ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΣΥΛΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 8^{O}

Έστω z∈ C* με |z|=α και w = $z+\frac{1}{z}$**.**

Να δείξετε ότι:

Α. $w=\frac{a^2+1}{a^2}\cdot\mathrm{Re}(z)+\frac{a^2-1}{a^2}\cdot i\cdot\mathrm{Im}(z)$**.**

Β. $\frac{\left|a^2-1\right|}{a}\leq|w|\leq\frac{a^2+1}{a}$**.**

ΘΕΜΑ 9^{O}

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$z^3+3z-a=0, a\in\mathbb{R} \quad \textbf{(1)}$$

Α. Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον μη πραγματικό αριθμό w, τότε $|w|\geq 1$**.**

Β. Αν ο z =1+κi είναι ρίζα της (1) να βρείτε τους α,κ $\in\Re$**.**

Γ. Για α = - 14, να λύσετε την εξίσωση.

ΘΕΜΑ 10^{O}

Α. Να λύσετε την εξίσωση:

$$z^2+|z|=2$$

Β. Αν $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ **με** $|z_1|=|z_2|=a$ **να δείξετε ότι:**

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1+z_2}{a^2+z_1z_2}\right)=0.$$

Γ. Αν $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, και $z_1+z_2+z_3=0$ να δείξετε ότι:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$$

ΘΕΜΑ 11^{O}

Έστω το πολυώνυμο:

$$P(w)=w^3+\frac{1}{2}w+a$$

όπου $a\in\mathbb{R}$ με $\frac{3}{8}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Να δείξετε ότι:

Α. $|P(i)|<1$.

Β. Για κάθε ρίζα w της εξίσωσης P(w) = 0 ισχύει: $|w|>\frac{1}{2}$

Γ. Αν z είναι μη πραγματική ρίζα της εξίσωσης P(w) = 0 τότε:

$$|z-i|\cdot|z+i|<1.$$

ΘΕΜΑ 12^{O}

Έστω $z\in\mathbb{C}-\{i,-i\}$ και

$$w=\frac{2z}{z^2+1}$$

Α. Αν Re(z) = Im(z), να δείξετε ότι:

$$|w|\le\sqrt{2}$$

Β. Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z όταν $|w|=1$.

ΘΕΜΑ 13^{O}

Δίνεται η εξίσωση:

$$(1+i)z^3+2z^2-(1+i)z+a=0, \quad a\in\mathbb{R} \qquad \textbf{(1)}$$

Α. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις.

Β. Έστω

$$\mathrm{K}=\left|z-x_1\right|^2+\left|z-x_2\right|^2+\left|z-x_3\right|^2$$

όπου x_1,x_2,x_3 **οι δυνατές πραγματικές ρίζες της (1).**

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης Κ όταν η εικόνα του z κινείτε στην ευθεία με εξίσωση: x+y = 2.

ΘΕΜΑ 14^{O}

Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ **με** $z_1\neq z_2$**.**

Α. Να δείξετε ότι για κάθε $z\in\mathbb{C}$ **ισχύει:**

$$\left|z-z_1\right|^2+\left|z-z_2\right|^2=2\left|z-\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2+\frac{1}{2}\left|z_1-z_2\right|^2. \qquad \textbf{(1)}$$

Β. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης (1).

Γ. Να βρείτε το γ.τ. των εικόνων του z όταν:

$$\left|z-z_1\right|^2+\left|z-z_2\right|^2=2\left|z_1-z_2\right|^2.$$

ΘΕΜΑ 15^{Ο}

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$**, με** $z_1 \neq z_2 \neq z_3$**.**
Θέτουμε $a = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ **και** $\beta = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$**.**

Α. Αν $a = \beta$**, να δείξετε ότι:**

Ι) $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ **και** $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$**.**

ΙΙ) Το τρίγωνο ΑΒΓ όπου Α, Β, Γ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 **είναι ισόπλευρο .**

Β. Αν $a = 0$ **και** $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$**, να δείξετε ότι:**

$$|\beta|^2 = 2|\beta|.$$