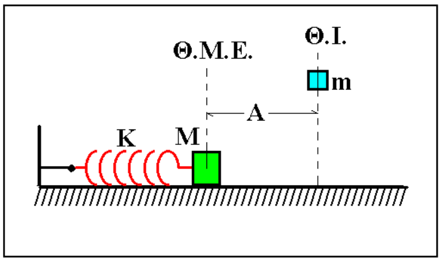
15. Στη διάταξη του σχήματος της ***άσκησης 14***, αν το σώμα **(M)** συναντήσει το σώμα **(m)** σε θέση δεξιά της **Θ.Ι.** κατά $\left(\frac{A}{2}\right)$ να βρεθεί το πλάτος της νέας Α.Α.Τ. του συσσωματώματος.

$$[\ \text{Απ. } A_1 = \sqrt{0,1}\ \text{m}\ ]$$

16. Στη διάταξη του σχήματος της ***άσκησης 14***, το σώμα **(M)** ξεκινά από τη **Θ.Μ.Ε.** και κινείται προς τα δεξιά. Σε ποια θέση πρέπει να συναντηθεί και ενσωματωθεί με το σώμα **(m)**, ώστε το πλάτος της Α.Α.Τ. του συσσωματώματος να είναι $\mathbf{A_2=0,3\ m}$;

$$[\ \text{Απ. } x_1 = \frac{\sqrt{2}}{10}\ \text{m (δεξιά της Θ.Ι.)}\ ]$$

17. Σώμα, μάζας **M=3 Kg**, είναι στερεωμένο στη μια άκρη οριζόντιου ελατηρίου, σταθερής **K= 300 N/m**. Απομακρύνουμε το σώμα **(M)** από τη **Θ**έση **Ι**σορροπίας προς τ'αριστερά κατά **A=0,1 m** και το αφήνουμε ελεύθερο **(t_o=0)**. Τη στιγμή αυτή ένα μικρότερο σώμα, μάζας **m = 1 Kg**, που βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας του **(M)** κατά **h**, αφήνεται ελεύθερο. Το σώμα **(m)** συσσωματώνεται με το σώμα **(M)** καθώς αυτό περνάει από τη **Θ.Ι.** του. Να βρεθούν:

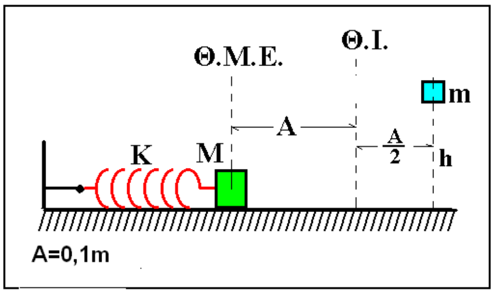


α) Το ύψος **h**.
β) Το πλάτος της Α.Α.Τ. του συσσωματώματος.
γ) Ο χρόνος για να πάει το σώμα **(M)** από τη στιγμή **(t_o=0)** μέχρι το συσσωμάτωμα να πάει για πρώτη φορά στη δεξιά άκρη της Α.Α.Τ (υποθέστε ότι η πλαστική κρούση των δύο σωμάτων γίνεται ακαριαία).

Δίνονται: **$g=10\ m/s^2$** και **$\pi^2=10$**.

$$\textbf{[Απ. α) } h=0{,}125\ m\textbf{ , β) } A_1=\frac{\sqrt{3}}{20}\ m\textbf{, γ) } t=\frac{\pi}{20}\cdot\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\ sec\ \textbf{]}$$

18. Στη διάταξη του διπλανού σχήματος, η οποία στηρίζεται στην ***άσκηση 17***, το σώμα **(m)** ενσωματώνεται στο σώμα **(M)** τη στιγμή που αυτό περνάει από σημείο το οποίο απέχει κατά $\left(\frac{A}{2}\right)$ δεξιά της **Θ.Ι.** Να βρεθούν:



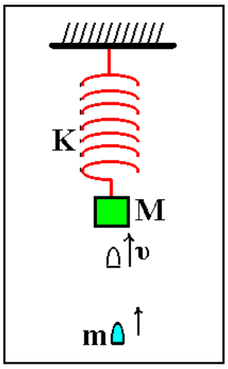
α) Το ύψος **h**.
β) Το πλάτος της Α.Α.Τ. του συσσωματώματος.

$$\textbf{[Απ. α) } h=\frac{2}{9}m=0{,}22\overline{2}\ m\textbf{ , β) } A_1=3\sqrt{\frac{3}{2}}\ m\ \textbf{]}$$

19. Στη διάταξη του σχήματος της ***άσκησης 18***, σε ποια θέση της **γ.α.τ.** του σώματος **(M)** πρέπει να ενσωματωθεί με αυτό το σώμα **(m)**, το οποίο πέφτει ελεύθερα από ύψος **h_1**, ώστε το συσσωμάτωμα να εκτελέσει **γ.α.τ.** με πλάτος **A_1=0,35 m** ; Να θεωρήσετε αρχικό πλάτος, της **γ.α.τ.** του **(M), A=0,4 m**.

[Απ. x_1=0,1 m αριστερά ή δεξιά της Θ.Ι.]

20. Σώμα, μάζας **M=2 Kg**, κρέμεται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς **K=100 N/m**. Ένα βλήμα, μάζας **m=1 Kg**, κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και σφηνώνεται στο σώμα **(M)**. Μόλις λίγο πριν σφηνωθεί έχει ταχύτητα **υ=3 m/s**. Να βρεθούν:



α) Η περίοδος της **γ.α.τ.** του συσσωματώματος **(M+m)**.
β) Το πλάτος της **γ.α.τ.** του συσσωματώματος **(M+m)**.
Δίνεται **g=10 m/s²**.
γ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο (θετική φορά προς τα επάνω).
δ) Η εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο.

[Απ. α) $T = \frac{\pi\sqrt{3}}{5}$ **s , β) A=0,2 m , γ)** $x_{(t)} = 0,2 \cdot ημ\left(5 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$ **,**

δ) $F_{ΕΛΑΤ} = 30 - 20 \cdot ημ\left(5 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$ **]**

21. Στη διάταξη του σχήματος της ***άσκησης 20***, ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του σώματος **(m)**, λίγο πριν σφηνωθεί στο σώμα **(M)**, ώστε το συσσωμάτωμα να εκτελέσει **γ.α.τ**. με πλάτος **A=0,3 m** ; (Τα υπόλοιπα μεγέθη όπως στην ***άσκηση 20***).

[Απ. $υ=2\sqrt{6}$ **m/s]**

22. Στη διάταξη του σχήματος της ***άσκησης 20***, ας δεχτούμε ότι το σώμα **(M)** εκτελεί **γ.α.τ.**, πλάτους **A=0,2 m** . Κάποια στιγμή περνάει από τη θέση ισορροπίας τού συστήματος **(M-K)** κινούμενο προς τα κάτω. Τη στιγμή εκείνη σφηνώνεται σ’αυτό το βλήμα **(m)**. Να βρεθεί το πλάτος της νέας Α.Α.Τ. του συσσωματώματος **(M+m)** για τις περιπτώσεις που η ταχύτητα του βλήματος είναι:
α) $υ_1 = \sqrt{2}$ **m/s , β)** $υ_2 = 2\sqrt{2}$ **m/s , γ)** $υ_3 = 3\sqrt{2}$ **m/s** .

[Απ. α) $A_1 = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$ **m , β)** $A_2 = 0,1$ **m , γ)** $A_3 = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$ **m]**