ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων

Ονοματεπώνυμο___________________

Τεστ Β' τετραμήνου στις ανισώσεις-εξισώσεις β'Βαθμού

Ημερομηνία: 20/2/2019

Τάξη: Α' τμήμα 2 **Α' Ομάδα**

Θέμα 1ο

a. Συμπληρώστε Σ ή Λ ή επιλέξτε το σωστό: **(μονάδες 20)**

i. Οι αριθμοί 2 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Απάντηση

Λάθος γιατί πχ $2^2 - 6 \cdot 2 + 5 \neq 0$

β'τρόπος : από τους τύπους του Vieta θα έπρεπε $2+3 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1}$ που δεν ισχύει και $2 \cdot 3 = \frac{\gamma}{\alpha} = 5$ που επίσης δεν ισχύει.

ii. Η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 1 = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες.

Απάντηση

Σωστό γιατί από τους τύπους του Vieta για το γινόμενο ριζών πρέπει να ισχύει ότι $\rho_1\rho_2 = -1$ το οποίο ισχύει για την περίπτωσή μας (εφόσον έχει ρίζες φυσικά) γιατί $\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{1} = -1$

b. Να δώσετε (με τους τύπους του Vieta) τις λύσεις στις εξισώσεις: **(μονάδες 20)**

i. $x^2 + 3x - 4 = 0$
ii. $x^2 - 3x - 10 = 0$
iii. $x^2 - 19x + 88 = 0$

Απάντηση

$S = -\frac{\beta}{\alpha}, P = \frac{\gamma}{\alpha}$ άρα για τις 3 περιπτώσεις που εξετάζουμε:

i. S=-3, P=-4 οπότε πρέπει να βρούμε αριθμούς που να έχουν άθροισμα -3 και γινόμενο -4. Αυτοί οι αριθμοί είναι οι 1 και -4. Άρα $\rho_1 = 1, \rho_2 = -4$
ii. S=3, P=-10 οπότε πρέπει να βρούμε αριθμούς που να έχουν άθροισμα 3 και γινόμενο -10. Αυτοί οι αριθμοί είναι οι -2 και 5. Άρα $\rho_1 = -2, \rho_2 = 5$
iii. S=19, P=88 οπότε πρέπει να βρούμε αριθμούς που να έχουν άθροισμα 19 και γινόμενο 88. Ξεκινάμε από το γινόμενο που έχει πιο εύκολο ανάπτυγμα σε γινόμενο παραγόντων,(δηλαδή $88 = 11 \cdot 8$ ή $88 = -11 \cdot (-8)$ ή $88 = 1 \cdot 88$ ή $88 = -1 \cdot (-88)$ Από αυτούς, άθροισμα 19 έχουν οι 8 και 11. Άρα $\rho_1 = 8, \rho_2 = 11$

Θέμα 2ο **(μονάδες 30)**

i. Να δειχθεί ότι: $\alpha^2 - 2\alpha + \lambda > 0$ όπου λ>1 για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Ας δούμε πρώτα τη διακρίνουσα: $\Delta = (-2)^2 - 4\lambda = 4 - 4\lambda$

για όλα τα λ>1 ισχύει Δ<0 (γιατί $4(1-\lambda)<0$ οπότε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου είναι ομόσημο του α=1 άρα θετικό.

ii. Να δειχθεί ότι: $-x^2-3x-4<0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot(-1)(-4)=9-16=-7<0$ άρα το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου είναι ομόσημο πάντα του α=-1. Άρα το τριώνυμο είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρεθούν τα διαστήματα που ισχύει η ανίσωση ότι $x^2-x-1>0$, $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Είναι $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1(-1)=1+4=5>0$ άρα το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου είναι ομόσημο του α=+1 δηλαδή θετικό για τις τιμές εκτός των ριζών ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Για τις τιμές εντός των παραπάνω ριζών είναι αρνητικό. Δείτε και τον παρακάτω πίνακα

$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	∞
+	-	+	

<u>Θέμα 3ο</u> (μονάδες 30)

i. Να λύσετε την εξίσωση

$$5x^2+7x+2=0$$

Απάντηση

Είναι $\Delta=(7)^2-4\cdot 5\cdot 2=49-40=9>0$ οπότε έχει δύο λύσεις τις:

$$\rho_1=\frac{-7+\sqrt{9}}{2\cdot 5}=-\frac{2}{5}, \rho_2=\frac{-7-\sqrt{9}}{2\cdot 5}=-1$$

ii. Να λύσετε την εξίσωση

$$(\lambda+1)x^2+(\lambda+3)x+2=0$$

Απάντηση

- Αν $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ η εξίσωση ανάγεται σε πρωτοβάθμια και θα έχουμε
$$0x^2+(-1+3)x+2=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$$
- $Αν\ \lambda \neq -1$ τότε:
$\Delta=(\lambda+3)^2-4\cdot(\lambda+1)\cdot 2=\lambda^2+6\lambda+9-8\lambda-8=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2 \geq 0$ οπότε:
    - Αν λ=1 η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\lambda+3}{2(\lambda+1)}=-\frac{1+3}{2(1+1)}=-1$
    - Αν $\lambda \neq 1$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις:
    $$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(\lambda+3)+|\lambda-1|}{2(\lambda+1)}, x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(\lambda+3)-|\lambda-1|}{2(\lambda+1)},$$
    οπότε παίρνουμε δύο περιπτώσεις τις:

$$x_1=\frac{-(\lambda+3)+\lambda-1}{2(\lambda+1)}=-\frac{4}{2\lambda+2}, x_2=\frac{-(\lambda+3)-(\lambda-1)}{2(\lambda+1)}=-1$$