## ΘΕΜΑ 1$^{O}$

**Δίνεται η εξίσωση** $e^x = 3ex^2 - 2bx + c$ **όπου** $b - c = 1$**. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (0,1).**

## ΘΕΜΑ 2$^{O}$

**Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση** $F$ **με** $x \in [1,2]$ **για την οποία ισχύουν οι σχέσεις,** $F(2) = 0$ **και** $F'(x) \neq 0$ **για** $x \in (1,2)$**. Να δείξετε ότι υπάρχει** $\xi \in (1,2)$ **έτσι ώστε να ισχύει :** $\dfrac{F(\xi)}{F'(\xi)} + \xi \ln \xi = 0$**.**

## ΘΕΜΑ 3$^{O}$

**Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση** $F : R \to R$ **ώστε να ισχύει η σχέση:**

$$\left(F(x)\right)^3 + F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \ \text{ με } \ a,b,c \in \mathbb{R}, a^2 \langle 3b .$$

**Να μελετήσετε τη συνάρτηση** $F$ **ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

## ΘΕΜΑ 4$^{O}$

**Για τη συνάρτηση** $F$ **γνωρίζετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις,** $F(0) = 1$ **και** $F(x) \leq e^{-x}$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$**. Να δείξετε ότι** $F'(0) = -1$**.**

## ΘΕΜΑ 5$^{O}$

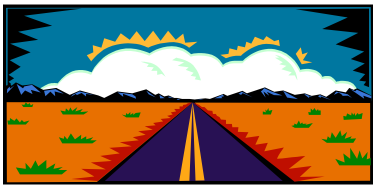
**Δίνεται η συνάρτηση** $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **με** $F(x) = \int_4^{2x} \dfrac{2^t - 4}{t^2 + 1} dt, x \in \mathbb{R}$**.**

**Α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση αυτή α) ως προς τη μονοτονία και**
**β) ως προς τα ακρότατα.**

**Β. Να υπολογίσετε το** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\int_2^x F(\omega) d\omega}{(x-2)^2}$**.**

## ΘΕΜΑ 6$^{Ο}$

**Έστω η συνάρτηση** $F$ **με** $F(x)=\int_0^1 e^{-(x+t)^2}dt, x\in\mathbb{R}$**. Να δείξετε ότι υπάρχει** $x_0\in\mathbb{R}$ **έτσι ώστε η συνάρτηση** $F$ **να λαμβάνει μέγιστη τιμή.**



## ΘΕΜΑ 7$^{Ο}$

**Έστω η συνάρτηση** $F$ **που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}$ **και ισχύει ότι** $F''(x)=-F(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$**. Ακόμη η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(0.4) και Β(-2,0), εφάπτεται της καμπύλης** $C_f$ **στο Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση** $H(x)=F(x)\eta\mu x+F'(x)\sigma\upsilon\nu x$ **είναι σταθερή και να βρείτε τη σταθερή τιμή της.**

## ΘΕΜΑ 8$^{Ο}$

**Έστω η συνάρτηση** $F$ **που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[1,2]$**. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο** $\xi\in(1,2)$ **τέτοιο ώστε να είναι** $\int_1^{\xi}F(t)dt=(2-\xi)F(\xi)$**.**

## ΘΕΜΑ 9$^{Ο}$

**Δίνεται η συνάρτηση** $g$ **με** $g(x)=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}dt$ **.** $x\in(0,+\infty)$**. Να δείξετε ότι η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή και να βρείτε τη σταθερή τιμή της.**

## ΘΕΜΑ 10$^{Ο}$

**Έστω ότι για τη συνάρτηση** $F$ **που είναι παραγωγίσιμη στο** $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$**, ισχύει ότι,** $F(x)\le\eta\mu x+2\eta\mu 2x$ **για κάθε** $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ **και** $F(0)=0$**. Να δείξετε ότι** $F'(0)=5$**.**

## ΘΕΜΑ 11$^{Ο}$

**Για τη συνάρτηση** $F$ **που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα** $[0,3]$**, ισχύει ότι,** $F''(x)<0$ **για κάθε** $x \in [0,3]$ **και** $F(1)=F(2)=0$**. Να δείξετε ότι** $F(0)<0$ **και** $F(3)<0$**.**

## ΘΕΜΑ 12$^{Ο}$

**Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι** $F''(x)>0$ **για κάθε** $x \in [0,3]$ **και** $F(1)=F(2)=7$**. Να βρείτε το πρόσημο των παραγώγων** $F'(0)$ **και** $F'(3)$ **και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι** $F(\frac{3}{2})<7$**.**

## ΘΕΜΑ 13$^{Ο}$

**Έστω ότι η συνάρτηση** $g$ **είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[2,3]$ **και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** $(2,3)$**, και ισχύει ότι** $g(3)-g(2)=5$**. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο** $c \in (2,3)$**, τέτοιο ώστε να ισχύει** $g'(c)=2c$**.**

## ΘΕΜΑ 14$^{Ο}$

**Δίνεται μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση** $G$ **σε ένα διάστημα Δ και μία ευθεία που τέμνει τη γραφική της παράσταση σε τρία διαφορετικά σημεία. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον** $x_0 \in \Delta$ **ώστε να ισχύει** $G''(x_0)=0$

## ΘΕΜΑ 15$^{Ο}$

**Δίνεται η συνάρτηση F για την οποία ισχύει ότι** $F(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$**, και** $a,b,c,d,k \in \mathbb{R}$**,** $a,b \neq 0$**. Αν η συνάρτηση F έχει τρία τοπικά ακρότατα να δείξετε ότι κατ' ανάγκη θα ισχύει η σχέση** $3b^2>8ac$**.**

## ΘΕΜΑ 16$^{Ο}$

**Έστω F μία πολυωνυμική συνάρτηση με** $F'(x) \neq 0$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **και η συνάρτηση G με** $G(x)=F(\eta\mu x)$**. Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί** $x_1 \in (0,\frac{\pi}{2})$ **και** $x_2 \in (0,1)$ **τέτοιοι ώστε:**

$$\sigma\upsilon\nu x_1 = \frac{2F'(x_2)}{\pi F'(\eta\mu x)_1}.$$

## ΘΕΜΑ 17$^{O}$

**Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:**

**Α.** $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x^2}\int_0^x \sqrt{t}\eta\mu\sqrt{t}dt$

**Β.** $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{1}{x-3}\int_3^x \frac{\eta\mu t}{t}dt)$

## ΘΕΜΑ 18$^{O}$

**Δίνεται η πραγματική συνάρτηση F η οποία είναι συνεχής στο R και για την οποία ισχύει ότι** $F(x)\geq 2$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$**. Επίσης θεωρούμε τη συνάρτηση H με** $H(x)=x^2-5x+1-2\int_0^{x^2-5x}F(t)dt, x\in\mathbb{R}$**.**

**Α. Να δείξετε ότι** $H(-3)\cdot H(0)\langle 0$

**Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση** $H(x)=0$ **έχει μία μόνο ρίζα στο (-3,0).**

## ΘΕΜΑ 19$^{O}$

**Δίνεται η συνάρτηση G με** $G(x)=\int_1^x F(t)dt$ **όπου** $F(t)=\int_1^{3t}\frac{e^u}{u}du$ **, και** $x\rangle 0, t\rangle 0$ **. Να βρείτε : α) την** $G''(1)$ **και β) το** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}G''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}$**.**

## ΘΕΜΑ 20$^{O}$

**Έστω α,β,γ** $\in\mathbb{R}$ **με α<β<γ και μια συνάρτηση F η οποία είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\gamma]$ **και παραγωγίσιμη στο** $(\alpha,\gamma)$ **έτσι ώστε να ισχύει:** $F(\alpha)<\alpha, F(\beta)>\beta, F(\gamma)<\gamma$**. Να δείξετε ότι υπάρχει ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση** $C_F$ **της συνάρτησης F και είναι παράλληλη στην ευθεία** $(\varepsilon_1): y=x+1$**.**

## ΘΕΜΑ 21$^{O}$

**Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση F: R→R για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:** $F(1)=a+b, F(2)=2a+b, F(3)=3a+b$**. Να δείξετε ότι υπάρχει** $\xi\in\mathbb{R}$ **έτσι ώστε να ισχύει ότι** $F''(\xi)=0$**.**

## ΘΕΜΑ 22$^{Ο}$

**Έστω η συνάρτηση G που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα** $(0,+\infty)$ **και ισχύει ότι** $F'(x)\cdot\ln x > \dfrac{2x-F(x)}{x}$ **για κάθε x>0.**

**Να δείξετε ότι** $1+F(e) > 2e-1$**.**

## ΘΕΜΑ 23$^{Ο}$

**Α. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης F : R→R για την οποία ισχύει η σχέση :**

$$\int_0^x F(t)dt = F(x) - e^x + 2010, x\in\mathbb{R} \text{ με } F(0) = -2009.$$

## ΘΕΜΑ 24$^{Ο}$

**Δίνεται η συνεχής συνάρτηση** $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$**. Να δείξετε ότι για κάθε x>0, ισχύει ότι**

$$\int_1^x \frac{F(t)+2t}{1+t^2}dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{F(\frac{1}{t})-2t}{1+t^2}dt = 2\ln x.$$

## ΘΕΜΑ 25$^{Ο}$

**Δίνεται η συνεχής συνάρτηση F: R→R, για την οποία ισχύει η σχέση :**

$2F(2x) - F(x+1) = 6x+2$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$**.**

**Να δείξετε ότι: Α) Η συνάρτηση** $H(x) = \int_{x+1}^{2x} F(t)dt - 3x^2 - 2x$**, είναι σταθερή και να βρείτε τη σταθερή τιμή της.**

**Β)** $\int_{-2}^{1} F(t)dt = 9$**.**

## ΘΕΜΑ 26$^{Ο}$

**Α. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση F: R→R είναι συνεχής και ισχύει** $F(x) = \int_1^x F(t)dt$**, να δείξετε ότι** $F(x)=0$

**Β. Να δείξετε ότι αν για τη συνεχή συνάρτηση F : R→R ισχύει η σχέση** $\int_{1-x}^{1+x} F(t)dt \geq 2x$ **για κάθε x∈R,τότε θα είναι** $F(1)=1$**.**

**Γ. Για τη συνεχή συνάρτηση F ισχύει ότι για κάθε x>0. Να δείξετε ότι** $F(1)=\frac{1}{2}$**.**

## ΘΕΜΑ 27$^{Ο}$

**Α. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση** $F:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$**, με** $F(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{F(\alpha)+F(\beta)}{2}$**. Να δείξετε ότι υπάρχει** $x_0\in(\alpha,\beta):F''(x_0)=0$**.**

**Β. Να αποδείξετε ότι για x>0 ισχύει ότι :** $x-x^2<\ln(1+x)<x$**.**

## ΘΕΜΑ 28$^{Ο}$

**Έστω η συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$ **συνάρτηση F η οποία είναι και παραγωγίσιμη στο** $(\alpha,\beta)$ **έτσι ώστε να ισχύει:** $F(\beta)-F(\alpha)=\beta-\alpha$ **. Να δείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί** $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ **με** $\xi_1<\xi_2$ **έτσι ώστε να ισχύει ότι:** $F'(\xi_1)+F'(\xi_2)=2$**.**

## ΘΕΜΑ 29$^{Ο}$

**Δίνεται η συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$ **συνάρτηση g και η συνάρτηση G με τύπο** $G(x)=\frac{g(x)}{x-\kappa}$**. Η g είναι και παραγωγίσιμη στο** $(\alpha,\beta)$**, με** $g(\alpha)=g(\beta)=0$ **και** $\kappa\notin[\alpha,\beta]$**. Να δείξετε ότι υπάρχει** $\kappa_0\in(\alpha,\beta)$**, τέτοιο ώστε να είναι** $G'(\kappa_0)=0$**.Στη συνέχεια να συμπεράνετε ότι υπάρχει** $\kappa_0\in(\alpha,\beta)$**, έτσι ώστε η εφαπτομένη του διαγράμματος της** $g$ **στο σημείο Α** $(\kappa_0,g(\kappa_0))$ **,να διέρχεται από το σημείο Β** $(\kappa,0)$**.**

## ΘΕΜΑ 30$^{Ο}$

**Α. Έστω η συνάρτηση F με** $F(x)=\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}(t^2-1)dt$**. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα και ένα σημείο καμπής.**

**Β. Έστω Η μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι Η(0)=2. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:**

$$\lim_{x\rightarrow 0^+}\int_1^2 \mathrm{H}(xt)dt.$$

## ΘΕΜΑ 31$^{\text{Ο}}$

**Θεωρούμε τη συνάρτηση** $F:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ **με** $F(x)=x^3-3abx+a^3+b^3$ **με** $\alpha,\beta>0$.
**Α. Να δείξετε ότι η F έχει ελάχιστο του οποίου να καθορίσετε το πρόσημο.**
**Β. Να συμπεράνετε ότι για α,b,x>0 ισχύει ότι** $a^3+b^3+x^3 \geq 3abx$.

## ΘΕΜΑ 32$^{\text{Ο}}$

**Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός** $z=x+yi$ **με** $x,y\in\mathbb{R}$ **και** $z\neq -4i$. **Αν** $w=\dfrac{z-2i}{iz-4}$, **να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει ότι** $|w|=2$.
**Β. Να δείξετε ότι για κάθε** $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ **ισχύουν οι σχέσεις:**

**i)** $2\left[|z_1z_2|-\mathrm{Re}(z_1z_2)\right]=|\overline{z}_2-z_1|^2-(|z_2|-|z_1|)^2$

**ii)** $\sqrt{2}\,|\mathrm{Im}(z_1)|=\sqrt{|z_1|^2-\mathrm{Re}(z_1^2)}$.

## ΘΕΜΑ 33$^{\text{Ο}}$

**Α. Έστω συνάρτηση F για την οποία ισχύει ότι F(α)=F(β)=0 και F¨(x)<0 για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$. **Να δείξετε ότι F(x)>0 για κάθε** $x\in(\alpha,\beta)$.

**Β. Αν** $g''(x)<0$ **για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$**,να δείξετε ότι** $g(\alpha)+(x-\alpha)\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}<g(x)$, **για κάθε** $x\in(\alpha,\beta)$.

## ΘΕΜΑ 34$^{\text{Ο}}$

**Έστω συνάρτηση F ορισμένη στο R με συνεχή δεύτερη παράγωγο ,τοπικό ακρότατο στο** $x_0=2$ **και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το A(0,1).**
**Αν ισχύει ότι** $\int_0^2 [xF''(x)+3F'(x)]dx=-\dfrac{8}{3}$ **να βρείτε το F(2).**

## ΘΕΜΑ 35$^{\text{Ο}}$

**Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση F ορισμένη στο R.**

**Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση** $g(x)=\int_\alpha^\beta F(x-t)dt,(\alpha<\beta)$ **,είναι παραγωγίσιμη.**

**Β. Αν ακόμη η F είναι άρτια, να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α,β) ώστε να ισχύει ότι F(ξ-α)=F(ξ-β).**

## ΘΕΜΑ 36$^{O}$

**Έστω ότι η ευθεία y=2x+5 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης F στο +∞.**

**Α. Να βρείτε τα όρια :** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}$ **και** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[F(x)-2x\right]$**.**

**Β. Να βρείτε το μ∈R, αν** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu F(x)+4x}{xF(x)-2x^2+3x}=1$

## ΘΕΜΑ 37$^{O}$

**Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση** $2e^x+2x=x^2+2$ **έχει ακριβώς μία λύση στο R.**

**Β. Να αποδείξετε τις ανισώσεις**

**i)** $x-\frac{x^3}{4}\le \eta\mu x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

**ii)** $1-\frac{x^2}{2}\le \sigma\upsilon\nu x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$**.**

## ΘΕΜΑ 38$^{O}$

**Έστω συνάρτηση F συνεχής στο (0,+∞) για την οποία ισχύει:** $\ln x\le F(x)\le x-1$**, για κάθε** $x>0$**.**

**Α. Να δείξετε ότι** $F'(1)=1$**.**

**Β. Να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\int_1^x F(t)dt+x^2+1-2e^{x-1}}{(x-1)^2}$**.**

**Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση** $2+2\int_1^x F(t)dt=2\ln x+x^2$ **, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (1,e).**

## ΘΕΜΑ 39$^{O}$

**Αν F συνεχής συνάρτηση στο** $[\alpha,\beta]$**, και** $\int_\alpha^\beta F(t)dt=\beta-\alpha$ **να δείξετε ότι:**

**Α. Υπάρχει** $x_0\in(\alpha,\beta)$ **,τέτοιο ώστε** $\int_\alpha^{x_0}F(t)dt=\beta-x_0$ **.**

**Β. Υπάρχουν** $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta): F(\xi_1)\cdot F(\xi_2)=1$**.**

## ΘΕΜΑ 40$^{Ο}$

**Α. Να υπολογίσετε το** $\int_{\kappa\pi}^{x} \frac{\sqrt{e^t+t^4+1}}{e^{2t}}dt$ **, αν είναι γνωστό ότι:** $\lim_{u\to\infty}(\sqrt{u^2+1}-u-\eta\mu x)=0$ **.**

**Β. Να δείξετε ότι** $e^e \bullet \pi^\pi > e^{2\pi}$ **.**

## ΘΕΜΑ 41$^{Ο}$

**Α. Αν η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει** $xF(x)+1 \le e^x+\eta\mu 2x$**, για κάθε x∈R , να δείξετε ότι F(0)=3.**

**Β. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση F: R→ R για την οποία ισχύει :**

$$\int_{\alpha}^{x} e^{-t}F(t)dt = e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}F(x)$$ **, α∈R, σταθερό.**

## ΘΕΜΑ 42$^{Ο}$

**Θεωρούμε τη συνάρτηση** $F:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$**, που είναι παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}^*$ **και για την οποία ισχύει ότι** $xF'(x)=(x+1)F(x)$**, για κάθε** $x\in\mathbb{R}^*$ **και** $F(1)=e$**,** $F(-1)=\frac{1}{e}$**. Να βρείτε το** $\lim_{x\to 0}F(x)$**.**

## ΘΕΜΑ 43$^{Ο}$

**Έστω** $F(z)=(2+\frac{3}{2}i)z-\frac{5}{2}\overline{z}i$ **, όπου** $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$ **.**

**Ι) Να βρείτε τα ReF(z) και ImF(z).**

**ΙΙ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M(F(z)) στο μιγαδικό επίπεδο.**

**ΙΙΙ) Να δείξετε ότι** $|F(z)|=|x-2y|\sqrt{5}$ **.**

**ΙV) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των** $z=x+yi$ **, ώστε** $|F(z)|=\sqrt{5}$ **.**

## ΘΕΜΑ 44$^{Ο}$

**Δίνεται η συνάρτηση** $F(x)=2x-x^2$**. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία περνά από την αρχή των αξόνων και η οποία χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση** $C_F$ **, της συνάρτησης F και τον** $x'x$ **σε δύο ισεμβαδικά χωρία.**

## ΘΕΜΑ 45$^{Ο}$

**Δίνονται οι συναρτήσεις** $F,G:[0,1]\to\mathbb{R}$**, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και είναι** $F(x)\neq 0$ **και** $G(x)\neq 0$**, για κάθε** $x\in(0,1)$ **και** $F(0)=G(1)=0$**. Να αποδείξετε ότι υπάρχει** $\xi\in(0,1)$ **έτσι ώστε** $\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}+\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=0$**.**

## ΘΕΜΑ 46$^{Ο}$

**Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, με** $F(x)=\lim\limits_{h\to x}\frac{F(h)-F(x)}{h-x}$**, για κάθε** $x\in\mathbb{R}$**. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης F αν γνωρίζετε ότι F(0)=2.**

**Β. Δίνεται η συνάρτηση F με** $F(x)=(x^2+ax)e^{\beta x}$**, με** $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\beta\neq 0$**. Να δείξετε ότι η F έχει δύο θέσεις πιθανών ακροτάτων.**

## ΘΕΜΑ 47$^{Ο}$

**Δίνεται η συνάρτηση F ορισμένη στο** $[0,1]$ **και παραγωγίσιμη στο** $(0,1)$**,με F(0)=0 και F(x)>0 για κάθε** $x\in(0,1)$**. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον** $\xi\in(0,1):2\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}=\frac{F'(1-\xi)}{F(1-\xi)}$**.**

## ΘΕΜΑ 48$^{Ο}$

**Δίνεται ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών** $w=z+\frac{1}{z}$**, είναι μία έλλειψη.**

## ΘΕΜΑ 49$^{Ο}$

**Δίνεται η συνάρτηση Η με** $H(x)=x^2\ln x$**.**

**Α. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της** $C_H$**, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον** $x'x$**.**

**Β. Να δείξετε ότι** $\ln x^{x^2}\geq -\frac{1}{2e}$**, για κάθε** $x\in(0,+\infty)$

**Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη** $C_H$ **τον** $x'x$ **και τις ευθείες** $x=t$ **και** $x=1$ **όπου t είναι το σημείο στο οποίο η Η παρουσιάζει ακρότατο.**

**ΘΕΜΑ 50$^{O}$**

**Α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα** $\int F(x)dx$**, αν είναι γνωστό ότι** $F(x)\neq 0$**, για κάθε** $x\in(-\infty,\frac{3}{2})$**, και** $F(x)=2+\int_1^x F^2(t)dt.$

**Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση F με** $F''(x)>0$ **για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$ **και** $F(\alpha)=F(\beta)$**. Να δείξετε ότι** $F'(\alpha)\cdot F'(\beta)<0$**.**

**ΘΕΜΑ 51$^{O}$**

**Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση F που είναι συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$ **και για την οποία ισχύει ότι F(α)=0, F(β)=-2 και** $\int_\alpha^\beta F(x)dx=0$**. Να δείξετε ότι η F δεν είναι γνησίως μονότονη.**

**Β. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις** $F,G:[0,1]\to\mathbb{R}$**, με F(x)<0 και G(x)>0 για κάθε** $x\in[0,1]$**. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό** $\xi\in(0,1)$**, τέτοιο ώστε:**
$\int_0^\xi F(t)dt=\int_1^\xi G(t)dt$**.**

**ΘΕΜΑ 52$^{O}$**

**Α. Να λύσετε στο R την ανίσωση:** $e^{x^2+x+1}-e^{x+1}>-x^2$**.**

**Β. Να υπολογίσετε το** $\lim\limits_{x\to u}\frac{\eta\mu x}{x}$**, όπου** $u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$**.**

**ΘΕΜΑ 53$^{O}$**

**Αν για τη συνεχή συνάρτηση** $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$**, ισχύει** $f(\alpha)\cdot f(\beta)\neq 0$ **και :**
$F(x)=(x-a)\int_x^\beta f(t)dt+(x-\beta)\int_a^x f(t)dt$**, για κάθε** $x\in[a,\beta]$**, να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α,β), έτσι ώστε** $f(\xi)=\frac{\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta-\alpha}$**.**

## ΘΕΜΑ 54$^{Ο}$

**Α. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z ώστε $z^2 - 2i\bar{z} = 0$. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες του z≠0 στο μιγαδικό επίπεδο, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.**

**Β. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(x-1) + x^2 + x - 6 = 0$.**

**Γ. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $e^x f(x) - x = \eta\mu x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.**

## ΘΕΜΑ 55$^{Ο}$

**Δίνονται οι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ συναρτήσεις F,G οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $(\alpha, \beta)$ με $F(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\ln F(\alpha) - \ln F(\beta) = G(\beta) - G(\alpha)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : F'(\xi) + F(\xi) \cdot G'(\xi) = 0$.**

## ΘΕΜΑ 56$^{Ο}$

**Α. Έστω μία συνάρτηση Η που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 \neq x_2$ είναι:**

$$H(x_1) + H(x_2) > 2H\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

**Β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:**

$$(e^a + 2)^\nu + (e^{-a} + 2)^\nu > 2 \cdot 3^\nu.$$

## ΘΕΜΑ 57$^{Ο}$

**Α. Αν για τη συνάρτηση G υπάρχει δεύτερη παράγωγος και είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - 2G(x) + G(x-h)}{h^2} = G''(x).$$

**Β. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και ισχύει ότι: $af(x) + bf(-x) = c$, με $a + b \neq 0$ να αποδείξετε ότι: $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{4c}{a+b}$.**

**ΘΕΜΑ 58$^{Ο}$**

**Δίνεται η συνάρτηση $f$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$. Να αποδείξετε ότι:**

**Α.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$.

**Β.** $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$.

**ΘΕΜΑ 59$^{Ο}$**

**Α. Αν για τη συνάρτηση G ισχύει:**
$G'(x)=G(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$**, να δείξετε ότι:**
$G(x)=ce^x$ **, όπου** $c\in\mathbb{R}$.

**Β. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση F για την οποία ισχύει:**

$$F(x)=(1+e^x)\left[1+\int_0^x \frac{F(t)}{1+e^t}dt\right].$$

**Γ. Να αποδείξτε την ανισότητα** $e^x \geq 1+x$**, για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές:**

$$x=0, x=1, y=\frac{F(x)}{e^x+1}, y=x^2+3x+2.$$

**ΘΕΜΑ 60$^{Ο}$**

**Έστω η συνάρτηση** $F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ **με** $F(x)=2010+|\ln(x-1)|$**. Αν α∈R, α>2010 και η ευθεία y=α τέμνει τη γραφική παράσταση της F στα σημεία A,B να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της** $C_F$**, στα σημεία Α και Β , είναι κάθετες μεταξύ τους.**

**ΘΕΜΑ 61$^{ο}$**

**Α. Αν η συνάρτηση G έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα** $[\alpha,\beta]$**, να δείξετε ότι:** $\int_\alpha^\beta xG''(x)dx=\beta G'(\beta)-\alpha G'(\alpha)+G(\alpha)-G(\beta)$

**Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση** $\Phi(x)=\varepsilon\phi x-x$**, έχει συνεχείς παραγώγους** $1^{\eta\varsigma}$ **και** $2^{\eta\varsigma}$ **τάξης και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:** $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx$.

## ΘΕΜΑ 62$^{\mathrm{O}}$

**Α. Έστω η συνάρτηση F η οποία είναι συνεχής στο διάστημα** $[\alpha,\beta]$**,όπου α,β>0. Αν για τους αριθμούς** $z_1=F(a)+ai$ **και** $z_2=F(\beta)+\beta i$ **ισχύει:** $(z_1\overline{z}_2)^2\in\mathbb{R}_-^*$**, να δείξετε ότι η εξίσωση F(x)=0, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).**

**Β. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός** $z=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x+i\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x+i\eta\mu x}$**, όπου** $x\in(0,\pi)$ **και η συνάρτηση F για την οποία ισχύουν:** $F'(x)=\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ **και** $F(\frac{\pi}{2})=2$.

**Να δείξετε ότι:** $F(x)=|z|+1$.

## ΘΕΜΑ 63$^{\mathrm{O}}$

**Έστω F: R → R παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:**

$F'(x)=\int_0^x F(t)dt$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$**. Δείξτε ότι:**

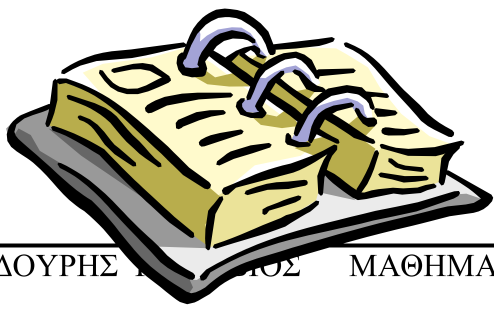
**α. Οι συναρτήσεις** $G(x)=(F(x)-F'(x))\bullet e^x$ **και** $H(x)=(F(x)+F'(x))\bullet e^{-x}$ **είναι σταθερές με την ίδια τιμή.**

**β.** $F(x)=\dfrac{F(0)}{2}(e^x+e^{-x})$.

## ΘΕΜΑ 64$^{\mathrm{O}}$

**Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα** $[\alpha,\beta]$**, να δείξετε ότι για τη συνάρτηση Η με** $\mathrm{H}(x)=\int_a^x f(t)dt\bullet\int_x^\beta g(t)dt$**, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle και ότι υπάρχει ξ∈(α,β), τέτοιο ώστε:**

**Α.** $f(\xi)\bullet\int_\xi^\beta g(t)dt=g(\xi)\bullet\int_\alpha^\xi f(t)dt$ **και Β.** $f(\xi)(\xi-\alpha)=\int_\xi^\beta f(t)dt$.



## ΘΕΜΑ 65$^{Ο}$

**Α. Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R και θέσουμε:**
$F(x)=\int_0^x xf(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$**, να βρείτε το** $F''(1)$ **αν είναι** $f(1)=10^3$ **και** $f'(1)=7$**.**

**Β. Αν για κάθε x>0 είναι** $f(x)>0$ **και** $(f^2(x))'>0$**, τότε:**

**i) να αποδείξετε ότι:** $F'(2010)>F'(2009)$**,**

**ii) να βρείτε τις τιμές του κ∈R με** $\kappa>\dfrac{6}{5}$**, για τις οποίες ισχύει:**

$$\int_0^{\kappa^2} f(t)dt+\kappa^2 f(\kappa^2)=\int_0^{5\kappa-6} f(t)dt+(5\kappa-6)\bullet f(5\kappa-6).$$

## ΘΕΜΑ 66$^{Ο}$

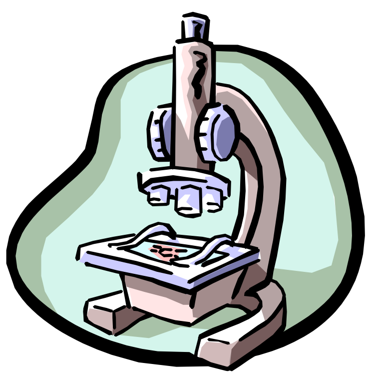
**Για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει:**

$$\frac{2007\,\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2}+\frac{1}{2}\left|2007+2007\sqrt{3}i\right|=0.$$

**Α. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο** $K(1,-\dfrac{1}{2})$ **και ακτίνα** $\rho=\dfrac{1}{2}$**.**

**Β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς να βρείτε εκείνον με το μικρότερο και εκείνον με το μεγαλύτερο μέτρο.**

**Γ. Να βρείτε τον μιγαδικό z του οποίου η εικόνα απέχει τη μικρότερη απόσταση από την εικόνα του μιγαδικού** $w=2-\dfrac{1}{2}i$**.**



## ΘΕΜΑ 67$^{Ο}$

**Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί** $z_1, z_2, z_3$ **με** $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$**.**

**Α. Δείξτε ότι** $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$

**Β. Δείξτε ότι ο αριθμός** $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$**.**

**Γ. Δείξτε ότι** $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$**.**

## ΘΕΜΑ 68$^{Ο}$

**Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση Η ισχύουν οι σχέσεις:** $2H'(x) = e^{x-H(x)}$**, για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **και** $H(0) = 0$**.**

**Α. Δείξτε ότι** $H(x) = \ln(\dfrac{1+e^x}{2})$**.**

**Β. Να βρείτε το όριο** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x H(x-t)dt}{\eta\mu x}$**.**

**Γ. Δίνονται οι συναρτήσεις** $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} H(t)dt$ **και** $g(x) = \dfrac{x^{2007}}{2007}$**.**

**Να δείξετε ότι**
$h(x) = g(x)$**, για κάθε** $x \in \mathbb{R}$**.**

**Δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση** $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt = \dfrac{1}{2008}$**, έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (0,1).**

## ΘΕΜΑ 69$^{Ο}$

**Α. Η συνάρτηση F είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R και ισχύουν:** $F(0) = 2$ **και για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **ότι** $(e^x + 1)F(x) + \ln(x^2 + 1) \geq 4$**. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο Μ(0,2).**

**Β. Δίνεται συνάρτηση h, συνεχής στο διάστημα** $[0,1]$ **και για κάποιον φυσικό αριθμό** $v \geq 2$ **ισχύει ότι** $v\int_0^1 f(t)dt = 1$**. Δείξτε ότι υπάρχει** $\xi \in (0,1)$ **τέτοιο ώστε να ισχύει:** $f(\xi) = \xi^{v-1}$**.**

## ΘΕΜΑ 70$^{Ο}$

**Στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών θεωρούμε την εξίσωση** $z^2 - \lambda z + \lambda = 0$ **(1) με άγνωστο το z και λ πραγματική παράμετρο.**

**Α. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση (1) να μην έχει πραγματικές ρίζες.**

**Β. Να λύσετε την εξίσωση (1) για λ=2 και να βρείτε τα μέτρα των ριζών της.**

**Γ. Αν** $z_1, z_2$ **οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος, τότε:**

**i) Δείξτε ότι** $z_1^{12} + z_2^{12} = -2^7$**.**

**ii) Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα** $[0,4]$ **και ισχύουν** $f(0) = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ **και** $f(4) = z_1^2 + z_2^2$ **δείξτε ότι υπάρχει** $\xi \in (0,4)$ **τέτοιο ώστε να ισχύει ότι** $f'(\xi) = -\frac{1}{4}$**.**

## ΘΕΜΑ 71$^{Ο}$

**Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί** $w_1 = 4 + 4i$ **και** $w_2 = 1 + i$**.**
**Α. Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(z) για τα οποία ισχύει:**

$|z - w_1| = 2|z - w_2|$, **είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα** $\rho = \sqrt{8}$**.**

**Β. Αν** $z_1, z_2, z_3, z_4$ **είναι μιγαδικοί αριθμοί με τις εικόνες τους στον παραπάνω κύκλο, να βρείτε το μέτρο:** $\left|\frac{z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}\right|$**.**

**Γ. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς α και β ισχύουν:** $|\alpha - w_1| = 1$ **και** $|\beta| = \sqrt{8}$**, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του** $|\alpha - \beta|$**.**

## ΘΕΜΑ 72$^{Ο}$

**Θεωρούμε τη συνάρτηση F : R→R με** $F(x) = \int_0^x \frac{2\alpha}{e^t + \alpha} dt$**, με α>0.**

**Δείξτε ότι:**

**Α. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο R. Ποια είναι η ρίζα της?**

**Β.** $\frac{2a}{e^2+a}<\int_0^2 \frac{2a}{e^t+a}dt-\int_0^1 \frac{2a}{e^t+a}dt<\frac{2a}{e+a}$.

**Γ. Αν για το μιγαδικό αριθμό $z=F(x)+xi$ ισχύει $|z+1|\le|\bar{z}-i|$, τότε α=1.**

## ΘΕΜΑ 73$^{Ο}$

**Έστω συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0,1]$, για την οποία ισχύει ότι $\int_0^1 f(x)dx=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει α∈(0,1) τέτοιο ώστε $\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2a}$.**

## ΘΕΜΑ 74$^{Ο}$

**Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση F στο διάστημα $[0,1]$ με $F''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αν ισχύει 0<F(0)<F(1), να αποδείξετε ότι:**

**Α. Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $F^2(x_0)=F(0)F(1)$.**

**Β. Η F στο $[0,1]$ έχει μέγιστο το $F(1)$.**

**Γ. Ισχύει $\int_0^1 F(x)dx\le\frac{F(0)+F(1)}{2}$.**

## ΘΕΜΑ 75$^{Ο}$

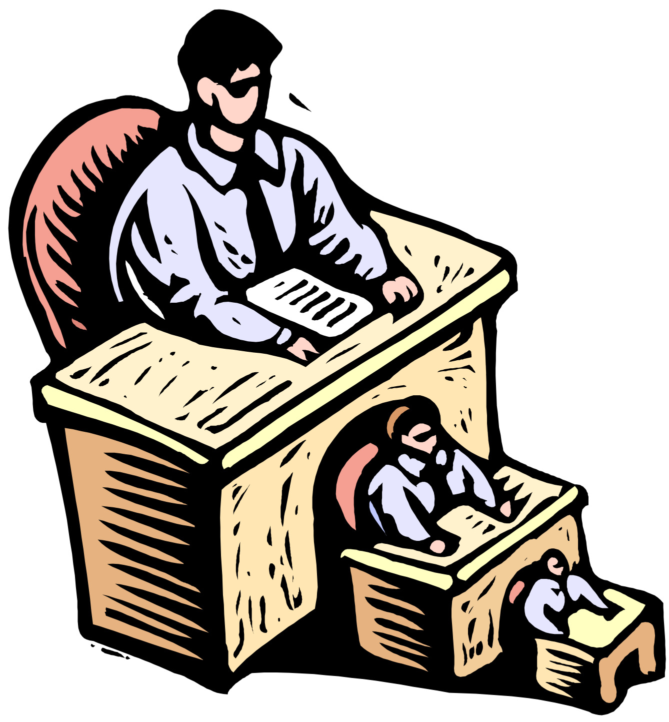
**Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση F με $F''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω η συνάρτηση g με τύπο**

$g(x)=\int_{5-x}^{1+x} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$.

**Να αποδείξετε ότι:**

**Α. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ,για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και ισχύει $g'(2+x)=g'(2-x)$.**

**Β. Η εξίσωση $f(1+x)+f(5-x)=\frac{1}{x}\int_{1+x}^{5-x} f(t)dt$, έχει λύση στο διάστημα (0,2).**



**Γ. Η γραφική παράσταση της g έχει ένα και μόνο σημείο καμπής το οποίο να βρείτε.**

**ΘΕΜΑ 76$^{O}$**

**Δίνεται η συνάρτηση F ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ και για την οποία ισχύει ότι $F'(x)\le 4$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Αν δίνεται ότι $F(\beta)=\beta^2+4$ και $F(\alpha)=6\alpha-\alpha^2-1$, τότε να αποδείξετε ότι:**

**Α. είναι α=1 και β=2.**

**Β.** $F(x)=4x$ **για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$**.**

**ΘΕΜΑ 77$^{O}$**

**Έστω συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο α.**

**Α. Να αποδείξετε ότι** $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha^2F(x)-x^2F(\alpha)}{x-\alpha}=\alpha^2F'(\alpha)-2\alpha F(\alpha)$**.**

**Β. Αν η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο α, να βρείτε το όριο:**

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{G(\alpha)F(x)-G(x)F(\alpha)}{x-\alpha}.$$

**ΘΕΜΑ 78$^{O}$**

**Α. Αν F(x) είναι πολυώνυμο βαθμού ν>1 να αποδείξετε ότι:**

$$F(x)=(x-\rho)^2\pi(x)\Leftrightarrow F(\rho)=F'(\rho)=0.$$

**Β. Να αποδείξετε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου:**

$$F(x)=\nu x^{\nu+1}-x^{\nu-1}-(\nu^2+1)x+\nu^2-\nu+2,\nu\in\mathbb{N},\nu\ge 2.$$

**Γ. Να βρείτε τα α,β ∈R για τα οποία το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του:**

$$F(x)=\alpha x^{2\nu}+\beta x^{\nu-1}+4,\nu\in\mathbb{N},\nu\ge 2.$$

**ΘΕΜΑ 79$^{O}$**

**Αν για τις συναρτήσεις F,G ισχύουν F(0)=0, G(0)=1 και $F'(x)=G(x)$ και $G'(x)=-F(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:**

**Α.** $(F(x))^2+(G(x))^2=1$**.**

**Β.** $F(x)=\eta\mu x$ **και** $G(x)=\sigma\upsilon\nu x$**.**

## ΘΕΜΑ 80$^{\text{O}}$

**Α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση F με** $F(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ **ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**Β. Να αποδείξετε ότι για κάθε** $x\in(0,+\infty)$ **ισχύει** $x^{x}\geq e^{x-1}$**.**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**