ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΣΥΛΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ -1

ΘΕΜΑ 1^{O}

Έστω $z = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$.

Α. Να μετατρέψετε τον z στην μορφή z=α+βi.

Β. Να δείξετε ότι: $z^3 \in \mathbb{R}$

Γ. Αν Α, Β οι εικόνες των $z, \bar{z}$ **στο μιγαδικό επίπεδο και Γ(2,0) να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.**

ΘΕΜΑ 2^{O}

Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ **και** $w = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}$

Α. Να δείξετε ότι: $w \in \mathbb{R}$ **και** $-2 \le w \le 2$

Β. Αν w = -2, να δείξετε ότι z $\in \Re$

Γ. Αν $z^2 = az + a, a \in \mathbb{R}$ **και Im(z)** $\neq 0$ **να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.**

ΘΕΜΑ 3^{O}

Έστω $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$ **και** $w = \frac{z-1}{z+1}$.

Α. Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Β. Αν ο z είναι φανταστικός να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο.

Γ. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z που έχουν την ιδιότητα $|w| \ge 2$ **βρίσκονται σε κυκλικό δίσκο του οποίου να προσδιορίσετε το εμβαδόν.**

ΘΕΜΑ 4^{O}

Α. Έστω z,w $\in$ C τέτοιοι ώστε: z + w =z.w

Αν $|w|=1$, να δείξετε ότι Re(z) = $\frac{1}{2}$.

Β. Δώστε ένα παράδειγμα δύο μιγαδικών z, w $\in$ C* με την ιδιότητα:

$$|z+w|=|z\cdot w|$$

Γ. Έστω z, w $\in$ C* με $|z+w|=|z\cdot w|$. Δείξτε ότι: |z| ≤ 2 και |w| ≤ 2.

ΘΕΜΑ 5^{O}

Δίνεται η εξίσωση $z^2+z+1=0$ και έστω ότι έχει λύσεις τους μιγαδικούς αριθμούς α και β και ισχύει η σχέση: Im(α) < Im(β).

Α. Να δείξετε ότι: $(1+a)^{2007}+(1+\beta)^{2007}=-2$.

Β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z που είναι τέτοιοι ώστε:

|z-α| + |z-β| = $\sqrt{3}$.

Γ. Έστω z$\in$ C: β - z = i(z - α). Να βρείτε το $|z+\frac{1}{2}|$ και να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(α), Β(β), Γ(z) όπου z ≠ α, z ≠ β είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 6^{O}

Έστω $z_1,z_2,z_3 \in$ C* τέτοιοι ώστε: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=a$ και $z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_1z_2z_3=0$

Α. Αν $\mathrm{A}=z_1+z_2+z_3$, $B=z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3$, $\Gamma=z_1z_2z_3$ να δείξετε ότι :

$$\mathrm{A}^3-3\mathrm{AB}+4\Gamma=0$$

Β. Δείξτε ότι: $\frac{A^3}{\Gamma}=\frac{3A\bar{A}}{\alpha^2}-4$.

Γ. Να δείξτε ότι: $|A| \in \{\alpha, 2\alpha\}$.

ΘΕΜΑ 7^{O}

Έστω f : [α, β] → R και z ∈ C, με Im(z) ≠ 0 τέτοιος ώστε:

$$z+\frac{1}{z}=f(\alpha),\; z^4+\frac{1}{z^4}=f(\beta).$$

Να δείξτε ότι:

Α. $|z|=1$

Β. $f(\beta)\geq -2$ **και να βρείτε το** $f(\alpha)$ **, όταν** $f(\beta)=-2$.

Γ. Η εξίσωση: $4x^4\cdot\left[f(\alpha)\right]^2+x\cdot f(\beta)=1$ **έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα (0,1).**