ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΣΥΛΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ - 4

ΘΕΜΑ 26$^{\text{Ο}}$

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + (x-1)i$**,** $x \in \mathbb{R}$**.**

Α. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$**.**

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ **τέτοιος ώστε ο αριθμός** $w = z^2 + z + 2i$ **να είναι πραγματικός.**

Γ. Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 27$^{\text{Ο}}$

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$**, ορίζουμε:**

$$f(z) = i(z^2+1) + z$$

Α. Να βρεθούν οι τιμές του θετικού ακεραίου ν για τις οποίες ισχύει:

$$\left[f(i)\right]^{\nu} + \left[f(-i)\right]^{\nu} + 2 = 0.$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{Re}\big(f(z)\big) = \mathrm{Re}(z) \cdot \left[1 - 2\,\mathrm{Im}(z)\right].$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{f(z) - f(\overline{z})}{4} = -1 + i$$

ΘΕΜΑ 28$^{\text{Ο}}$

Για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ **ορίζουμε** $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$**.**

Α. Να γραφεί ο μιγαδικός $f(z)$ **στη μορφή** $a + bi$**.**

Β. Να δείξετε την ισοδυναμία: $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$**.**

Γ. Αν ισχύει $f(z) \cdot f(\overline{z}) = 2$**, να δείξετε ότι ο Γ. Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα** $\rho = \sqrt{2}$**.**

Δ. Για τους μιγαδικούς του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $\left|f(z)-1\right|$.

ΘΕΜΑ 29$^{\text{Ο}}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z^2}{|z|^2}$, $z\neq 0, z\in\mathbb{C}$.

Α. Να δείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\big(f(z)\big)\geq -1.$$

Β. Να δείξετε ότι:

$$2\operatorname{Re}\big(f(z)\big)=\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}.$$

Γ. Αν $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=1$ να δείξετε ότι:

$$|z|+\frac{1}{|z|}\leq\sqrt{5}.$$

ΘΕΜΑ 30$^{\text{Ο}}$

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει:

$$|z|^2=\big(\operatorname{Im}(z)+1\big)^2+1=0.$$

Α. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην παραβολή

$$y=\frac{1}{2}x^2.$$

Β. Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{8}$.

Γ. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό αριθμό ρ υπάρχουν πάντα δύο μιγαδικοί z με $|z|=\rho$.

ΘΕΜΑ 31$^{\text{Ο}}$

Για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z ,w είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$|z|^t+|w|^t\geq 2, \text{ για κάθε } t\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $u = z \cdot w$ **ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.**

Β. Υποθέτουμε ότι για τον z **ισχύει:**

$$|z+16| = 4|z+1|.$$

Να βρείτε το Γ. Τ. των εικόνων του w.