ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ 3

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να αποδειχθεί ότι ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται με το 3 αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τον ακέραιο αριθμό $\mathrm{A} = \alpha_\nu \alpha_{\nu-1} \alpha_{\nu-2} .... \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0$ **με ν+1 ψηφία όπου** $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, ... \alpha_1, \alpha_0 \in$ **Ζ.**

Έστω τώρα ότι το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3, δηλ. ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + ... + \alpha_1 + \alpha_0 = 3\kappa, \quad \textbf{όπου } \kappa \in Z \quad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τώρα το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \textbf{(2)}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ **με το** $x-1$ **είναι:**

$$P(x) = (x-1)\pi(x) + P(1) \quad \textbf{(3)}$$

Για $x = 10$ **έχουμε:**

$$\left.\begin{aligned} &P(10) = (10-1)\pi(10) + P(1) \\ &P(10) = 9m + P(1), \quad \pi(10) = m \in Z \\ &P(10) = 3 \cdot 3m + P(1) \\ &P10) = 3\lambda + P(1), \quad 3m = \lambda \in Z \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4)}$$

Επίσης η (2) για $x = 1$ **μας δίνει:**

$$P(1) = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + ... + \alpha_1 + \alpha_0 = 3\kappa, \quad \textbf{(5) όπου } \kappa \in Z \textbf{ λόγω της (1).}$$

Από (4), (5) $\Rightarrow P(10) = 3\lambda + 3\kappa = 3(\lambda + \kappa) = 3\rho, \ \ \rho \in Z$**.**

Όμως η (2) για $x = 10$ **μας δίνει:**

$P(10) = \alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + ... + \alpha_1 10 + \alpha_o$**, δηλαδή το** $P(10)$ **είναι ο αριθμός Α σε ανεπτυγμένη μορφή με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10.**

Άρα Α=3ρ $\rho \in Z$**, δηλαδή ο Α διαιρείται με το 3.**

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ

Αν ο αριθμός διαιρείται με το 3 τότε θα ισχύει ότι $P(10)$**=3ρ,** $\rho \in Z$**.**

Δηλαδή θα ισχύει ότι $3\rho = 3\lambda + (\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + ... \alpha_1 + \alpha_0)$

Οπότε $\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + ... + \alpha_1 + \alpha_0$ **= 3ρ – 3λ**

= 3(ρ – λ)

=3κ, κ$\in Z$**.**

Δηλαδή το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού Α διαιρείται με το 3.