ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΣΥΛΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ - 3

ΘΕΜΑ 16^{Ο}

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = x + yi, με x, y ∈ℜ.

α) Να γράψετε στη μορφή α+βi το μιγαδικό $w = \dfrac{z+8i}{z+6}$**.**

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Im(w) = 0

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Re(w) = 0

δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κεντρο και την ακτίνα του.

ΘΕΜΑ 17^{Ο}

Α.Έστω z, w ∈ C με z≠w και $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$**. Δείξτε ότι ο αριθμός** $r = \dfrac{z+w}{z-w}$ **είναι φανταστικός.**

Β. Αν z, w ∈ C, να δείξετε ότι:

α. Ο αριθμός $p = z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w$ **είναι πραγματικός,**

β. $|z|^2 + |w|^2 + p \geq 0$

ΘΕΜΑ 18^{Ο}

Έστω $z \in C^*$ **με** $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4}$**.**

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

β. Να βρείτε τον z για τον οποίο ισχύει Re(z) = Im(z).

γ. Να δείξετε ότι αν για τον z ισχύει Im(z) = 1 τότε:

$$\mathrm{Re}(z) = 2 + \sqrt{3} \ \text{ ή } \ \mathrm{Re}(z) = 2 - \sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 19$^{\text{Ο}}$

Έστω $f(w)=\left(2+\frac{3}{2}i\right)w-\frac{5}{2}\overline{w}i$**, όπου w = α+βi, α,β** $\in\Re$**.**

α. Να βρείτε τα $\mathrm{Re}(f(w))$ **και** $\mathrm{Im}(f(w))$**.**

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M\left(f(w)\right)$ **στο μιγαδικό επίπεδο.**

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w, όταν η απόσταση του $f(w)$ **από την αρχή των αξόνων είναι ίση με** $2\sqrt{5}$**.**

ΘΕΜΑ 20$^{\text{Ο}}$

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $z\in\mathbb{C}^*$ **για τους οποίους ισχύει:** $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=1$

α. Αν Re(z) = 1 να βρείτε τον z.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

γ. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του μιγαδικού $\frac{1}{z}$**.**

ΘΕΜΑ 21$^{\text{Ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση f **με τύπο:** $f(z)=\frac{z+i}{z}$**, όπου** $z\in\mathbb{C}^*$

α. Αν $\left|f(z)\right|=\left|f(\overline{z})\right|$**, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.**

β. Αν $\left|f(z)\right|=1$**, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.**

γ. Αν $\mathrm{Re}\left(f(z)\right)=2$**, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.**

ΘΕΜΑ 22$^{\text{Ο}}$

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ **για τους οποίους ισχύει:**

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1$$

α. Να δείξετε ότι οι εικόνες Α, Β των μιγαδικών z_1, z_2 **και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.**

β. Να δείξετε ότι:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2009} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2009} = 1$$

ΘΕΜΑ 23$^{\text{Ο}}$

Θεωρούμε το μιγαδικό $w = \left(\frac{z+1}{z+2}\right)^{2008}$ **όπου** $z \in \mathbb{C} - \{-2\}$**. Αν για τον z ισχύει** $\left|z + \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$ **τότε:**

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β. Να δείξετε ότι:

$$(z+1)(\overline{z}+2) + (z+2)(\overline{z}+1) = 0.$$

γ. Να δείξετε ότι w∈ℜ

ΘΕΜΑ 24$^{\text{Ο}}$

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε:

$$w = \frac{z - 3 + 4i}{1 + i}$$

α. Αν $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z.**

β. Αν $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο.

ii) Να βρείτε το μιγαδικό του προηγούμενου κύκλου που έχει το μικρότερο και το μεγαλύτερο μέτρο

ΘΕΜΑ 25$^{\text{Ο}}$

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε $w = \frac{z - 3 + 4i}{1 + i}$

Αν z = x+yi με x, y $\in \Re$,

α. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{Re}(w) = \frac{x + y + 1}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{y - x + 7}{2}$$

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z για τους οποίους ο μιγαδικός $\bar{w}$ είναι πραγματικός.

γ. Να βρείτε το μιγαδικό z του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου που έχει το ελάχιστο μέτρο.